UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA NÉTA

DETERMINANTES E SUAS PROPRIEDADES

Campina Grande/PB
2014

MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA NÉTA

DETERMINANTES E SUAS PROPRIEDADES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Castor da Paz Filho

Campina Grande/PB

2014

O48d Oliveira Néta, Margarida Ramos de.
Determinantes e suas propriedades [manuscrito] / Margarida Ramos de Oliveira Neta. - 2014.
49 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Castor da Paz Filho, Departamento de Matemática".

1. Determinantes. 2. Cálculo. 3. Ensino Médio. I. Título.
21. ed. CDD 512.943

MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA NÉTA

DETERMINANTES E SUAS PROPRIEDADES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 30 de julho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Castor de Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Maria Isabelle Silva

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a minha amada irmã, pelo seu companheirismo e dedicação durante minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço primeiramente a Deus por ter me iluminado e protegido durante a minha jornada acadêmica, principalmente nos momentos mais difíceis onde Ele foi minha força maior para seguir em frente.

Aos meus pais, Margarene Ramos de Oliveira Rodrigues e José Ailton Rodrigues de Oliveira, os quais foram fundamentais para minha formação, por todo amor, carinho, proteção, esforços, sacrifícios e força quando precisei.

A minha irmã Luana Margarida, que fez muito mais do que seu dever de irmã, foi uma companheira, protetora, amiga e mãe. Agradeço por ter amenizado meu sofrimento e dificuldades estando sempre do meu lado, não me deixando desistir.

Ao anjo que passou pela minha vida, Maciel Evaristo (in memorian), por ter sido meu companheiro, amigo, parceiro, e que me fez tão feliz durante o tempo que passamos juntos, que me apoiou, incentivou, amou e com toda certeza torcia pela minha vitória, o qual irei amar sempre.

A todos meus avôs, que infelizmente não se encontram entre nós e não poderão participar dessa etapa da minha vida, mas com certeza sentiriam muito orgulho.

A minha primeira professora Margarene Ramos (mãe), que me ensinou a ler, escrever e principalmente conhecer os números, pelos quais me encantei.

A todos meus familiares, amigos por ajudarem quando precisei e sempre que possível estarem do meu lado.

Ao meu namorado, pela compreensão e paciência.

Ao professor, Castor da Paz Filho, orientador deste trabalho, por todo apoio, atenção e dedicação.

As professoras, Maria Isabelle e Kátia Suzana que compõem a banca examinadora, pela participação e contribuição que deram para o melhoramento deste trabalho.

Enfim, agradeço de coração, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação profissional.

Nossos sonhos a gente é quem constrói, é vencendo os limites, escalando as fortalezas. Conquistando o impossível pela fé.

(Bruna Karla)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso trás um estudo aprofundado e detalhado sobre os determinantes, destacando suas propriedades como uma ferramenta facilitadora dos cálculos. Tendo como objetivo principal proporcionar de forma detalhada e objetiva uma compreensão mais fácil para aqueles que têm interesse sobre este assunto, através de propriedades, regras e teoremas desenvolver estratégias mais fáceis de calcular um determinante. Além de relatar um pouco da historia do determinante, enfatizando os principais personagens que contribuíram para seu surgimento, e a introdução de algumas definições necessárias para o entendimento do assunto. A noção de determinantes desempenha um papel importante não só na matemática como também em outras áreas. Nesse trabalho serão abordadas algumas aplicações, tanto na Matemática como na Física. Com o intuito de facilitar a prática do professor que pretende transmitir esse assunto, foi feito um plano de aula, que pode ser aplicado no ensino médio.

Palavras-chave: Determinantes, Definições, Propriedades, Aplicações.

ABSTRACT

This conclusion work behind a thorough and detailed study of the determinants, highlighting its properties as a tool facilitating the calculations. Its main goal is to provide a detailed and objective way easier to understand for those who have interest in this matter, through properties, rules and theorems easier to develop strategies to calculate a determinant. In addition to reporting a bit of history of the determinant, emphasizing the main characters that contributed to its emergence, and the introduction of some definitions necessary for the understanding of the subject. The term plays a crucial role not only in mathematics but also in other areas. This work will address some applications, both in mathematics and in physics. In order to facilitate the practice of teacher you want to convey this matter was made a lesson plan that can be applied in high school.

.

Key Words: Determinants, Settings, Properties, Applications.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso trás um estudo aprofundado e detalhado sobre os determinantes, destacando suas propriedades como uma ferramenta facilitadora dos cálculos. O objetivo desse trabalho é incentivar e facilitar o estudo dos determinantes, para que pessoas que se interessem por tal assunto, tenham uma compreensão mais clara.

O mesmo iniciará com uma breve história dos determinantes, destacando os principais nomes que contribuíram para o seu surgimento.

No capítulo IV, serão apresentadas, as definições de determinantes de ordens um, dois e três, seguidas da Regra de Sarrus e do Teorema de Laplace. Neste mesmo capitulo, serão mostradas e exemplificadas as propriedades dos determinantes. Para encerrar o capitulo, será estudada a Regra de Chió, o calculo da matriz inversa, através do determinante, e alguns exercícios resolvidos.

No capítulo seguinte, serão vistas algumas aplicações dos determinantes na própria matemática, para calcular área do triângulo, e em resoluções de sistemas lineares, como também em outras áreas, especificamente, na Física, para calcular correntes de um circuito elétrico.

No capitulo VI, será encontrado um plano de aula, com intuito de facilitar a didática do professor.

E para finalizar, a conclusão de tudo que foi relatado.

Com este trabalho, desejamos dar uma boa base para quem necessitar estudar os determinantes, por meio de teoremas, regras, propriedades, exemplos, exercícios e aplicações.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Incentivar o gosto pelo estudo dos determinantes e facilitar os cálculos através das suas propriedades.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar algumas propriedades, utilizando-as como ferramenta facilitadora para nossos cálculos.
- Facilitar a didática do professor ao transmitir tal conteúdo.
- Compreender a importância dos determinantes, não só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento.

