



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

JULIELSON DE ALMEIDA DIAS

SOLUÇÕES COM ROTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE
EINSTEIN A PARTIR DO MÉTODO DE NEWMAN-JANIS

CAMPINA GRANDE - PB
2014

JULIELSON DE ALMEIDA DIAS

SOLUÇÕES COM ROTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN A
PARTIR DO MÉTODO DE NEWMAN-JANIS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

D541s Dias, Julielson de Almeida.
Soluções com rotação das equações de Einstein a partir do método de Newman-Janis [manuscrito] / Julielson de Almeida Dias. - 2014.
19 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física".

1. Simetria esférica. 2. Equações de Einstein. 3. Algoritmo de Newman-Janis. 4. Relatividade. I. Título.

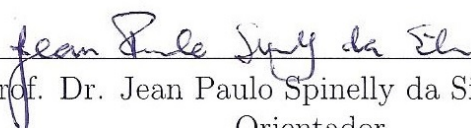
21. ed. CDD 530.11

JULIELSON DE ALMEIDA DIAS

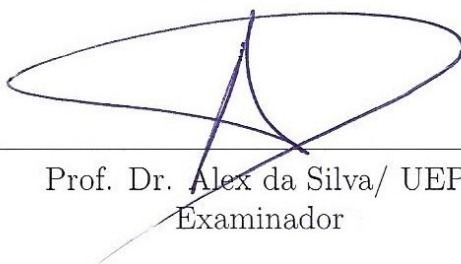
SOLUÇÕES COM ROTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN A
PARTIR DO MÉTODO DE NEWMAN-JANIS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

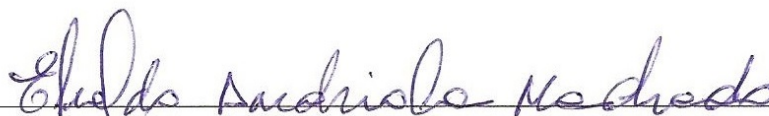
Aprovado em 06/08/2014.



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva / UEPB
Orientador



Prof. Dr. Alex da Silva/ UEPB
Examinador



Prof. Msc. Elialdo Andriola Machado / UEPB
Examinador

RESUMO

A geração de soluções axissimétricas para equações de campo de Einstein é um problema que tem atormentado os físicos por muitos anos. Após a descoberta original da métrica de Kerr, Newman e Janis mostraram que esta solução poderia ser obtida fazendo uma transformação complexa elementar para a solução de Schwarzschild. Esse mesmo método também chamado de algoritmo foi utilizado pra obter a solução da métrica de Kerr-Newman, que representa um corpo esférico massivo carregado em rotação. Que é basicamente nosso caso de estudo.

PALAVRAS-CHAVE: Espaço-tempo, Simetria esférica, Rotação.

1 Introdução

De acordo com os historiadores os princípios relativísticos foram propostos a séculos. Um dos defensores das ideias relativistas foi o Galileu Galilei, que apresentava a relatividade como princípio em que as leis da mecânica são expressas num dado referencial, e serão de forma idêntica em qualquer outro movimento retilíneo e uniforme em relação ao primeiro. Contudo, a visão moderna da relatividade foi cunhada por Einstein, apresentando novidades como um limite para a velocidade dos corpos, sendo essa igual a da luz, e massa e comprimento variáveis e dependentes da velocidade. Inicialmente, Einstein desenvolveu a primeira etapa da teoria, mais conhecida como teoria da relatividade restrita, e dez anos mais tarde apresentou um trabalho completo generalizando os princípios relativísticos, que ficou conhecido como a teoria da relatividade geral (MARTINS, 2005).

Existe uma variedade de soluções exatas que tem desempenhado um papel muito importante, tanto no desenvolvimento teórico como experimental da relatividade geral. Como exemplo, podemos citar: A solução de Schwarzschild, que representa o exterior de um corpo maciço com simetria esférica; a de Reissner-Nordström, que descreve o campo gravitacional exterior a um corpo esférico carregado e massivo; a que representa um corpo massivo, esféricamente simétrico, em rotação, obtida por Kerr; a de Kerr-Newman, que generaliza a anterior, para o caso em que o corpo também possui carga elétrica (CARMELI, 1981).

