Figura 14: Monumento Antropofágico com Oswald de Andrade (detalhe no cilindro)
Autor: Antonio Peticov

Abaixo,encontram-se trechos retirados de um informe publicitário sobre uma marca de impressoras. Os quadros foram capturados do filme e estão na sequência da esquerda para a direita, de cima para baixo. Trata-se de dois coelhos sobre uma folha de papel, sendo que um deles é uma figura anamórfica e o outro é real, a diferença se torna óbvia à medida em que o ângulo de filmagem se desloca.

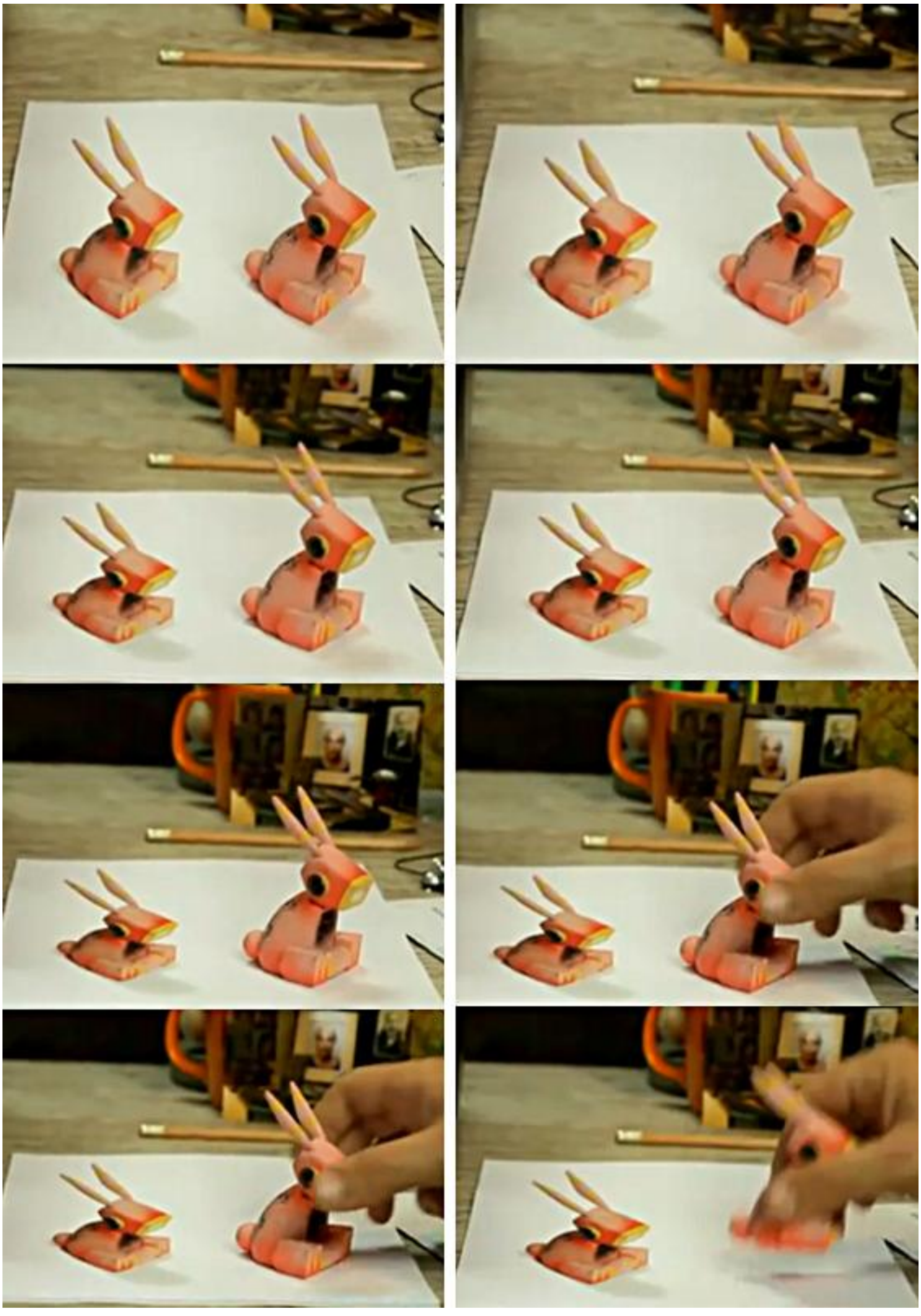

Figura 15: Anamorfose na Publicidade.

