



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA
PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

**A IMPORTÂNCIA DO DESENHO COMO RECURSO PARA O
ENSINO E APRENDIZAGEM EM TRIGONOMETRIA**

DELANY MATIAS SOUZA

Campina Grande - PB
2014

DELANY MATIAS SOUZA

**A IMPORTÂNCIA DO DESENHO COMO RECURSO PARA O
ENSINO E APRENDIZAGEM EM TRIGONOMETRIA.**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Prof^a. Msc. Maria Conceição Vieira Fernandes

Co-Orientadora: Prof^a. Dra. Maria Betânia Fernandes Vasconcelos

Campina Grande - PB
2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S729i Souza, Delany Matias.

A importância do desenho como recurso para o ensino e aprendizagem em trigonometria [manuscrito] / Delany Matias Souza. - 2014.

48 p. : il. color.

Digitado.

Monografia (Especialização em Matemática para Professores do Ensino Médio e Fundamental) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Profa. Ma. Maria Conceição Vieira Fernandes, Departamento de Matemática".

"Co-Orientação: Profa. Dra. Maria Betânia Fernandes Vasconcelos, Universidade Federal da Paraíba".

1. Desenho. 2. Trigonometria. 3. Ensino de trigonometria. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

DELANY MATIAS SOUZA

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

MONOGRAFIA APROVADA EM: 30 / 09 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof^a Msc. Maria Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientadora

Maria Betânia Fernandes de Vasconcelos

Prof^a. Dra. Maria Betânia Fernandes Vasconcelos
Departamento de Ciências Fundamentais e Sociais – CCA/UFPB
Co-Orientadora

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Msc. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

DEDICATÓRIA

A Deus, minha fortaleza e meu refúgio. Nada temerei, pois é dele que emana a força, a determinação, a glória, a justiça e a vitória. Aos meus amados pais, José de Assis Souza e Odaci Matias Souza, que me cultivaram valores importantes para a vida e que são exemplos de determinação, superação e amor. As minhas queridas irmãs, Danielle Núbia Souza e Denize Núbia Souza, pelas experiências compartilhadas e companheirismo afetuoso. A minha amada família que me deu forças para continuar e nunca desistir dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que, diante das incertezas e provações, encorajou-me a prosseguir a caminhada, injetando-me força e perseverança para a concretização desse trabalho.

À minha querida família, meu alicerce, pelo amor, estímulos e cuidados prestados de forma tão afetuosa e irrestrita durante essa caminhada.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), instituição que possibilitou o desenvolvimento desse trabalho e a oportunidade de capacitação profissional.

Às Professoras Msc. Maria Conceição Vieira Fernandes e Dra. Maria Betânia Fernandes Vasconcelos pelo apoio, paciência e orientação concedidos para a realização desse trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pela importante participação e pelas sugestões para o melhoramento desse trabalho.

Ao corpo docente da Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio (UEPB), pelos ensinamentos oferecidos.

Aos colegas da Especialização, pelo apoio, incentivo, companheirismo, e pelas experiências adquiridas e compartilhadas no transcorrer dessa caminhada.

À todos que direta ou indiretamente contribuíram para o andamento desse trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar em que medida os livros didáticos apresentam situações que evidenciem as contribuições do desenho geométrico para os conceitos de Trigonometria. Adotamos os estudos de Marcia Fonseca Raymundo e Luciane Garcia como centrais em nosso referencial teórico, além de trazeremos as contribuições de outros autores. O estudo de natureza qualitativa foi norteado por questões que abrangiam o uso do desenho nas demonstrações de Trigonometria; a aplicabilidade do desenho como recurso importante para o ensino e aprendizagem de Trigonometria, a partir dos livros didáticos analisados; verificar a contribuição do desenho para a resolução de situações-problema envolvendo a Trigonometria. O estudo foi realizado a partir da análise do tema Trigonometria nos livros: Matemática: uma nova abordagem de Giovanni & Bonjorno (2010) e Matemática: contexto & aplicações de Luiz Roberto Dante (2003). A análise dos livros possibilitou-nos constatar que estes apresentam situações que evidenciam a importância do desenho nas aulas de Matemática como uma ferramenta indispensável para que os alunos compreendam conceitos da Trigonometria.

