



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**LUCIANO TRAJANO DOS SANTOS**

**ANAMORFOSE NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

Campina grande PB

Junho 2011

LUCIANO TRAJANO DOS SANTOS

## **ANAMORFOSE NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. RÔMULO MARINHO DO RÊGO

Campina Grande PB

Junho 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S237a Santos, Luciano Trajano dos.  
Anamorfose no Ensino de Matemática [manuscrito] /  
Luciano Trajano dos Santos. – 2011.  
42 f. : il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de  
Ciências Tecnológicas, 2011.  
“Orientação: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo,  
Departamento de Matemática e Estatística”.

1. História da Matemática. 2. Ensino da Matemática. 3.  
Anamorfose. I. Título.

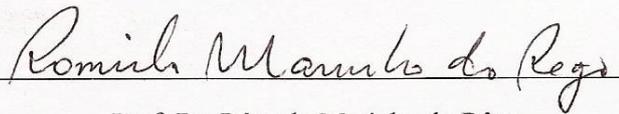
21. ed. CDD 510.1

LUCIANO TRAJANO DOS SANTOS

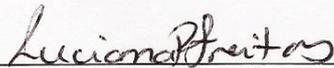
ANAMORFOSE NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

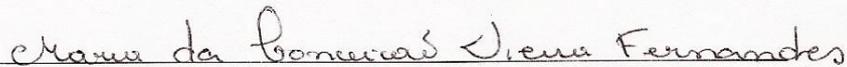
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo  
Departamento de Matemática – CCT/UEPB  
Orientador



Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas  
Departamento de Matemática – CCT/UEPB  
Examinador



Prof. Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes  
Departamento de Matemática – CCT/UEPB  
Examinador

Campina Grande, 29 de Junho de 2011

## **RESUMO**

A Anamorfose é uma imagem distorcida, secreta, que exige do observador a busca por um ângulo adequado afim de desvendar o segredo visualmente oculto. Foi desenvolvida há setecentos anos e sendo considerada uma arte, esteve em alta nos séculos XVI e XVII, sendo trabalhada por artistas mundialmente reconhecidos como Leonardo da Vinci no renascimento e Hans Holbein na Alemanha, este compôs a mais renomada anamorfose que se conhece: *Os Embaixadores*. No século XIX a anamorfose declina com o surgimento da fotografia. Porém ela ressurge na atualidade e se faz presente na comunicação visual e na arte em geral, dois dos grandes nomes atuais são István Orosz com suas anamorfozes de espelho, e Julian Beever com sua arte de rua intitulada Chalk Art, que são pinturas Trompe L'oeil, um dos tipos de anamorfose. A anamorfose é construída com base em cálculos gráficos, ou como fazem alguns artistas produzindo empiricamente visualizando a pintura através de um espelho, assim uma construção de anamorfose usando matemática, com mudanças de coordenadas ilustra o processo da construção matematicamente no final desse trabalho.

**Palavras chave:** 1. História da Matemática. 2. Ensino da Matemática. 3. Anamorfose

## **ABSTRACT**

The Anamorphosis is a distorted picture, secret, which requires the viewer to search for a suitable angle in order to uncover the secret hidden visually. It was developed over seven hundred years and is considered an art, was up in the sixteenth and seventeenth centuries, and crafted by world renowned artists such as Leonardo da Vinci and Hans Holbein the renaissance in Germany, he composed the most renowned anamorphosis we know: The Ambassadors. In the ninth century anamorphosis declines with the advent of photography. But she comes back today and is present in visual communication and art in general, two of the big names are current with their István Orosz mirror anamorphosis, Julian Beever and his art entitled Chalk Art Street, which are paintings Trompe L 'oeil, a type of anamorphosis. The anamorphosis is built in graphics calculations, or as some artists producing empirically viewing the painting through a mirror, so a mathematical construction using anamorphosis, with changes of coordinates of the construction process is illustrated mathematically by the end of this work.