Na pintura mural dos séculos XVI e XVII a anamorfose foi muito valorizada, empregada com a finalidade de criar ilusões óticas, sobretudo na pintura sobre superfícies curvas, donde os mais belos exemplos são as ilustrações das abóbadas das igrejas. Alguns artistas trabalhavam empiricamente pintando através do reflexo de algum espelho curvo, produzindo assim suas obras anamórficas, outros recorriam aos cálculos de perspectivas e geometria, à matemática enfim. Atualmente há softwares que produzem anamorfoses a partir de qualquer figura como numa edição de imagem, o que torna o trabalho demasiadamente fácil. Ref. [5]

O Inglês *Julian Beever*, entre outros, utiliza-se de pinturas anamórficas em ruas para mostrar sua arte e fazer publicidades, tendo trabalhado em vários países como um artista performático criando murais para empresas, confeccionando composições ricas em detalhes e dignas de entusiasmos, produzidas com giz que são conhecidas como C*halk Art* ou *Pintura na rua em 3D*, imagens aparentemente tridimensionais que parecem desafiar as leis da perspectiva. Abaixo, uma anamorfose de Julian Beever vista de um ângulo inadequado à perfeita compreensão da figura, em seguida, a mesma imagem vista do Ângulo correto.

Figura 16: Chalk Art de Julian Beever

Figura 17: Chalk Art de Julian Beever (visualmente reconstituída).

Figura 18: Chalk Art de Julian Beever

Figura 19: Chalk Art de Julian Beever

4. CONSTRUINDO UMA ANAMORFOSE

A Matemática possibilita a elaboração de anamorfose por diferentes meios, como por exemplo:

Vetores: por meio da multiplicação de vetores pode-se alongar e inclinar uma imagem, um exemplo dessa aplicação é transformação que possibilita criar uma distorção como a caveira do quadro de Hans Holbein.

Mudanças de Coordenadas: quando uma figura transita entre duas superfícies diferentes, como por exemplo, nos cilindros espelhados, ou seja, numa superfície plana ver-se uma anamorfose e numa superfície cilíndrica surge refletida a figura reconstituída, tem-se então um caso de mudança de coordenadas onde todos os pontos do plano são teoricamente transmutados para o cilindro. O que acontece nesse caso é simples, do ponto de vista ótico: quando raios paralelos incidem sobre um mesmo plano, eles são refletidos no mesmo ângulo e continuam paralelos, não há distorção. Entretanto, raios paralelos incidindo sobre um espelho curvo são refletidos com ângulos diferentes, cada raio reflete em ângulos iguais em relação à sua proporção do espelho, depois da reflexão os raios não são mais paralelos e a imagem é distorcida. Ref. [2]

Para melhor entendimento desse processo, analise-se a figura abaixo:

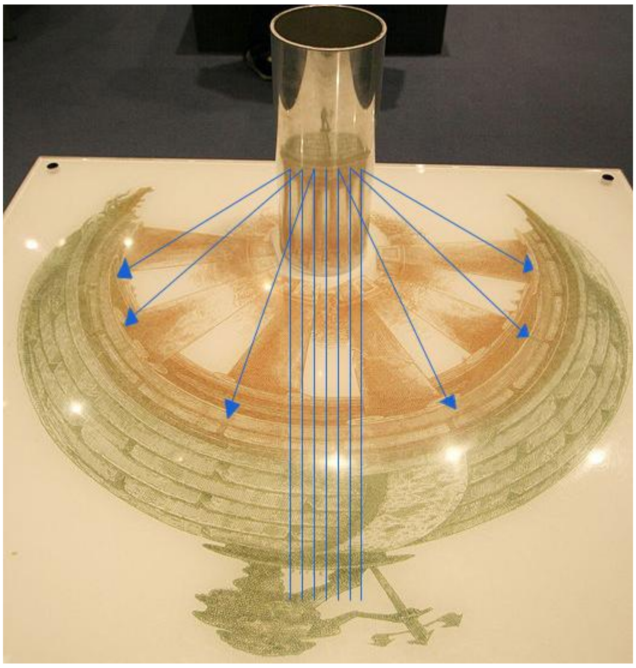

Figura 20: Anamorfose de István Orosz (modificada)

Esta anamorfose foi modificada para ilustrar o sentido da reflexão sobre o cilindro. Considerando o olhar do observador em direção ao cilindro como raios paralelos, pode-se compreender como este o reflete em diferentes ângulos devido à sua superfície curvada, possibilitando a observação dos diferentes pontos que compõem a figura, nele refletidos

4.1 Sistema de Coordenadas Polares

Considerando um ponto **P** do plano, utilizando coordenadas retangulares (cartesianas), pode-se descrever sua localização no plano escrevendo **P** = *(a,b)* onde *a* é a projeção de **P** no eixo *x* e *b*, a projeção de **P** no eixo *y*.

Pode-se também descrever a localização de **P** a partir da distância do mesmo à origem **O** do sistema, e do ângulo formado pelo eixo *x* e o segmento **OP**, caso **P** ≠ 0. Denota-se **P** = (r,ɵ) onde *r* é a distância de **P** até **O,** e *ɵ* (téta) o ângulo tomado no sentido anti horário, da parte positiva do eixo **O***x* ao segmento **OP**, caso **P** ≠ 0. Se **P** = 0, denota-se **P** = (0,ɵ), para qualquer ɵ. Esta maneira de representar o plano é chamada Sistema de Coordenadas Polares. Ref. [9]

A figura abaixo ilustra o ponto **P** e suas projeções *a* e *b* nos eixos coordenados.

