UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LUANA GONÇALVES LIMA

MATRIZES E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB
2011

LUANA GONÇALVES LIMA

MATRIZES E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título.

Orientadora: Profª. Ms. KÁTIA SUZANA MEDEIROS GRACIANO

CAMPINA GRANDE – PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

L628m Lima, Luana Gonçalves.

Matrizes e algumas de suas aplicações [manuscrito] / Luana Gonçalves Lima. – 2011.

37 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática e Estatística".

1. Matemática - Aplicações. 2. Matrizes. 3. Operações e Propriedades. I. Título.

21. ed. CDD 516

LUANA GONÇALVES LIMA

MATRIZES E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título.

Aprovada em 05/12 / 2011

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Msc. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Orientadora

Prof. Msc. José Lamartine da Costa Barbosa
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Examinador

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB
Examinadora

DEDICATÓRIA

A minha mãe, Maria de Lourdes, que sempre será a grande responsável por minhas conquistas, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força, proteção e pela ajuda em superar os obstáculos com os quais me deparei ao longo da caminhada.

À minha mãe, Maria de Lourdes, pelas palavras de apoio, incentivo e companheirismo ao longo de todos os anos.

Ao meu irmão Arthur, por sua ajuda, carinho e compreensão e a minha tia Inácia a quem devo o inicio da minha jornada escolar.

À minha avó, Joana Pedro da Silva (*in memoriam)*, pelos ensinamentos que foram decisivos na minha formação.

À professora Kátia, pela ajuda, disponibilidade e empenho para que esse trabalho fosse concluído.

E aos amigos Rodolfo, Ana Nery e Hélio, com os quais dividi muitas tardes de estudo.

Por fim, a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para que eu pudesse concluir essa graduação.

“O talento de Cayley se caracterizou pela clareza e extrema elegância da forma analítica; reforçando por uma capacidade incomparável de trabalho...” Charles Hermit

RESUMO

O ensino das matrizes muitas vezes é realizado desprovido de aplicações e contextualização. Esses fatores podem dificultar a aprendizagem deste conteúdo, uma vez que o alunado não consegue perceber a utilização das matrizes no seu cotidiano. Neste trabalho mostraremos uma síntese da história das matrizes e aplicações, apresentando a sua evolução desde a sua origem até a sua definição atual. Reportar-nos-emos, a definição de matriz, representação, tipos, operações e propriedades além de abordar algumas aplicações na resolução de situações-problema do nosso cotidiano, como no comércio, na saúde e nos esportes. Tem-se por objetivo, mostrar tanto de forma algébrica como de forma prática, a aplicabilidade das matrizes. A fundamentação teórica está nos autores: Steinbruch (1987), Boldrini (1980), Boyer (1996) e Catanas (2006). Com isso, espera-se despertar a satisfação em estudar as matrizes juntamente com sua história, para isso, evidenciaremos o verdadeiro significado de tal conhecimento tanto na matemática como em aplicações no cotidiano.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes. Operações. Propriedades. Aplicações.

A B S T R A C T

The education of the matrices many times is carried through unprovided of applications and contextualization. These factors can make it difficult the learning of this content, a time that the student does not obtain to perceive the use of the matrices in its daily one. In this work we will show to a synthesis of the history of the matrices and applications, presenting its evolution since the origin until the current definition. We will refer ourselves, the definition of matrix, representation, types, operations and properties beyond approaching some applications in the resolution of situation-problem of our daily one, as in the commerce, the health and the sports. This is the objective, to show in such a way of algebraic form as of practical form, the applicability of the matrices. The theoretical recital is in the authors: Steinbruch (1987), Boldrini (1980), Boyer (1996) and Catanas (2006). With this, one expects to awake the satisfaction in together studying the matrices with its history, for this, we will in such a way evidence true the meaning of such knowledge in the mathematics as in applications in the daily one.

KEYWORDS: Matrices. Operations. Properties. Applications.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das matrizes não deve ser um fim em si mesmo, mas sim está intimamente relacionado ao domínio de suas aplicações e que esses dois aspectos podem caminhar juntos, através de uma análise pautada na história do surgimento das matrizes e na sua aplicabilidade. Este conceito é formado por situações-problema. O que motivou esta pesquisa: a compreensão do surgimento das matrizes, o processo de desenvolvimento das propriedades, operações e suas aplicações, podendo utilizar sua aplicabilidade na saúde, no comércio e nos esportes, por exemplo.

Este trabalho está dividido em 3 capítulos: O primeiro estuda o surgimento das matrizes e o inicio de sua teoria. Aqui demos enfoque ao inglês Arthur Cayley, que é considerado "O Pai das Matrizes". Para Cayley o surgimento das matrizes está intrinsecamente ligado às transformações lineares e na resolução de sistemas de equações lineares. O segundo capítulo aborda a definição de matriz explicitando seus tipos, representação, propriedades e operações, constando suas respectivas demonstrações.

