UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IRINEU BARBOSA DA SILVA NETO

APLICAÇÃO DE "MÁXIMOS E MÍNIMOS" NA OBTENÇÃO DO VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Campina Grande/PB

Dezembro/2011

IRINEU BARBOSA DA SILVA NETO

APLICAÇÃO DE "MÁXIMOS E MÍNIMOS" NA OBTENÇÃO DO VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.
Em cumprimento às exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande, dezembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S381a Silva Neto, Irineu Barbosa da.

Aplicação de "máximos e mínimos" na obtenção do volume de sólidos geométricos [manuscrito] / Irineu Barbosa da Silva Neto. – 2011.

37 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática e Estatística".

1. Matemática - Aplicações. 2. Função. 3. Máximos e Mínimos. I. Título.

21. ed. CDD 516

IRINEU BARBOSA DA SILVA NETO

APLICAÇÃO DE "MÁXIMOS E MÍNIMOS" NA OBTENÇÃO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Aprovada em 29 / 11 / 2011

BANCA EXAMINADORA

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Onildo dos Reis Freire

Prof. Ms. Onildo dos Reis Freire
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, novembro de 2011

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, Irinaldo Barbosa da Silva, a minha mãe, Regina Cely Teodosio Barbosa e a minha noiva, Gezy Kristina de Souza Nascimento, Dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus toda honra, toda glória e todo o louvor.

Aos meus pais Irinaldo Barbosa da Silva e Regina Cely Teodosio Barbosa pelo incentivo e ajuda na conquista desse sonho.

A minha futura esposa Gezy Kristina de Souza Nascimento que sempre esteve ao meu lado.

Aos meus irmãos Fagner Lucas Teodosio Barbosa, Iris Regina Teodosio Barbosa, Fabiana Teodosio Barbosa e Jessica Nayara Teodosio Barbosa que sempre torceram por mim.

A todos os meus professores, em especial a meu orientador Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva, por tudo que me ensinaram.

Aos meus colegas de turma José Railton Dantas, Diego Dias Félix, Gilvânia Ramos Borges, Rossane, Carlos Pinheiro, Kleber Whashinton, Michely Niara e Izabele Muniz, que me ajudaram a enfrentar as dificuldades nessa jornada.

Enfim, quero agradecer a todos que me ajudaram de alguma forma na realização dessa conquista.

RESUMO

No desenvolver deste trabalho apresentaremos relatos sobre a Histórica da Matemática, em que destacamos alguns matemáticos, bem como algumas das descobertas matemáticas realizadas por eles.

Faremos um aprofundamento teórico sobre derivadas, onde destacaremos o conceito de reta tangente e definições. Relataremos sobre Máximos e Mínimos de Funções, onde daremos um maior destaque, pois este conceito será essencial para a resolução dos exercícios no item das aplicações.

Traremos no item das aplicações algumas questões resolvidas, em que utilizamos os conhecimentos de Derivadas, Máximos e Mínimos de Funções, além de conhecimento da Matemática Elementar, para a determinação de volumes de sólidos geométricos.

Palavras Chaves: História; Personagens; Derivadas; Funções; Máximos; Mínimos.

SUMÁRIO

1.0 INTRODUÇÃO **8**

2.0 HISTÓRIA DA MATEMATICA **9**

2.1 A Matemática primitiva 9
2.2 A Matemática Babilônica 9
2.3 Geometria Babilônica 10
2.4 A Matemática Egípcia 10
2.5 Geometria Egípcia 10
2.6 A Matemática Pitagórica 11
2.7 A Matemática Grega 12
2.8 A Matemática na Europa 13
2.9 A Geometria Analítica e o seu desenvolvimento pré-cálculo 14
2.10 O Cálculo 15
2.11 O método dos Indivisíveis 16

3.0 DERIVADA **18**

3.1 Derivada de uma função em um ponto 18
3.2 Interpretação geométrica da derivada 18
3.3 Derivada de uma função 19
3.4 Derivadas sucessivas 19

4.0 MÁXIMOS E MÍNIMOS **20**

4.1 Máximos e Mínimos relativos 21
4.2 Ponto crítico 21
4.3 Testes da derivada 21
4.4 Máximos e Mínimos absolutos 22

5.0 APLICAÇÕES **23**

6.0 CONCLUSÃO **36**

7.0 BIBLIOGRAFIA **37**

1.0 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial surgiu por volta do século XVII, desde então vem sendo aplicado em muitos ramos da ciência tais como a física, astronomia, entre outros. Nesse trabalho veremos algumas aplicações da derivada na maximização e minimização de volumes.

Começaremos com a história da Matemática, desde a matemática primitiva até a invenção do Cálculo Diferencial por Isaac Newton. Em seguida estudaremos o conceito da derivada, sua interpretação geométrica e como a mesma nos ajuda a localizar os valores de máximos e mínimos das funções. Finalizaremos então com algumas aplicações da derivada no cálculo de volumes.

2.0 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

2.1 A Matemática primitiva

A idade da pedra durou milhares de anos, começando já em cerca de 5.000.000 a.C. e indo até por volta de 3.000 a.C. Em um mundo cheio de pastagem, savanas e animais, as pessoas eram em geral caçadores e colhedores, com isso, não tinham tempo para poderem desenvolver tradições científicas. Após 3.000 a.C., começam a surgir comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades começam a desenvolver a matemática nas suas culturas.