3. O SURGIMENTO DO DETERMINANTE

A noção de determinante esteve presente entre os chineses como ferramenta para resolver problemas que podiam ser expressos por sistemas lineares. Mas foi em 1683, que o maior matemático japonês do século XVII, Seki Kowa, deixou clara essa noção, quando sistematizou o procedimento utilizado pelos antigos chineses. Tratava-se de duas equações a duas incógnitas, formando sistemas de equações lineares. Na notação atual:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Rightarrow \text{x} = \frac{c\,.\,e - b\,.\,f}{a\,.\,e - b\,.\,d} \text{ e } \text{y} = \frac{a\,.\,f - c\,.\,d}{a\,.\,e - b\,.\,d}$$

Com a sua ideia de determinante Seki foi capaz de encontrar os determinantes de ordem 2, 3, 4 e 5 e aplicou-os na resolução de equações.

Foi também em 1683, a primeira aparição de um determinante na Europa com uma carta de Leibniz enviada ao marquês L’Hôpital.

Também nesse século, no ocidente, a aplicação de determinantes estava começando de modo mais sistemático, uma década depois de Leibniz ter escrito um trabalho sobre sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

Leibniz usou a palavra “resultante” para certas somas combinatórias de um determinante. Ele provou vários resultados sobre resultantes, incluindo o que é essencialmente a regra de Cramer. Ele também sabia que um determinante pode ser expandindo usando qualquer linha ou coluna – o que é agora chamado de método de Laplace.

Continuando a evolução histórica do emprego dos determinantes, em meados do século XVIII o escocês Colin Mac Laurin e o Suiço Gabriel Cramer, independentes um do outro, descobriram uma regra para resolver sistemas lineares de **n** equações a **n** incógnitas, que ficou conhecida como regra de Cramer.

Ainda nesse século, o alemão Carl Friedrich Gauss nomeou como “determinantes” as expressões numéricas advindas dos sistemas de equações e, mais tarde, Étienne Bezout e Alexandre Vandermonde, matemáticos franceses, construíram a teoria dos determinantes dissociada do estudo dos sistemas de equações lineares. Finalmente, o termo “determinante” foi utilizado por Cauchy, em 1812, num trabalho no qual ele sintetizou o assunto, e melhorou a notação empregada até então.

A teoria dos determinantes que conhecemos hoje se deve a Carl Gustav Jacobi (1804- 1851), matemático alemão que acreditava entusiasticamente nas potencialidades da notação dos determinantes como uma ferramenta eficaz para resolver problemas em várias áreas, como Física, Economia e Robótica.

4. DETERMINANTES

4.1. DEFINIÇÃO

Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais.
Seja **A** uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos determinante da matriz **A** (e indicamos por det A) o número que podemos obter operando todos os elementos da matriz.

4.1.1. Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1.

Seja a matriz quadrada de ordem 1, indicada por **A** = $[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}.

Indicamos assim: det A = $|a_{11}|$ = a_{11}.

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Exemplos:

a) Se **A** = $[4]$ então det A = 4 ou $|4|$ = 4.
b) Se **B** = [-2] então det B = -2 ou $|-2|$ = -2.

4.1.2. Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2.

Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 2, calculamos seu determinante fazendo a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, indicamos seu determinante assim:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplos:

a) Se **A** = $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, então det A = $6 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = -24 - 6 = -30$. Logo, det A = -30.

b) Se **B** = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, então det B = 2 · 5 – 3 · 4 = 10 – 12 = -2. Logo, det B = -2.

✓ **Para refletir:** É errado escrever $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ = -30, pois não é a matriz, e sim seu determinante, que é -30. O correto é det A = -30 ou $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ = -30.

4.1.3. Determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

Consideremos a matriz de ordem 3: **A** = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Define-se como determinante da matriz **A** o número:

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$
$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Exemplo:

Se **A** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, então por definição :

det A = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 2 -$
$-4 \cdot 1 \cdot 0 = 40 + 0 + 6 - (-10) - 36 - 0 = 46 + 10 - 36 = 20$

Logo, det A = 20.

4.2. REGRA DE SARRUS

Para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3, o matemático Pierre Fréderic Sarrus (1789-1861) estabeleceu uma regra bastante simples, chamada regra de Sarrus, que consiste no seguinte:

- Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira;
- Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo);
- Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo).

Aplicando a regra no D = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, temos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

= + $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Exemplo:

Calcular o determinante da matriz **A** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right. =$

$= (2 \cdot 5 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3) - (2 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 4) = (40 + 0 + 6) - (-10 + 36 + 0) = 46 - 26 = 20.$

Logo, det A = 20.

4.3. DETERMINANTE DE MATRIZ DE ORDEM N

Dada uma matriz quadrada de ordem **n**, é possível calcular seu determinante usando determinantes de matrizes de ordem **n – 1**.

Assim, a partir dos determinantes de ordem 2, calculamos de ordem 3; com os de ordem 3, calculamos os de ordem 4, e assim por diante.

Para isso, vamos antes conhecer algumas definições.

4.3.1. Menor complementar

Sendo **A** uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2, denomina-se menor complementar de **A** pelo elemento a_{ij} o determinante D_{ij} associada à matriz quadrada que se obtém de **A** ao se eliminar a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij} considerado. Esse determinante é indicado por D_{ij}.

Observe:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O menor complementar de A pelo elemento a_{23} é um número que indicamos assim:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- ✓ **Para refletir:** A = (a_{ij}) é uma matriz. a_{ij} é um elemento da matriz **A**. D_{ij} é um número, pois é um determinante.

Exemplo:

Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$, temos:

- menor complementar de **A** pelo elemento $\mathbf{a_{21}}$:

$D_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$ = 5·10 – 3·(-1) = 50 + 3 = 53 (foram eliminadas a 2ª linha e a 1ª coluna de A).

