

Agradecimentos

A Deus meu refúgio seguro. Quem me dar forças pra ir até o fim. Toda minha Gratidão, Senhor!

A meus pais Antonia e Manuel, pelo dom da vida e por todo amor e dedicação.

A meus Irmãos, Damiana, Rejane, Reginaldo, Eraldo, Djalma, Daniel, Rosilene, Nelma, Lucas e Graça. Por estarem sempre comigo, me dando a certeza de poder confiar.

Aos Professores da UEPB e em especial a professora Luciana, minha orientadora. Obrigada pela paciência e dedicação.

Aos meus colegas de turma: Carlos, Diego, Gilvania, Kleber, Irineu, Isabelly, Michelly e Railton.

E a todos que contribuíram de alguma forma para esta realização.

Resumo

O Teorema da Divergência relaciona fluxo de um campo vetorial para fora de uma superfície fechada com a integral do divergente do campo sobre a região limitada por essa superfície. Neste texto, mostramos o Teorema da Divergência para algumas regiões especiais em \mathbb{R}^3 e estendemos sua prova para outras regiões. Prosseguimos fazendo algumas considerações em \mathbb{R}^N , afim de se trabalhar algumas aplicações neste espaço. Entre estas aplicações estão a primeira e a segunda identidades de Green e a unicidade para os problemas de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin. Por fim, em \mathbb{R}^3 , trabalhamos a Lei de Gauss e a interpretação Física da divergência calculada em um ponto.

Palavras-chaves: Teorema da Divergência; Identidades de Green; Problemas de Contorno; Lei de Gauss.

Abstract

The Divergence Theorem relates a vector field flow that crosses a closed surface with the integral of the divergence of the field over the region bounded by this surface. In this work, we show the Divergence Theorem for some special regions in \mathbb{R}^3 and we extend his proof to other regions. We continue making some remarks on \mathbb{R}^N , in order to work with some applications in this space. Among these applications are the first and second Green's identity and uniqueness problems for Dirichlet boundary, Neumann and Robin. Finally, in \mathbb{R}^3 , we work the Gauss' Law and the Physical interpretation the divergence calculated in a point.

Key-words: Divergence Theorem; Green's Identities; Boundary Problems; Gauss' Law.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Preliminares	4
2 Teorema da Divergência	9
2.1 Extensão para outras regiões	12
3 Aplicações	18
3.1 Identidades de Green	18
3.2 Unicidade para os problemas de contorno	20
3.2.1 Problemas de contorno	20
3.2.2 Estudo da unicidade	21
3.3 Lei de Gauss	24
3.4 Interpretação Física do Divergente	26
A Resultados Gerais	29
Conclusão	32
Referências Bibliográficas	33

Introdução

Nas aplicações de cálculo vetorial um resultado que desempenha um papel importante é o Teorema da Divergência, ou Teorema da Divergência de Gauss, assim denominado em homenagem ao matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que o demonstrou. Ele é também conhecido como Teorema de Gauss-Ostrogradsky, em razão de que sua primeira prova foi publicada por Mikhail Ostrogradsky (1801-1862).

Além da Matemática, Gauss realizou importantes investigações no campo da Física e da Astronomia. Durante o século 18, vários matemáticos estavam empenhados em aprimorar os trabalhos sobre a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton (1642-1727) (ver [1]). O Teorema da Divergência contribuiu de forma significativa para o avanço dessas ciências.

Os assuntos abordados neste trabalho estão organizados em três capítulos. Utilizamos o primeiro capítulo, exclusivamente, para apresentar alguns conceitos fundamentais ao desenvolvimento do texto e exemplificamos alguns deles para uma melhor compreensão dos mesmos.

Já no segundo capítulo enunciamos e demonstramos o Teorema da Divergência para o caso de regiões especiais do \mathbb{R}^3 , a exemplo de um cubo ou uma esfera e, em seguida, mostramos que ele pode ser estendido para outros tipos de regiões, que são por exemplo uniões finitas do tipo destas citadas, ou ainda regiões que podem conter “furos” ou “bolhas”. Deixamos também claro que, o teorema é válido para regiões do \mathbb{R}^N e sua prova pode ser encontrada em [2]; fizemos apenas algumas considerações a respeito, as quais serão úteis ao capítulo que se segue.

Ainda no Capítulo 2, observamos a relação do Teorema da Divergência com a denominada Fórmula Normal do Teorema de Green e o finalizamos apresentando dois exemplos do Teorema da Divergência.

No último capítulo trabalhamos algumas aplicações, uma das quais trata das identidades de Green. Utilizamos o Teorema da Divergência para mostrar a primeira identidade, da qual resulta a segunda. Na seção dois apresentamos os problemas de contorno para equação de Laplace; especificamente os problemas de Dirichlet, Neumann e Robin.

A partir da primeira identidade de Green verificamos a unicidade para tais problemas. Mostramos também a unicidade do problema de Dirichlet para uma classe mais ampla de funções, utilizando o Teorema do Máximo na Forma Fraca. Por fim, encerramos o capítulo com a Lei de Gauss e com a interpretação Física do divergente calculado em um ponto de uma região.

Alguns resultados utilizados no texto podem ser encontrados no Apêndice, outros estão disponíveis nas referências, conforme forem citadas.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Iniciaremos este texto apresentando algumas definições e resultados que desempenharão um papel importante no entendimento dos resultados dos capítulos posteriores. segue.

Definição 1.1. *Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Se a cada ponto de Ω associarmos um único vetor, pertencente a V_3 (Conjunto dos vetores em três dimensões), então o conjunto de todos esses vetores constitui um campo vetorial tridimensional.*

Definição 1.2. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Define-se uma função vetorial $F : \Omega \rightarrow V_3$, no espaço tridimensional, como uma função que associa cada ponto no domínio Ω a um único vetor em V_3 .*

Observação 1.1. *Um campo vetorial pode ser definido por uma função vetorial tridimensional $F : \Omega \rightarrow V_3$ e escrevemos*

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k,$$

onde M , N e P são funções reais de três variáveis, $i = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $j = \langle 0, 1, 0 \rangle$ e $k = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Se M , N e P são contínuas e diferenciáveis, o campo definido por F é contínuo e diferenciável.