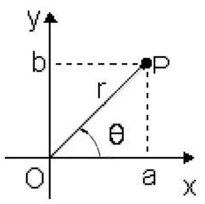

Figura 21: Gráfico

Para representar pontos em coordenadas polares, necessita-se apenas de um ponto **O** do plano e uma semi–reta com origem em **O**. Representado abaixo um ponto **P,** de coordenadas polares (r, ɵ), tomando o segmento **OP** com medida *r*. O ponto fixo **O** é chamado pólo e a semi reta, eixo polar.

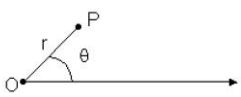

Figura 22: Pólo e eixo polar

4.2 Mudança de Coordenadas Retangulares para Coordenadas Polares

Um ponto **P** do plano pode ser representado em coordenadas retangulares (cartesianas) por *(x,y)* ou em coordenadas polares por *(r,θ)*. Para facilidade de comparação entre os dois sistemas, considera-se o ponto **O** coincidindo com a origem do sistema cartesiano e a semi-reta, a parte do eixo x, à direita de **O** como mostrado na figura 21.

Seja **P** um ponto com coordenadas cartesianas *(x,y)*, considerando **P** com coordenadas *(r,θ)*, tem-se as relações $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. Como $x^2 + y^2 = r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta = r^2$ (cos θ + senθ) = r 1 = r, então r = $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se $r = 0$, isto é, x = y = 0 pode-se tomar θ qualquer, Se $r \neq 0$, θ é tal que cosθ = x/r e senθ = y/r.

Por exemplo: Sendo o ponto de coordenadas cartesianas P (3,0), tes-se a transformação em coordenadas polares: $r^2 = (3)^2 + 0^2$, o que implica r = 3. Como cosθ = $\frac{3}{3}$ = 1, e senθ = $\frac{0}{3}$ = 0 então $\theta = \frac{\pi}{2}$ Portanto através da mudança de coordenadas obtém-se o ponto P'= (r, θ), P' = $(3,\frac{\pi}{2})$.

Exemplos de outros pontos nas duas coordenadas. Ref. [9]:

Ponto	Coordenada cartesiana	Coordenada polar
A	(1,0)	(1,0)
B	(0,2)	$(2,\pi/2)$
C	(-3,0)	$(3,\pi)$
D	(0,-3)	$(3,3\pi/2)$
E	(1,1)	$(\sqrt{2},\pi/4)$
F	(-2,2)	$(2\sqrt{2},3\pi/4)$

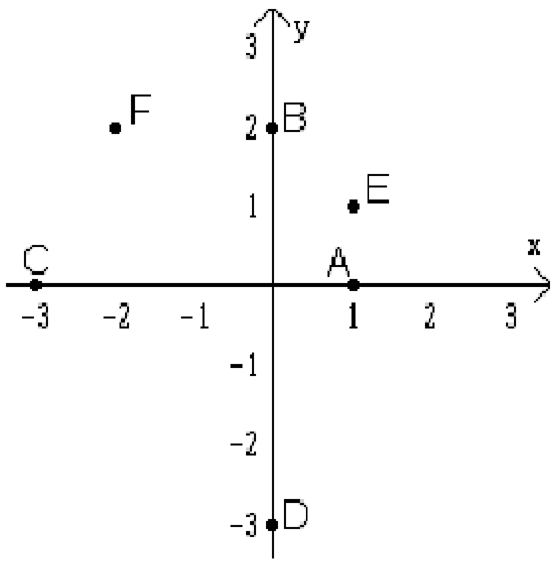

Figura 23:Pontos

Assim, aplicando esse critério a todos os pontos do plano, as equações $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$ transformam o retângulo G: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ no quarto de círculo R limitado por x2 +y2 = 1 no primeiro quadrante do plano xy.