**Keywords:** 1. History of Mathematics 2. Mathematics Teaching. 3. Anamorphosis

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Anamorfose de István Orosz (Em Cilindro Espelhado) .....	9
Figura 2- Anamorfose de István Orosz (Em Cilindro Espelhado) .....	10
Figura 3- “Os Embaixadores” de Hans Holbein .....	12
Figura 4- Detalhe Anamórfico Reconstituído .....	13
Figura 5- Mysterious Island de István Orosz .....	15
Figura 6- Mysterious Island de István Orosz (Reconstituída) .....	15
Figura 7- Anamorfose de István Orosz .....	16
Figura 8- Anamorfose de István Orosz .....	16
Figura 9- Teto da Paróquia Nossa Senhora da Conceição - Areia Pb .....	18
Figura 10- Anamorfose no Trânsito .....	19
Figura 11- Anamorfose na Pulicidade .....	20
Figura 12- Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade .....	21
Figura 13- Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade .....	22
Figura 14- Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade (Detalhe).....	23
Figura 15- Anamorfose na Publicidade .....	24
Figura 16- Chalk Art de Julian Beever .....	25
Figura 17- Chalk Art de Julian Beever (Visualmente Reconstituída) .....	26
Figura 18- Chalk Art de Julian Beever .....	27
Figura 19- Chalk Art de Julian Beever .....	27
Figura 20- Anamorfose de István Orosz (Modificada).....	28
Figura 21- Gráfico .....	29
Figura 22- pólo e Eixo Polar .....	30
Figura 23- Pontos .....	30
Figura 24- Planos Cartesianos .....	31
Figura 25- Coordenadas Retangulares e Polares .....	31
Figura 26- Construção de Anamorfose de Espelhos de István Orosz .....	32
Figura 27- Rua Vigário Odilon – Areia PB (Em Coordenadas Retangulares).....	33
Figura 28- Rua Vigário Odilon – Areia PB (Em Coordenadas Polares).....	33
Figura 29- Inversão do ponto P .....	34
Figura 30- Inversão de uma linha reta .....	35
Figura 31- Esquema de uma inversão de círculo reflexiva .....	36
Figura 32- Secção longitudinal central de um cone lateral reto .....	37

Figura 33- A bandeira britânica ou Union Jack .....	38
Figura 34- A inversão da Union Jack .....	38

## SUMÁRIO

<b>1- INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2- HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO .....</b>	<b>10</b>
2.1 - O Ícone da Anamorfose .....	13
2.2 - Anamorfozes de Espelhos .....	15
2.3 – A Técnica Trompe L’Oeil .....	18
<b>3 - APLICAÇÕES DE ANAMORFOSES .....</b>	<b>20</b>
<b>4 - CONSTRUINDO UMA ANAMORFOSE .....</b>	<b>28</b>
4.1 - Sistema de Coordenadas Polares .....	29
4.2 - Mudança de Coordenadas Retangulares para Coordenadas Polares .....	<b>30</b>
4.3 - Inversão Espacial.....	34
4.3.1 - Inversão de espaço e transformações óticas .....	34
4.3.2 - Inversão de Círculo .....	34
4.3.3 - Inversão reflexiva em um cone simples .....	36
<b>5 - CONCLUSÃO .....</b>	<b>40</b>
<b>REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS .....</b>	<b>41</b>

## INTRODUÇÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como título "Anamorfose no Ensino de Matemática". A pesquisa parte do princípio de que anamorfose é uma aplicação matemática que envolve cálculos gráficos, enfatizando inicialmente suas características artísticas e os artistas mais conhecidos que contribuíram para sua preservação, sobretudo no trabalho do artista alemão Hans Holbein onde uma anamorfose sob um símbolo enigmático provoca entusiasmo e mistério, tendo suas características estudadas a fundo por um pesquisador somente séculos após sua construção. A escolha desse tema surgiu a partir de um diálogo com o professor orientador, o qual mostrou interesse sobre o mesmo e sobre o fascínio que promove como arte e como elemento que se enquadra em alguns contextos matemáticos, englobando entre outros o cálculo com mudanças de coordenadas. A partir desse diálogo e após uma breve busca em meios eletrônicos por anamorfose, senti que deveria realmente explorá-lo, pois além do contexto artístico que abrange, a anamorfose envolve matemática em toda a sua plenitude, essa pesquisa se desenvolve quase que completamente por meios eletrônicos (buscas em sites, especializados ou não), haja visto a dificuldade em encontrar o tema em livros didáticos. Quanto aos procedimentos executados este trabalho constitui-se por uma pesquisa bibliográfica visando o levantamento de informações, leitura atenta e sistemática e diferentes contribuições científicas, no tocante aos objetivos constitui-se de uma pesquisa exploratória, pois busca proporcionar maior familiaridade com o assunto, visando torná-lo mais explícito, buscando compreender as características fundamentais, a história ao longo dos séculos e as aplicações da anamorfose no contexto social atual.