O último capítulo retrata a aplicabilidade das matrizes nos setores já apresentados.

A proposta central do trabalho é a integração da teoria na prática.

CAPÍTULO I

1. O SURGIMENTO DAS MATRIZES

1.1 A REFERÊNCIA MAIS ANTIGA ÁS MATRIZES

A referência mais antiga a matrizes data de aproximadamente do ano 2.500 a.C., no livro chinês Chui-Chang Suan-Shu (Nove capítulos sobre a arte matemática). Este livro apresenta problemas sobre mensuração de terras, agricultura, impostos, equações, etc. Um destes problemas é resolvido com cálculos efetuados sobre uma tabela, tais como efetuamos hoje com as matrizes.

1.2 POR QUE O NOME MATRIZ?

O nome **matriz** só veio com James Joseph Sylvester, em 1850. Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "... um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes...". Neste pequeno trecho publicado na época, podemos perceber que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes.

1.3 O INÍCIO DA TEORIA DAS MATRIZES

O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley, de 1855, embora o termo matriz já tenha sido usado por Sylvester cinco anos antes. Neste artigo Arthur Cayley salienta, que embora logicamente a noção de matriz procedesse a de determinante, historicamente ocorrera ao contrário, pois em virtude de descobertas históricas posteriores, alguns séculos antes de Cristo, onde as matrizes eram utilizadas de forma implícita na resolução de sistemas de equações lineares.

Podemos citar vários matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da teoria das matrizes, a exemplo de James Joseph Sylvester (1814-1897), Benjamin Peirce(1809-1880), Charles S. Peirce(1839-1914), no entanto daremos destaque ao "Pai" das matrizes, o inglês Arthur Cayley.

Cayley foi um dos primeiros matemáticos a estudar matrizes, definindo a idéia de operarmos as matrizes como na álgebra. Descobriu a álgebra das matrizes em 1857. Para Cayley, as matizes surgiram a partir da ligação com a teoria das transformações.

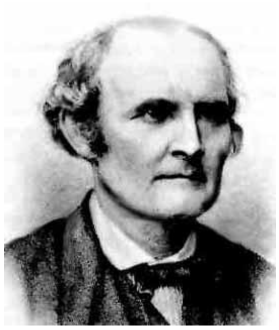
Cayley introduziu as matrizes para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \text{escrevia} \quad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$$

A observação do efeito de duas transformações sucessivas surgiu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz identidade). Em um outro artigo, anos depois, Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao longo deste trabalho, faremos uma abordagem em relação às propriedades, operações e também em relação aos tipos de matrizes conhecidas e estudadas até hoje, mostrando algumas de suas variadas aplicações.

BIOGRAFIA DE ARTHUR CAYLEY



Matemático e astrônomo de origem inglesa, nasceu em Richmond, Surrey, a 16 de agosto de 1821. Filho de um comerciante inglês que trabalhava em St. Petersburg, onde passou parte de sua infância na Rússia, até que a família retornou definitivamente para a Inglaterra, em 1829. Estudou em várias escolas, onde se diplomou, em 1842, no Trinity College, de Cambridge. Aos vinte e cinco anos já havia escrito quinze trabalhos, o último dos quais encerra boa parte das idéias sobre que viria a debruçar-se em sua longa trajetória matemática.

Naquela época, os matemáticos despertaram pouco interesse com respeito às suas publicações, apesar de sua importância no mundo científico. Sem emprego em Cambridge, Cayley decidiu estudar Direito, disciplina a que se dedicou por quatorze anos, conseguindo certa fama e lucros, o que lhe permitiu dedicar-se, posteriormente, à matemática. Não obstante, escreveu, durante o período em que advogava, nada menos de 250 ou 300 monografias, tratando de questões matemáticas.

Pela quantidade de trabalhos produzidos, Cayley só encontra rivais em Euler e Cauchy, sendo os três mais prolíferos no campo da matemática. Seus trabalhos de maior importância concentram-se na teoria dos invariantes e na geometria dos hiperespaços.

Em 1841, a invariância foi a primeira a ser examinada, transformando-se em conceito de especial destaque. A origem do estudo dos invariantes está numa descoberta de Lagrange, cujo resultado foi generalizado por Boole, em 1841, reconhecendo, Cayley, de imediato o significado da descoberta, passando a estudar de modo sistemático as formas algébricas e seus invariantes, relativamente a transformações lineares homogêneas.