Dois cientistas desenvolveram, em períodos próximos, uma solução para a métrica de Kerr, a partir da solução de Schwarzschild, os cientistas se chamavam Newman e Janis, sua solução é o resultado de um processo que consistem em 5 etapas e a solução representa uma região próxima de uma esfera maciça carregada girando. Embora esse método seja aplicado para obtenção de soluções girantes, estudos mostram que o método não é recomendado ser utilizado fora da teoria da relatividade geral, pois o algoritmo de Newman-Janis aplicado em teorias gravitacionais modificadas produzem anomalias.

Assim havendo a aplicação em uma solução de simetria esférica e não pertencente a relatividade geral e arbitrária, introduz patologias na métrica axialmente simétrica resultante (DRAKE e SZEKERES, 1998).

O objetivo desse trabalho é mostrar que é possível obter uma solução de um corpo esférico em rotação, partindo da solução que não tem movimento giratório, seguindo o método de Newman-Janis.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Equações de Einstein

Historicamente muitos estudiosos desenvolveram métodos matemáticos e teorias para tentar descrever e explicar fenômenos naturais. Em 1905 um desses estudos foi publicado por um jovem que ainda não era físico, ele trabalhava em um escritório de registros de patentes na suíça, o nome dele é Albert Einstein. Ele construiu uma teoria chamada de Relatividade Restrita onde aplicou um método matemático conhecido como Transformada de Lorentz para a mecânica, para isso postulou a constância da velocidade da luz e a equivalência entre todos os observadores em referenciais inerciais, que são aqueles em que os referenciais não estão acelerados um relação ao outro, ou seja, os observadores possuem velocidade constante entre si. Esses referenciais como visto não apresentam nenhuma diferença um em relação ao outro, então não se pode usar um deles como base para realizar previsões nos demais, ou seja, não existe um referencial privilegiado, esse é foi chamado de 1º postulado da relatividade.

Essa teoria surge de uma incompatibilidade entre a teoria da mecânica clássica de Newton que admite objetos que se movam com velocidade infinita e logicamente superior a da luz, sendo que (ROEMER, 1975) já havia calculado um valor finito para a velocidade da luz, talvez não com tanta precisão quanto o cálculo atual, porém já se sabia de sua finitude. O que era coerente com a teoria do Maxwell, porém não com a do Newton. Daí o Einstein coloca que a velocidade da luz tem sim um limite, um valor constante para um

mesmo meio e que independe da movimentação da fonte que gera ou do observador que intercepta o raio, daí surge o que foi chamado de 2º postulado da relatividade.

A generalização da teoria da relatividade para referenciais não-inerciais, proposta por Einstein em 1915, ficou conhecida como teoria da relatividade geral. Do ponto de vista matemático essa teoria é mais complexa do que a teoria da relatividade restrita, e existem bem menos aplicações. (TIPLER e LLEWELLYN, p. 64, 2008).

O Einstein apresentou dois postulados para teoria da relatividade restrita e anos mais tarde mais um terceiro postulado, para que essa fosse englobada em uma teoria mais abrangente, a teoria da relatividade geral, que a toma como um caso particular, quando os corpos se movem com velocidade constante. Depois de muito pensar teve uma ideia descrita pelo próprio Einstein:

Foi então que me ocorreu a ideia mais fantástica de minha vida. Da mesma forma que o campo elétrico gerado pela indução magnética, o campo gravitacional possui uma existência apenas relativa. *Porque para um observador que esteja caindo livremente do telhado de uma casa, não existe - pelo menos em uma vizinhança imediata - nenhum campo gravitacional.* [Os grifos são de Einstein] O observador tem, portanto, todo o direito de imaginar que se encontra “em repouso”. (TIPLER e LLEWELLYN, p. 64, 2008)

Partindo dessa declaração do Einstein podemos construir o que ficou conhecido como o princípio da equivalência, que pode ser enunciado da seguinte forma:

“O princípio da equivalência estabelece que a gravidade e a aceleração são indistinguíveis uma da outra. Ele afirma que não existe nenhum experimento que possa distinguir a aceleração ocasionada por um campo gravitacional da aceleração inercial devida a uma simples mudança de velocidades.”(TIPLER e LLEWELLYN, p. 64, 2008)

Apoiado no princípio da equivalência, Einstein propôs que a matéria (energia) curva o espaço e o tempo a sua volta. Segundo ele, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo (LANDAU e LIFICHITZ, 1974; CARMELI, 1981).