## 2. HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO

O termo Anamorfose é de origem grega, significa *reformulação, forma reconstituída, formado de novo*, ou seja, que dizer que houve uma mudança de forma. Ref. [1]

Uma anamorfose é uma imagem distorcida, aparentemente disforme que necessita de uma reflexão num determinado sistema ótico, ou da observação por um ângulo especial para que sua forma correta possa ser visualmente reconstituída. Por sistema ótico consideramos um espelho curvo; esférico, cilindro, piramidal ou mesmo plano. Trata-se, portanto, de uma ilusão de ótica cujo ângulo adequado para visualização pode ser considerado um acidente de ponto de vista. Segundo Albrecht Dürer (1471-1528) a anamorfose, também conhecida como *a perspectiva secreta*, é utilizada na arte como um efeito perspectivo que induz o observador a buscar o ângulo perfeito de observação previamente determinado sob o qual a imagem recobrará sua forma original, esta arte sempre esteve presente tanto no campo artístico como no campo matemático, onde o efeito de distorção é produzido com base em cálculos gráficos ou que distorcem a perspectiva ou descrevem a imagem inversa que será reconstituída visualmente por um espelho curvo. Hoje a arte anamórfica abrange uma área mais expressiva, estando presente tanto nas artes plásticas quanto na publicidade e até mesmo na arte cinematográfica. A figura abaixo ilustra em seu centro um detalhe anamórfico, o qual pode ser desvendado no cilindro da figura seguinte.



Figura 1: Anamorfose de István Orosz (em cilindro espelhado)



Figura 2: Anamorfose de István Orosz (em cilindro espelhado).

Segundo LIMA (2006), “a arte da anamorfose teve origem há aproximadamente 700 anos na China”, donde os trabalhos mais significativos em cilindros espelhados datam de 1575. Posteriormente, levada para a Itália na época do renascimento, tem como trabalho mais antigo nesta região, criado no ano de 1485 por Leonardo Da Vinci, o quadro Leonardo’s Eye, uma pintura que num primeiro momento aparece disforme e irreconhecível. Apenas observando-a de um ângulo adequado é que se percebe um olho com suas pálpebras e sobrancelhas. Leonardo da Vinci adiantou-se neste contexto produzindo telas em preto e branco que num ângulo de visão frontal aparentavam não possuir sentido, mas observando-se das bordas, rostos humanos tomavam formas. Essa técnica em que se distorce a imagem com acentuados alongamento e inclinação, difundida pelo mesmo e datada do século XV, foi categorizada como *Anamorfose de perspectiva*, ou *anamorfose oblíqua*.

No período Barroco outras técnicas foram trabalhadas como a *anamorfose catóptrica* e o *Trompe L’Oeil*.

Os desenhos anamórficos até então mantidos em segredo, tiveram seus princípios revelados no livro publicado em 1630 “*Perspective Cylindrique et Conique*”, de Vaulezard (LEEMAN, FRED 1976). A arte anamórfica então se fortaleceu por toda a Europa, invadindo as casas tradicionais com a confecção de diversos exemplos, e perdurou pelos

duzentos anos seguintes tornando-se popular em murais e paredes da época. Porém, com o surgimento da fotografia *Daguerreo - type*, essa arte perdeu forças e declinou por volta de 1860, quando o público voltou os olhares para a fotografia vendo nessa ferramenta uma melhor maneira de refletir o mundo em sua volta.

## 2.1 O Ícone da Anamorfose

A obra mais famosa que se utiliza dessa arte, data de 1533, *The Ambassadors* (*Os Embaixadores*), pintada em óleo e têmpera sobre madeira pelo mestre Hans Holbein, que foi exposta no topo de uma escada de um castelo, Somente num determinado ponto da escada tinha-se a visão de um crânio, logo mais acima ao posicionar-se de frente para os embaixadores, o mesmo não era mais perceptível. Esta pintura medindo 209 x 207 cm pertencente à National Gallery de Londres, é hoje considerada o ícone da anamorfose, e uma das mais famosas do jovem mestre alemão nascido em Augsburg, em 1497 ou 1498.