A matemática primitiva se desenvolveu de acordo com as necessidades práticas da sociedade. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação, as terras ao longo dos grandes rios da África e da Ásia se transformaram em regiões agricultáveis ricas. Com isso as localidades anteriormente separadas se ligaram e desenvolveram a engenharia, o financiamento e administração desses projetos, o que requeria o desenvolvimento de considerável tecnologia e consequentemente da matemática.

Podemos dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do oriente antigo *a priori* como uma ciência prática para desenvolver atividades ligadas à agricultura e a engenharia.

2.2 A Matemática Babilônica

Desde antes da metade do século XIX vem sendo encontrado na mesopotâmia pelos arqueólogos tábulas de árgila. Cerca de meio milhão dessas tábulas já foram desenterradas, das quais quase 400 foram identificadas como escritas matemáticas. O conhecimento da matemática babilônica antiga é conhecido através do trabalho de decifrar e interpretar muitas dessas tábulas matemáticas.

Essas tábulas mostram um alto grau de habilidade computacional e não deixam dúvidas que o sistema de numeração sexagesimal posicional já era utilizado. Processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas: tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, tábuas de quadrados e cubos e tábuas de exponenciais.

2.3 Geometria Babilônica

Os babilônicos do período de 2.000 a.C. a 1.600 a.C conheciam as regras gerais da área de um retângulo, da área de um triângulo retângulo e de um triângulo isósceles, da área de um trapézio, do volume de um paralelepípedo reto e do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Os babilônicos também já sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles e que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto e ainda conheciam o teorema de Pitágoras.

Uma das principais marcas da geometria babilônica é caráter algébrico. Muitos problemas se referem a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que resultam em equações quadráticas; outros que levam a sistemas de equações simultâneas.

Foram os babilônicos antigos que dividiram a circunferência em 360 partes iguais.

2.4 A Matemática Egípcia

O papiro de Rhind é uma fonte rica sobre a Matemática Egípcia antiga. Nele estão contidos os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios; o uso que faziam das frações, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da Matemática à problemas práticos.

O sistema de numeração egípcio tinha o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim, a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de dois.

Há alguns problemas teóricos, no papiro de Rhind, a respeito de progressões aritméticas e geométricas.

2.5 Geometria Egípcia

Muitos dos problemas geométricos encontrados nos papiros egípcios decorrem de fórmulas de numeração necessárias para o cálculo de áreas de terra e volumes de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro e que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura.

Algumas investigações recentes mostram que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semi-produto da base pela altura.

É notável no papiro de moscou a existência de um exemplo correto da fórmula do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

2.6 A Matemática Pitagórica

A história dos 300 primeiros anos da Matemática grega foi tomada pela grandeza dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C. Conseqüentemente quase não se dispõe de fontes primárias para lançar luz sobre a primitiva Matemática grega.

A principal fonte de informações a respeito dos primeiros passos matemáticos grego é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo.

Um dos matemáticos ilustres a ser mencionado no Sumário Eudemiano é Pitágoras. Pitágoras nasceu por volta de 572 a. C na ilha Egéia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era cinqüenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales.

A Filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava ao estudo das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes básicas do programa de estudos pitagóricos.

Os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números, foram dados por Pitágoras e seus seguidores, conhecidos como pitagóricos. Eles acreditavam que se entendessem as relações entre os números poderiam descobrir os segredos espirituais do universo, tornando-se, assim, próximos dos deuses. Entre a infinidade de números, os pitagóricos buscavam alguns com significado especial, e entre os mais importantes estavam os chamados números perfeitos.

De acordo com Pitágoras a perfeição numérica depende do número de divisores. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, e 6. Quando a soma dos divisores de um número é maior do que ele, o número é chamado de excessivo. Portanto, 12 é um número excessivo porque a soma de seus divisores é 16. Por outro lado, quando a soma dos divisores é menor do que o número, ele é chamado deficiente. É o caso de 10, porque seus divisores (1, 2 e 5) somam 8.

Os números mais importantes e raros eram aqueles cujos divisores somados produziam eles mesmos, e estes eram chamados perfeitos. O números 6 tem como divisores os números 1, 2 e 3, e portanto é um número perfeito porque seus divisores somam 6.

A tradição atribui a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome. Embora esse teorema já ser conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, sua demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente para os pitagóricos. Primeiro porque contradizia a filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Alem disso, parecia contrário o senso comum, pois havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por um numero racional.

2.7 A Matemática Grega

Os primeiros séculos da matemática grega constituem um período de realizações extraordinárias. Alem da escola Jônica fundada por Tales de Mileto e da escola pitagórica de Crotona, outros centros de matemática surgiram em lugares e períodos de prevalência da historia política grega.

Durante os primeiros 300 anos da matemática grega é notório três importantes e distintas linhas de desenvolvimento. Primeiro temos o desenvolvimento do material que acabou se organizando nos *Elementos,* iniciado pelos pitagóricos e acrescido depois por Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e outros.

Em segundo lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinito e processos de somatórios que só foram esclarecidos de vez com a invenção do cálculo nos tempos modernos.

A terceira linha de desenvolvimento é a geometria superior, que se originou nas tentativas seguidas de resolver os seguintes problemas:

- Duplicação do cubo: construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;
- Trissecção do ângulo: dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
- Quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual á de um círculo dado.

A busca de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas, quárticas e várias curvas transcendentes.