Palavras-Chave: Desenho; Trigonometria; ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the extent to which textbooks present situations that demonstrate the contributions of geometric drawing to the concepts of Trigonometry. We adopt the studies Marcia Fonseca and Raymundo Garcia Luciane as central to our theoretical framework, and bring the contributions of other authors. The qualitative study was guided by questions covering the use of drawing in the statements of Trigonometry; the applicability of the design as important for teaching and learning resource Trigonometry, from the textbooks analyzed; verify the contribution of design to solve problem situations involving trigonometry. The study was conducted by analyzing the subject in books Trigonometry: Matemática: uma nova abordagem by Giovanni & Bonjorno (2010) and Matemática: contexto & aplicações by Luiz Roberto Dante (2003). The analysis of the books allowed us to conclude that these present situations that highlight the importance of drawing in Mathematics classes as an indispensable tool for students to understand concepts of trigonometry.

Key Words: Drawing; Trigonometry; Teaching and learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	09
A ESCOLHA DO TEMA, JUSTIFICATIVA E OBJETO DE ESTUDO	09
1. A HISTÓRIA DO DESENHO	14
1.1. A ORIGEM DO DESENHO	14
1.2. O DESENHO NA MATEMÁTICA	16
1.3. A TRAJETÓRIA DO ENSINO DO DESENHO NO BRASIL.....	17
1.4. OS PCN	19
2. A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA.....	21
2.1 O SURGIMENTO DA TRIGONOMETRIA	21
2.2 O ENSINO DA TRIGONOMETRIA	23
3. O DESENHO NA TRIGONOMETRIA: UMA ANÁLISE UMA ANÁLISE	26
3.1. TRIGONOMETRIA: ELEMENTOS RELEVANTES	27
3.1.1. Arco de Circunferência	27
3.1.2. Arco e Ângulo Central	30
3.1.3. Radiano	32
3.1.4. Razões Trigonométricas na Circunferência	34
3.1.5. O desenho no Ciclo Trigonométrico	37
3.2. O DESENHO NA RESOLUÇÃO DE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA	39
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
REFERÊNCIAS	46

INTRODUÇÃO

A escolha do tema, justificativa e objeto de estudo.

A partir do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), realizado na Universidade Estadual da Paraíba no ano de 2010, onde desenvolvemos com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, a construção de um material concreto para auxiliar na aprendizagem das Razões Trigonométricas, surgiu a curiosidade pelo ensino através do desenho e o desejo de pesquisar sobre o desenho no ensino e aprendizagem dos conceitos trigonométricos e também, a forma como os livros didáticos evidenciam as contribuições do desenho geométrico nos conceitos de Trigonometria.

Outra razão que justifica o nosso estudo diz respeito ao fato de que, embora o desenho seja utilizado em vários conteúdos da matemática direcionamos o nosso trabalho para o assunto **Trigonometria** por observar as dificuldades dos estudantes do Ensino Médio, acerca deste tema, pois é indispensável que o aluno já tenha conhecimentos anteriores de alguns conceitos geométricos, como o estudo de ângulos, de retas tangentes, dos triângulos, da circunferência e os seus elementos para que ele possa desenvolver conscientemente o estudo da Trigonometria.

Nesta atividade desenvolvida no PIBID procuramos aprofundar os estudos no intuito de descobrir algo que pudesse ajudar os alunos a compreender melhor a Trigonometria utilizando, para isso, materiais manipuláveis. Assim, realizamos uma oficina para a construção do Teodolito e também mostramos de que maneira a Trigonometria é utilizada no cotidiano.

Desse modo, as atividades desenvolvidas no PIBID serviram como suporte para iniciar o trabalho de conclusão de curso na Graduação. Ao ingressar na Especialização visualizamos a possibilidade de interligar o ensino-aprendizagem de Trigonometria com o recurso do desenho, considerando que esta poderia ser importante ferramenta para auxiliar a aprendizagem dos conceitos trigonométricos, tendo em vista que o professor se utiliza de muitos gráficos e rabiscos para explicar as ideias pertencentes a este conteúdo.

Não raro, a aprendizagem da Trigonometria é tratada como algo abstrato e

de difícil aplicação, tornando-se prioridade para grande parte dos professores a resolução de cálculos algébricos e o excesso de formalidade o que pode desencadear uma aula cansativa e com um nível de aprendizagem insatisfatório por parte dos alunos. Isto é constatado pelas pesquisadoras Brito e Morey (2004) que realizaram um estudo acerca das dificuldades que muitos professores do Ensino Fundamental sentem ao lidar com os conceitos trigonométricos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), a Trigonometria é um tema que exemplifica a relação da aprendizagem em Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências. Orienta ainda que, o estudo da Trigonometria esteja voltado para as aplicações, de modo que evite o uso excessivo de cálculos.