.Figura3: “Os Embaixadores” de Hans Holbein.



Figura 4: Detalhe Anamórfico reconstituído.

Os embaixadores retratados em tamanho real são Jean de Dinteville, um embaixador de Francisco I da França, e Georges de Selve, bispo de Lavaur (sudeste da França), que esteve em Londres no mesmo ano da composição da obra. A mesma incorpora símbolos e paradoxos que segundo estudiosos, seriam enigmas que representariam o aprendizado, a religião, a mortandade e a ilusão da tradição do renascimento do norte. O símbolo mais enigmático é uma figura disforme que se encontra na parte inferior da tela, conforme ilustrado na figura 2. Ref. [1]

De acentuada importância na história da arte, essa obra é simbolicamente rica, devido em grande parte ao enigma da imagem que aparece em primeiro plano, enigma investigado, apurado, somente no século XX, quando o historiador de arte lituano-francês *Jurgis Baltrusaitis* (1903-1988), seguindo seu postulado: “Eu tenho um método de trabalho: ir à fonte, olhar para os textos reais, além dos artigos de revisão (...) é indo à fonte que chegamos a uma visão precisa das coisas”, (tradução nossa) investigando atentamente, constatou que a misteriosa imagem disforme no lado inferior esquerdo da tela, é a anamorfose de uma caveira. Ele afirma: “Um objeto singular, como um osso de choco, flutua acima do chão: é um crânio anamórfico que se endireita quando fechamos acima, olhando para a esquerda. Um sentido oculto e solene pesa em qualquer fase”. (tradução nossa)

Em seu livro *Anamorphoses, ou Thaumaturgis opticus*, ele enuncia:

A perspectiva é geralmente considerada na história da arte, como algo realista restaurar a terceira dimensão. É essencialmente um dispositivo que pode servir todos os fins. Estamos lidando aqui com o lado fantástico

e absurdo: Uma Perspectiva depravada por uma lógica de demonstração de suas leis. (tradução nossa)

Essa deformação ótica, só aparece corretamente se o espectador se posicionar à direita da tela e a alguns metros de distância, olhando de cima para baixo no sentido da inclinação, outra possibilidade consiste na observação refletida nas costas de uma colher, quando a convexidade desse objeto reverte a perspectiva distorcida.

## 2.2 Anamorfoses de Espelhos

Diferentes técnicas e formas de elaboração de anamorfoses foram desenvolvidas ao longo da história. No Barroco, século XVII, foi praticada a *anamorfose de espelhos* ou *catóptrica*, ou ainda anamorfose em cilindro espelhado, cujos primeiros registros foram encontrados na China antiga. Essa técnica é possivelmente a mais intrigante. Ref. [1] Desde então a arte anamórfica ultrapassou os limites do caráter artístico, caindo no gosto popular, sendo disseminada para transmitir mensagens de cunho político, erótico, caricaturas, ou como mensagens secretas em períodos de guerra, para aqueles que detinham o conhecimento sobre o segredo do espelho. Assim sendo, o que se tem é uma metodologia eficaz de enviar uma mensagem codificada de tal modo que uma imagem torna-se um código secreto devido a acentuada deformação que envolve toda a figura. Vale enfatizar que essas aplicações se fizeram presentes nas demais técnicas, não se limitando apenas aos espelhos.

Entretanto, como a perspectiva secreta manteve-se de certa forma adormecida por um longo período, o seu resgate do esquecimento por artistas visuais só aconteceu no decorrer do século passado, quando novamente suscitaram seu caráter artístico e seu potencial. Um dos artistas contemporâneos que se destacam é o húngaro István Orosz, com seus trabalhos que interligam imagem anamórfica e reflexo com impressionante riqueza de detalhes. István nasceu em 1951, seus cartazes e arte gráfica tem destaque em inúmeras exposições internacionais. Atuando em diferentes áreas como designer gráfico, animador e diretor de filme, pintor e ilustrador, certamente ele é mais conhecido por sua renovação da arte anamórfica.