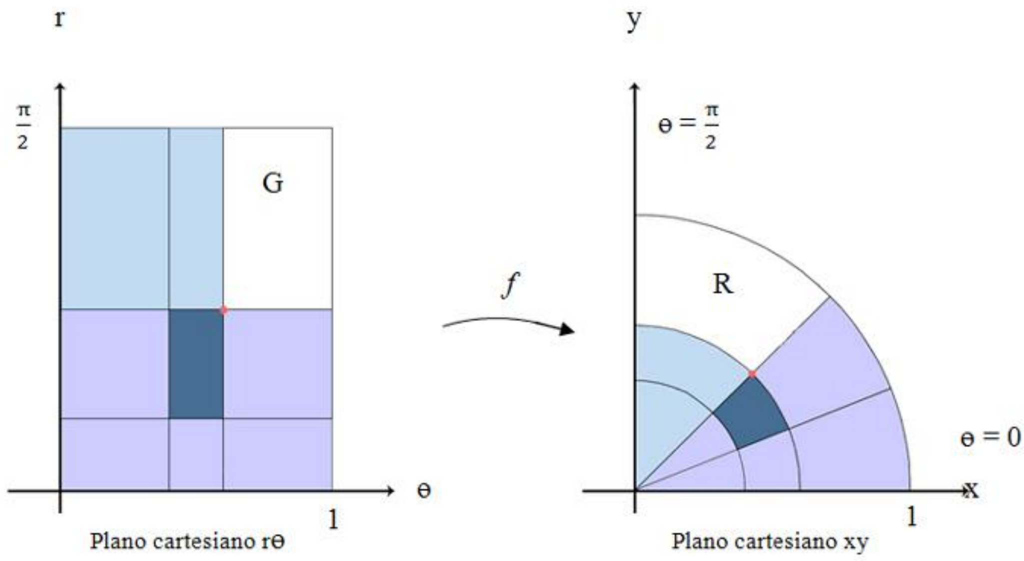

Figura 24: Planos Cartesianos

Nesta figura, a função *f* representa as equações $x = r\,cos\theta$, $y = r\,sen\theta$ que promovem a respectiva transformação. Ref. [10]

Tal como no gráfico matemático propriamente dito, uma figura qualquer também pode ser considerada como gráfico desde que a ela se imponha um sistema de coordenadas, daí cada ponto da imagem será tratado como um ponto matemático passível a todas as influências promovidas por qualquer intervenção matemática que a ela se deseje estabelecer. Tomando uma reta no plano cartesiano, por exemplo: $x = 3$, ao transpor todas as suas coordenadas o resultado no plano polar é um arco de raio $r = 3$, a figura seguinte ilustra o caso.

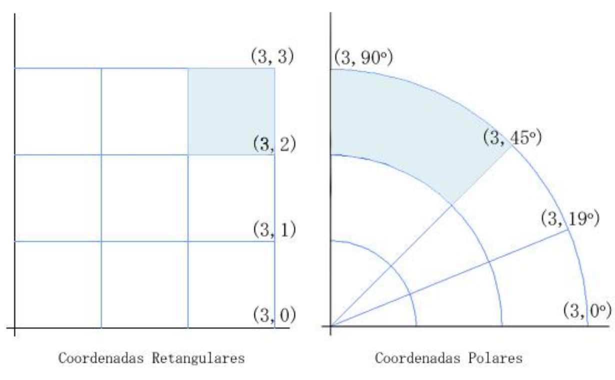

Figura 25: Coordenadas Retangulares e polares

Quando se submete uma imagem a esse procedimento, obtém-se uma modificação análoga e consequentemente uma anamorfose. Na figura seguinte, um desenho de *István Orosz* mostra no detalhe do canto superior esquerdo uma imagem graficamente mapeada, após uma mudança de coordenadas cada ponto é convertido, cada retângulo torna-se arco de círculo e consequentemente toda a imagem é distorcida originando uma anamorfose mostrada no detalhe do centro, o resultado nesse caso é uma Anamorfose de Espelho (Anamorfose Catóptrica, Anamorfose em Cilindro Espelhado).