Na relatividade geral, toda informação sobre a geometria do espaço-tempo está presente em um objeto denominado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e, para o encontrarmos, devemos

resolver um conjunto de equações chamado de equações de Einstein. Estas equações representam uma generalização da equação do campo gravitacional newtoniano (equação de Poisson), e são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (2-1)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento ¹.

Vale salientar que, enquanto o tensor métrico descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo tetradimensional, a matéria é descrita pelo tensor de energia-momento.

2.2 Soluções das Equações de Einstein

Resolver as equações de Einstein é encontrar a métrica associada a uma certa distribuição de matéria (energia). Naturalmente, devido a estrutura das equações de campo, a geometria gerada dependerá do conteúdo de matéria (energia).

A seguir, apresentaremos algumas das soluções exatas das equações de Einstein.

A primeira solução exata, a qual é dada pela métrica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \quad (2-2)$$

em que m é a massa do corpo, descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico, sem levar em conta qualquer rotação de massa. Esta métrica recebeu esse nome de métrica de Schwarzschild em homenagem ao seu descobridor Karl Schwarzschild, que encontrou a solução em 1915, apenas um mês após a publicação da teoria da relatividade geral de Einstein.

Logo depois, em 1918, o matemático Hans Reissner e o físico teórico Gunnar Nordström obtiveram a solução que descreve o campo gravitacional em torno de um objeto massivo e eletricamente carregado, com simetria esférica, e carente de momento angular. Esta solução foi denominada métrica de Reissner-Nordström, e é descrita por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (2-3)$$

¹Estamos utilizando o sistema natural de unidades, no qual $c = G = 1$

sendo Q a carga do corpo.

Anos mais tarde, em 1963, o matemático Roy Kerr obteve a métrica que descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de um corpo massivo em rotação. Esta solução, que ficou conhecida como métrica de Kerr, é, em coordenadas de Boyer-Lindquist, dada pela expressão

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr\text{sen}^2\theta}{\Sigma} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Xi} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr\text{sen}^2\theta}{\Sigma}\right) \text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (2-4)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Xi = r^2 - 2mr + a^2$, em que a é o parâmetro que descreve a rapidez relativa da rotação, que está relacionado ao momento angular J pela relação $a = J/m$.

Na mesma época, por volta de 1965, Ezra Newman encontrou a solução das equações de Einstein denominada métrica de Kerr-Newmann. Esta métrica representa o campo gravitacional externo à um corpo esférico massivo, eletricamente carregado e em rotação, sendo, em coordenadas de Boyer-Lindquist, dada por:

$$ds^2 = \left[1 - \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma}\right)\right] dt^2 + 2a \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma}\right) \text{sen}^2\theta dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma}\right)\right] a^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (2-5)$$

onde $\Delta = \Xi + Q^2$.

Vale salientar que existem outras soluções exatas, além dessas acima mencionadas. Como exemplo, podemos citar as métricas de Friedmann-Robertson-Walker e de Gödel. A primeira é usada na cosmologia como modelo de um universo em expansão, enquanto que a segunda é utilizada para descrever um universo em rotação.

3 Metodologia

A área o artigo que se enquadra seria física de campos, especificamente relatividade geral e restrita, apresentando uma natureza de releitura por se basear no estudo realizado por outro autor, porém com considerações, aprofundamento e complementações de nossa autoria.

Com fortes aspectos de um estudo de caso, devido a especificidade do assunto e a pequena quantidade de trabalhos relacionados ao assunto. De caráter teórico, por não visar, em um primeiro instante, uma prova experimental do fenômeno natural, além da forma de uma pesquisa bibliográfica, por não ser um trabalho totalmente novo, sendo fruto de expansão de um trabalho já conhecido, porém com uma visão voltada para nosso tema e baseada em outras referências.

Os procedimentos da pesquisa se resume a busca de materiais em livros, teses e artigos científicos publicados em revistas especializadas. E evidentemente muito tempo desenvolvendo o tratamento matemático necessário.

Dos objetivos temos que há um aspecto de pesquisa exploratória, pois visa proporcionar maior familiaridade com o problema, uma vez que se mostra muito específico e de difícil compreensão, havendo evidentemente a necessidade de um levantamento bibliográfico com afinco, haja vista a especificidade do assunto.

A forma de abordagem desse trabalho é de difícil determinação, pois não se utiliza da análise de dados, que caracterizaria uma abordagem quantitativa, porém também não é uma abordagem qualitativa, uma vez que há a necessidade de se provar certos fenômenos, mesmo assim ele tendência a uma abordagem qualitativa, visto a possibilidade de explicação desses fenômenos.