Exemplo 1.1. *Considere o campo definido pela função vetorial $F(x, y, z) = -xi - yj - zk$. Para cada ponto no domínio de F podemos associar um vetor em seu contradomínio. Vejamos o esboço de alguns vetores deste campo. Tomando alguns pontos no domínio de*

F , temos

$$(x, y, z) \longrightarrow -xi - yj - zk$$

$$(1, 0, 0) \longrightarrow -i$$

$$(0, 1, 0) \longrightarrow -j$$

$$(0, 0, 1) \longrightarrow -k$$

$$(1, 1, 1) \longrightarrow -i - j - k$$

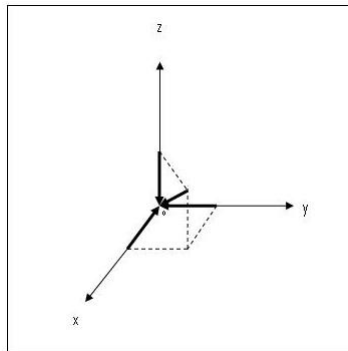


Figura 1.1: Representação de alguns vetores do campo

Definição 1.3. Define-se o operador gradiente ∇ em três dimensões como sendo o operador diferencial vetorial dado por

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definição 1.4. Se f é uma função real de três variáveis, então o gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k.$$

Podemos então definir a função vetorial

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k.$$

Observação 1.2. Se o campo vetorial F é o gradiente de alguma função escalar f , então F é um campo vetorial conservativo e f é chamada função potencial de F .

Definição 1.5. Seja F uma função vetorial em três dimensões dada por $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$, onde M , N e P têm derivadas parciais em alguma região. A divergência de F , denotada por $\text{div}F$ (ou $\nabla \cdot F$) é definida como sendo

$$\text{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Observação 1.3. Usa-se o símbolo $\nabla \cdot F$ em virtude de que a operação realizada entre o operador diferencial ∇ e a função vetorial F , a qual define $\text{div}F$, ser semelhante a um produto interno entre dois vetores.

Definição 1.6. Um vetor ν normal a um plano T é um vetor ortogonal a T .

Definição 1.7. Seja S uma superfície e T um plano tangente a S em um ponto P . Um vetor normal a S , no ponto P , define-se como sendo o vetor normal ao plano T neste mesmo ponto.

Teorema 1.1. Seja S uma superfície gerada pelo gráfico de uma equação $G(x, y, z) = 0$. Suponhamos G dotada de derivadas parciais primeiras contínuas e P_0 um ponto em S . Se G_x , G_y , G_z não se anulam simultaneamente em P_0 , então $\nabla G(P_0)$ é normal ao plano tangente a S em P_0 .

Demonstração: Ver [8].

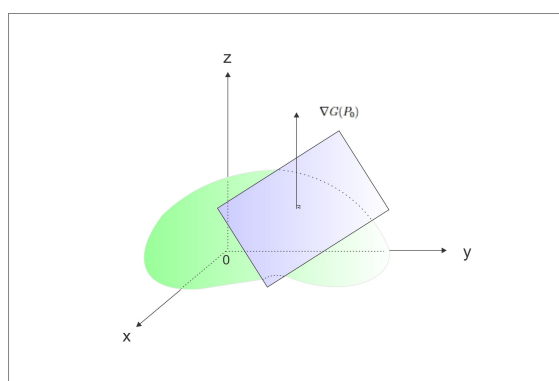


Figura 1.2: $\nabla G(P_0)$ - normal ao plano tangente a S em P_0 .

Observação 1.4. Se considerarmos S uma superfície gerada pelo gráfico de $G(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, então pelo Teorema 1.1, o vetor normal, em um ponto P_0 de S , fica determinada

por $\nabla G(P_0)$. Logo um vetor ν normal unitário a S pode ser obtido pela expressão

$$\nu = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \frac{\langle -g_x, -g_y, 1 \rangle}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

Exemplo 1.2. Seja S o gráfico de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Pela observação anterior, podemos obter um vetor normal unitário a superfície esférica S . Vejamos:

Denotando por G a equação $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, temos

$$\nu = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \frac{2xi + 2yj + 2zk}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \pm \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{xi + yj + zk}{a}.$$

Portanto, $\nu = \pm \frac{xi + yj + zk}{a}$.

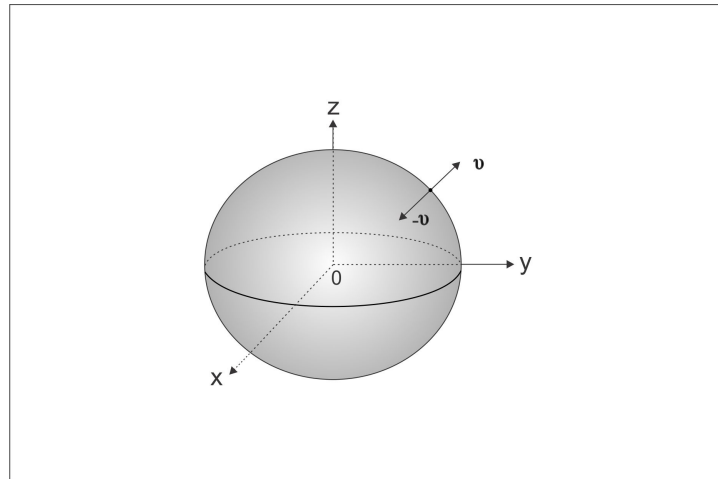


Figura 1.3: Vetores normais unitários a superfície esférica

Definição 1.8. Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Define-se R como uma região regular se R for, simultaneamente, x -regular e y -regular, isto é,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_1(x) < y < f_2(x) \quad e \quad a < x < b\}$$

e

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g_1(y) < x < g_2(y) \quad e \quad c < y < d\},$$

onde f_1 , f_2 , g_1 e g_2 são funções com derivadas primeiras contínuas.