Em 1854, Cayley é o primeiro a formular e definir de modo rigoroso a definição de grupo, construindo o sistema de postulados que ainda hoje caracterizam a noção. Em vista de não despertar muito interesse com respeito ao estudo de grupos, levando outros autores a caracterizarem a noção com ligeira variante, inclusive, usando a palavra grupo de maneira inadequada, tendo em vista o sentido técnico adotado universalmente, essa formulação foi abandonada por um período muito longo.

Em 1858, é mostrado por Cayley que os quaterniões (um dos tipos de variedades numéricas) podem ser representados por meio de matrizes em que a, b, c, d são números complexos, sugerindo que o trabalho de Hamilton , na pior das hipóteses, teria influenciado Cayley e inspirado em suas pesquisas. Porém ele afirmou em seu depoimento, as matrizes são desenvolvidas não em torno dos quaterniões, mas a partir da noção de determinante, ou seja, a partir do exame de sistemas de equações: o sistema $x' = ax + b$ e $y' = cx + d$, está associado à matriz supracitada.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

No domínio da análise, devem ser salientados seus estudos sobre as funções elípticas e abelianas, bem como suas pesquisas originais acerca das funções representadas por integrais definidas. Seus trabalhos de mecânica celeste versam sobre temas também originais, como a teoria das perturbações e o método de determinação das órbitas planetárias.

Finalmente, em 1863, Cayley consegue ser nomeado professor em Cambridge, onde se destacou não apenas como administrador, mas, também, como pesquisador.

No período de 1889 a 1898, Cayley publicou mais de novecentas memórias, abrangendo todos os ramos da matemática pura. Suas obras completas foram publicadas em Cambridge, em 13 volumes, com o título " The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley ", (Coletânea dos escritos matemáticos de Arthur Cayley)

Cayley faleceu em Cambridge no dia 26 de janeiro de 1895, três anos antes da publicação total de suas obras.

CAPÍTULO II

2. MATRIZES

2.1 DEFINIÇÃO DE MATRIZ

Vejamos a tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de 3 pessoas, podemos dispô-los da seguinte maneira na tabela abaixo:

Tabela 1 - Dados pessoais

Nome	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
PAULO	1,70	70	23
ANDRÉ	1,75	60	45
JOÃO	1,60	52	25

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, temos a representação disposta da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \end{bmatrix}$$

È importante observarmos que em um problema em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de *matriz* torna-se absolutamente indispensável.

Definição: Chama-se de matriz de ordem *m* por *n* a um quadro de *m x n* elementos (números, polinômios, funções, etc.) dispostos em *m* linhas e *n* colunas como segue abaixo:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

2.2 REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ

A matriz A pode ser representada abreviadamente por A= $[a_{ij}]$, i variando de 1 a m, i=(1, 2, 3,4, ...,m) e j variando de 1 a n, j=(1, 2, 3, 4, ...,n).

Para que possamos entender melhor porque a matriz A pode ser representada por, $[a_{ij}]$, devemos primeiramente fixar para i, por exemplo, o valor 1e a seguir façamos j variar sucessivamente de 1 a n, como segue:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \ldots \quad a_{1n}$$

Agora fixemos para i o valor 2, e façamos j variar de 1 a n, como segue:

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \ldots \quad a_{2n}$$

Em continuação, fixemos para i o valor 3 e façamos j variar de 1 a n, como segue:

$$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad \ldots \quad a_{3n}$$

Repetindo o procedimento sucessivamente até que i atinja o valor m, teremos:

$$a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3} \quad \ldots \quad a_{mn}$$

Portanto temos a representação de uma matriz de m linhas e n colunas como segue a matriz abaixo:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

2.3 TIPOS DE MATRIZ

Estudando as matrizes, podemos observar que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda , pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem frequentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais.

2.3.1 Matriz Quadrada

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, tem-se uma matriz quadrada, ou seja, (m=n).

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -9 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matriz-coluna

A matriz de ordem n por 1 é uma matriz-coluna, ou seja, n=1.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplos: $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\qquad C = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.3.3 Matriz-linha

A matriz de ordem 1 por n é uma matriz – linha, ou seja, m=1.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad C = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

2.3.4 Matriz nula

A matriz em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j é uma matriz nula.

$$A= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Matriz diagonal.

A matriz quadrada (m=n) onde a_{ij} = 0, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos, é denominada matriz diagonal.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Segue exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2.3.6 Matriz identidade quadrada.

A matriz quadrada (m=n) onde a_{ij} =1 e a_{ij} =0 para $i \neq j$ é denominada matriz identidade quadrada.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Segue exemplos:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.7 Matriz triangular superior

A matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, m=n e a_{ij} = 0, para $i > j$, é denominada matriz triangular superior.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Segue exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.8 Matriz triangular inferior

A matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m=n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$, é denominada matriz triangular inferior.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Segue exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3.9 Matriz simétrica

A matriz onde $m=n$ e $a_{ij} = a_{ji}$, é denominada matriz simétrica. Segue exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 7 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.10 Matriz oposta

A matriz onde A = -A, isto é $a_{ij} = -a_{ij}$, é denominada matriz oposta.