Outra pesquisa envolvendo a importância do desenho geométrico na Matemática, tal como a realizada por Raymundo (2010) na dissertação intitulada: *Construção de Conceitos Geométricos: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental*, levaram a autora a afirmar que:

O Desenho Geométrico pode ser considerado como a linguagem gráfica da Matemática. Com exceção dos aspectos aritméticos mais simples, as relações do Desenho Geométrico e a Matemática são tão intrínsecas que, na maioria dos casos, é impossível entender as leis matemáticas sem os recursos gráficos oferecidos pelo Desenho Geométrico. Sem ele seria impossível aprender os conceitos, as definições e as demonstrações indispensáveis ao entendimento das relações geométricas. Ele ainda exerce papel de facilitador na compreensão de muitos conteúdos de aritmética e álgebra (RAYMUNDO, 2010).

Diante dessas colocações, trazemos ao menos duas reflexões que a nosso ver são fundamentais para a definição do nosso objeto de estudo: primeiro que a Trigonometria apresenta um nível de aprendizagem insuficiente e segundo pela sua vasta aplicação no dia a dia como afirma Brasil (2007):

A trigonometria possui diversas aplicações práticas. Encontramos aplicações da Trigonometria na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina, na Astronomia e até na Música. Por exemplo, a trigonometria do triângulo retângulo nos permite realizar facilmente cálculos como: altura de um prédio

através de sua sombra; distância a ser percorrida em uma pista circular de atletismo; largura de rios, montanhas etc; medida do raio da Terra, distância entre a Terra e a Lua.

Além disso, o desenho pode funcionar como um instrumento que auxilia o aluno a conhecer conceitos de maneira objetiva, uma vez que a visualização permitiria a compreensão de conceitos abstratos em alguns conteúdos de Matemática. Como recurso didático, o desenho pode ser uma forte contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do aluno, contribuindo, então para uma possível melhoria no processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria, uma vez que este auxilia na aprendizagem dos conceitos de forma mais clara.

Pelas razões citadas, surge o interesse de saber como estão sendo desenvolvidas as atividades relacionadas ao ensino de Trigonometria, a partir do seguinte questionamento: Até que ponto os livros didáticos apresentam situações que evidenciem as contribuições do desenho geométrico para os conceitos de Trigonometria?

Nesse sentido, o estudo teve como objetivo geral investigar a utilização do desenho geométrico nas situações de Trigonometria presentes nos livros didáticos.

Para alcançarmos esse objetivo, estabelecemos alguns objetivos específicos, a saber:

- ❖ Identificar o uso do desenho nas definições de Trigonometria;
- ❖ Discutir a aplicabilidade do desenho como recurso importante para o ensino e aprendizagem de Trigonometria, a partir dos livros didáticos analisados;
- ❖ Verificar a contribuição do desenho para a resolução de situações-problema envolvendo a Trigonometria.

Quanto ao percurso metodológico trilhado, iniciamos a nossa pesquisa com algumas leituras de dissertações e de artigos que pudessem dar informações importantes para o nosso estudo com o intuito de identificar as pesquisas já realizadas tanto sobre o uso do desenho quanto no que se refere ao uso do desenho na trigonometria, tais como: Construção de Conceitos Geométricos: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental (RAYMUNDO, 2010); Dificuldades no Processo Ensino

Aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades (GARCIA, 2006), entre outras.

Em seguida, realizamos também um estudo do capítulo do livro **Matemática: uma nova abordagem**, de Giovanni e Bonjorno (2010) e **Matemática: contexto & aplicações** de Luiz Roberto Dante (2003), com a finalidade de obter dados para o nosso estudo.

Nossa intenção envolveu, a partir destas leituras e da análise dos livros didáticos, verificar até que ponto os livros didáticos apresentam situações que evidenciem as contribuições do desenho geométrico para os conceitos de Trigonometria, bem como a sua importância a ser empregado como recurso didático.