2.8 A Matemática na Europa

No início do século XIII despontou na Europa a figura de Leonardo Fibonacci, o matemático mais talentoso da idade média.

Leonardo conhecia os procedimentos matemáticos orientais e árabes e convencidos da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo publicou sua obra famosa intitulada *Lider abaci.* O trabalho se ocupa de aritmética e álgebra elementares. Os quinzes capítulos da obra explicam a leitura e a escrita dos novos numerais, métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas.

O século XIV foi relativamente estéril, no sentido de realizações matemáticas. O maior matemático desse período foi Nicole Oresme. Ele escreveu cinco trabalhos matemáticos, num deles encontra-se o primeiro uso conhecido de expoentes fracionários; noutro, ele faz a localização de pontos por coordenadas, antecipando assim a geometria analítica. Num manuscrito não publicado ele obteve a soma da série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+...$$

o que fez dele um dos precursores da análise infinitesimal.

O século XV testemunhou o início do Renascimento na arte e no saber. As realizações matemáticas nesse século centraram-se grandemente nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa central e girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria.

O matemático mais influente do século foi Johann Muller. Seu trabalho *De triangulis Omnimodis,* escrito por volta de 1464 é a mais importante de suas obras. Trata-se da primeira exposição européia sistemática de trigonometria plana e esférica.

Outro matemático brilhante do século XV foi o francês Nicolas Chuquet. Em 1484 ele escreveu uma aritmética intitulada *Triparty em la science des nombres* que só foi impressa no século XIX. A primeira parte desse trabalho se ocupa com cálculo de números racionais, a segunda com números irracionais e a terceira aborda a teoria das equações. Chuquet admitia expoente inteiros, positivos e negativos, e parte de sua álgebra é sincopada.

No século XVI a descoberta de soluções algébrica das equações cúbicas e quárticas foi o feito mais extraordinário da época.

2.9 A geometria analítica e o seu desenvolvimento pré-cálculo

Há divergências de opinião sobre quem inventou a geometria analítica e sobre a época do surgimento da mesma. Os gregos antigos dedicaram-se á álgebra geométrica, os egípcios e os romanos usavam a idéia de coordenadas na agrimensura e os gregos na confecção de mapas. No século XIV Nicole Oresme antecipou aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente com a independente. Os que atribuem a Oresme a invenção da geometria analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta.

A essência real da geometria analítica esta na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Assim, a maioria dos historiadores consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem do assunto. Com a contribuição dada por esses franceses à geometria analítica, é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que trabalhamos nos dias atuais.

Foi na Holanda que Descartes produziu seus escritos, entre os quais esta um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher a la vérite dans lês sciences* (Discurso do método para o bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências). Acompanhavam esse tratado três apêndices: *La dioptrique, Lês méteores e La géometrie.*

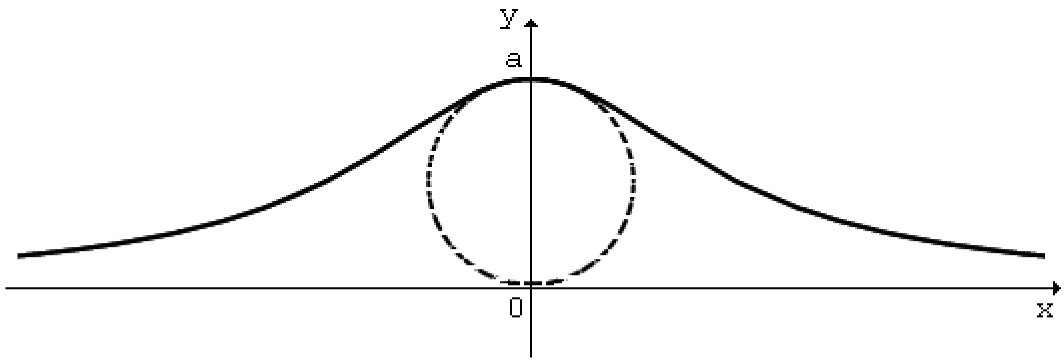
La géometrie ocupa cerca de cem páginas do trabalho e esta dividida em três partes. A primeira parte contém uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço real em relação aos gregos. A segunda parte de *La géometrie* traz uma classificação de curvas agora superadas e um método interessante de construir tangentes às curvas. A terceira parte de *La géometrie* trata da resolução de equações de grau maior do que dois. Faz-se uso do que chamamos agora de regra de sinais de Descartes, cuja finalidade é determinar o número de raízes positivas e o números de raízes negativas de um polinômio. O uso do princípio de identidade de polinômios também começou com Descartes.

Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também chamava a atenção de Pierre de Fermat. Em 1636 Fermat escreveu uma carta ao francês Roberval, na qual afirma que suas descobertas sobre a geometria analítica já tinham então sete anos.

Os detalhes a respeito apareceram no artigo *Isogoge ad lócus planos et sólidos*, publicado posteriormente. Nele encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discursão sobre hipérboles, elipses e parábolas. Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, Fermat definiu muitas curvas novas analiticamente. Se deve a Fermat a curva posteriormente chamada feiticeira de Agnesi, que tem como equação

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Veja a figura abaixo.



Em grande escala, onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava uma equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente.

2.10 O cálculo

A realização matemática mais notável do século XVII foi à invenção do cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhehn Leibniz. É interessante que o desenvolvimento do cálculo seguiu a ordem contrária á daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só depois veio o cálculo diferencial.