Segue exemplos:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ então } (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 OPERAÇÕES E PROPRIEDADES DAS MATRIZES

Nessa seção trataremos acerca das operações e propriedades das quais as matrizes são munidas: a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes por um escalar e multiplicação de uma matriz por outra matriz.

2.4.1 Adição de matrizes

Definição: A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{mxn} = [a_{ij}]$ e $B_{mxn} = [b_{ij}]$, é uma matriz *mxn*, que denotaremos A + B, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$$

Demonstração: Como A e B $\in M_{mxn}$,A + B $\in M_{mxn}$, adicionalmente:

$$(A + B)_{ij} = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]$$

Como a_{ij} e $b_{ij} \in M_{mxn,}$ e M_{mxn} é fechado em relação à adição, isto é, $\in M_{mxn}$, então $[a_{ij} + b_{ij}] \in M_{mxn}$.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, qual a matriz C tal que C = A + B?

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \text{ logo } C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2.4.1.2 Propriedades da adição de matrizes

A seguir, mostraremos as propriedades que são válidas para a aritmética matricial. Elas são muito semelhantes àquelas que são válidas para os números reais.

Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem *mxn*, temos as seguintes propriedades da operação da adição de matrizes:

i) A + (B + C) = (A + B) + C

Demonstração: Como A, B e C $\in M_{m\times n}$ então A + (B + C) e (A + B) + C estão definidas, logo:

$$[A + (B + C)]_{ij} = a_{ij} + (B + C)_{ij}$$

$= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$

$= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$

(porque a adição é associativa em R

$= (A + B)_{ij} + c_{ij} = [(A + B) + C]_{ij}$;

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e

C = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$, verifique que A + (B + C) = (A + B) + C.

Somando B + C, temos: $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 3 & 11 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Realizando a soma da matriz A com a matriz resultante da soma A + B, temos:

A + (B + C) = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 3 & 11 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -13 \\ -1 & 9 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

Somando A + B, temos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Realizando a soma da matriz C com a matriz resultante da soma A + B, temos:

(A + B) + C = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -13 \\ -1 & 9 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

Logo: A + (B + C) = (A + B) + C.

ii) A + B = B + A

Demonstração: Como A e B $\in$ $M_{m\times n}$ então (A + B) e (B + A) estão definidas, logo:

$(A + B)_{ij} = ([a_{ij}]+[b_{ij}])$

$= a_{ij} + b_{ij}$

$= b_{ij} + a_{ij}$

(porque a adição é comutativa em R)

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= (B + A)_{ij}$

Exemplo: Dadas as matrizes A=$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ e B =$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, verifique se A+B=B +A.

Somando A + B, temos: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Somando B + A, temos: $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Logo: A + B = B + A.

iii) A + 0 =A, onde O é denota a matriz nula de M_{mxn}.,

Demonstração: Seja A $\in$ $M_{m\times n}$ e B = $0_{m\times n}$ $\in$ $M_{m\times n}$. Então:

$(A + B)_{ij}$ =($[a_{ij}]$+$[b_{ij}]$)

= $[a_{ij}]$ + [**0**]

(porque **0** é o elemento neutro da adição em R)

= $[a_{ij}]$

= $(A)_{ij}$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, verifique se A + 0 = A

Somando A + 0, temos: $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo: A + 0 = A

iv) A + (-A) = 0

Demonstração: Seja A = $[a_{ij}] \in M_{m\times n}$ e B = $[b_{ij}] \in M_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = -a_{ij}$, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Então:

$(A + B)_{ij}$= ($[a_{ij}]$+$[b_{ij}]$)

= $[a_{ij} + b_{ij}]$

= $[a_{ij}, + (-a_{ij})]$

(porque $\forall\ a \in \Re$, $\exists\, b \in \Re : a + b = 0$ e a = -b)

= $[0]$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, verifique se A + (-A) = 0

Devemos encontrar a matriz oposta de A, que é:

-A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Somando A + (-A), temos: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Logo: A + (-A) = 0

2.4.2 Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição: Seja A = $[a_{ij}] \in M_{m\times n}$ e $\lambda \in \Re$ um escalar. Define-se o produto de λ por A e denota-se por λ·A (ou λA) à matriz B = $[b_{ij}] \in M_{m\times n}$,tal que $a_{ij} = \lambda b_{ij}$, $\forall\,(i,j)\in\{1,...,m\}\times\{1,...,n\}$.