4 Soluções a partir do algoritmo de Newman-Janis

Depois da descoberta da métrica de Kerr, Newman e Janis mostraram que é possível obter tal solução através de uma transformação complexa de coordenadas sobre a métrica de Schwarzschild (NEWMAN e JANIS, 1965). Este mesmo procedimento, conhecido como algoritmo de Newman-Janis (ANJ), também foi utilizado para obter a métrica que descreve o espaço-tempo de Kerr-Newman, a partir da solução de Reissner-Nordstrom (NEWMAN *et al*, 1965). Embora este procedimento tenha sido, inicialmente, aplicado à situações em que as métricas geradoras possuíam simetria esférica, Gurses e Gurey

(1975) mostraram que, se uma métrica pudesse ser escrita na forma de Kerr-Child, uma transformação complexa de coordenadas seria permitida na Relatividade Geral, desvinculando assim o método de Newman-Janis a este caso particular de simetria. Assim, mesmo em casos específicos, nos quais as métricas geradoras possuam simetria cilíndrica, esse método pode, em princípio, ser utilizado.

Utilizando o AJN, mostraremos, nesta seção, como podemos obter soluções, das equações de Einstein, que descrevem geometrias induzidos por corpos com simetria esférica em rotação. Inicialmente, encontraremos a solução de Kerr-Newman; em seguida estenderemos o método à uma situação geral em que a métrica geradora é esfericamente simétrica.

4.1 Apresentação do algoritmo de Newman-Janis: Solução de Kerr-Newmann

Descreveremos, agora, como gerar, a métrica de Kerr-Newman, a partir da solução de Reissner-Nordström. Trataremos o AJN como um procedimento de cinco passos para a geração de novas soluções das equações de Einstein, desconhecidas estáticas e esfericamente simétricas.

As cinco etapas para determinação do algoritmo de Newman-Janis são como se segue:

1. **Escrever o elemento de linha gerador estático e esfericamente simétrico, em um sistema de coordenadas avançadas nulas de Eddington-Finkelstein (u, r, θ, φ) , no qual a componente g_{rr} é eliminada e um termo cruzado é introduzido.**

No caso do espaço-tempo de Reissner-Nordström, a métrica é dada pela equação (2-3). Então, para satisfazer o primeiro requisito, devemos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$dt = du + dr . \tag{4-6}$$

Efetuada esta transformação, a equação (2-3) assume a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) . \quad (4-7)$$

2. Expressar a forma contravariante da métrica em termos de uma tetradas nulas, isto é,

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu , \quad (4-8)$$

onde as componentes devem obedecer as relações de ortonormalidade

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0, \quad l_\mu n^\mu = -l_\mu \bar{m}^\mu = 1, \quad l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 , \quad (4-9)$$

em que a “barra” denota o complexo conjugado.

É conveniente a utilização da notação das tétradas introduzidas por Newman e Penrose

$$Z_a^\mu = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu) , \quad a = 1, 2, 3, 4 . \quad (4-10)$$

Os vetores nulos da base tetrada, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, descrito na forma avançada de Eddington-Finkelstein, Eq. (4-7), são:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4-11)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \delta_1^\mu \quad (4-12)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) . \quad (4-13)$$

3. Estender as coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas \tilde{x}^ρ , $x^\sigma \mapsto \tilde{x}^\sigma$, e, simultaneamente, fazer com que os vetores da base tetrada Z_a^ν fiquem sujeitos a uma transformação do tipo:

$$Z_a^\nu(x^\sigma) \rightarrow \tilde{Z}_a^\nu(\tilde{x}^\sigma, \bar{\tilde{x}}^\sigma) , \quad (4-14)$$

exigindo que a forma antiga da tetrada e, conseqüentemente, a métrica, sejam recuperadas quando $\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho$.

Em suma, o efeito desta transformação “tilde” é criar uma nova métrica cujas componentes são funções reais de coordenadas complexas, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} : \tilde{X} \times \tilde{X} \mapsto \mathfrak{R}. \quad (4-15)$$

enquanto,

$$\tilde{Z}_a^\mu(\tilde{x}^\rho, \bar{\tilde{x}}^\rho)|_{\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho} = Z_a^\mu(x^\rho). \quad (4-16)$$

Uma transformação deste tipo, claramente não é única, pois existem diferentes escolhas de transformações que satisfazem essas condições, (4-15) e (4-16). Por esse motivo, o método de Newman-Janis tem recebido críticas de alguns autores .