Os primeiros problemas de cálculo da história diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos.

Uma das contribuições importantes mais antigas ao problema da quadratura do círculo foi dada por Antífon, um contemporâneo de Sócrates. Antífon antecipou a idéia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia. E como se pode construir um quadrado de área igual a de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual a do círculo. A abordagem se Antífon continha o famoso método de exaustão grego.

O método de exaustão comumente é creditado a Eudoxo. O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrair-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer predeterminada da mesma espécie.

Uma vez conhecida uma fórmula, o método de exaustão pode se constituir num elegante instrumento para prová-la, mas o método, por si só, não se presta para descoberta inicial do resultado. Sendo assim, pode-se fazer a seguinte pergunta: Como Arquimedes descobria as fórmulas que demonstrava pelo método de exaustão?

Vejamos qual a idéia do método de Arquimedes: Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos. Sua consciência matemática, porém, não se satisfazia com esse procedimento, daí porque recorria ao método de exaustão para fornecer uma demonstração mais rigorosa.

2.11 O método dos Indivisíveis de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da universidade de Bolonha em 1629 até 1647, ano de sua morte. A obra que mais o projetou, sua grande contribuição matemática, foi o tratado *Geometria indivisibilibus*. Nesse trabalho ele apresenta seu método dos indivisíveis.

O tratado de Cavalieri é pouco claro, sendo difícil de descobrir o que ele entendia por indivisível. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido.

Os chamados princípios de Cavalieri são os seguintes:

1. “Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as

áreas dessas porções é a mesma constante."

2. "Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante." [Eves, 2004]

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes. O uso consistente do segundo princípio de Cavalieri pode simplificar grandemente a dedução de muitas fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria sólida.

3.0 DERIVADA

Veremos nesse capítulo as noções básicas de derivadas e sua interpretação geométrica, como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função.

3.1 Derivada de uma função em um ponto

Definição: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. A derivada da função f no ponto x_0 pertencente a I, denotada por $f'(x_0)$, é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

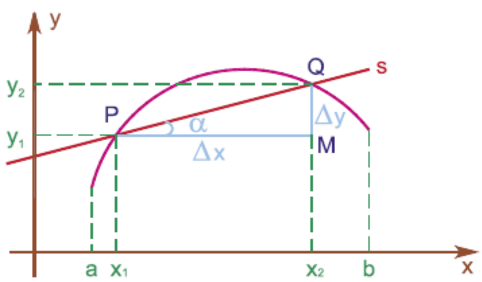
desde que o limite exista. Se $f'(x_0)$ existi, dizemos f é derivável no ponto x_0.

Fazendo $x = x_0 + \Delta x$ podemos reescrever o limite na forma

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3.2 Interpretação geométrica da derivada

Considere y = f (x) como sendo uma curva definida em um intervalo (a,b). Sejam P(x_1,y_1) e Q(x_2,y_2) dois pontos distintos da curva y = f (x) e s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Observando o triângulo PMQ na figura, temos que a inclinação da reta s(ou coeficiente angular de s) é :



$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Assim, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q se aproxima de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante .

Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente á curva no ponto P ou também derivada da curva no ponto P.

3.3 Derivada de uma função

Definição: A derivada de uma função y = f (x) é uma função denotada por f'(x), tal que seu valor em qualquer x pertencente ao domínio de f é dado por:

$$f'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(\mathrm{x})}{\Delta \mathrm{x}}$$

, se este limite existir.

Dizemos que uma função é derivável ou diferenciável quando existe a derivada para todos os pontos de seu domínio.

3.4 Derivadas sucessivas

Definição: Seja f uma função derivável. Se f' também for uma função derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por f''.

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada f''', é chamada derivada terceira $f(x)$.

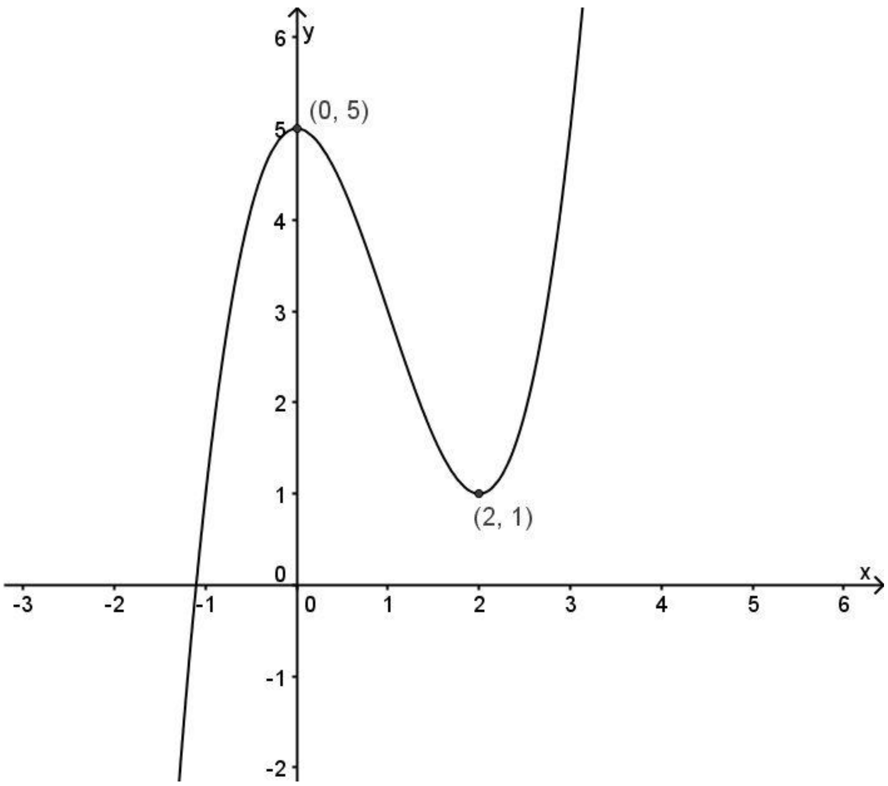
A derivada de ordem n de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f.