- menor complementar de **A** pelo elemento $\mathbf{a_{33}}$:

$D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ = 2·6 – 5·1 = 12 – 5 = 7 (foram eliminadas a 3ª linha e a 3ª coluna de A).

4.3.2. Cofator

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2, denomina-se cofator do elemento a_{ij} de **A** o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij} e que é representado por A_{ij}.

Então: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

Assim se considerarmos a matriz quadrada A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(Nesse caso, foram eliminadas a 1ª linha e a 1ª coluna de A)

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular A_{32}:

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (3 \cdot 2 - (-2).4) = -1 \cdot (6 + 8) = -1 \cdot 14 = -14$

(Nesse caso, foram eliminadas a 3ª linha e a 2ª coluna de A)

4.4. TEOREMA DE LAPLACE

Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, para i = {1, 2,..., n} e j = {1, 2,..., n}, chama-se determinante dessa matriz ao número real obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores. (Teorema de Laplace)

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, aplicando o teorema de Laplace, temos:

a) Pelos elementos da 1ª linha: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (4 \cdot 1 - 5 \cdot (-2)) = 1 \cdot (4 + 10) = 1 \cdot 14 = 14$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (0 \cdot 1 - 5 \cdot 6) = (-1) \cdot (0 - 30) = (-1) \cdot (-30) = 30$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (0 \cdot (-2) - 4 \cdot 6) = 1 \cdot (0 - 24) = 1 \cdot (-24) = -24$

Substituindo os valores temos que:

$\det A = 2 \cdot (14) + (-1) \cdot (30) + 3 \cdot (-24) = 28 - 30 - 72 = -74$. Logo, $\det A = -74$

b) Pelos elementos da 1ª coluna: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

A_{11} = 14 (visto anteriormente).

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot ((-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) = (-1) \cdot (-1 + 6) = (-1) \cdot 5 = -5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot ((-1) \cdot 5 - 3 \cdot 4) = 1 \cdot (-5 – 12) = 1 \cdot (-17) = -17$

Assim, det A = 2·(14) + 0·(-5) + 6·(-17) = 28 + 0 – 102 = -74. Logo, det A = -74

Observação: Para se aplicar esse método é melhor escolher a linha ou a coluna que tiver o maior número de zeros, visto que o método consiste em multiplicar cada elemento da linha pelo seu cofator, no caso de o elemento ser 0, o produto é nulo, não havendo pois necessidade de calcular o cofator do dito elemento para achar o produto.

4.5. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

A definição de determinante e o teorema de Laplace permitem-nos o cálculo de qualquer determinante, contudo, é possível simplificar o cálculo com o emprego de certas propriedades. Vejamos a seguir.

PRIMEIRA PROPRIEDADE

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem iguais a zero, seu determinante será nulo.

Vamos considerar uma matriz genérica **A**, de ordem **n**, com a 2ª coluna formada só de zeros.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando a definição do Teorema de Laplace, pela coluna de zeros temos:

det A = $a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + \ldots + a_{n2} \cdot A_{n2} = 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + \ldots + 0 \cdot A_{n2} = = 0 + 0 + 0 = 0$.

Logo, det A = 0.

Exemplos:

1º) $\begin{vmatrix} 0 & 48 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$. (Os elementos da 1º coluna são todos zero.)

2º) Se A = $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 9 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então det A = 0, pois todos os elementos da 2ª coluna são iguais a zero.

SEGUNDA PROPRIEDADE

Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será nulo.

Vamos verificar essa propriedade em matrizes de ordem 2 e de ordem 3:

- A = $\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$ (1ª e 2ª colunas são iguais)

Assim, det A = $a \cdot \mathrm{b} - a \cdot \mathrm{b} = 0$

- B = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$ (1ª e 3ª linhas são iguais)

Assim, det B = $\cancel{a \cdot e \cdot c} + \cancel{a \cdot b \cdot f} + \cancel{b \cdot c \cdot d} - \cancel{a \cdot e \cdot c} - \cancel{a \cdot b \cdot f} - \cancel{b \cdot c \cdot d} = 0$.

Exemplos:

1º) $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 8 & -6 & 9 \\ x & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. (1ª e 3ª linhas iguais)

2º) Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, então det A = 0, pois a 2ª e a 4ª colunas são iguais.

TERCEIRA PROPRIEDADE

Se uma matriz quadrada possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo.

Dizer que duas linhas ou duas colunas são proporcionais significa dizer que os elementos de uma delas são iguais a **k** vezes os elementos correspondentes da outra, com k ≠ 0.

Considerando A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{bmatrix}$

Observe que os elementos da 1ª e 3ª linhas são proporcionais, assim:

det A = $\cancel{aekc} + \cancel{\mathrm{bfka}} + \cancel{\mathrm{cdkb}} - \cancel{\mathrm{ceka}} - \cancel{\mathrm{afkb}} - \cancel{\mathrm{bdkc}}$ = 0.

Exemplos:

1º) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 21 \end{vmatrix}$ = 0 (2ª linha: triplo da 1ª)

2º) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & -7 \\ -3 & 8 & -6 & 9 \\ 5 & 6 & 10 & 6 \end{vmatrix}$ = 0 (3ª coluna: dobro da 1ª)

- ✓ **Para refletir:** A segunda propriedade é um caso particular da terceira.

QUARTA PROPRIEDADE

Se todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real **k**, então seu determinante fica multiplicado por **k**.

Dadas as matrizes **A** e **B**, de ordem **n**; **B** foi obtida, a partir de **A**, multiplicando todos os elementos da 2ª linha por **k**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema de Laplace, pela 2ª linha temos:

$\det A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + \ldots + a_{2n} \cdot A_{2n}$

$\det B = ka_{21} \cdot A_{21} + ka_{22} \cdot A_{22} + ka_{23} \cdot A_{23} + \ldots + ka_{2n} \cdot A_{2n}$

$\det B = k\,(a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + \ldots + a_{2n} \cdot A_{2n}) = k \cdot \det A$

Aplicando essa propriedade para o determinante de uma matriz de ordem 3, temos:

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- ✓ **Para refletir:** Costuma-se dizer que, nesse caso, **k** foi “colocado em evidência”.