2.4.2.1 Propriedades da multiplicação de um escalar por matriz

Dadas as matrizes A, B $\in M_{m\times n}$ e $\lambda \in \Re$ um escalar, temos as seguintes propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz.

i) λ (A + B) = λA + λB

Demonstração:

$(\lambda\,(A + B))_{ij} = \lambda\,[(a_{ij} + b_{ij})]$

$= [\lambda\,(a_{ij} + b_{ij})]$

$= [\lambda\, a_{ij} + \lambda\, b_{ij}]$

$= [\lambda\, a_{ij}] + [\lambda\, b_{ij}]$

$= \lambda\,[a_{ij}] + \lambda\,[b_{ij}]$

$= (\lambda A)_{ij} + (\lambda B)_{ij}$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ λ = -2, calcule λ (A + B).

$$(A + B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\,(A + B) = (-2)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\,(A + B) = (-2)\begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)(-3) \\ (-2)(-2) & (-2)4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\,(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

ii) $(\lambda + \mu)(A)_{ij} = \lambda.A + \mu.A$

$=[(\lambda + \mu)\, a_{ij}]$

$=[\lambda a_{ij} + \mu\, a_{ij}]$

$$=[\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}]$$

$$=\lambda [a_{ij}] + \mu [a_{ij}]$$

$$= (\lambda A)_{ij} + (\mu A)_{ij}$$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, λ = -2 e μ =1, calcule $(\lambda + \mu)$A.

$$(\lambda + \mu)A = (-2 + 1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)A = (-1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)A = \begin{bmatrix} (-1)1 & (-1)(-2) \\ (-1)4 & (-1)(-3) \end{bmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

iii) $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$

Demonstração:

$$(\lambda (\mu A))_{ij} = \lambda (\mu [a_{ij}])$$

$$= \lambda [\mu a_{ij}]$$

$$= [(\lambda\mu) a_{ij}]$$

$$= (\lambda\mu)[a_{ij}]$$

$$= ((\lambda\mu)A)_{ij}$$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, λ = -2 e μ =-2, calcule $(\lambda \mu)$A.

$$(\lambda \mu)A=[(-2).(-2)] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mu)A =(-4) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda \mu)A = \begin{bmatrix} (-4)(-1) & (-4)2 & (-4)3 \\ (-4)5 & (-4)(-2) & (-4)(-4) \\ (-4)1 & (-4)0 & (-4)3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda\mu)A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -12 \\ -20 & 8 & 16 \\ -4 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

iv) 1.A = A

Demonstração:

$1.A = [a_{ij}]$

$1.A = [1.a_{ij}]$

$1.A = (A)_{ij}$

Exemplo: Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$,mostre que 1 . A = A

1 . A = A

$$\begin{bmatrix} 1.(-1) & 1.2 \\ 1.(-3) & 1.4 \end{bmatrix} = A \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

2.4.3 Multiplicação de matrizes

Definição: Sejam A = $[a_{ij}]_{mxn}$ e B = $[b_{rs}]_{nxp}$, definimos AB = $[c_{uv}]_{mxp}$

onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \cdots + a_{un} b_{nv}$$

Observações:

1) Só podemos efetuar a multiplicação entre duas matrizes A $_{mxn}$ e B_{lxp} se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz –resultado C = AB será de ordem *mxp*.

2) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2(-1)+1.4 \\ 4.1+2.0 & 4(-1)+2.4 \\ 5.1+3.0 & 5(-1)+3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda.

2.4.3.1 Propriedades da multiplicação de uma matriz por outra matriz

Dadas as matrizes A = $[a_{ij}]_{mxp}$, B = $[b_{ij}]_{mxp}$, C = $[c_{jk}]_{pxq}$, D = $[d_{jk}]_{pxq}$ e E = $[e_{lk}]_{qxn}$ e $\lambda \in \Re$, temos as seguintes propriedades da multiplicação de uma matriz por outra.

i) (A + B) C = AC +BC (distributividade a direita)

Observemos que A = $[a_{ij}]_{mxp}$, e B = $[b_{ij}]_{mxp}$ tem a mesma ordem, ou seja, *mxn* e C = $[c_{jk}]_{pxq}$, de ordem *pxq*, pelo que (A + B) C e AC + BC tem ordem *mxq*.

$$((A + B)C)_{ik} = \sum_{j=1}^{p} (A+B)_{ij} c_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_{jk} + b_{ij}c_{jk}$$

$$= (AC)_{ik} + (BC)_{ik}$$

ii) A(C+ D)= AC + AD (Distributividade a esquerda)

Demonstração: Observemos que A = $[a_{ij}]_{mxp}$, C = $[c_{ij}]_{pxq}$ e D = $[d_{jk}]_{pxq}$, pelo que A (C + D) e AC + AD tem ordem *mxq*.