4.0 MÁXIMOS E MÍNIMOS

De um modo geral, uma função não apresenta regularidade de variação. Considere, por exemplo, a função polinomial

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

Observando o esboço do gráfico de f (figura abaixo) veremos que a função cresce até alcançar o ponto (0,5), que neste gráfico está mais alto que todos seus pontos imediatamente vizinhos, para em seguida decrescer até alcançar o ponto (2,1), que é um ponto abaixo que todos seus pontos imediatamente vizinhos.



O ponto (0,5) é denominado ponto de máximo relativo do gráfico de f, enquanto o ponto (2,1) é denominado ponto de mínimo relativo do gráfico de f.

A seguir daremos uma definição formal de máximo relativo e mínimo relativo do gráfico de uma função f.

4.1 Máximos e Mínimos Relativos

Definição -

Uma função f possui um máximo relativo em um ponto “c” se existe um intervalo aberto “I” contendo “c” tal que f seja definida em “I” e $f(c) \geq f(x)$ seja verdadeira para todo x em “I”.

Definição -

Uma função f possui um mínimo relativo em um ponto “c” se existe um intervalo aberto “I” contendo “c” tal que f seja definida em “I” e $f(c) \leq f(x)$ seja verdadeira para todo x em “I”.

Os máximos e mínimos relativos recebem, em conjunto, o nome de extremos da função, enquanto os valores de x, a eles correspondentes, são chamados extremados.

4.2 Ponto crítico

Definição -

Diz-se que um ponto “c” é um ponto crítico para uma função f quando f é definida em “c” mas não é diferenciável em c, ou $f'(c) = 0$.

4.3 Testes das derivadas

Teorema 1- Primeiro teorema da derivada para valores de extremos locais

Se uma função $f(x)$ é derivável em um intervalo $a < x < b$ e nele admitem máximos e mínimos, sua derivada de primeira ordem é nula para os valores de x que ocasionam máximos ou mínimos.

Os valores de x que correspondem a pontos críticos de uma função são extremais, isto é, podem correspondem a máximos ou a mínimos. A distinção é fácil, tendo em vista o seguinte teorema.

Teorema 2- Teste da segunda derivada

Seja f uma função diferenciável no intervalo aberto “I”, e suponha que “c” seja um ponto em “I” tal que $f'(c) = 0$ e $f''(c)$ exista.

(i) Se $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo relativo em “c”.

(ii) Se $f''(c) < 0$, então f possui um máximo relativo em “c”.

4.4 Máximos e Mínimos Absolutos

Definição-

Suponha que uma função f seja definida em um intervalo “I” e seja “c” um ponto do intervalo “I”. Se $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) vale para todo x em “I”, então dizemos que, no intervalo “I”, a função atinge seu valor máximo absoluto (respectivamente, seu valor mínimo absoluto) $f(c)$ no ponto “c”.

A definição máximo absoluto se refere ao maior dos máximos e, analogamente, com a definição mínimo absoluto designaremos o menor dos mínimos.

Teorema 3-

Se uma função f é definida e contínua no intervalo fechado [a,b], então f atinge um valor máximo absoluto em algum ponto de [a,b] e f atinge um valor mínimo absoluto em algum ponto em [a,b].

5.0 APLICAÇÕES

Os métodos que abordamos para encontrarmos valores de máximos e mínimos de funções possuem aplicações em muitas situações do dia a dia. Problemas tais como maximinizar ou minimizar áreas, volumes, lucros, distâncias, tempo e custos.

Começaremos com uma aplicação de área, porém nesse trabalho daremos prioridade a problemas envolvendo maximização e minimização de volumes.

- Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Encontrar as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

Sejam r e h o raio e altura do cilindro respectivamente (ambos em centímetros).

Temos que a área total do cilindro é dada por:

$$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Como sabemos que a capacidade da lata é de 1 litro, o que é equivalente a 1000 cm³, pode descobrir a altura do cilindro através da expressão:

$$V = \pi r^2 h$$

$$1000 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Substituindo este valor na expressão da área temos:

$$A_t = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

Logo, a função que queremos minimizar é:

$$f(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

Temos:

$$f'(r) = \frac{-2000}{r^2} + 4\pi r$$

$$f'(r) = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

A função será nula para os valores de r que anulam o numerador:

$$4(\pi r^3 - 500) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pi r^3 - 500 = 0$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Agora calculemos $f''(r)$:

$$f''(r) = \frac{4000}{r^3} + 4\pi$$

Logo,

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \frac{4000}{\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}^3} + 4\pi$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \frac{4000}{\frac{500}{\pi}} + 4\pi$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 12\pi$$

Portanto,

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

é ponto de mínimo e as dimensões que minimizarão a lata são:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

- Entre todos os cilindros de mesma área total $2\pi a^2$, encontrar o que tem volume máximo.