Exemplos:

1º) Se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$, então $\begin{vmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 = 30$

2º) $\begin{vmatrix} 21 & -35 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

3º) Se A = $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 9 & 8 & -5 \\ 4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 9 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -9 \end{bmatrix}$, então det B = $\frac{1}{2}$ det A ou det A = 2 · det B

QUINTA PROPRIEDADE

Se um matriz quadrada **M** de ordem **n** é multiplicada por um numero real **k**, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é:

$$\det (kM_n) = k^n \cdot \det M_n$$

Quando multiplicamos a matriz **M** por **k**, todos os elementos de **M** são multiplicados por **k**. Assim, ao multiplicarmos uma linha (ou coluna) o determinante de **M** fica multiplicado por **k**; ao multiplicarmos duas linhas, ele fica multiplicado por k·k ou k^2; ao multiplicarmos as n linhas, o determinante fica multiplicado por k^n.

Exemplos:

1º) A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det A = 15 – 8 = 7

5A = $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det (5A) = 375 – 200 = 175 = $5^2 \cdot 7$

2º) B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det B = 15 + 0 + 10 + 6 – 50 + 0 = -19

2B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 10 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det (2B) = 120 + 0 + 80 + 48 – 400 + 0 = -152 = $2^3(-19)$

Observação: Não devemos confundir 3· $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ com 3· $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. Vejamos:

- $3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$
- $3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ = 3·(10 + 4) = 42 ou $3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 12 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ = 30 + 12 = 42

✓ **Para refletir:** Esta propriedade é decorrente da aplicação sucessiva da quarta propriedade.

SEXTA PROPRIEDADE

O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua transposta.

Vamos mostrar para matrizes de ordem 2 e de ordem 3:

- Sejam A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, então:

$$\left.\begin{array}{l} \text{det A} = ad - bc \\ \text{det } A^t = ad - bc \end{array}\right\} \quad \text{det A = det } A^t$$

- Sejam A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ então:

$$\left.\begin{array}{l} \text{det A} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \\ \text{det } A^t = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi \end{array}\right\} \quad \text{det A = det } A^t$$

Exemplos:

1ª) A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ⟹ det A = -2 e det A^t = -2 ⟹ det A = det A^t.

2ª) B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ⟹ det B = -37 e det B^t = -37 ⟹ det B = det B^t.

SÉTIMA PROPRIEDADE

Se trocarmos de posição duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

Aplicando essa propriedade para matriz de ordem 2, temos:

Consideremos a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde det A = $ad - bc$.

Agora consideremos a matriz **B**, obtida da matriz **A**, trocando a 1ª e 2ª colunas.

B = $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$ daí, det B = $bc - ad = -(ad - bc) = -$ det A . Logo, det B = $-$ det A.

Então, det A = $-$ det B.

Exemplos:

1ª) A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. A matriz **B** foi obtida a partir de **A**, trocando a posição das linhas.

det A = 3·2 – 4·7 = 6 – 28 = -22 números opostos

det B = 7·4 – 2·3 = 28 – 6 = 22

2ª) A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & -9 \end{bmatrix}$. A matriz **B** foi obtida a partir de **A**, trocando a 1ª e a 2ª colunas.

det A = –45 – 84 + 96 – 105 – 48 – 72 = 96 – 354 = -258 números opostos

det B = 72 + 48 + 105 – 96 + 84 + 45 = - 96 + 354 = 258

OITAVA PROPRIEDADE

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Vamos demonstrar para matrizes de ordem 2 e 3:

Seja A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, uma matriz triangular, então:

det A $= a \cdot c - b \cdot 0 = ac$ (observe que ac é o resultado do produtos dos elementos da diagonal principal)

Consideremos agora uma matriz triangular B = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$, então:

det B = adf + 0 + 0 – 0 – 0 – 0 = adf (é igual ao produto dos elementos da diagonal principal).

Exemplos:

1ª) A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det A = 5·2 – 3·0 = 10 – 0 = $\underset{\substack{\downarrow \\ 5\cdot 2}}{10}$

2ª) B = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det B = 5·2·4 + 0·0·3 + 0·(-1)·1 – 0·2·3 – 5·0·1 – 0·(-1)·4 =

= 40 + 0 + 0 – 0 – 0 – 0 = $\underset{\substack{\downarrow \\ 5\cdot 2\cdot 4}}{40}$

Como consequência dessa propriedade, podemos ainda afirmar:

- o determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;
- se I_n é a matriz identidade, então det I_n = 1, para qualquer **n**.

✓ **Para refletir:** Toda matriz diagonal é matriz triangular.

NONA PROPRIEDADE (TEOREMA DE BINET)

Sendo **A** e **B** duas matrizes quadradas de mesma ordem e **AB** a matriz produto, então det (AB) = (det A)(det B) (teorema de Binet).

Vamos demonstrar essa propriedade para matrizes de ordem 2:

A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ AB = $\begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$

det (AB) = $(ax + bz)(cy + dw) - (cx + dz)(\,ay + bw)$ =

= $\cancel{acxy} + adxw + bcyz + \cancel{bdzw} - \cancel{acxy} - bcxw - adyz - \cancel{bdzw}$

det A · det B = $(ad - bc) \cdot (xw - yz)$ = $adxw + \ bcyz - adyz - bcxw$

Comparando, vemos que det (AB) = det A · det B.

Exemplos:

1ª) A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

AB = $\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ ⟹ det (AB) = 36 + 42 = 78

det A · det B = (–3 – 10)(0 – 6) = (–13)(–6) = 78

Logo det (AB) = det A · det B.