Seja S o gráfico de $z = g(x, y)$, onde S tem projeção regular R sobre o plano xy . Supondo g dotada de derivadas parciais primeiras contínuas em R , a integral de superfície de uma função real G de três variáveis sobre S pode ser calculada por

$$\iint_S G(x, y, z) dS = \iint_R G(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA. \quad (1.1)$$

Seja S uma superfície e ν um vetor unitário normal a S . Considerando uma função vetorial $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$, onde M, N, P são funções contínuas, então o produto interno $F \cdot \nu$ é chamado componente normal de F . Podemos então enunciar a seguinte definição:

Definição 1.9. *O fluxo de um campo vetorial F através de S é a integral de superfície*

$$\iint_S F \cdot \nu dS.$$

Observação 1.5. *Supondo F como um campo velocidade de um fluido, no qual S está submersa e considerando uma pequena região de área dS em S . Após uma unidade de tempo a quantidade de fluido que atravessa dS pode ser aproximada pelo volume de um sólido cilíndrico de altura $F \cdot \nu$ e área da base dS . Assim temos que o volume do fluido que atravessa dS em uma unidade de tempo é dado por $dV = F \cdot \nu dS$. Integrando dV sobre a superfície S , isto é,*

$$\iint_S dV = \iint_S F \cdot \nu dS$$

temos que

$$V = \iint_S F \cdot \nu dS,$$

que é a interpretação física do fluxo de um campo vetorial, como sendo o volume do fluido que atravessa S por unidade de tempo.

Definição 1.10. *Seja f uma função real de n -variáveis. Definimos o Laplaciano de f como sendo*

$$\Delta f = f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + \cdots + f_{x_{n-1} x_{n-1}} + f_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}$$

Capítulo 2

Teorema da Divergência

Iniciamos este capítulo apresentando algumas definições necessárias ao estudo que faremos posteriormente do Teorema Divergência. Para tal considere uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ em Ω .

Definição 2.1. *P é um ponto de fronteira de Ω se toda esfera centrada em P contém pontos que estão fora de Ω e, também, pontos que estão dentro de Ω .*

Definição 2.2. *A fronteira de Ω é o conjunto de todos os pontos de fronteira.*

Definição 2.3. *Ω é uma região fechada se contém sua fronteira.*

Definição 2.4. *Ω é uma região limitada se está contida em uma esfera de raio fixo.*

O espaço das funções definidas em Ω que possuem todas as derivadas de ordem, menor ou igual a k contínuas, será simbolizado por $C^k(\Omega)$.

Ao que se segue, iremos denotar por Ω uma região fechada e limitada em \mathbb{R}^3 , cuja fronteira será representada por uma superfície S . Um vetor normal unitário exterior a superfície S será simbolizado por ν .

Teorema 2.1 (Teorema da Divergência). *Se F é uma função vetorial, isto é, $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$, onde M , N e P possuem derivadas parciais primeiras contínuas, então*

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV. \quad (2.1)$$

Demonstração do Teorema da Divergência para algumas regiões especiais:

Sejam α , β e γ os ângulos diretores do vetor ν . Reescrevendo ν em função de seus cossenos diretores, temos

$$\nu = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k.$$

Sendo

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z},$$

podemos reescrever (2.1) como:

$$\iint_S (M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma) dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV. \quad (2.2)$$

Basta provarmos as seguintes igualdades

$$\iint_S M \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial x} dV \quad (2.3)$$

$$\iint_S N \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial y} dV \quad (2.4)$$

$$\iint_S P \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dV \quad (2.5)$$

e somá-las membro a membro de modo a obtermos (2.2).

Faremos a demonstração de (2.5). Para (2.3) e (2.4) as provas podem ser obtidas com argumentos similares.

Consideremos inicialmente o caso em que a região Ω está entre duas superfícies S_1 e S_2 dadas respectivamente pelas funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, com f e g funções de classe C^1 e $f \geq g$ para todo (x, y) em R , onde R é projeção de S_1 e S_2 no plano xy .

Como podemos observar na Figura 2.1, a superfície S é formada pela superfície inferior S_1 , pela superfície superior S_2 e por uma superfície lateral S_3 . Considerando a orientação das normais a superfície S , observe que sobre S_3 , temos que $\gamma = \pi/2$, logo $\cos \gamma = 0$, de onde segue

$$\iint_S P \cos \gamma dS = \iint_{S_1} P \cos \gamma dS + \iint_{S_2} P \cos \gamma dS \quad (2.6)$$

Façamos o estudo para as integrais de superfície sobre S_1 e S_2 .

Da Observação 1.4, temos que sobre S_2

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

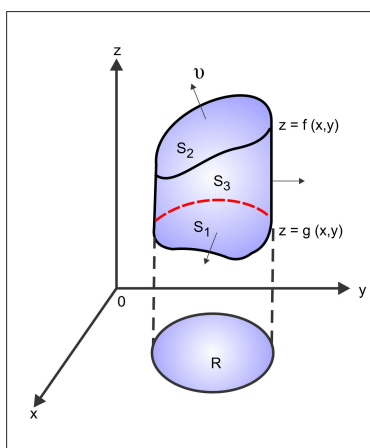


Figura 2.1: Tipo de região considerada

Relacionando a integral de superfície dada pela fórmula (1.1) sobre S_2 com a integral dupla sobre a região R projetada no plano xy , temos:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} P(x, y, z) \cos \gamma dS &= \iint_R P(x, y, f(x, y)) \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} dA \\ &= \iint_R P(x, y, f(x, y)) dA. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sobre S_1 a componente normal ν tem sentido oposto ao da componente em S_2 , logo

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}.$$

Assim,

$$\iint_{S_1} P(x, y, z) \cos \gamma dS = -\iint_R P(x, y, g(x, y)) dA. \quad (2.8)$$