Sejam r e h o raio e a altura do cilindro respectivamente. Temos que a área total do cilindro é dada por:

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

Daí

$$2\pi r(h + r) = 2\pi a^2$$

$$rh + r^2 = a^2$$

$$h = \frac{a^2 - r^2}{r}$$

Substituindo este valor na expressão do volume temos:

$$V = \pi r^2 (\frac{a^2 - r^2}{r})$$

$$V = \pi r (a^2 - r^2)$$

$$V = a^2 \pi r - \pi r^3$$

Procuremos então os valores de máximos da função

$$f(r) = a^2 \pi r - \pi r^3$$

Temos:

$$f'(r) = a^2 \pi - 3\pi r^2$$

Igualando $f'(r)$ a zero temos:

$$a^2 \pi - 3\pi r^2 = 0$$

$$a^2 - 3r^2 = 0$$

$$r = a\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agora, calculemos $f''(r)$.

$$f''(r) = -6\pi r$$

Assim,

$$f''\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\pi a\sqrt{3}$$

Logo,

$$f''\left(a\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$$

Portanto $r = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ é um ponto de máximo e o volume do cone tem expressão:

$$V = 2a^3\pi\frac{\sqrt{3}}{9}$$

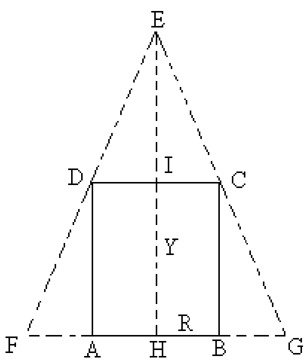
- Dado um cilindro circular reto, determinar o cone circunscrito de volume mínimo.

Consideremos h e r como sendo a altura e o raio da base do cilindro respectivamente e sejam x e y o raio e a altura do cone circunscrito.

Sabemos que, o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Observando os triângulos semelhantes EDI e EHF da figura abaixo temos:



$$\frac{y}{y-h} = \frac{x}{r}$$

$$y = \frac{hx}{x - r}$$

Substituindo este valor na expressão do volume temos:

$$V = \frac{\pi h}{3} \frac{x^3}{x - r}$$

O problema recai, então, na pesquisa dos máximos e mínimos da função

$$f(x) = \frac{x^3}{x - r}$$

Derivando $f(x)$ temos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - r) - x^3}{(x - r)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 3x^2r - x^3}{(x - r)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2r}{(x - r)^2}$$

Logo, a derivada será nula para os valores de x que anulam o numerador, isto é:

$$2x^3 - 3x^2\text{r} = 0$$

$$x^2(2x - 3r) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } \; x = \frac{3r}{2}$$

A raiz $x = 0$ não tem significado para o problema.

Calculemos agora $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{(6\,x^2 - 6xr)(\text{x} - r)^2 - (2x^3 - 3x^2r)(2x - 2r)}{(x - r)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 6xr)(x^2 - 2xr + r^2) - (4x^4 - 10x^3r + 6x^2r^2)}{(x - r)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x^4 - 8x^3r + 12x^2r^2 - 6xr^3}{(x - r)^4}$$

Por fim calculemos $f''\left(\frac{3r}{2}\right)$.

$$f''\left(\frac{3r}{2}\right) = \frac{\frac{81r^4}{8} - 9r^4}{\frac{r^4}{16}}$$

$$f''\left(\frac{3r}{2}\right) = \frac{\frac{81r^4 - 72r^4}{8}}{\frac{r^4}{16}}$$

$$f''\left(\frac{3r}{2}\right) = 18$$

Logo,

$$f''\left(\frac{3r}{2}\right) > 0$$

e f possui um mínimo em

$$x = \frac{3r}{2}$$

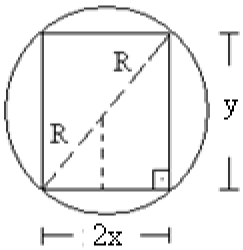
Portanto, o volume do cone mínimo, correspondente ao valor $\frac{3r}{2}$, tem para expressão do volume:

$$V = \frac{9\pi r^2 h}{4}$$

- Achar a altura do cilindro de revolução inscrito numa esfera de raio R e que tem volume máximo.

Sejam x e y o raio e altura do cilindro respectivamente.

Observando a secção seguinte meridiana temos:



$$(2R)^2 = (2x)^2 + y^2$$

$$4R^2 = 4x^2 + y^2$$

$$y^2 = 4R^2 - 4x^2$$

$$y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Sabemos que o volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

Logo,

$$V = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Assim, vamos encontrar os valores de máximos da função:

$$f(x) = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Derivando $f(x)$ temos:

$$f'(x) = 4\pi x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 2\pi x^2.\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}.(-2x)$$

$$f'(x) = 4\pi x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2\pi x^3}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{4\pi x R^2 - 6\pi x^3}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

A derivada será nula para os valores de x que anulam o numerador:

$$4\pi x R^2 - 6\pi x^3 = 0$$

$$6x^3 - 4xR^2 = 0$$

$$x = 0, x = -R\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ou } x = R\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Sendo as duas primeiras raízes sem significado para o problema.