- ✓ **Para refletir:** Calcule e compare: det (A + B) e det A + det B.

Essa propriedade tem importantes consequências. Veja algumas:

- Mesmo quando AB ≠ BA temos det (AB) = det (BA).
- Pode existir det (AB) sem que exista det A e det B.

DÉCIMA PROPRIEDADE: TEOREMA DE JACOBI

O determinante de uma matriz quadrada não se altera quando se adicionam, aos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer, os elementos correspondentes de outra fila (linha ou coluna) paralela previamente multiplicada por uma constante.

Vamos mostrar essa propriedade para matrizes de ordem 2:

Consideremos a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onde, det A = $ad - bc$. Agora vamos obter a partir de **A**, a matriz **B**, multiplicando o número 3 a 1ª coluna e somando os resultados a 2ª coluna. Assim:

B = $\begin{bmatrix} a & 3a+b \\ c & 3c+d \end{bmatrix} \Rightarrow$ det B = $a(3c+d) - c(3a+b)$ = $\cancel{3ac} + ad - \cancel{3ac} - cb$=

= $ad - cb$ = det A.

Exemplos:

1º) A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det A = 9 – 20 = – 11

Multiplicando a 1ª linha por -2 e somando os resultados à 2ª linha, obtemos:

B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det B = – 1 – 10 = – 11, ou seja det A = det B.

2º) A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -10 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Vamos obter a matriz **B**, multiplicando a 2ª coluna por 3 e somando os resultados à 3ª coluna:

B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Usando a regra de Sarrus, verificamos:

$\left.\begin{array}{l} \text{det A} = -16 + 60 - 15 - 60 + 30 + 8 = 7 \\ \text{det B} = 20 - 12 + 3 + 12 - 6 - 10 = 7 \end{array}\right\}$ det A = det B

4.6. REGRA DE CHIÓ

A regra de Chió nos permite calcular o determinante de uma matriz de ordem **n** usando uma matriz de ordem n – 1. Essa regra, é muito prática se o elemento a_{11} é igual a 1. Assim:

- Sendo $a_{11} = 1$, suprime-se a 1ª linha e a 1ª coluna da matriz.
- De cada elemento restante, subtrai-se o produto dos dois elementos suprimidos, na linha e na coluna desse elemento restante.
- Com os resultados das subtrações acima obtém-se uma matriz uma ordem menor do que a anterior, porém com mesmo determinante.

Vamos considerar a matriz de ordem 4, A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Seguindo as passagens acima temos:

$$\left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2\cdot 1 & 6-0\cdot 1 & 9-(-1)\cdot 1 \\ 1-2\cdot 4 & 2-0\cdot 4 & 0-(-1)\cdot 4 \\ 2-2\cdot(-2) & 3-0\cdot(-2) & -4-(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Como $a_{11} = 1$, então foram eliminadas a 1ª linha e a 1ª coluna, em seguida foi subtraído dos elementos que restaram o produto dos dois elementos correspondentes que foram eliminados. Resultando em uma matriz de ordem 3.

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ -7 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ tem o mesmo determinante que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. A diferença é que, usando a matriz de ordem 3, ele pode ser calculado facilmente pela regra de Sarrus.

Observações:

1ª) Se o elemento $a_{11} \neq 1$, mas se existir algum elemento igual a 1 em algum lugar da matriz, é possível obter uma outra matriz com determinante equivalente usando no máximo duas vezes a sétima propriedade, ou seja, trocando-se a posição de linhas e colunas. No exemplo a seguir, vamos trocar a 1ª linha com a 3ª linha, e depois trocar a 2ª coluna com a 1ª coluna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

O sinal do determinante passou de + para – e voltou de – menos para +.

2ª) Se o elemento $a_{11} \neq 1$, e não houver nenhum elemento igual a 1 na matriz, pode-se usar a décima propriedade (teorema de Jacobi) para criar elementos iguais a 1 na matriz.

Observe que existem varias maneiras de criar "1" nessa matriz. No exemplo, vamos multiplicar a 2ª linha por (-1) e somamos esse resultado à 1ª linha.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

3ª) Outra propriedade que também pode ser utilizada para criar elemento "1" na matriz é a quarta propriedade (colocar um número em evidência).

Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -3 & 3 \\ 6 & 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -3 & 3 \\ 6 & 7 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Trocando as posições das colunas 1 e 3 (sétima propriedade), temos:

$$(-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 5 & -3 & 3 & 2\\ -3 & 5 & -4 & 3\\ -2 & 7 & 6 & 4\end{vmatrix}$$

Exemplo:

Vamos encontrar o valor do determinante $\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 0 & -2\\ -3 & 2 & -1 & -5 & 4\\ -1 & 3 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1 & 3\end{vmatrix}$.

Usando o teorema de Jacobi (décima propriedade), podemos multiplicar a 2ª coluna por 1 e somar o resultado à 1ª coluna. Depois, podemos usar a regra de Chió:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 0 & -2\\ -3 & 2 & -1 & -5 & 4\\ -1 & 3 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1 & 3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{Jacobi}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 0 & -2\\ -1 & 2 & -1 & -5 & 4\\ 2 & 3 & 2 & -2 & 0\\ 4 & 4 & -2 & -1 & 3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{Chió}}$$

(x 1)

$$\xrightarrow{\text{Chió}}\begin{vmatrix}3-1\cdot(-1) & 2-1\cdot 0 & 0-1\cdot 3 & -2-1\cdot 2\\ 2-(-1)\cdot(-1) & -1-(-1)\cdot 0 & -5-(-1)\cdot 3 & 4-(-1)\cdot 2\\ 3-2\cdot(-1) & 2-2\cdot 0 & -2-2\cdot 3 & 0-2\cdot 2\\ 4-4\cdot(-1) & -2-4\cdot 0 & -1-4\cdot 3 & 3-4\cdot 2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 2 & -3 & -4\\ 1 & -1 & -2 & 6\\ 5 & 2 & -8 & -4\\ 8 & -2 & -13 & -5\end{vmatrix}$$