Logo obtemos que

$$\begin{aligned} \iint_S P \cos \gamma dS &= \iint_R [P(x, y, f(x, y)) - P(x, y, g(x, y))] dA \\ &= \iint_R \left[\int_{g(x, y)}^{f(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dV. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como queríamos. Concluindo assim que o Teorema da Divergência é válido para regiões em \mathbb{R}^3 que tem projeção regular sobre os três planos coordenados. \square

2.1 Extensão para outras regiões

O Teorema da Divergência pode ser utilizado também para outras regiões, isto é, podemos calcular o fluxo através de regiões que são, por exemplo, uma união finita de regiões do tipo que consideramos anteriormente, ou regiões que podem conter “furos” ou “bolhas”, como é o caso do esboço da Figura 2.2. A região Ω considerada está limitada por duas esferas de mesmo centro. Verifiquemos a extensão para este tipo de região.

Seja Ω a região limitada por duas esferas de mesmo centro, cuja fronteira é $S = S_A \cup S_B$, sendo que S_A e S_B são, respectivamente, as superfícies limitantes externa e interna. Se $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$, onde M , N e P possuem derivadas parciais primeiras contínuas em Ω e sobre sua fronteira, então provaremos que

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV$$

onde ν denota um vetor unitário normal a S , no sentido exterior a Ω .

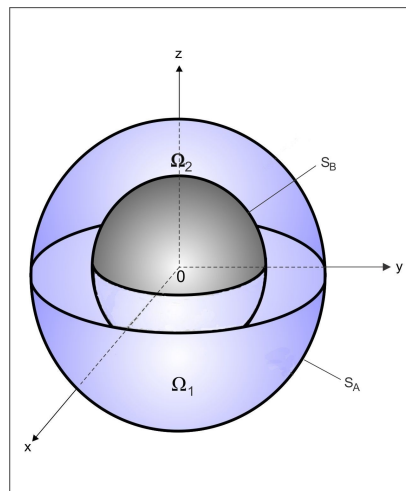


Figura 2.2: Ω - região entre duas esferas

Suponhamos, sem perda de generalidade, que as esferas consideradas estejam centradas na origem em um sistema de coordenadas tridimensional xyz , como mostrada na Figura 2.2. Note que o plano xy divide Ω em duas partes, uma inferior Ω_1 , com fronteira S_1 e uma superior Ω_2 , com fronteira S_2 :

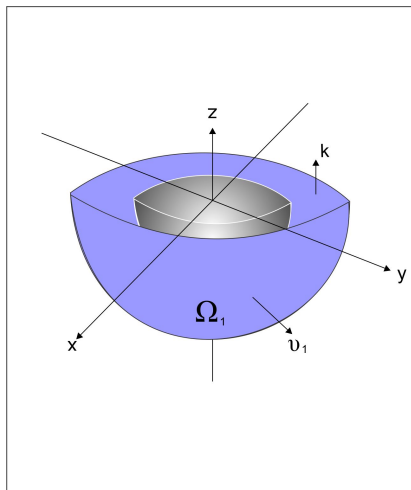


Figura 2.3: Região Inferior

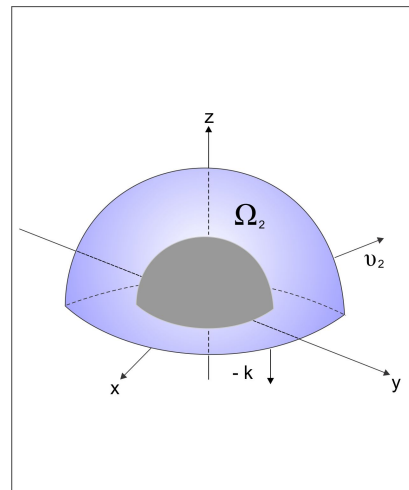


Figura 2.4: Região Superior

Tendo F componentes continuamente diferenciáveis em Ω podemos aplicar o Teorema da Divergência a Ω_1 e a Ω_2 separadamente. Logo

$$\iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F dV_1 = \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 dS \quad (2.10)$$

e

$$\iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F dV_2 = \iint_{S_2} F \cdot \nu_2 dS. \quad (2.11)$$

A superfície S_1 , que limita Ω_1 consiste em uma superfície plana S'_1 em formato de arruela, uma superfície exterior S''_1 e uma interior S'''_1 . Da mesma maneira, seguindo igual ordem, a superfície S_2 limitante de Ω_2 consiste de S'_2 , S''_2 e S'''_2 .

Note que conforme seguimos a normal unitária ν_1 sobre S_1 , apontando para fora de Ω_1 , ela é igual a k sobre a superfície plana S'_1 ; ao longo de S''_1 , ela aponta em sentido contrário a origem e aponta para origem sobre S'''_1 .

De maneira semelhante podemos observar que a normal ν_2 , que aponta para fora de Ω_2 , é igual a $-k$ ao longo de S'_2 , aponta no sentido contrário a origem em S''_2 e para origem em S'''_2 .

Sendo $S_1 = S'_1 \cup S''_1 \cup S'''_1$ e $S_2 = S'_2 \cup S''_2 \cup S'''_2$, ao adicionarmos, membro a membro, as equações (2.10) e (2.11), as integrais sobre as superfícies S'_1 e S'_2 se cancelam, em razão dos sinais opostos das normais unitárias $\nu_1 = k$ e $\nu_2 = -k$. Assim,

$$\iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} F dV + \iiint_{\Omega_2} \operatorname{div} F dV = \iint_{S_1'' \cup S_1'''} F \cdot \nu_1 dS + \iint_{S_2'' \cup S_2'''} F \cdot \nu_2 dS. \quad (2.12)$$

Mas observe que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e fazendo algumas permutações, temos $S_1'' \cup S_1''' \cup S_2'' \cup S_2''' = S_A \cup S_B = S$, obtemos

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_S F \cdot \nu dS,$$

onde ν é um vetor unitário normal no sentido exterior de Ω , como queríamos provar.