Dessa forma, este trabalho foi estruturado em três capítulos, a saber:

No primeiro, apresentamos alguns aspectos da história do desenho, mostrando como o desenho surgiu, quais são suas modalidades, o desenho na Matemática e como eles são indispensáveis no ensino-aprendizagem. Ainda neste capítulo trouxemos a trajetória do ensino do desenho no Brasil e as causas que o levaram a ser excluído do currículo escolar. E por fim, a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) acerca do desenho na Matemática.

No segundo capítulo, trouxemos um breve relato da história da Trigonometria, seu surgimento e desenvolvimento ao longo dos anos. Tratamos ainda de aspectos relacionados ao ensino e a aprendizagem da Trigonometria.

No terceiro e último capítulo, fizemos a análise de como o desenho se apresenta nas definições, na resolução de problemas e no ciclo trigonométrico dos livros **Matemática: uma nova abordagem** de Giovanni & Bonjorno (2010) e **Matemática: ciência e aplicações** de Dante (2003).

Nas considerações finais, apresentamos reflexões acerca das nossas percepções quanto ao uso do desenho geométrico no ensino de Trigonometria.

Por fim, esta pesquisa apresenta relevância acadêmica para os alunos e professores do Ensino Superior, uma vez que está contribuindo para a reflexão da problemática e para o crescimento do acervo bibliográfico, fornecendo base para novos estudos que abordem a temática desenho no ensino de Trigonometria.

Em caráter pessoal, a investigação apresenta relevância por oferecer a oportunidade de refletir sobre o desenho como recurso para o ensino de

Trigonometria, uma vez que pretendo prosseguir me especializando nessa área. Além disso, é relevante por subsidiar as minhas reflexões, possibilitando melhor atuação no exercício da profissão.

1. A história do desenho

Neste capítulo, apresentaremos alguns aspectos da história do desenho, mostrando como surgiu e quais são suas modalidades. Também abordaremos o desenho na Matemática e como eles são indispensáveis no seu ensino-aprendizagem. Ainda neste capítulo traremos a trajetória do ensino de desenho no Brasil e as causas que o levaram a ser excluído do currículo escolar. E por fim, o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) falam do desenho na Matemática.

1.1. A origem do desenho

A origem do desenho começa com a história do surgimento do homem. O desenho surgiu na pré-história feito pelos homens primitivos como forma de gravuras para expressar e comunicar antes mesmo da linguagem, ou seja, o desenho foi um instrumento facilitador para a comunicação. Com o passar do tempo foram sendo utilizados o desenho geométrico, isto é, traços, formas mais definidas (FARIA, 2009).

No Egito usava-se o desenho para decorar tumbas e templos. Para os egípcios, raspar os desenhos das tumbas era condenável. Na Mesopotâmia, a utilização do desenho era para representar a Terra, além de ser muito utilizado na cartografia (FARIA, 2009).

O invento do papel pelos chineses possibilitou o desenvolvimento de muitas formas de desenho, embora o papel que utilizamos hoje só tenha surgido 105 d.C. Os chineses utilizavam o papel tipo seda para representar e também para escrever (FARIA, 2009).

Como o desenho foi bastante importante para a civilização, foram também surgindo utensílios para aprimorar os desenhos, enriquecendo as imagens. Entre os utensílios utilizados por todas essas civilizações, destacamos: os dedos, pedaços de madeiras e ossos, argila, tintura vegetal, carvão, penas até chegar nas canetas esferográficas (FARIA, 2009).

Diferente das representações feitas na pré-história, os desenhos, no

Renascimento, ganharam perspectivas mais realistas tendo enfoque na anatomia humana dando mais realidade aos desenhos. Na Revolução Industrial, os desenhos eram voltados à projeção de máquinas e equipamentos industriais (FARIA, 2009).

Um outro marco para a história do desenho foi através da criação das histórias em quadrinhos (também conhecidas como HQ), criadas no fim do século passado por empresas jornalísticas norte-americanas. Assim, o primeiro quadrinho o Yellow Kid (moleque amarelo) surgiu para testar a cor amarela nas impressões de jornais (LUYTEN, 1985).

Desse modo, as variações dos nomes dados as histórias em quadrinhos foram: Nos Estados Unidos – comics strips; Na França – bandes dessinées; Na Itália – fumetti; No Brasil – gibi; Em alguns países da American Latina – historieta; Em Portugal – histórias aos quadrinhos e no Japão – mangá. (LUYTEN, 1985).