Calculemos agora $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{(4\pi R^2 - 18\pi x^2)(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - (4\pi x R^2 - 6\pi x^3).\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}.(-2x)}{(R^2 - x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{(4\pi R^2 - 18\pi x^2)(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{4\pi x^2 R^2 - 6\pi x^4}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(R^2 - x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{4\pi R^4 - 18\pi R^2 x^2 + 12\pi x^4}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}}{R^2 - x^2}$$

$$f''(x) = \frac{4\pi R^4 - 18\pi R^2 x^2 + 12\pi x^4}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por fim calcularemos $f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

$$f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\pi R^4 - 12\pi R^4 + \frac{16}{3}\pi R^4}{(R^2 - \frac{6}{9}R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-8\pi R^4 + \frac{16}{3}\pi R^4}{(\frac{R^2}{3})^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\frac{-8\pi R^4}{3}}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{3}\right)^3}}$$

$$f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\frac{-8\pi R^4}{3}}{\frac{R^3}{\sqrt{27}}}$$

$$f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-8\pi R\sqrt{27}}{3}$$

Logo, $f''\left(R\frac{\sqrt{6}}{3}\right) < 0$ e $x = R\frac{\sqrt{6}}{3}$ é máximo.

Portanto, a altura do cilindro de revolução é dada por:

$$y = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

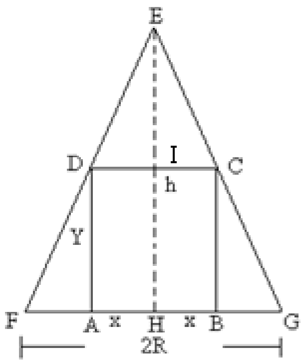
- Calcular a altura do cilindro de revolução de volume máximo, inscrito em um cone de revolução dado.

Denominemos h e R como sendo a altura e o raio do cone respectivamente e sejam x e y o raio e a altura do cilindro inscrito.

Temos:

$$V = \pi x^2 y$$

Considerando a secção meridiana representada abaixo e os triângulos semelhantes EDI e EHF temos:



$$\frac{h}{h-y} = \frac{R}{x}$$

$$y = \frac{Rh - hx}{R}$$

Substituindo este valor na expressão do volume temos:

$$V = \pi x^2 \frac{(Rh - hx)}{R}$$

$$V = \frac{\pi x^2 Rh - \pi x^3 h}{R}$$

Fazendo V = $f(x)$ temos:

$$f(x) = \frac{\pi x^2 Rh - \pi x^3 h}{R}$$

Vamos calcular $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2\pi xRh - 3\pi x^2 h)R}{R^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2\pi xRh - 3\pi x^2 h)}{R}$$

Fazendo $f'(x) = 0$ temos:

$$2\pi xRh - 3\pi x^2 h = 0$$

$$2xR - 3x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{2R}{3}$$

Calculando $f''(x)$ temos:

$$f''(x) = \frac{(2\pi Rh - 6\pi xh)R}{R^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2\pi Rh - 6\pi xh)}{R}$$

Daí

$$f''\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{2\pi Rh - 4\pi Rh}{R}$$

$$f''\left(\frac{2R}{3}\right) = -2\pi h$$

Logo,

$$f''\left(\frac{2R}{3}\right) < 0$$

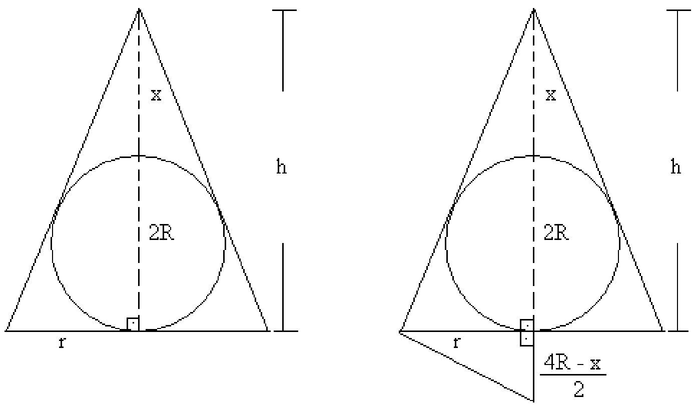
Portanto, x = $\frac{2R}{3}$ é um ponto de máximo e o cilindro de volume máximo tem altura:

$$y = \frac{Rh - h\frac{2R}{3}}{R}$$

$$y = \frac{1}{3}h$$

- Calcular a altura do cone de revolução de volume mínimo circunscrito a esfera de raio igual r.

Vejamos a secção meridiana seguinte. E condiremos r o raio da base do cone de revolução.



Pela semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{r}{\frac{4R - x}{2}} = \frac{2R + x}{r}$$

$$2r^2 = 8R^2 + 4Rx - 2Rx - x^2$$

$$r^2 = \frac{8R^2 + 2xR - x^2}{2}$$

Sabemos que o volume de um cone de revolução é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8R^2 + 2Rx - x^2}{2}\right).(2R + x)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi(-x^3 + 12R^2x + 16R^3)$$

Fazendo V= $f(x)$ temos:

$$f(x) = \frac{\pi}{6}(-x^3 + 12R^2x + 16R^3)$$

Calculemos $f'(\mathrm{x})$.