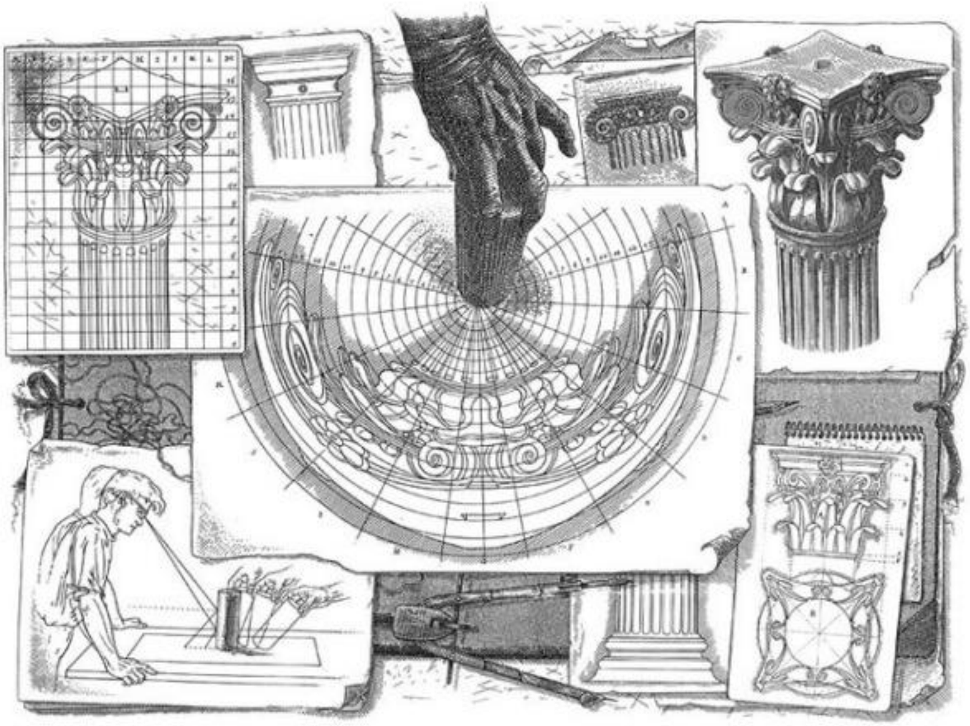

Figura 26: Construção de Anamorfose de Espelhos de *István Orosz*.

Por fim, abaixo uma simulação produzida com o auxilio de um software demonstra o que acontece com uma imagem modificada por mudança de coordenadas.

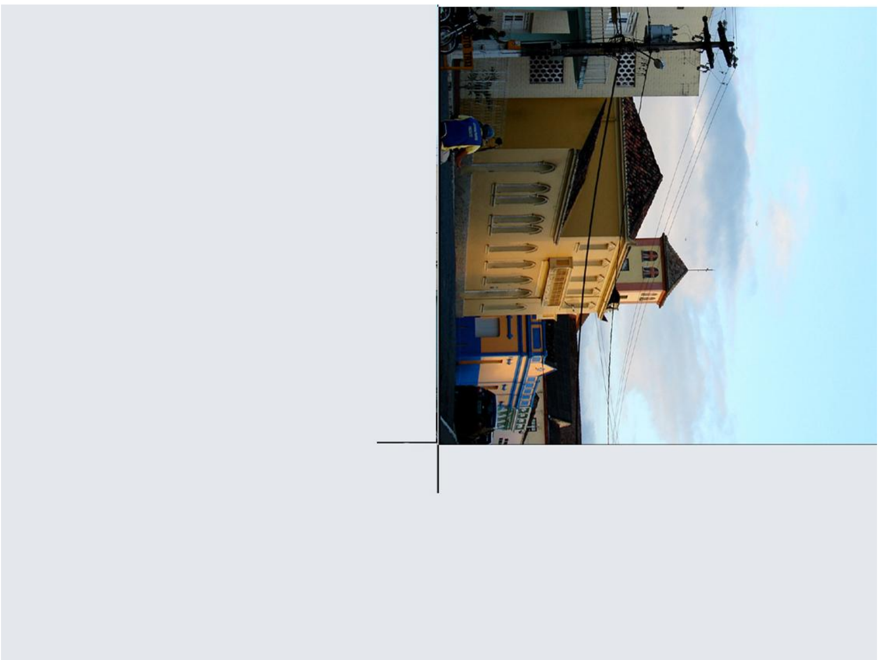

Figura 27: Rua Vigário Odilon – Areia PB (em coordenadas retangulares).

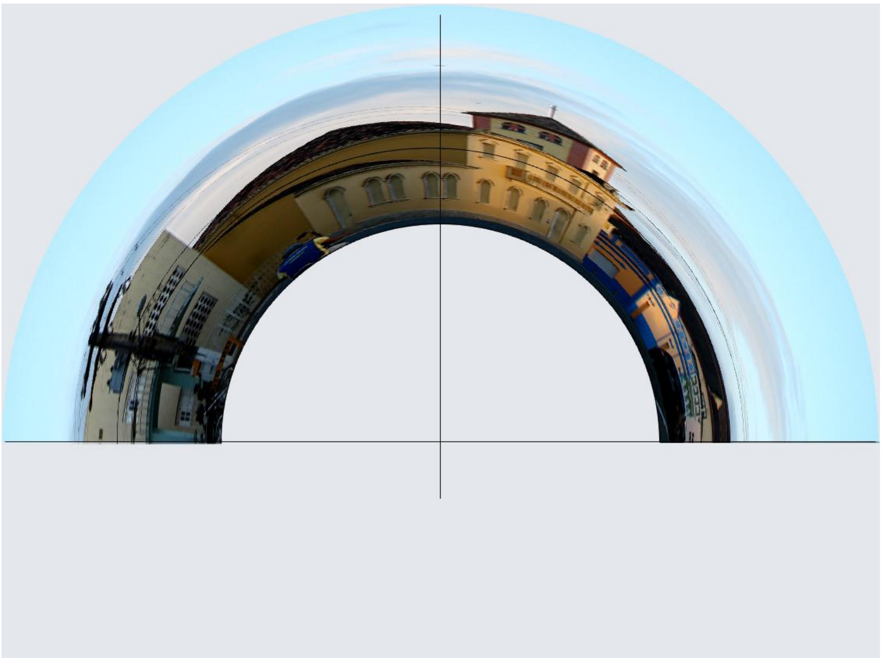

Figura 28: Rua Vigário Odilon – Areia PB (em coordenadas polares).