$$(A (C + D))_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (C+D)_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (c_{jk} + d_{jk})$$

$$= a_{ij}c_{jk} + a_{ij}d_{jk}$$

$$= (AC)_{ik} + (AD)_{ik}$$

iii) (AC) E = A (CE) Associatividade

Demonstração: Observemos que (AC) E e A (CE) são de mesma ordem, ou seja, *mxn*.

$$(AC)E)_{il} = \sum_{k=1}^{q} (AC)_{ik} e_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} c_{jk} \right) e_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum^{p} a_{ij} c_{jk} e_{kl}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{q} c_{jk} e_{kl} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \, (CE)_{jl}$$

$$= (A(CE)_{il}$$

iv) $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$

Demonstração:

$$\lambda(AD)_{ik} = \lambda \sum_{j=1}^{p} a_{ij} d_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (\lambda a_{ij}) d_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (\lambda A)_{ij} d_{jk}$$

$$= ((\lambda A)D)_{ik}$$

Mas também,

$$\lambda \sum_{j=1}^{p} a_{ij} d_{jk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (\lambda d_{jk})$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} (\lambda D)_{jk}$$

$$= (A(\lambda D))_{ik}$$

v) Em geral $AB \neq BA$, ou seja, a comutatividade em relação ao produto de matrizes não se aplica a todos os casos, como segue contra-exemplo a seguir.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, logo $AB \neq BA$

Note ainda que $AB = 0$, sem que $A = 0$ ou $B = 0$, logo dadas duas matrizes A e B, se o produto delas for a matriz nula, não é necessário que A ou B sejam matrizes nulas.

CAPÍTULO III

3. ALGUMAS APLICAÇÕES DAS MATRIZES

Neste capítulo abordaremos algumas aplicações das matrizes. Observe a situação a seguir.

3.1 Matrizes e consumo.

Um empresário oferece mensalmente alimentos a dois orfanatos. Para o 1º são doados 25 kg de arroz, 20 kg de feijão, 30 kg carne e 32 kg de batata. Para o 2º orfanato são doados 28 kg de arroz, 24 kg de feijão, 35 kg de carne e 38 kg de batata.

O empresário fez a cotação de preços em dois supermercados. Veja a cotação atual, em reais.

Tabela 2 - Cotação

Produto	Supermercado A	Supermercado B
Arroz	2,00	2,00
Feijão	3,00	2,40
Carne	12,00	14,00
Batata	1,60	1,20

Determine o gasto mensal desse empresário, por orfanato, supondo que todos os produtos sejam adquiridos no mesmo supermercado e que este represente a melhor opção de compra.

Com a matriz A vamos representar a compra dos produtos para os dois orfanatos:

$$A = \begin{bmatrix} 2,00 & 2,00 \\ 3,00 & 2,40 \\ 12,00 & 14,00 \\ 1,60 & 1,20 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o gasto mensal do empresário nas quatro situações possíveis:

Com o 1º orfanato:

Supermercado A $\Rightarrow$ 25 . 2,00 + 20 . 3,00 + 30 . 12,00 + 32 . 1,60 = 521,20

Supermercado B $\Rightarrow$ 25 . 2,00 + 20 . 2,40 + 30 . 14,00 + 32 . 1,20 = 556,40

Com o 2º orfanato:

Supermercado A $\Rightarrow$ 28 . 2,00 + 24 . 3,00 + 35 . 12,00 + 38 . 1,60 = 521,20

Supermercado B $\Rightarrow$ 28 . 2,00 + 24 . 2,40 + 35 . 14,00 + 38 . 1,20 = 556,40

Esses valores podem ser representados na matriz $C = \begin{bmatrix} 521{,}20 & 556{,}40 \\ 608{,}80 & 649{,}20 \end{bmatrix}$

Portanto a melhor opção é comprar no supermercado A.

Na situação exposta inicialmente, fizemos a utilização da multiplicação entre matrizes na resolução da questão. Na forma matricial, temos:

$A = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{bmatrix}$, que representa a quantidade de alimentos comprados, sendo que a 1ª linha corresponde à quantidade de alimentos do 1º orfanato e a 2ª linha corresponde à quantidade de alimentos do 2º orfanato.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 2{,}00 & 2{,}00 \\ 3{,}00 & 2{,}40 \\ 12{,}00 & 14{,}00 \\ 1{,}60 & 1{,}20 \end{bmatrix}$ representa os preços praticados em cada supermercado, sendo que a 1ª coluna corresponde aos preços praticados no supermercado A e a 2ª coluna corresponde aos preços praticados no supermercado B.