Logo após a Primeira Guerra Mundial as caricaturas e charges se popularizaram. Com a Segunda Guerra Mundial periódicos, como também animações foram utilizados como instrumento para fazer críticas ou propagandas.

Enfim, o desenho com o passar dos anos foi se aprimorando, criando novas técnicas, novas formas, novos materiais, criando novos estilos e se dividindo desde o desenho artístico ao desenho geométrico.

Mas, afinal, o que é o desenho? E como podemos classificá-lo? A partir de agora traremos algumas definições de desenho, bem como as suas classificações.

Segundo o dicionário Aurélio (2004), o desenho é a arte e a técnica de representar, com lápis, pincel etc., um tema real ou imaginário, expressando a forma. E podemos definir, também, o desenho geométrico como um conjunto de técnicas e procedimentos utilizados para as construções de formas geométricas.

O desenho é uma forma de linguagem não-verbal que é expressada por meio de traços, esboços, formas em qualquer material. Podemos destacar algumas das modalidades de desenho:

- △ *Desenho geométrico*: é o estudo dos padrões e normas do desenho em duas dimensões, voltado à representação plana dos elementos geométricos para exibição ou resolução geométrica de problemas de Matemática.

- ⤴ *Desenho projetivo*: é o estudo dos padrões e normas do desenho em duas dimensões envolvendo elementos de três dimensões. É composto de variações como o Desenho técnico¹ e Geometria descritiva².
- ⤴ *Desenho arquitetônico*: é o desenho voltado a projetos de arquitetura.
- ⤴ *Ilustração*: é o desenho informativo que geralmente é acompanhado com algum texto.
- ⤴ *Croquis ou esboço*: é o desenho rápido, sem auxílio de outros instrumentos. Geralmente, eles são guias para se chegar ao produto final. Os croquis são utilizados por estilistas
- ⤴ *Modelo vivo*: é o desenho feito a partir da observação de um objeto real, tendo como principal tema o corpo.

Como percebemos o desenho tem várias modalidades, porém o nosso estudo terá enfoque, apenas, no desenho geométrico.

1.2. O desenho na Matemática

Matemática se define como uma ciência exata, formal, composta por axiomas, postulados, teoremas, corolários, lemas e proposições. É uma ciência que explora padrões. Em virtude de tanta formalidade, buscamos trazer para sala de aula recursos que auxiliem na exploração dos conceitos e que permitam aos alunos visualizar, na medida do possível, os objetos matemáticos. De acordo com Garcia (2006, p. 1).

A fórmula favorece o processo mecânico de resolução de problemas, porém pouco favorece a compreensão de conceitos. A visualização torna-se uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da matemática apesar da língua verbal e escrita ser a mais utilizada em sala de aula.

Os desenhos são instrumentos indispensáveis nas aulas de Matemática, uma vez que, eles ajudam no desenvolvimento do raciocínio, contribuindo no

1 Desenho técnico: é a linguagem gráfica representada por formas, dimensões dos objetos. Este é um ramo do desenho que é constituído por bastante regras e procedimentos.

2 Geometria descritiva: é um ramo da Geometria que tem por finalidade projetar objetos de três dimensões em um plano bidimensional.

encadeamento de ideias e argumentos para o entendimento de enunciados, de explicações, de demonstrações, na perspectiva de Filho (2007).

Uma vez que o desenho venha a ser construído para solucionar problemas ou na demonstração de algum resultado em Matemática, é provável que facilite a compreensão dos conceitos no ensino desta disciplina que para muitos alunos é exaustiva e cansativa. O uso do desenho como recurso para explicar algum fenômeno matemático tem sido usado por vários anos no decorrer da história da Matemática. Segundo, Filho (2007, p. 163),

...usando-se desenhos, é possível auxiliar, e muito, a demonstração de vários resultados; essa prática tem sido assim por milênios, entre as mais diversas civilizações que usaram ou desenvolveram a Matemática.

Na Geometria, o desenho é uma ferramenta essencial para a construção de conceitos; explicação dos conteúdos; demonstração de propriedades, solução de problemas. Possibilita também, enxergar um objeto matemático, enquanto o professor explica algo em Geometria, buscando facilitar a aprendizagem nesse ramo da Matemática.

Para Raymundo (2010), o desenho ajuda a desenvolver também o raciocínio lógico dedutivo, resolver problemas, demonstrar propriedades, definir conceitos e desenvolver a capacidade de agregar conhecimentos.