4.3 INVERSÃO ESPACIAL

4.3.1 Inversão de espaço e Transformações Óticas

Discutiremos neste tópico a fascinante idéia de que podemos tomar toda a região de uma superfície bidimensional entre a borda externa de um círculo e o infinito (em todos os sentidos) e comprimi-lo para o interior do círculo com uma única transformação matemática. A Inversão do Círculo é uma forma de fazer isso, e a explicação de suas propriedades, quando aplicada a objetos geométricos simples, constitui um importante ramo da geometria. No entanto, a inversão clássica do círculo plano é apenas um caso especial de transformações mais gerais que podem ser aplicados a objetos geométricos em torno de um círculo. Por sua vez, estas transformações planas podem ser generalizadas para três (ou mais) dimensões. A Inversão em uma esfera pode ser útil quando empregadas para gerar novos sistemas de coordenadas curvilíneas a partir de sistemas mais antigos ou familiares dados. Se as linhas coordenadas se cruzam em ângulos retos, as linhas correspondentes transformadas também serão ortogonais porque as inversões preservam os ângulos. Ref [11]

4.3.2 A Inversão do Círculo

A inversão do círculo com centro em O e raio *r*, ao qual está associada uma circunferência C de centro em O e raio *r*, consiste em uma transformação dos pontos do plano contendo o círculo de tal forma que um ponto P é transformado num ponto P' tal que:

$PO.OP' = r^2$. (Equação 1)

A figura seguinte ilustra estes pontos.

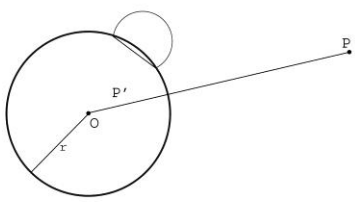

Figura 29: Inversão do ponto P

É relativamente simples provar uma série de teoremas envolvendo essa transformação:

1. Um círculo que está completamente fora de C se transforma em um círculo inteiramente dentro de C, mas não passa através de O (o centro de inversão), e vice-versa.

2. Um círculo que intersecta C e passa por O, é transformado em uma linha reta que passa pelos pontos de intersecção dos dois círculos, e vice-versa. (Esse caso está ilustrado na figura 29)

3. O inverso de uma linha reta que não passa por C, é um círculo dentro de C que passa por O, e assim por diante. (como mostra a figura abaixo)

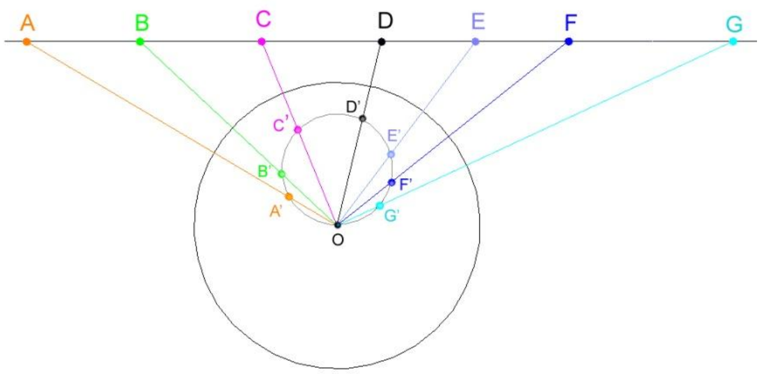

Figura 30: Inversão de uma linha reta

A Inversão do Círculo também pode ser abordada oticamente usando uma superfície retletora cônica descrita conforme a figura 31 abaixo, onde o objeto situa-se no plano fora da base do cone. Quando o cone é visto diretamente de cima, a imagem visualizada se situa dentro dos limites de sua base. Os teoremas anteriormente mencionados podem ser verificados facilmente. Uma vez que as transformação seja regular, as transformações de vários objetos podem ser feitas usando uma régua e um compasso.

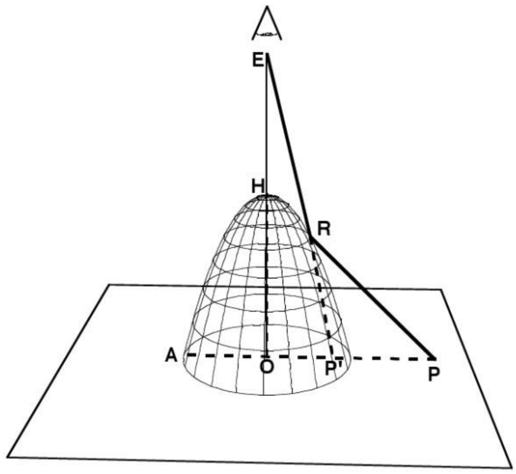

Figura 31: O esquema de uma inversão de círculo reflexiva cônica por um anamorfoscópio. O objeto a ser refletido está num plano euclidiano que contém o anamorfograma, ou a imagem que é transformada em uma imagem já conhecida pelo observador, percebida como se estivesse dentro dos limites da base do cone (campo de imagem) quando este se apóia no plano e é observado diretamente do seu ápice. A altura do cone é h, o raio da base é a, e o inverso do ponto P é P ', que está de acordo com a equação (1). O ângulo de incidência da luz de P ' na área do cone R é igual ao seu ângulo de reflexão para um olho em E.