Especializado na técnica de cilindros espelhados, seu melhor trabalho é possivelmente o chamado *Mysterious Island*, o esboço de uma praia com uma vela empurrada pelo vento e dois homens em terra firme. Nessa figura, se a imagem é virada de

ponta cabeça e um espelho cilíndrico é colocado sobre o sol, surge refletida a imagem de Jules Verne. (Escritor francês considerado o precursor do gênero de ficção científica). Como mostra a figura abaixo.



Figura 5: Mysterious Island de István Orosz

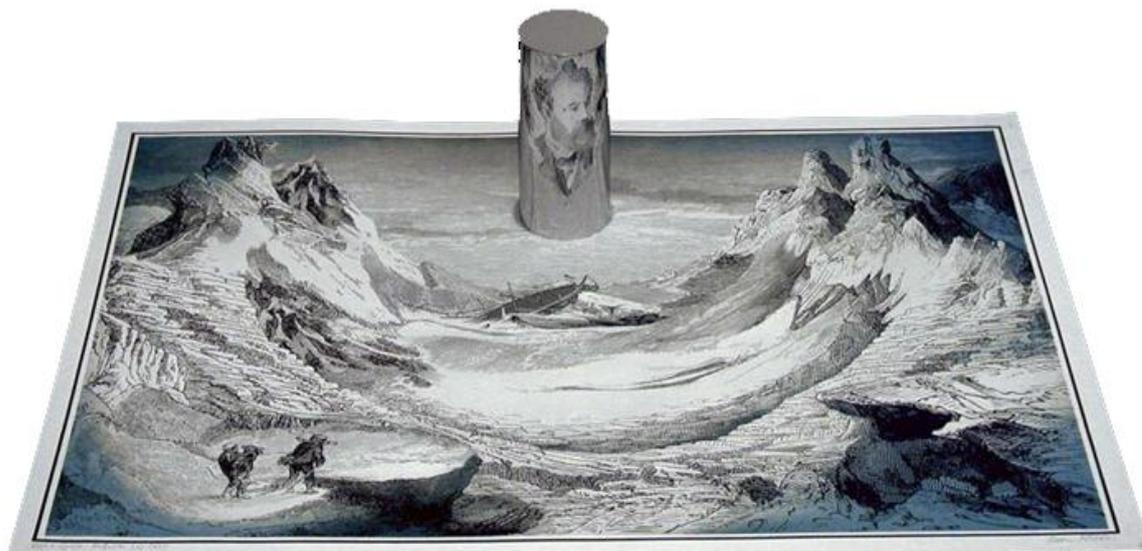


Figura 6: Mysterious Island de István Orosz (detalhe em cilindro espelhado)



Figura 7: Anamorfose de István Orosz



Figura 8: Anamorfose de István Orosz

### 2.3 A Técnica Trompe L'Oeil

Amplamente difundida no período Barroco, a técnica *Trompe L'Oeil*, (que traduzindo do francês significa: engana o olho) consiste numa ilusão ótica que integra arquitetura com ilusionismo. Disseminada por diversas partes do mundo, compõe-se de pinturas elaboradas principalmente em tetos planos no interior de catedrais e igrejas, transmitindo a impressão de que o teto seria uma extensão das paredes até o céu. Através da *Trompe L'Oeil* o observador tem a ilusão de estar diante de uma imagem real tridimensional e não numa composição em duas dimensões.

O termo refere-se a qualquer tipo de ilusionismo acentuado que se empregue nas artes com o objetivo de mudar a percepção do espectador, estando presente desde a era Greco Romana. Como belos exemplos pode-se citar os magestosos afrescos da cúpula e da abóbada da Igreja de Santo Inácio, em Roma, pintados pelo jesuíta Andrea Pozzo (1642-1709) entre 1685 e 1694. Ref. [1].