No artigo original de Newman-Janis (DRAKE e SZEKERES, 1998), a forma da complexificação escolhida para a métrica de Reissner-Nordström, (4-7), foi a seguinte:

$$l^\mu \mapsto \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (4-17)$$

$$n^\mu \mapsto \tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - m \left(\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\bar{\tilde{r}}} \right) + \frac{Q^2}{\tilde{r}\bar{\tilde{r}}} \right] \delta_1^\mu \quad (4-18)$$

e

$$m^\mu \mapsto \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (4-19)$$

É fácil verificar que, quando $\tilde{r} = \bar{\tilde{r}}$, estes vetores voltam a ter a forma original antes da complexificação, eqs.(4-11)-(4-12), satisfazendo, assim, a condição (4-16).

4. Fazer uma transformação complexa de coordenadas do tipo

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + i\gamma^\rho(x^\sigma), \quad (4-20)$$

em que $y^\rho(x^\sigma)$ é uma função analítica das variáveis reais x^σ .

Para obtermos uma nova métrica, devemos levar em conta que os vetores \tilde{Z}_a^ρ se transformam como:

$$Z_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{Z}_a^\rho. \quad (4-21)$$

A escolha particular “arbitrária” das transformações complexas, escolhidos por Newman e Janis para gerar a métrica de Kerr-Newman, foi

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + ia \cos x^2 (\delta_0^\rho - \delta_1^\rho) . \quad (4-22)$$

Usando lei de transformação dada por (4-21), e levando em conta a equação (4-22), encontramos os vetores da base tetrada nas coordenadas (u, r, θ, φ) . Tais vetores são dados por:

$$Z_1^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{Z}_1^\nu \Rightarrow l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4-23)$$

$$Z_2^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{Z}_2^\nu \Rightarrow n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{Q^2}{\Sigma} \right] \delta_1^\mu , \quad (4-24)$$

$$Z_3^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{Z}_3^\nu \Rightarrow m^\mu = \frac{r - ia \cos \theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left[\delta_2^\nu + i \text{asen}\tilde{\theta} (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}} \delta_3^\nu \right] , \quad (4-25)$$

e seu complexo conjugado,

$$\bar{m}^\mu = \frac{r + ia \cos \theta}{\sqrt{2}\Sigma} \left[\delta_2^\nu - i \text{asen}\tilde{\theta} (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) - \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}} \delta_3^\nu \right] . \quad (4-26)$$

Lembrando que a forma da métrica é dada por (4-8), e usando as equações (4-23) - (4-24), chegamos ao seguinte resultado:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Sigma} a^2 \text{sen}^2 \theta & 1 + \frac{1}{\Sigma} a^2 \text{sen}^2 \theta & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ 1 + \frac{1}{\Sigma} a^2 \text{sen}^2 \theta & - \left[\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{Q^2}{\Sigma} \right) + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} \right] & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix} . \quad (4-27)$$

Agora utilizando o software maple iremos calcular a inversa, ou seja, finalmente a matriz covariante.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) & 1 & 0 & a \text{sen}^2 \theta \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) \\ \cdot & 0 & 0 & -a \text{sen}^2 \theta \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\text{sen}^2 \theta \left[r^2 + a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) \right] \end{pmatrix} , \quad (4-28)$$

ou ainda,

$$ds^2 = \left[1 - \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) \right] du^2 + 2dudr + 2a \text{sen}^2 \theta \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) dud\varphi - \Sigma d\theta^2 - 2a \text{sen}^2 \theta drd\varphi - \text{sen}^2 \theta \left[r^2 + a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) \right] d\varphi^2 . \quad (4-29)$$

5. **Considerar uma transformação simples de coordenadas da forma $u = t + F(r)$, $\varphi = \psi + G(r)$ que transformará a métrica para coordenadas de Boyer-Lindquist.** (Neste trabalho, um conjunto de coordenadas, em que a métrica tem apenas um termo $g_{t\varphi}$ fora da diagonal, será denominado coordenadas de “Boyer-Lindquist”.)