Teorema da Divergência em \mathbb{R}^N

O Teorema da Divergência em \mathbb{R}^N é considerado para as denominadas “Regiões de Gauss”, que são regiões $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abertas, conexas, limitadas e que apresentam uma certa regularidade na sua fronteira S (ver [2]). Para qualquer campo vetorial F em \mathbb{R}^N , cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em Ω , temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \int_S F \cdot \nu dS, \quad (2.13)$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Para uma formulação mais geral do Teorema da Divergência em \mathbb{R}^N veja [3].

Observação 2.1. *O Teorema da Divergência generaliza a denominada “Forma Normal do Teorema de Green (ver Apêndice (1))”. Ela afirma que dadas algumas condições, o fluxo exterior de um campo vetorial bidimensional através de uma curva fechada simples no plano é igual a integral dupla do divergente do campo sobre a região limitada por essa curva, isto é,*

$$\oint_C F \cdot \nu d\phi = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA.$$

Podemos notar este fato se considerarmos um campo vetorial $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$ no plano como sendo uma função tridimensional cuja componente k é nula, isto é, $F(x, y, z) = M(x, y)i + N(x, y)j + 0k$. Assim supondo R uma região limitada por uma curva C satisfazendo as condições para as quais o Teorema de Green é válido, ao calcularmos o divergente de F podemos reescrever o Teorema de Green como:

$$\oint_C F \cdot \nu d\phi = \iint_R \operatorname{div} F dA.$$

Exemplos do Teorema da Divergência

Exemplo 2.1. Seja S a superfície de uma região Ω limitada pelos gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $z = 9$. Sendo F uma função vetorial dada por $F(x, y, z) = 2xyi + z \cos xj + (z^2 + y \csc x)k$, vamos calcular $\iint_S F \cdot \nu dS$.

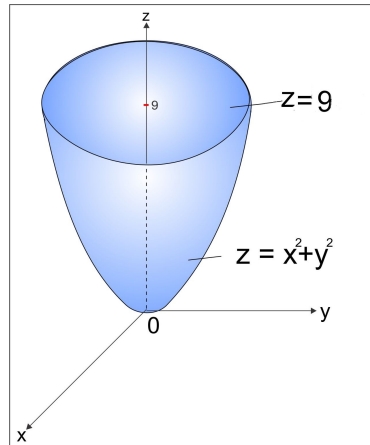


Figura 2.5: Superfície parabólica

Pelo Teorema da Divergência o fluxo de F através da fronteira S é igual à integral tripla do divergente de F sobre a região limitada por S . Logo

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iiint_{\Omega} (2y + 2z) dx dy dz$$

Utilizando coordenadas cilíndricas para reescrever a igualdade acima, obtemos

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \nu dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2}^9 (2r \operatorname{sen} \theta + 2z) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 2zr^2 \operatorname{sen} \theta + rz^2 \Big|_{r^2}^9 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (18r^2 \operatorname{sen} \theta + 81r - 2r^4 \operatorname{sen} \theta - r^5) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 6r^3 \operatorname{sen} \theta + \frac{81}{2} r^2 - 2\frac{r^5}{5} \operatorname{sen} \theta - \frac{r^6}{6} \Big|_0^3 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{972}{15} \operatorname{sen}\theta + 243 \right) d\theta \\
 &= -\frac{972}{15} \cos\theta + 243 \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 486\pi.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Vamos calcular o fluxo de $F(x, y, z) = (x^2 + z\operatorname{sen}y)i + (y - xe^{-z})j + z^2k$ através da superfície S da região limitada pelos gráficos $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$ e $z = 0$.

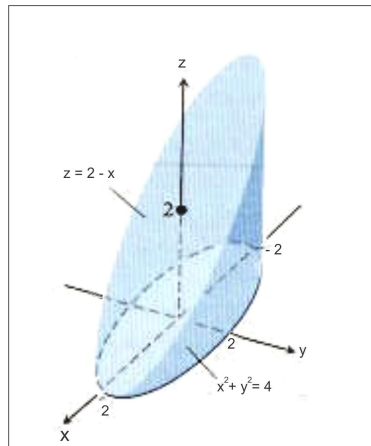


Figura 2.6: Região limitada pelos gráficos dados

Observe o esboço (2.6) do sólido considerado.

Sendo $F(x, y, z) = (x^2 + z\operatorname{sen}y)i + (y - xe^{-z})j + z^2k$, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot \nu dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV \\
 &= \iiint_{\Omega} (2x + 2z + 1) dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Reescrevendo em coordenadas cilíndricas, como no exemplo anterior, segue que

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot \nu dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2-r\cos\theta} (2r\cos\theta + 2z + 1) r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2-r\cos\theta} (2r^2\cos\theta + 2rz + r) dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2zr^2\cos\theta + rz^2 + rz \Big|_0^{2-r\cos\theta} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [(2r^2\cos\theta(2 - r\cos\theta) + r(2 - r\cos\theta)^2 + r(2 - r\cos\theta)] dr d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^3 \cos^2 \theta - r^2 \cos \theta + 6r) \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r - r^3 \cos^2 \theta - r^2 \cos \theta) \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. 3r^2 - \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta - \frac{r^3}{3} \cos \theta \right|_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[12 - 4 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) - \frac{8}{3} \cos \theta \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(10 - 2 \cos 2\theta - \frac{8}{3} \cos \theta \right) d\theta \\ &= 10\theta - \operatorname{sen} 2\theta - \frac{8}{3} \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 20\pi. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Identidades de Green

Em seu livro *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, o matemático inglês George Green (1793-1841), publicou três Identidades, que foram obtidas pela aplicação do Teorema da Divergência.

Apresentaremos nesta seção duas delas. Sendo que a partir da primeira Identidade obteremos como consequência a segunda e, mais à frente, a utilizaremos na verificação da unicidade dos problemas de contorno.