No renascimento, auxiliados pelas conquistas da geometria e da ótica, os avanços da perspectiva renascentista tem papel decisivo nos efeitos ilusionistas, mesmo que nem sempre o uso desses recursos implique o *Trompe L'Oeil* propriamente dito. Muitas vezes encontramos no interior das igrejas jesuítas no estilo maneirista, pinturas *Trompe L'Oeil* no teto. Um exemplo notadamente impressionante encontra-se no palácio Chatsworth House (Inglaterra), em Derbyshire, onde uma das portas internas parece ter um arco de violino e suspensa a partir dele, um *Trompe L'Oeil* pintado em torno de 1723. Essa forma de arte foi explorada novamente no século 19 pelo pintor americano William Harnett. Mais tarde, no século 20, o pintor Richard Haas produziu grandes murais com essa técnica em cidades americanas. Um outro interessante emprego encontra-se em Donald O'Connor, uma cena do filme Cantando na Chuva "Corrida pela parede". Durante o final de "em fazer rir", número que ele executa inicialmente em uma verdadeira muralha, ele dirige-se para um aparente corredor, mas quando porém sobe, pode-se perceber que a mesma é na verdade um grande mural pintado em *Trompe L'Oeil*.

A pintura fosca é outra variante dessa técnica, utilizada na produção cinematográfica, onde as peças de um cenário complicado são pintadas em painéis de vidro que são montados na frente da câmera durante a produção da cena. Esta aplicação foi usada por exemplo nos primeiros filmes de Star Wars. O *Trompe L'Oeil* fictício é destaque em muitos desenhos animados e filmes, como em *Amor além da Vida*, quando enormes

paisagens pintadas à mão tornam-se reais, incorporando uma terceira dimensão e tornando-se um novo mundo.

Pode-se perceber que em qualquer estilo de arte que possa ser considerado anamorfose, existem aplicações práticas e eventualmente ocultas sempre presente, mas que passam despercebidas como elementos desse contexto. Um exemplo que segue os traços desse estilo pintado em 1959 pelo artista E. A. Marr, encontra-se no teto da Paróquia de Nossa Senhora da Conceição situada no município de Areia, estado da Paraíba. No referido teto o observador em contato visual com as figuras sobre ele, tem a impressão de que há uma abertura ali em vez de teto, e que as pessoas em duas dimensões que compõem a cena, estariam de certa forma olhando para baixo, numa realidade tridimensional e que toda aquela superposição de tintas seria uma extensão da igreja que se eleva para o céu. Abaixo encontra-se ilustrada a referida obra.



Figura 9: Teto da paróquia Nossa Senhora da Conceição - Areia PB

### 3. APLICAÇÕES DE ANAMORFOSES

Frequentemente nos asfaltos das ruas, estradas e avenidas, podem-se ver sinalizações como setas e palavras escritas com certo grau de alongamento no sentido do movimento, esta constitui uma das aplicações mais comuns da anamorfose na atualidade, palavras ou figuras que necessitam da distorção para que possam ser visualizadas com perfeição pelo ângulo em que se encontra o motorista. haja visto que se fossem escritas/desenhadas na proporção correta dificultar-se-ia consideravelmente a leitura. Neste caso, o diferencial velocidade também influi na maneira como a anamorfose será vista, por exemplo, num trecho onde os veículos passam em alta velocidade a leitura estará comprometida pois a sinalização passará sob o mesmo com a mesma velocidade, neste caso o alongamento deverá ser mais acentuado.



Figura 10: Anamorfose no trânsito.

Os nomes “Ambulância” e “Polícia” aparecem invertidos na parte frontal dos respectivos veículos, constituindo, portanto uma anamorfose, pois suscita a leitura especular invertida.

Outro exemplo de aplicação reside no cinemascope, uma tecnologia de produção cinematográfica que usava lentes anamórficas para gravar filmes em formato widescreen. As lentes anamórficas tinham a característica de projetar uma imagem mais larga a partir de uma película mais estreita.

Anteriormente ao cinemascope, os formatos de video tinham uma relação de aspecto de 1.37:1, com o advento dessa nova tecnologia de lentes anamórficas – desenvolvidas pelo presidente da twentieth Century Fox no ano de 1953 – foi possível a criação de uma imagem com uma relação de aspecto de até 2.66:1. Essas lentes foram utilizadas até 1967, constituindo assim um marco inicial da filmagem moderna e consequentemente na exibição de filmes.

A publicidade eventualmente usa recursos anamórficos para proporcionar maior visibilidade aos seus produtos, como na figura a seguir, onde a bandeira *VISA* que aparece ao lado do gol na realidade não está na vertical, é simplesmente uma figura de forma distorcida pintada no chão, cujo ângulo ideal à sua reconstituição visual é o mesmo onde se encontra a cabine da imprensa.