Para obter a representação usual da métrica de Kerr em coordenadas Boyer-Lindquist, é necessário fazer a seguinte transformação nas coordenadas u e φ :

$$du = dt - \left(\frac{a}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr} \right) dr \quad (4-30)$$

e

$$d\varphi = d\psi - \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr} \right) dr . \quad (4-31)$$

De fato, substituindo as equações acima na métrica descrita por (4-29), chegamos a métrica de Kerr-Newman, representada pela equação (2-5). Este resultado mostra a validade do método na obtenção de uma solução das equações de Einstein, no caso em que o espaço-tempo é gerado por um corpo massivo, carregado e esfericamente simétrico, em rotação.

4.2 Estendendo o algoritmo de Newman-Janis

Inspirados nos resultados descritos acima, vamos generalizar o método para um caso geral em que a métrica geradora possui simetria esférica.

Seguindo o procedimento descrito anteriormente, escreveremos o elemento de linha gerador estático e esfericamente simétrico, em um sistema de coordenadas avançadas nulas (u, r, θ, φ) . Neste caso, como a forma geral do elemento de linha estático e esfericamente simétrico é

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) , \quad (4-32)$$

devemos fazer a mudança de coordenadas

$$dt = du + e^{\lambda(r) - \varphi(r)} dr . \quad (4-33)$$

Após essa transformação, o elemento assume a forma de Eddington-Finkelstein, isto é,

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} du^2 + 2e^{\phi(r)+\lambda(r)} dudr - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}\theta^2 d\varphi^2) . \quad (4-34)$$

De acordo com o ANJ, devemos agora expressar a métrica em termos de tetradas nulas, conforme a equação (4-8). Neste caso, os vetores da base tetrada são

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4-35)$$

$$n^\mu = e^{-\lambda(r)-\phi(r)} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\lambda(r)} \delta_1^\mu \quad (4-36)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) . \quad (4-37)$$

Nas diversas fases do NJA descritos acima, o único ponto ambíguo foi a transformação tilde no passo 3. Aplicando este passo para um caso geral, com a métrica “semente” esfericamente simétrica e estática (1), a operação tilde produz os vetores de tetradas nulas

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4-38)$$

$$\tilde{n}^\mu = e^{-\lambda(r,\bar{r})-\phi(r,\bar{r})} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\lambda(r,\bar{r})} \delta_1^\mu \quad (4-39)$$

e

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) . \quad (4-40)$$

No próximo passo é realizar uma transformação do tipo (4-20) e escrever a métrica em um novo sistema de coordenadas $x^\mu = (u, r, \theta, \varphi)$. Utilizando a transformação (4-22) e levando em conta (4-21), podemos mostrar que os vetores da base tetrada tomam a seguinte forma:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4-41)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu e^{-\lambda(r,\theta)-\phi(r,\theta)} - \frac{1}{2}\delta_1^\mu e^{-2\lambda(r,\theta)} \quad (4-42)$$

e

$$m^\mu = \frac{(r - ia \cos \theta)}{\sqrt{2}\Sigma} \left\{ \delta_2^\mu + i a \text{sen} \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \frac{i}{\text{sen} \theta} \delta_3^\mu \right\}. \quad (4-43)$$

Logo, tomando o conjugado complexo, temos

$$\bar{m}^\mu = \frac{(r + ia \cos \theta)}{\sqrt{2}\Sigma} \left\{ \delta_2^\mu - i a \text{sen} \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) - \frac{i}{\text{sen} \theta} \delta_3^\mu \right\}. \quad (4-44)$$

Substituindo esses resultados na equação (4-8), encontramos os componentes contravariantes da métrica nas coordenadas (u, r, θ, φ) . De fato, fazendo isto, obtemos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & e^{-\lambda-\phi} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ \left(e^{-\lambda-\phi} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} \right) & e^{-2\lambda} - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (4-45)$$

Invertendo a matriz anterior chegamos a matriz covariante,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r,\theta)} & e^{\lambda(r,\theta)+\phi(r,\theta)} & 0 & a \text{sen}^2 \theta e^{\phi(r,\theta)} [e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)}] \\ \cdot & 0 & 0 & -a e^{\phi(r,\theta)+\lambda(r,\theta)} \text{sen}^2 \theta \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\text{sen}^2 [\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\phi(r,\theta)} (2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)})] \end{pmatrix}, \quad (4-46)$$

Isso conclui as etapas 1 - 4 da generalização do ANJ. Contudo, não conhecemos a transformação tilde (4-14). Nesta fase, a métrica contém duas funções desconhecidas e^ϕ e e^λ de duas variáveis r e θ . As únicas limitações sobre estas funções são dadas pela (4-15) e (4-16).