Agora, trocando as posições da linha 1 com a linha 2 (sétima propriedade), podemos novamente aplicar Chió:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \\ 5 & 2 & -8 & -4 \\ 8 & -2 & -13 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Chió}} -\begin{vmatrix} 2-4\cdot(-1) & -3-4\cdot(-2) & -4-4\cdot 6 \\ 2-5\cdot(-1) & -8-5\cdot(-2) & -4-5\cdot 6 \\ -2-8\cdot(-1) & -13-8\cdot(-2) & -5-8\cdot 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 6 & 5 & -28 \\ 7 & 2 & -34 \\ 6 & 3 & -53 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} -\det = -636 - 1020 - 588 + 336 + 612 + 1855 = -559$$

4.7. IMPORTANTE APLICAÇÃO DOS DETERMINANTES

Dada uma matriz quadrada **A** de ordem **n**, é possível saber se existe ou não uma matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$ de **A**, verificando se det A ≠ 0.

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1} \,/\, AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Assim, é possível descobrir $\mathbf{A^{-1}}$, quando existir, usando det A e alguns conceitos.

4.7.1. Matriz dos cofatores

Seja uma matriz quadrada A = (aij) de ordem **n**. Chamamos de matriz dos cofatores de **A** (indica-se **A’**) a matriz que se obtém substituindo cada elemento pelo seu respectivo cofator Aij.

Assim, se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ então, } A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

1º) Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então A' = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |4| = 1 \cdot 4 = 4$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |3| = (-1) \cdot 3 = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |2| = (-1) \cdot 2 = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |1| = 1 \cdot 1 = 1$

4.7.2. Matriz adjunta

Considerando a matriz quadrada **A** de ordem n, denomina-se matriz adjunta de **A** (indica-se **Ā**) a matriz transposta da matriz dos cofatores de **A**, isto é:

$$\bar{A} = (A')^t$$

Em resumo,

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, A' = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ e

Ā = $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$ onde Bij = Aij $\left\{ \forall\ i,j \in \{1, 2, \dots, n\} \right.$

Exemplo:

1º) Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, já sabemos que A' = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ daí Ā = $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

4.7.3. Calculo da matriz inversa

Se **A** é uma matriz quadra de ordem n e det A ≠ 0, então a inversa de **A** é dada por : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$, onde Ā é a matriz adjunta de **A**. Podemos verificar, fazendo: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Vamos mostrar para A de ordem 2. Considere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, assim:

det A = ad – bc ≠ 0.

A matriz dos cofatores de **A** é $A' = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

E a matriz adjunta de **A** é $\bar{A} = (A')^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

A matriz inversa de A é obtida fazendo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Verificando:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Podemos então escrever:

Se A é tal que det A ≠ 0, então A é inversível e $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$.

Exemplo:

1º) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, já sabemos que $A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, com det A = -2.

Logo, $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

4.8. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 1 – Sabendo que $a = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ e $c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$, calcule $a^2 - 2abc + c^5$.

Resolução: Primeiramente, vamos encontrar os valores de **a**, **b** e **c**, calculando os determinantes:

$a = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 4 + 2 = 6 \Rightarrow a = 6$

$b = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 0 + 3 = 3 \Rightarrow b = 3$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2 \Rightarrow c = -2$

Agora, vamos calcular $a^2 - 2abc + c^5$, substituindo os valores encontrados. Assim:

$a^2 - 2abc + c^5 \Rightarrow 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot (-2) + (-2)^5 = 36 + 72 + (-32) = 108 - 32 = 76.$

Logo, $a^2 - 2abc + c^5 = 76$, para $a = 6$, $b = 3$ e $c = -2$.

Exercício 2 – (Vunesp/modificado) Foi realizado uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 e 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade **x** da criança, conclui-se que o "peso" médio p(x), em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz **A**, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Com base na fórmula p(x) = det A, determine o "peso" médio de uma criança de 5 anos.

Resolução: Vamos calcular primeiro, o determinante da matriz **A** para obter a lei da função que relaciona o "peso" médio coma idade **x** da criança. Usando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -x & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \text{det A} = 0 + 0 + 6 - 0 + 2x + 2 = 6 + 2x + 2 = 2x + 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ det A = 2x + 8.

Logo, p(x) = det A = 2x + 8 $\Rightarrow$ p(x) = 2x + 8. Agora, vamos atribuir a x o valor pedido (5 anos) e calcular o "peso" médio referente a essa idade:

p(x) = 2x + 8 , para x = 5, temos: p(5) = 2·5 + 8 = 10 + 8 = 18 $\Rightarrow$ p(5) = 18.

Portanto, o "peso" médio de uma criança de 5 anos é 18 Kg.

Exercício 3 – Dadas as matrizes quadradas **A** e **B**, de ordem **n**, determine o que se pede.

a) det (AB), sabendo que det A = 5 e det B = - 4;

Resolução: Para calcular o det (AB), basta aplicar a nona propriedade (teorema de Binet), onde diz que: det (AB) = (det A)(det B). Já sabemos que det A = 5 e det B = - 4, assim:

det (AB) = 5·(-4) = - 20.

Logo, det (AB) = - 20.

b) det A, sabendo que det B = $\frac{-3}{2}$ e det (AB) = 4;

Resolução: Usando o teorema de Binet, temos:

det (AB) = (det A)(det B) $\Rightarrow$ 4 = det A·$\left(\frac{-3}{2}\right)$ $\Rightarrow$ det A = $\frac{4}{\frac{-3}{2}}$ $\Rightarrow$ det A = 4·$\left(\frac{2}{-3}\right)$ = - $\left(\frac{8}{3}\right)$ $\Rightarrow$ det A = $-\frac{8}{3}$.

c) det (5A), sabendo que n = 2 e det A = 3;

Resolução: Para encontrarmos o det (5A) vamos usar a quinta propriedade (multiplicação da matriz por uma constante), ou seja, se uma matriz quadrada de ordem n é multiplicada real **k**, o seu determinante fica multiplicado por k^n. Sabemos que n = 2 e det A = 3, assim:

$$\det(5A) = 5^2 \cdot \det A \Longrightarrow \det(5A) = 25 \cdot 3 = 75. \text{ Portanto, } \det(5A) = 75.$$

Exercício 4 – Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e f(x) = $-x^2 - x - 1$, calcule $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$.