Figura 11: Anamorfose na publicidade

Um autêntico exemplo de aplicação de anamorfose em cilindro espelhado, encontra-se no hall da Estação República do metrô de São Paulo, o "Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade" do artista plástico Antonio Peticov, produzido em 1990.

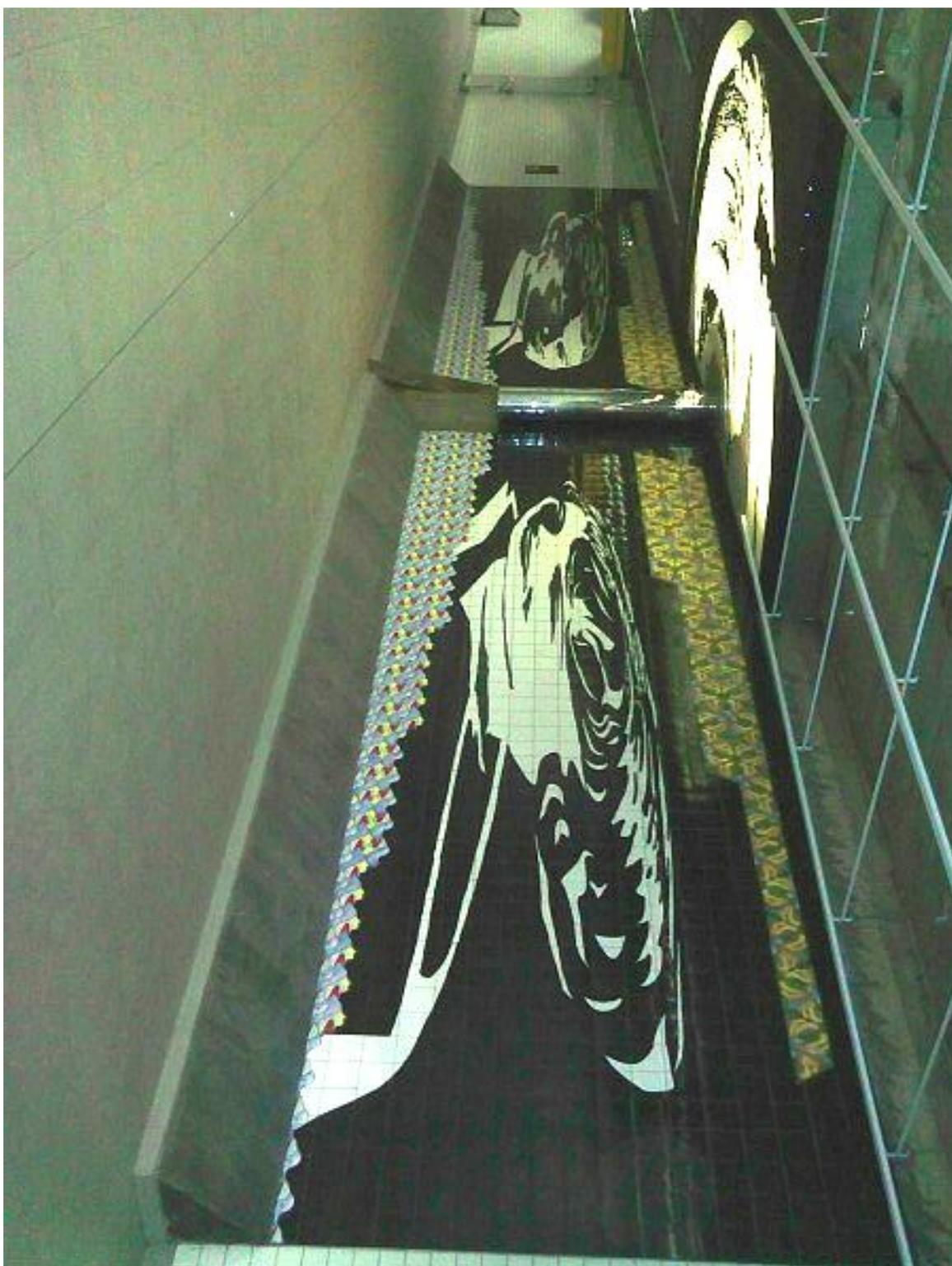


Figura 12: Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade  
Autor: Antonio Peticov



Figura 13: Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade  
Autor: Antonio Peticov