4.3.3 Inversão reflexiva em um cone simples

Suponhamos agora que tenhamos a configuração geral mostrada na Figura 31, tilizando agora um cone de lado reto. A trajetótia de um raio de luz de um objeto situado no plano para um olho é indicada pela linha tracejada mais grossa, enquanto a percepção da origem da luz está no ponto de intersecção da linha tracejada mais fina e no plano base (ponto P). Por simplicidade, presume-se que o ponto de observação está no infinito acima do plano do objeto; portanto, o raio de luz é especificado como sendo paralelo ao eixo de simetria do cone. Esta é uma aproximação moderada para se ter uma altura de visão maior ou igual a vinte vezes a altura do cone. A regra de transformação é obtida considerando a Figura 32; na qual as únicas regras utilizadas para se obter as fórmulas e a transformação são as leis da física. Ref [11]

1. O ângulo de incidência do raio de luz na superfície do cone é igual ao ângulo de reflexão.
2. A percepção da origem de um raio de luz ocorre na interseção da linha reta traçada a

partir do olho, intersectando o cone no ponto de reflexão e em seguida intersectando o plano base.

3. Quando o ângulo sólido no vértice do cone é de noventa graus, a luz do infinito é visualizada como tendo origem no centro da inversão. Se o ângulo sólido é inferior a noventa graus, então o círculo não se situa no infinito. Ref [11]

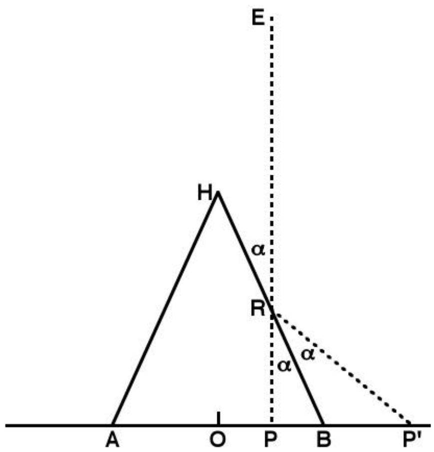

Figura 32. Uma seção longitudinal central de um cone lateral reto mostrando as linhas de construção e os raios de luz que são necessários para desenvolver as expressões matemáticas para a inversão reflexiva que é gerada por este tipo de cone. Os símbolos no diagrama correpondem na Figura 31. As expressões matemáticas são dadas pelas equações abaixo para que a = OB h = OH. Além disso, a é o ângulo de incidência e reflexão do raio de luz, enquanto, em geral, para um cone lateral reto op.op' $\neq a^2$.

Portanto para construir um anamorfograma, começamos com a imagem que será produzida. Ela é formada por segmentos de linha juntando pontos de coodenadas (x,y). A transformação destes pontos para se obter novos pontos, que serão situado no plano do objeto, pode ser obtida após algumas análises trigonométricas por:

$$x \to x' = \frac{x\left(d_1 (x^2 + y^2)^{1/2} + d_2\right)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$y \to y' = y\,\frac{x'}{x}\,,$$

Onde os então denominados fatores de dilatação são:

$$d_1 = 1 - \frac{h\,t}{r}$$

$$d_2 = h\,t,$$

Onde h é o comprimento do cone, r é o raio de sua base, e t = tan[2arctan[r/h]].

Para uma melhor compreenção do que foi exposto iremos visulizar um exemplo poduzido pelo MATHEMATICA. Trata-se da andeira britânica invertida, a Union Jack. Ref [11]

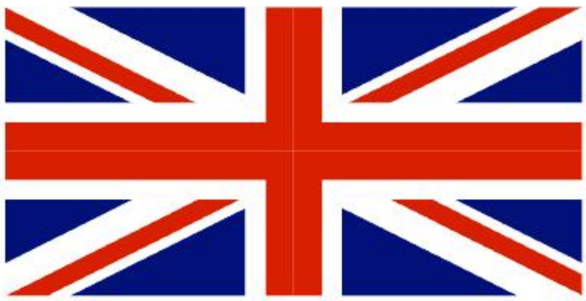

Figura 33 A Bandeira Britânica ou Union Jack

A bandeira invertida pode ser oticamente transformada novamente para a imagem não distorcida, colocando um cone de superfície refletora à altura e raio corretos em seu centro e toda a configuração será visualizada acima do ápice do cone. Assim, teremos invertido a
Union Jack matematicamente e reinvertido opticamente.