O passo 5 consiste em escrever a nova métrica nas coordenadas Boyer-Lindquist, por meio de uma transformação da forma $du = dt + g(r)dr$ e $d\varphi = d\psi + h(r)dr$. Neste caso, para que a métrica assuma tal forma, as funções $g(r)$ e $f(r)$ devem, necessariamente, satisfazer às equações

$$g(r) = -\frac{e^{\lambda(r,\theta)} [\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\lambda(r,\theta)+\phi(r,\theta)}]}{e^{\phi(r,\theta)} [\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{2\lambda(r,\theta)}]} \quad (4-47)$$

e

$$h(r) = -\frac{ae^{2\lambda(r,\theta)}}{\Sigma + a^2\text{sen}^2\theta e^{2\lambda(r,\theta)}}. \quad (4-48)$$

Após algumas manipulações algébricas verifica-se que nestas coordenadas $\{t, r, \theta, \psi\}$ a métrica é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r,\theta)} & 0 & 0 & a\text{sen}^2 e^{\phi(r,\theta)} [e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)}] \\ \cdot & -\frac{\Sigma}{[\Sigma e^{-2\lambda(r,\theta)} + a^2\text{sen}^2\theta]} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\Sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\text{sen}^2\theta [\Sigma + a^2\text{sen}^2\theta e^{\phi(r,\theta)} (2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\phi(r,\theta)})] \end{pmatrix}$$

Nesta seção, afirmamos que a métrica, descrita pela matriz acima, representa uma família completa de métricas. Estas métricas podem ser obtidas, segundo o AJN, a partir de métricas geradoras que possuem simetria esférica que estão escritas nas coordenadas Boyer-Lindquist. A validade dessas transformações requerem que $\Sigma + a^2\text{sen}^2\theta \neq 0$ e que $e^{2\lambda(r,\theta)} > 0$. Notemos que, se escolhermos $e^{2\phi(r,\theta)} = e^{-2\lambda(r,\theta)} = 1 - (2mr - Q^2)/\Sigma$, este resultado concordará com a solução de Kerr-Newmann. Além disso, se considerarmos $e^{2\phi(r,\theta)} = e^{-2\lambda(r,\theta)} = 1 - 2mr/\Sigma$, encontraremos a solução de Kerr.

5 Conclusões

Neste trabalho, estudamos como podemos obter o campo gravitacional de um corpo com simetria esférica em rotação. Porém, para atingirmos tal objetivo, não resolvemos diretamente as equações de Einstein. De fato, utilizamos o algoritmo de Newman-Janis e construímos a solução girante a partir da métrica do espaço-tempo gerado por um corpo sem rotação.

Inicialmente, realizamos o cálculo da métrica do espaço-tempo induzido por um corpo massivo e carregado, e verificamos que o resultado obtido corresponde à métrica de Kerr-Newman. Em seguida, estendemos o procedimento para uma distribuição qualquer que apresentava simetria esférica. Os resultados mostraram que, para determinadas métricas geradoras, podemos obter as soluções encontradas na literatura.

Este método não representa nenhuma teoria física nova, mas torna mais simples a tarefa de se obter soluções das equações de Einstein, para corpos em rotação.

Referências

ARANHA, R. F, **Emissão de Radiação Gravitacional em Fusões de Buracos Negros: Uma Modelagem Teórica e Computacional no Formalismo Característico**. 187. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro - Brasil, Abril de 2011.

CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

DRAKE, S.P; SZEKERES P. **An Explanation of the Newman-Janis Algorithm**. CORNELL UNIVERSITY LIBRARY. [arXiv:gr-qc/9807001v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9807001v1) 1 Jul 1998.

GASIOROWICZ, Stephen. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A., 1979.

HANSEN, D.; YUNES, N; **Applicability of the Newman-Janis algorithm to black hole solutions of modified gravity theories**, *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Nov. 2013.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Mecânica**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 2004.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

LETELIER, P.S.**Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial***Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.27, n.1, p.121-136, 2005.

MARTINS, R. A. **A dinâmica relativística antes de Einstein**.*Rev. Bras. Ensino Fís. [online]*. 2005, vol.27, n.1, pp. 11-26. ISSN 1806-1117.

TIPLER, P.A; LLEWELLYN, R.A **Física Moderna- 3º edição - LTC**, 2008