Primeira Identidade de Green

Seja Ω uma região em \mathbb{R}^N , a qual o Teorema da Divergência possa ser aplicado. Considere as funções $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. A seguinte igualdade pode ser verificada:

$$\int_{\Omega} u \Delta v dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS, \quad (3.1)$$

Note que

$$\begin{aligned} u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v &= u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ &= u \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \\
&= \operatorname{div} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v = \operatorname{div} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right).$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima e aplicando o Teorema da Divergência em \mathbb{R}^n (ver (2.13)) segue:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u\Delta v dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) dV \\
&= \int_S u \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \cdot (\nu_1, \dots, \nu_n) \right] dS \\
&= \int_S u (\nabla v \cdot \nu) dS.
\end{aligned}$$

Mas como $\nabla v \cdot \nu$ é a derivada direcional $\partial v / \partial \nu$, onde $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal exterior a S em x , conclui-se que:

$$\int_{\Omega} u\Delta v dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS, \quad (3.2)$$

$\forall u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $\forall v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Segunda Identidade de Green

Seja Ω uma região em \mathbb{R}^N , a qual o Teorema da Divergência possa ser aplicado e considere as funções $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Temos:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \quad (3.3)$$

Aplicando a primeira identidade de Green (3.1), a u e a v , das duas maneiras possíveis tem-se:

$$\int_{\Omega} u\Delta v dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS \quad (3.4)$$

e

$$\int_{\Omega} v \Delta u dV + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV = \int_S v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \quad (3.5)$$

Fazendo a diferença entre (3.4) e (3.5), obtemos a segunda identidade de Green.

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \quad (3.6)$$

3.2 Unicidade para os problemas de contorno

3.2.1 Problemas de contorno

Um problema de contorno para equação de Laplace consiste em encontrar uma função harmônica (ver Definição A.1) que satisfaça certas condições na fronteira S de uma certa região Ω limitada.

A seguir apresentaremos alguns problemas de contorno para a equação de Laplace. Especificamente são eles os problemas de Dirichlet, Neumann e Robin.

Seja Ω uma região limitada com fronteira S e sejam f , g e h funções contínuas definidas em S . Temos os seguintes problemas de contorno:

1. Problema de Dirichlet

Achar $u(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{em } S \end{cases}$$

2. Problema de Neumann

Achar $u(x)$ contínua em Ω tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{em } S, \end{cases}$$

onde $\nu = \nu(x)$ é a normal exterior no ponto x em S .

3. Problema de Robin

Achar $u(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ au + \frac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{em } S, \end{cases}$$

onde $a = a(x)$ é uma função positiva em S , ou seja $\exists k > 0$ tal que $a(x) \geq k$, para $x \in S$.

3.2.2 Estudo da unicidade

Teorema 3.1 (Unicidade para solução do problema de Dirichlet). *Se u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Dirichlet, então $u_1 = u_2$.*

Demonstração

Temos

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega \\ u_1 = f & \text{em } S \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{em } \Omega \\ u_2 = f & \text{em } S \end{cases}$$

A função $u = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } S \end{cases}$$

Pelo Teorema A.1, u está limitada pelos seus valores mínimo e máximo em S .

$$0 = \min_{x \in S} u = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq u(x) \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in S} u = 0$$

Logo $u = 0$ em Ω e, portanto concluímos que $u_1 = u_2$. □

Seja u uma função harmônica. Supondo que $u = v$, pela primeira identidade de Green obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

ou

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Podemos então fazer as seguintes observações:

Se $u = 0$ em S , então $\nabla u = 0$ em Ω , o que implica que u é constante em Ω . Sendo u contínua em $\bar{\Omega}$ e $u = 0$ em S , temos que $u = 0$ em Ω . Assim o problema de Dirichlet tem no máximo uma solução $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

A unicidade do problema de Dirichlet na classe mais ampla, $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, vimos no início desta seção, usando o Teorema do Máximo.

Se $\partial u / \partial \nu = 0$ em S , então temos u é constante em Ω . Se $u_1, u_2 \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ são soluções do problema de Neumann, isto é,

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = g & \text{em } S, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = g & \text{em } S, \end{cases}$$

então $u = u_1 - u_2$ satisfaz o problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } S, \end{cases}$$

logo u é constante em Ω .

Se $a(x)u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em S , onde $a(x) > 0$, então temos:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -a(x)u$$

Como

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = - \int_S u^2 a(x) dS \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int_S u^2 a(x) dS = 0$$

dai se:

- $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = 0 \Rightarrow u$ é constante em Ω .
- $\int_S u^2 a(x) dS = 0 \Rightarrow u = 0$ em S .

Sendo u contínua em $\bar{\Omega}$, constante em Ω e $u = 0$ em S , concluímos que $u = 0$ em Ω .

Assim podemos observar que o problema de Robin

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ au + \frac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{em } S, \end{cases}$$

com $u \in C^0(\bar{\Omega})$, tem no máximo uma solução em $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, pois supondo u_1 e u_2 como soluções do problema de Robin, isto é

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega \\ au_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = h & \text{em } S \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{em } \Omega \\ au_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = h & \text{em } S, \end{cases}$$

temos que se $u = u_1 - u_2$, então

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ au + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } S, \end{cases}$$

implicando que $u = 0$ em Ω e portanto $u_1 = u_2$.

Observação 3.1. *Suponha que $u = 1$ em $\bar{\Omega}$ e que v seja uma função harmônica em Ω . Sendo v harmônica $\Delta v = 0$ e como $u = 1$, temos que $\nabla u = 0$, logo da primeira identidade de Green obtemos*

$$\int_S \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0$$

que é o Teorema de Gauss: “A integral no contorno S da derivada normal de uma função v harmônica em Ω é zero”. Deste fato segue que a função $g(x)$ do problema de Neumann deve satisfazer a relação

$$\int_S g(x) dS = 0$$

para que o problema tenha solução.