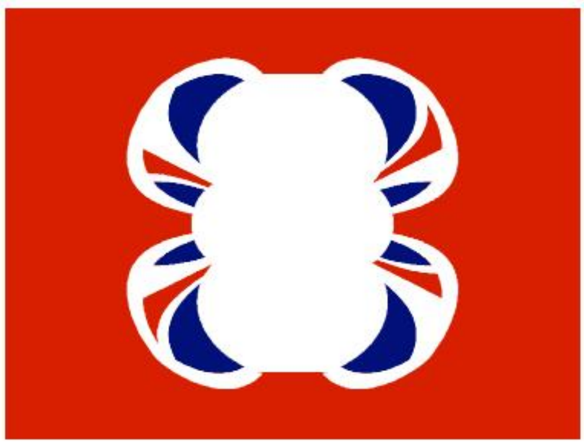

Figura 34. A inversão da Union Jack, obtida pela transformação das coordenadas dada pelas equações acima. Esta figura é invertida de volta para a Union Jack original por um cone refletor que tem uma base circular que toca o interior das quatro centrais cúspides do padrão, e é de uma altura equivalente a 07/08 do diâmetro da base, isto é, o ângulo sólido do cone é de 47,3^{o}.

5. CONCLUSÃO

Percebe-se que a anamorfose é uma técnica de modificação de imagem muito antiga que, entretanto continua viva atualmente proporcionando beleza e desencadeando novas aplicações, Uma importante aplicação dessa arte reside no fato de que quando associada à matemática promove um importante recurso didático, pois pode ser usada para trabalhar elementos como coordenadas polares, vetores, ângulos e até mesmo trigonometria.

A arte anamórfica remotamente era trabalhada de forma manual, quando seus desenvolvedores as produziam com base em cálculos gráficos, ou mesmo de forma empírica especular, com diferentes tipos de superfícies refletoras. Atualmente há uma diversidade de softwares como, por exemplo, o *photoshop* que permitem a manipulação de imagem possibilitando a criação de anamorfoses com um simples clique, contudo essa arte sobrevive e continua em alta, sendo explorada tanto no âmbito das artes plásticas (como nos trabalhos de Julian Beever), quanto como objeto de marketing na já referida publicidade, e até mesmo na arte cinematográfica. Com o avanço da tecnologia ganhou um novo meio de elaboração e consequentemente de locomoção e difusão, tornando-se cada vez mais conhecida e admirada. Na televisão eventualmente surgem matérias de cunho lúdico mostrando imagens anamórficas tridimensionais. Através da internet pode-se contemplar com entusiasmo os trabalhos dos grandes artistas como *Hans Holbein* e *István Orosz*, e entre tantos outros. No trânsito promovem o equilíbrio, e nos tetos planos e cúpulas de igrejas por todo o mundo causam encanto e entusiasmo.

RFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1- Definição de anamorfose, o ícone da anamorfose, anamorfose de espelhos e trompe L'Oeil disponível em:

<http://www.fcsh.unl.pt/invest/edtl/verbetes/A/anamorfose.htm>

Acesso em: 22/03/2011

2- A Técnica Trompe L'oeil,

<http://pt.scribd.com/doc/13140985/A-Matematica-Na-Anamorfose>

Acesso em: 25/03/2011

3- Origem (segundo LIMA 2006) disponível em:

<www.modavestuario.com/356**anamorfose**origenseatualidades.pdf>

Acesso em 3/07/2011

4- (LEEMAN, FRED) disponível em:

<http://entrononentro.haaan.com/anamorfose-o-segredo-de-coimbra/>

Acesso em 3/07/2011

Uso de software na anamorfose disponível em:

5- <http://prope.unesp.br/xxi_cic/27_35059384837.pdf>

Acesso em 05/07/2011

6- Anamorfoses de Julian Beever disponível em:

<http://hubpages.com/hub/Incredible_Beever>

Acesso em: 15/05/2011

7- Anamorfoses de István Orosz disponível em:

<http://www.amusingplanet.com/2010/04/anamorphic-art-by-istvan-orosz.html >

Acesso em: 19/ 05/ 2011

8- Anamorfose de espelhos e Monumento Antropofágico disponível em:

<http://lambaritalia.blogspot.com/2010/06/imagens-magicas-anamorfoses.html>

Acesso em: 21/ 05 /2011

Coordenadas polares disponível em:

9- <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/Polares.pdf>

Acesso em 05/07/2011

10- THOMAS, George B. Cálculo: volume 2. 10 ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003

11- www.mathematica-journal.com/issue/v9i2/contents/SpatialInversion/SpatialInversion.pdf