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{\pi}{6}(-3\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{R}^2)$$

Fazendo $f' = 0$ segue que:

$$\frac{\pi}{6}(-3\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{R}^2) = 0$$
$$\mathrm{x}^2 = 4\mathrm{R}^2$$
$$\mathrm{x} = -2\mathrm{R} \text{ ou } \mathrm{x} = 2\mathrm{R}$$

$\mathrm{x} = -2\mathrm{R}$ (não convém).

Agora calculemos $f''(\mathrm{x})$.

$$f''(\mathrm{x}) = -\pi\mathrm{x}$$

Observe que $f''(2\mathrm{R}) = -2\mathrm{R}\pi$, como $f''(2\mathrm{R}) < 0$, logo 2R é um ponto de mínimo, assim:

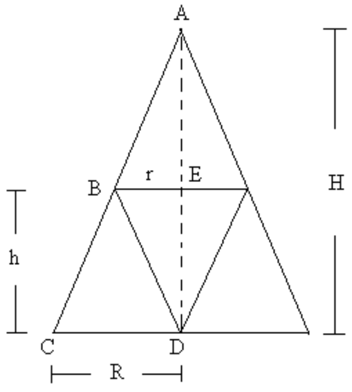
$$\mathrm{h} = \mathrm{x} + 2\mathrm{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{h} = 4\mathrm{R}.$$

- Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que o seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone inscrito tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

Sejam r o raio do cone de altura h e R o raio do cone de altura H. Logo, o volume do cone inscrito é dado por:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Considerando a seguinte secção meridiana representada abaixo e os triângulos semelhantes ACD e BDE, temos:



$$\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}$$

$$h = \frac{HR - Hr}{R}$$

Daí,

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 (\frac{HR - Hr}{R})$$

$$\mathrm{V} = \frac{\pi r^2 H}{3} - \frac{\pi r^3 H}{3R}$$

Procuraremos então os valores de máximos da função

$$f(r) = \frac{\pi r^2 H}{3} - \frac{\pi r^3 H}{3R}$$

Temos:

$$f'(r) = \frac{2\pi r H}{3} - \frac{\pi r^2 H}{R}$$

Fazendo $f'(r) = 0$ obtemos:

$$\frac{2\pi r H}{3} - \frac{\pi r^2 H}{R} = 0$$

$$\frac{2}{3} - \frac{r}{R} = 0$$

$$r = \frac{2R}{3}$$

Calculemos $f''(r)$.

$$f''(r) = \frac{2}{3}\pi H - \frac{2\pi r H}{R}$$

Logo,

$$f''\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi H - \frac{2\pi\left(\frac{2R}{3}\right)H}{R}$$

$$f''\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{2\pi H}{3} - \frac{4\pi H}{3} = \frac{-2\pi H}{3}$$

Portanto $\frac{2R}{3}$ é ponto de máximo e o cone interno tem seu volume máximo quando

$$h = \frac{HR - H\frac{2R}{3}}{R} = \frac{\frac{HR}{3}}{R}$$

$$h = \frac{1}{3}R$$

6.0 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do trabalho que ora concluímos, possibilitou, além dos conhecimentos adquiridos, conviver com um ambiente diferente dos, na maioria das vezes, vivenciados em salas de aulas na atualidade. Em particular, as aulas de Cálculo são conduzidas pela grande maioria dos professores, com raríssimas exceções, de forma extremamente tradicional, restringindo-se as definições, algumas demonstrações e resolução de exercícios. Importante destacar que, não estamos desmerecendo nem criticando os procedimentos profissionais dos professores que assim se procedem metodologicamente, não só no ensino do Cálculo, bem como de qualquer outra disciplina. Todos são bons professores, cada um da sua forma. Estamos apenas constatando a prática de um modelo de ensino que precisa ser refletido por quem ensina e por quem é ensinado.

Acreditamos que uma abordagem histórica, através de fatos, personagens e datas que marcaram a evolução de determinado tema, é sempre bem vinda ao ambiente de ensino. Selecionar, mostrar e desenvolver em determinados momentos, exemplos que tornam evidentes a aplicação de uma definição, um teorema, ou mesmo uma técnica de derivação ou integração, pode se transformar num momento mágico para quem ensina e para quem aprende.

É essa, a nossa discreta contribuição por intermédio de algumas Aplicações de “Máximos e Mínimos” na obtenção de volume de sólidos geométricos.

7.0 BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B; Trad. Elza F. Gomide. História da Matemática. Editora Edgar Blucher LTDA. São Paulo, 1996.

EVES Haward; Trad. Hyginio H Domingues. Introdução á História da Matemática. Editora da UNICAMP. Campinas, SP. 2004.

FLEMMING, Diva Marília., Gonçalves, Mirian Buss, Cálculo A Funções, Limite, Derivação, Integração. Makron Books. 5ª Ed. São Paulo, 1992.

OLIVEIRA, Antônio Marmo., SILVA, Agostinho. Biblioteca da Matemática Moderna. Editorial Irracional S. A. São Paulo, 1968.

SERRÃO, Alberto Nunes, Exercícios e Problemas de Álgebra Vol II. Ao livro técnico S. A.5ª edição, Rio de Janeiro, 1970.

STEWART, James; Trad. Thomson Learning. Calculus. Editora. São Paulo. 2006.

THOMAS, George B. Cálculo. Trad. Luciana do Amaral Teixeira, Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11 ed. São Paulo: Adilson Wesley. 2009. V.1

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html (página consultada em Janeiro de 2011).

http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histintegral.htm (página consultada em Janeiro de 2011).