Observação 3.2. *Mostramos a unicidade para os problemas de contorno supondo que existam as funções consideradas. A questão da existência é bem mais delicada, não sendo o objetivo deste texto sua discussão. Em especial, o problema de Dirichlet teve grande repercussão entre os matemáticos do século 19; tornando-se, para eles, um grande desafio encontrar métodos para sua resolução. Sobre esses métodos ver [2] e [7].*

3.3 Lei de Gauss

Além da Matemática, Gauss dedicou-se a Física e a Astronomia. Ele realizou grandes investigações, as quais contribuíram para o avanço de tais ciências. Entre essas contribuições está a Lei de Gauss, um importante resultado para o eletromagnetismo e que, como veremos, decorre do Teorema da Divergência.

Em eletromagnetismo, uma carga pontual q vai gerar em torno de si um campo elétrico. Suponha que ela esteja localizada na origem, o campo elétrico criado por q é dado por:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r|^2} \left(\frac{r}{|r|} \right), \quad (3.7)$$

onde $r = xi + yj + zk$ é o vetor posição do ponto (x, y, z) , com norma $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e ϵ_0 é uma constante Física.

A Lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada S é igual a carga elétrica total (líquida) q existente no interior da superfície dividida por ϵ_0 , isto é,

$$\iint_S E \cdot \nu dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.8)$$

onde ν um vetor normal unitário a S . Denotemos por F a seguinte expressão

$$F(x, y, z) = \frac{r}{|r|^3}$$

Podemos então reescrever (3.7) como

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} F.$$

Vamos utilizar o Teorema (2.1) para mostrarmos a Lei de Gauss. Para isso, prosseguiremos da seguinte maneira: Considere uma região Ω limitada por duas superfícies S_A e S_B , onde S_A é uma superfície esférica de raio $a > 0$ centrada na origem, S_B uma superfície fechada para qual o Teorema da Divergência se aplica e com S_A estando inteiramente contida em S_B .

Pela Seção 2.1, Ω é uma região para qual o Teorema da Divergência pode ser aplicado, logo considerando o campo elétrico (3.7) teremos que

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} E dV = \iint_{S_A} E \cdot \nu dS + \iint_{S_B} E \cdot \nu dS.$$

Chamemos $c = q/4\pi\epsilon_0$ e por $w = |r|$. Note que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) = \frac{x}{w}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (cxw^{-3}) &= cw^{-3} - 3cxw^{-4} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{c}{w^3} - \frac{3cx^2}{w^5}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} (cyw^{-3}) = \frac{c}{w^3} - \frac{3cy^2}{w^5} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} (czw^{-3}) = \frac{c}{w^3} - \frac{3cz^2}{w^5}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{3c}{w^3} - \frac{3c}{w^5} (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= c \left(\frac{3}{w^3} - \frac{3}{w^5} (w^2) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, quando $w > 0$ temos que $\operatorname{div} E = 0$. Logo, pelo Teorema da Divergência

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} E dV = 0,$$

o que implica

$$\iint_{S_B} E \cdot \nu dS = - \iint_{S_A} E \cdot \nu dS.$$

Portanto o fluxo exterior de E através de qualquer superfície fechada que englobe a origem e a qual o Teorema da Divergência se aplique é sempre o mesmo.

Logo considerando a esfera S_A , calculemos este fluxo. Pelo Exemplo 1.2, um vetor normal unitário exterior a S_A é

$$\nu = \frac{xi + yj + zk}{a},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} E \cdot \nu &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xi + yj + zk}{a^3} \cdot \frac{xi + yj + zk}{a} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Integrando $E \cdot \nu$, temos

$$\begin{aligned} \iint_{S_A} E \cdot \nu dS &= \iint_{S_A} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \iint_{S_A} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) \\ &= \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer superfície fechada que englobe a origem e para qual o Teorema da Divergência é válido, o fluxo do campo elétrico E , no sentido que se afasta da origem é igual q/ϵ_0 .

3.4 Interpretação Física do Divergente

Um resultado clássico para integrais de uma variável real em Cálculo I é Teorema do Valor Médio para Integrais. Ele afirma que se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

existe um ponto c em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Ele também pode ser aplicado à integrais triplas. Temos que, se f é uma função de três variáveis, contínua em uma região esférica B , então existe um ponto k em B tal que

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = f(k)V_B, \quad (3.9)$$

onde V_B é o volume de B .

Podemos combinar o Teorema da Divergência e o Teorema do Valor Médio para Integrais Triplas (3.9) para obtenção do significado físico do divergente de um campo vetorial.

Para isso, sejam F um campo vetorial de classe C^1 definido em uma região Ω do \mathbb{R}^3 e um ponto $P \in \Omega$. Considere $B_\epsilon \subset \Omega$ uma região fechada esférica de raio $\epsilon > 0$, centrada em P .

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais Triplas, temos que para cada B_ϵ existe um ponto $P_\epsilon \in B_\epsilon$ tal que

$$\iiint_{B_\epsilon} \text{div}F dV = \text{div}F(P_\epsilon)V_{B_\epsilon} \quad (3.10)$$

e do Teorema da Divergência temos que

$$\iiint_{B_\epsilon} \text{div}F dV = \iint_{S_\epsilon} F \cdot \nu dS, \quad (3.11)$$

onde S_ϵ é a superfície limitante de B_ϵ e ν um vetor normal unitário a S_ϵ .