Realizando a multiplicação AB, temos:

$$\begin{bmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 28 & 24 & 35 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}00 & 2{,}00 \\ 3{,}00 & 2{,}40 \\ 12{,}00 & 14{,}00 \\ 1{,}60 & 1{,}20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25.2{,}00 + 20.3{,}00 + 30.12{,}00 + 32.1{,}60 & 25.2{,}00 + 20.2{,}40 + 30.14{,}00 + 32.1{,}20 \\ 28.2{,}00 + 24.3{,}00 + 35.12{,}00 + 38.1{,}60 & 28.2{,}00 + 24.2{,}40 + 35.14{,}00 + 38.1{,}20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 521{,}20 & 556{,}40 \\ 608{,}80 & 649{,}20 \end{bmatrix}$$

3.2 Matrizes e saúde.

Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D=\begin{bmatrix}200\\300\\600\end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix}0{,}006 & 0{,}003 & 0{,}108\\0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018\\0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631\end{bmatrix}$$

Escrever a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão desses alimentos.

Para determinar a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, por exemplo, devemos multiplicar a quantidade de proteína fornecida por cada alimento pela quantidade diária mínima dos alimentos e depois somar os valores, ou seja:

$$\underbrace{0{,}006.200}_{frutas}+\underbrace{0{,}033.300}_{leite}+\underbrace{0{,}108.600}_{cereais}$$

O mesmo ocorre com as gorduras e carboidratos.

Esses valores são obtidos a partir do produto entre as matrizes M e D.

Assim, a matriz que mostra a quantidade mínima (em gramas) de proteínas e carboidratos é dada pela multiplicação :

$$\begin{bmatrix}0{,}006 & 0{,}003 & 0{,}108\\0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018\\0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\300\\600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}006.200+0{,}033.300+0{,}108.600\\0{,}001.200+0{,}035.300+0{,}018.600\\0{,}084.200+0{,}052.300+0{,}631.600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75{,}90\\21{,}50\\411{,}00\end{bmatrix}$$

Assim, as quantidades são: 75,9 g de proteínas, 21,5 g de gorduras e 411 g de carboidratos.

3.3 Matrizes e esporte.

Durante a primeira fase da copa do mundo de futebol de 1998 o grupo A era formado por 4 países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (número de vitória, empates e derrotas) de cada um dos, registramos em uma tabela.

Tabela 3 - Grupo A

	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

De acordo com a tabela acima, temos a seguinte matriz A de ordem *4x3*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento da copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Veja esse fato registrado em uma tabela.

Tabela 4 - Número de pontos

Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

De acordo com a tabela acima, temos a seguinte matriz B de ordem 3*x1*.

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terminada a 1ª fase, a classificação foi obtida com o total de pontos feitos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por A.B (produto de A por B). Veja como é obtida a classificação:

$$\begin{aligned} &Brasil \quad 2.3+0.1+1.0=6 \\ &Escócia \quad 0.3+1.1+2.0=1 \\ &Marro\text{cos} \ 1.3+1.1+2.0=4 \\ &Noruega \ 1.3+2.1+0.0=5 \end{aligned}$$

Realizando a multiplicação AB, temos:

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3+0.1+1.0 \\ 0.3+1.1+2.0 \\ 1.3+1.1+2.0 \\ 1.3+2.1+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Logo o Brasil conquistou 6 pontos, a Escócia 1 ponto, o Marrocos 4 pontos e a Noruega 5 pontos.

3.4 Matrizes e comércio.

Sejam as tabelas 5, 6 e 7 de uma livraria.

Tabela 5 - Quantidade de livros

	Edição luxo	Edição bolso
Livro A	76	240
Livro B	50	180

Tabela 6 - Preço em (R$)

	Regular	Oferta
Edição luxo	8	6
Edição Bolso	2	1

Tabela 7 - Valor arrecadado em (R$)

	Regular	Oferta
Livro A	720,00	440,00
Livro B	560,00	340,00

Supondo que todos os livros A foram vendidos ao preço regular e todos os livros B foram vendidos ao preço de oferta, calcule a quantia arrecadada pela livraria na venda de todos esses livros. Ainda utilizando as tabelas 6 e 7, calcule a quantidade de livros vendida para a referida arrecadação.

Para a primeira questão, vamos calcular a matriz quantidade x preço, como segue abaixo:

$$\begin{bmatrix} 76 & 240 \\ 50 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1088 & 696 \\ 760 & 480 \end{bmatrix}$$

Então, como todos os livros A foram vendidos ao preço regular de R$ 8,00 e R$ 2,00 temos um montante de R$ 1088,00 e como todos os livros B foram vendidos ao preço de oferta de R$6,00 e R$ 1,00, temos um montante de R$ 480,00, logo o valor arrecadado foi de R$ 1.568,00.