Resolução: Inicialmente vamos calcular o determinante da matriz A, usando a regra de Sarrus:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{matrix} \Longrightarrow \det A = 0 + 2 - 3 - 1 + 4 + 0 = -1 + 3 = 2$$

Portanto, det A = 2. Substituindo det A = 2 em $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$, temos $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Agora, vamos calcular f(x) = $-x^2 - x - 1$, para x = $-\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1+2-4}{4} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$$

Logo, $f\left(-\frac{1}{\det A}\right) = -\frac{3}{4}$, para det A = 2 e f(x) = $-x^2 - x - 1$.

Exercício 5 – Calcule o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução: Para calcular esse determinante, vamos aplicar a definição de Laplace e obter determinantes de 3ª ordem, que podem ser calculados pela regra de Sarrus.

Escolhendo a 1ª linha, temos:

$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-24 + 3 + 30 - 18 + 30 - 4) = 17$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(48 + 0 - 6 + 0 + 8 - 6) = -44$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-120 - 0 + 9 + 0 - 12 + 12) = -111$$

Observe que não há necessidade de calcular A_{14}, pois será multiplicado por zero. Daí:

det A = 2(17) + 3(-44) + (-1)(-111) + 0 = 34 – 132 + 111 + 0 = 13.

Logo, det A = 13.

Exercício 6 – Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos determinar o valor de **x** para que se tenha det A = det B.

Resolução: Vamos calcular primeiramente, os determinantes.

det A = 2 · 9 – 3x = 18 – 3x

Para calcular o determinante de B, vamos usar a regra de Sarrus:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{matrix} \Longrightarrow \text{det B} = 3 + x + 0 + 0 - 2x + 2 = -x + 5$$

Agora, fazemos:

det A = det B $\Longrightarrow$ 18 – 3x = – x + 5 $\Longrightarrow$ – 3x + x = 5 – 18 $\Longrightarrow$ – 2x = –13 $\Longrightarrow$ x = $\frac{13}{2}$

Logo, x = $\frac{13}{2}$.

Exercício 7 - Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, determine **$A^{-1}$**, se existir.

Resolução: Calculemos det A = 0 + 6 = 6 ≠ 0. Logo existe A^{-1}.

Agora, determinamos a matriz dos cofatores de A ⟶ A' = $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Em seguida, determinamos a matriz adjunta de A ⟶ Ā = (A')t = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Com isso, vamos determinar a inversa de **A**:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Verificando: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

5. APLICAÇÕES

O estudo dos determinantes, não está presente apenas na matemática, se expande também para outras áreas.

Existem várias aplicações usando as definições de determinantes. Vamos apresentar a seguir, aplicações na física, para calcular correntes de um circuito elétrico, como também na matemática, para calcular a área do triângulo e na resolução de sistemas lineares.

Aplicação 1 – Vamos calcular as correntes de um circuito elétrico. Esse circuito possui:

- dois geradores de forças eletromotrizes (fem) E_1 = 27V e E_2 = 24V e resistências internas $r_1 = 1\Omega$ e $r_2 = 1\Omega$;
- três resistores: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$ e $R_3 = 3\Omega$.

Resolução: Resolver um circuito elétrico significa determinar as intensidades das correntes elétricas que nele circulam; a unidade de medida da corrente elétrica é o ampère (A). Nesse circuito, temos três correntes, representadas por $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ e $\mathbf{i_3}$.

Para calcular suas intensidades, vamos montar o sistema a seguir, que resulta da aplicação das 1º e 2º leis de Kirchhoff. Assim:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_1 + 6i_2 \quad = 27 \\ \quad - 6i_2 - 4i_3 = -24 \end{cases}$$

Agora, aplicando a regra Cramer, e resolvendo os determinantes de ordem 3, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -24 - 0 - 18 - 0 + 0 - 12 = -54$$

$$Di1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 27 & 6 & 0 \\ -24 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 162 + 144 + 0 - 108 = -126$$

Di2 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 27 & 0 \\ 0 & -24 & -4 \end{vmatrix}$ = -108 + 0 – 72 – 0 + 0 + 0 = -180

Di3 = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 27 \\ 0 & -6 & -24 \end{vmatrix}$ = -144 – 0 – 0 – 0 + 162 – 72 = -54

Assim:

$i_1 = \frac{D_{i_1}}{D} = \frac{-126}{-54} \Rightarrow i_1 = \frac{7}{3}$ A, $i_2 = \frac{D_{i_2}}{D} = \frac{-180}{-54} \Rightarrow i_2 = \frac{10}{3}$ A e $i_3 = \frac{D_{i_3}}{D} = \frac{-54}{-54} \Rightarrow$

$\Rightarrow i_2 = 1$ A

Logo, as correntes do circuito são: $i_1 = \frac{7}{3}$ A, $i_2 = \frac{10}{3}$ A e $i_2 = 1$ A.

Aplicação 2 – Calcular a área do triângulo com vértices nos pontos P_1 (1 , 1), P_2 (1 , 3) e P_3 (2 , 0).

Resolução: É possível mostrar que a área de um triangulo com vértices nos pontos P1 (x1 , y1), P2 (x2 , y2) e P3 (x3 , y3) pode ser calculada através da expressão:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \ |\det A|$$

onde a matriz A = $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$

Sabendo disso, vamos calcular o que se pede. Primeiramente, constrói-se a matriz com as coordenadas dos pontos, isto é:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

seu determinante é:

det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 3 + 2 + 0 – 6 – 0 – 1 = -2

Assim, a área do triângulo é:

S = $\frac{1}{2} \cdot \ |\det A|$ = $\frac{1}{2} \cdot |-2|$ = = $\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1$.