De (3.10) e (3.11) segue que

$$\text{div}F(P_\epsilon) = \frac{\iint_{S_\epsilon} F \cdot \nu dS}{V_{B_\epsilon}}. \quad (3.12)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos que $P_\epsilon \rightarrow P$, Logo

$$\text{div}F(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{div}F(P_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\epsilon} F \cdot \nu dS}{V_{B_\epsilon}}. \quad (3.13)$$

Portanto,

$$\text{div}F(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\epsilon} F \cdot \nu dS}{V_{B_\epsilon}}. \quad (3.14)$$

O quociente $\iint_{S_\epsilon} F \cdot \nu dS / V_{B_\epsilon}$ representa o fluxo de um campo vetorial F por unidade de volume sobre uma esfera centrada em P e de raio ϵ . Quando $\epsilon \rightarrow 0$ o valor limite deste quociente nos dá a divergência de F em P . Assim, se pensarmos F como um campo velocidade de um fluido, podemos interpretar o $divF(P)$ como a taxa de entrada e de saída de fluido por unidade de volume em P . Assim, se $divF(P) > 0$, P é uma fonte de F ; se $divF(P) < 0$, P é um poço de F e se $divF(P) = 0$ o fluido é incompressível, não havendo nem perda nem ganho de fluido no interior V_ϵ , logo em todo ponto P temos

$$divF = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

que é equação de continuidade dos fluidos incompressíveis.

Apêndice A

Resultados Gerais

Teorema 1 (Forma Normal do Teorema de Green). *O Fluxo exterior de um campo $F(x, y) = M(x, y)k + N(x, y)j$ através de uma curva fechada simples e parcialmente suave C é igual à integral do divergente de F sobre a região R limitada por C . Ou seja,*

$$\oint_C F \cdot \nu d\phi = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA. \quad (\text{A.1})$$

Definição A.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita harmônica se é contínua e satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$ em todos os pontos de Ω .*

Exemplo A.1. *Considere $N = 2$. Se $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica, então pelas condições de Cauchy-Riemann:*

$$u_x = v_y \quad e \quad u_y = -v_x.$$

Seguindo por derivação que

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Somando as equações em (A.2) obtemos

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Da mesma forma temos que

$$\begin{cases} v_{xx} = -u_{yx} \\ v_{yy} = u_{xy}, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

o que implica

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Portanto, as partes real e imaginária de qualquer função analítica $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ são funções harmônicas.

Exemplo A.2. *Se $N = 3$. Considere os polinômios de 1º grau, $p(x, y, z) = ax + by + cz$ e de 2º grau $m(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy$; p e m são funções harmônicas?*

Veja que

$$\Delta p = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0,$$

Portanto p é uma função harmônica.

Para m , temos que

$$\Delta m = m_{xx} + m_{yy} + m_{zz} = 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c).$$

Logo, $\Delta m = 2(a + b + c) = 0 \iff a + b + c = 0$.

Portanto m é harmônica se, e somente se, $a + b + c = 0$.

Teorema A.1 (Máximo na forma fraca). *Seja $u(x)$ uma função harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Então $u(x)$ assume seu máximo e seu mínimo no contorno S de Ω .*

Demonstração

Seja $M = \max\{u(x); x \in \bar{\Omega}\}$ e suponha por contradição que M é atingido apenas em pontos interiores de Ω . Suponha sem perda de generalidade que $u(0) = M$, caso contrário, uma vez que a harmonicidade continua preservada, tomamos $u(x) = u(x_0 - x)$, onde $u(x_0) = M$.

Defina

$$v(x) = u(x) + \frac{M - m}{2d^2} |x|^2,$$

onde $m = \max\{u(x); x \in S\} < M$ e d é o diâmetro de Ω , ou seja, $d = \sup\{|x - y|; x, y \in \bar{\Omega}\}$.

Observe que em S

$$v(x) \leq m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = m + \frac{M - m}{2} = \frac{m + M}{2} < \frac{2M}{2} = M$$

e

$$v(0) = u(0) = M.$$

Logo, $v(x)$ assume seu máximo em pontos de Ω .

Por outro lado,

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \frac{M - m}{2d^2} \Delta |x|^2.$$

Mas, se considerarmos $f(x) = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2,$$

com $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\Delta f(x) = \Delta |x|^2 = \sum_{i=1}^n 2 = 2n,$$

implicando que

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \frac{M - m}{2d^2} 2n$$

e sendo $u(x)$ harmônica obtemos

$$\Delta v(x) = \frac{M - m}{d^2} n > 0, \forall x \in \Omega,$$

isto, porém, contradiz o fato de que em um ponto P de Ω , onde um máximo é atingido, deve-se ter $\Delta v(P) \leq 0$ (ver [4]).

Para demonstrar que $u(x)$ assume seu mínimo em S , basta considerar função $-u(x)$, que tem máximo onde $u(x)$ tem mínimos.

Conclusão

Considerando todo estudo realizado, percebemos a importância do Teorema da Divergência e de sua extensão para regiões mais gerais, em relação as que são comumente apresentadas nos livros de cálculo, o que possibilitou conhecer algumas de suas aplicações.

A sua contribuição para obtenção das Identidades de Green permitiu-nos avançar no estudo de outras questões Matemáticas, como foi o caso da unicidade para os problemas de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin. Vimos também que ele é fundamental a alguns resultados da Física, a exemplo de sua aplicação no desenvolvimento da Lei de Gauss e na interpretação Física do divergente em um ponto.

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, Tom M. *Cálculo*. Trad. Joaquim Ferreira Marques. Rio de Janeiro: REVERTÉ Ltda, 1981. V.2.
- [2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Teoria Clássica do Potencial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1963.
- [3] Foundations of Potential Theory. New York: Dover, 1954.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. V. 2.
- [5] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. *Cálculo*. Tradução de André Lima Cordeiro. Rio de Janeiro: LTC, 2008. V. 2.
- [6] PEREIRA, Agnaldo Souza; VITOR, Cláudio Barros; OLIVEIRA, Jefferson Pereira de. *Cálculo II*. Amazonas: UEA, 2007.
- [7] PONCE, Augusto C. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [8] SWOKOWSKI, Earl Willian. *Cálculo com geometria analítica*. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983. V. 2.
- [9] THOMAS, George B. *Cálculo*. Tradução de Luciana do Amaral Texeira; Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11 ed. São Paulo: Addilson Wesley, 2009. V. 2.
- [10] YOUNG, Hugh D. *Física III: Eletromagnetismo*. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. 12 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.