Para a segunda questão temos o seguinte modelo para a referida arrecadação:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 & 440 \\ 560 & 340 \end{bmatrix}$$

Realizando as operações pertinentes, temos:

$$\begin{cases} 8a+2b=720 & (i) \\ 6a+b=440 & (ii) \\ 8c+2d=560 & (iii) \\ 6c+d=340 & (iv) \end{cases}$$

Resolvendo-se (i) e (ii), temos:

$$\begin{cases} 8a+2b=720 \\ -12a-2b=-880 \end{cases} \oplus$$

$$-4a=-160 \Rightarrow a=40$$

Substituindo $a=40$ em (ii), temos:

$$6.40+b=440 \Rightarrow b=440-240 \Rightarrow b=200$$

Por outro lado, resolvendo-se (iii) e (iv), temos:

$$\begin{cases} 8c+2d=560 \\ -12c-2d=-680 \end{cases} \oplus$$

$$-4c=-120 \Rightarrow c=30$$

Substituindo $c=30$ em (iv), temos:

$$6.30+d=340 \Rightarrow d=340-180 \Rightarrow d=160$$

Então neste caso foram vendidos:

40 livros A (Regular) – Edição Luxo

200 livros A (Oferta) – Edição Bolso

30 livros B (Regular) – Edição Luxo

160 livros B (Oferta) – Edição Bolso

3.5 Matrizes e endocrinologia.

Para que você conheça o gasto calórico aproximado de algumas atividades, uma endocrinologista montou a tabela abaixo. Esta tabela é baseada numa pessoa de 60kg de peso corporal em atividades físicas, num tempo de 1 hora.

Tabela 8 - Exercícios x perda de peso

Peso	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12km/h	Hidroginástica
60 kg	252 calorias	552 calorias	890 calorias	300 calorias

Suponhamos um acompanhamento de uma pessoa com este peso por meio de um programa com estes exercícios ao longo de uma semana.

Tabela 9 - Controle semanal de perda de calorias

Dia	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12km/h	Hidroginástica
2ª feira	1	0	0	1
3ª feira	0	0	1	0
4ª feira	0,5	0,5	0	0
5ª feira	0	0	0,5	0,5
6ª feira	0,5	1	0	0

Com as informações da Tabela 7 e Tabela 8, podemos montar uma matriz *4x1* e outra *5x4* respectivamente e depois realizarmos a multiplicação entre as matrizes, como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 252 \\ 552 \\ 890 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.252 + 0.552 + 0.890 + 1.300 \\ 0.252 + 0.552 + 1.890 + 0.300 \\ 0{,}5.252 + 0{,}5.552 + 0.890 + 0.300 \\ 0.252 + 0.552 + 0{,}5.890 + 0{,}5.300 \\ 0{,}5.252 + 1.552 + 0.890 + 0.300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 552 \\ 290 \\ 1016 \\ 895 \\ 678 \end{bmatrix}$$

A pessoa a que nos referimos nesta situação, com este programa de exercícios, queimará 552 calorias na segunda-feira, 890 calorias na terça-feira, 1016 calorias na quarta-feira, 895 calorias na quinta feira e 678 calorias na sexta-feira.

CONCLUSÃO

Através da análise histórica, pode-se concluir que as matrizes foram utilizadas na resolução de sistemas de equações lineares e estão diretamente ligadas a teoria das transformações lineares.

Vale lembrar que durante o século XIX, houve uma ampliação de seu conceito no desenvolvimento teórico matemático.

Esta pesquisa permitiu concluir que a história das matrizes e sua evolução se tornam relevante no sentido de que possibilita ao pesquisador compreender o seu surgimento e como podemos utilizar sua aplicabilidade em muitos contextos do nosso cotidiano.

Tem-se claro que através da abordagem apresentada pelos livros, e mesmo por este trabalho, que as matrizes figuram de maneira importante para a matemática e para a sua utilização na resolução de situações-problema do nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, José Luiz. COSTA, Sueli Rodrigues. **Álgebra linear,** 3 ed. HARBRA. São Paulo, 1980.

BOYER, C. **História da matemática**. 2 ed. Trad. Elza Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

CATANAS, Fernando. **Álgebra linear**. Disponível em <HTTP://ginasiomental/material/algebra/sebenta.pdf>

DOMINGUES, Hygino H. **Cayley e a Teoria das Matrizes**. Disponível em <http://obaricentrodamente.blogspot.com/2010/11/cayley-e-teoria-das-matrizes.html>

RIZZATO, Fernanda Buhrer, RINALDI Bárbara Leister. **Arthur Cayley**. Disponível em <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/cayley.html>

Matrizes em nosso dia a dia. Disponível em <http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/Matriz.htm>

STEIMBRUCH, Alfredo. Winterle, Paulo. **Álgebra linear**, 2ed. Afiliada. São Paulo, 1987.