Logo, S = 1 unidade de área.

Aplicação 3 – Três grandes empresas de táxi resolveram renovar parte de suas frotas:

- a primeira comprou 1 carro modelo **A**, 1 moddelo **B** e 1 modelo **C** pagando R$ 180 000,00;
- a segunda comprou 1 carro modelo **A**, 2 modelo **B** e 3 modelo **C** pagando R$ 380 000,00;
- a terceira comprou 2 carros modelo **A**, 3 modelo **B** e 1 modelo **C** pagando R$ 350 000,00.

Qual é o valor de cada carro?

Resolução: Para encontrarmos os valores dos carros, vamos formar um sistema, e fazer uso da regra de Cramer.

Representaremos, modelo **A**: a, modelo **B**: b e modelo **C**: c. Assim:

$$\begin{cases} 1a + 1b + 1c = 180\,000 \\ 1a + 2b + 3c = 380\,000 \\ 2a + 3b + 1c = 350\,000 \end{cases}$$

Calculando agora, os determinantes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 3 - 4 - 9 - 1 = -3;$$

$$Da = \begin{vmatrix} 180\,000 & 1 & 1 \\ 380\,000 & 2 & 3 \\ 350\,000 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 360\,000 + 1050\,000 + 1140\,000 - 700\,000 - 1620\,000 -$$

$$- \ 380\,000 = -\,150\,000;$$

Db = $\begin{vmatrix} 1 & 180\,000 & 1 \\ 1 & 380\,000 & 3 \\ 2 & 350\,000 & 1 \end{vmatrix}$ = 380 000 + 1080 000 + 350 000 – 760 000 – 1050 000 –
– 180 000 = - 180 000;

Dc = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 180\,000 \\ 1 & 2 & 380\,000 \\ 2 & 3 & 350\,000 \end{vmatrix}$ = 700 000 + 760 000 + 540 000 – 720 000 – 1140 000 –
– 350 000 = - 210 000.

Daí, a = $\frac{D_a}{D}$ = $\frac{-150\,000}{-3}$ = 50 000 ⟹ a = 50 000, b = $\frac{D_b}{D}$ = $\frac{-180\,000}{-3}$ = 60 000 ⟹
⟹ b= 60 000 e c = $\frac{D_c}{D}$ = $\frac{-210\,000}{-3}$ = 70 000 ⟹ c = 70 000.

Portanto, o carro modelo **A** custa R$ 50 000,00, o de modelo **B** custa R$ 60 000,00 e o modelo **C** custa R$ 70 000,00.

6. PLANO DE AULA

O planejamento de aula é de fundamental importância para que se atinja êxito no processo de ensino-aprendizagem.

A seguir, temos um plano de aulas sobre determinantes que pode ser aplicado em turmas do Ensino Médio, mas precisamente, no 2º ano. Esse plano de aula poderá ser útil tanto para prática do professor, como para seus alunos, para terem uma noção do que está sendo tratado em sala de aula, facilitando o entendimento e a explicação.

PÚBLICO ALVO: Ensino Médio.

DURAÇÃO: 90 minutos (2 aulas).

TEMA: Determinantes.

CONTEÚDO:

- Introdução da história e Definição.
- Determinante de 1ª ordem.
- Determinante de 2ª ordem.
- Determinante de 3ª ordem: Regra de Sarrus.
- Teorema de Laplace.
- Propriedades dos determinantes.

OBJETIVO GERAL: Definir o que são determinantes e como calculá-los, através de teoremas e propriedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Definir claramente o que são determinantes;
- Exemplificar algumas aplicações dos determinantes;
- Identificar algumas propriedades dos determinantes, considerando-as facilitadoras de cálculos.

RECURSOS DIDÁTICOS:

- Apostila com o assunto referente a aula;
- Lápis;
- Quadro.

PROCEDIMENTOS:

- Aula expositiva e dialogada;
- Demonstração de exemplos;
- Uso correto do quadro.

AVALIAÇÃO: Baseada na participação dos alunos e na resolução de exercícios.

REFERÊNCIAS:

- NETO, A. Matemática Básica. São Paulo.Atual, 1984.
- SANTOS, C. A. M.; GENTIL, N.; GRECO, C. E. Matemática para o ensino médio. São Paulo. Ática, 1999.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho de conclusão de curso foi essencial para um entendimento mais claro e objetivo sobre determinantes e suas propriedades.

Conseguimos através do mesmo, alcançar o objetivo que nos levou a fazer tal trabalho, ou seja, incentivar o estudo dos determinantes, abordando-o da forma mais detalhada possível, para assim facilitar a compreensão e execução dos nossos cálculos. Contribuindo para um conhecimento amplo daqueles que têm interesse sobre este assunto.

Servirá também para mostrar a importância do determinante na matemática e em outras áreas, através de aplicações.

Foi abordado, além disso, um plano de aula, o qual será útil para que professores saibam como inserir o conteúdo de determinantes nas aulas, de forma ampla e organizada.

Logo, podemos concluir que o estudo dos determinantes se abordado com clareza e profundidade, através de propriedades, regras, teoremas e exemplos práticos, se tornará fácil e interessante.

8. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Curso de Matemática.** Volume único. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1. ed. São Paulo, ática, 2006. v. 2.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto & Aplicações.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2001. v. 2.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto & Aplicações.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2010. v. 2.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental.** Volume único. São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 4.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática.** Volume único. 6. ed. São Paulo: Ática, 2001.

SITES REFERIDOS

SURGIMENTO DOS DETERMINANTES
http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php
http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html
Acesso em: 26 de novembro de 2013

APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES
http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm
Acesso em: 19 de junho de 2014