A imagem, utilizada para ensinar conceitos matemáticos e abstratos, simplifica a aprendizagem dos conceitos tanto em Geometria como em outras áreas da Matemática. Visualizar o objeto é fundamental na construção de conceitos, (GARCIA, 2006).

1.3. A trajetória do ensino do desenho no Brasil

O ensino do desenho permaneceu durante os anos de 1931 a 1971, embora em 1971 a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e proposto a mudança do currículo de forma que o desenho deixaria de ser uma disciplina obrigatória e passaria a ser uma disciplina optativa.

Segundo a Lei nº 5692/71, art 4º,

Os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos.

É nesse período que a disciplina de Educação Artística é inserida em todas as séries de 1º e 2º graus do ensino básico. A partir disso, a disciplina de desenho deixaria de ser obrigatória e passaria a ser optativa e por se tornar optativa muitas escolas aboliriam o ensino do desenho geométrico, (ZUIN, 2000).

Outro fato que contribuiu para o abandono do desenho geométrico foi a não obrigatoriedade das construções geométricas com a utilização de régua e compasso nos exames vestibulares de Engenharia e Arquitetura na década de 70, contribuindo ainda mais para que a disciplina fosse extinta do currículo escolar.

Segundo Marinho et al (2010, p. 2),

Conhecimentos acerca do Desenho Geométrico que estimulavam o raciocínio lógico-dedutivo eram aplicados somente às escolas de elite, enquanto as classes menos favorecidas estudavam Educação Artística voltada ao trabalho manual onde não há um estímulo ao raciocínio lógico.

Com a não obrigatoriedade da disciplina Desenho Geométrico, percebemos os prejuízos causados, uma vez que a clientela perderia o lado intuitivo e passaria a raciocinar menos. E como afirma Kopke (2007), com a vigência da Lei nº 5692/71, os professores que atuavam na área de Educação Artística não tinham formação específica e trabalhavam o ensino de artes usando a 'criatividade' ou o 'desenho livre', mostrando o despreparo na formação da maioria dos professores que atuavam nesta área.

No início do século XX, o ensino de Matemática nas escolas estava preocupando muitos países. Após o IV Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma em 1908, foi criada uma comissão para analisar o ensino de Matemática, no qual o matemático Felix Klein era membro desta comissão, onde ele divulgou seu trabalho já desenvolvido na Alemanha, que tinha como objetivo internacionalizar o ensino de Matemática, o qual era chamado de Movimento da Matemática Moderna (MMM).

No início dos anos 60, influenciados pelas mudanças curriculares no ensino

de Matemática nos Estados Unidos e Europa, muitos educadores se preocuparam em colocar a Matemática como uma disciplina voltada às necessidades sociais, implantando no currículo os conteúdos de topologia, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, com a intenção de aproximar a Matemática trabalhada na escola e a Matemática utilizada pelos pesquisadores da área.

Desse modo, isso contribuiu para que a Geometria seja um conteúdo pouco explorado hoje, após o Movimento da Matemática Moderna (MMM), onde o ensino da Geometria Euclidiana foi reduzido ou excluído das escolas de ensino básico.

No final dos anos 70 alguns educadores matemáticos brasileiros passaram a se preocupar com o ensino de Geometria para as séries de 1º e 2º graus, de forma que, algumas editoras lançaram livros com construções geométricas. Embora muitas instituições retornassem às construções geométricas outras não abordariam o conteúdo, visto que elas se pautavam na Lei 5692/71 da LDB, que estabelecia o Desenho Geométrico como disciplina facultativa.

1.4. Os PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram criados com a proposta de orientar as práticas educacionais no ensino básico do Brasil. Esse documento pretende explicar as habilidades básicas e competências específicas em todas as disciplinas do currículo básico nacional. Nele, mostra propostas para o Ensino Médio, de forma que a aprendizagem esteja voltada à vida e ao trabalho.

Desse modo, procuramos nos orientar através dos PCN quanto às práticas escolares para o ensino de Geometria e em contrapartida o conteúdo de Desenho que está diretamente ligado a este estudo. Segundo os PCN,

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1999, p. 44).

O desenho aliado a Geometria pode colaborar para a compreensão de ideias, conceitos e resolução de problemas. Como também está explicitado no

PCN+ Ensino Médio,

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (BRASIL, 2002, p.120)

A forma como foi exposta mostra-nos como poderia ser interessante às aulas de Matemática, embora muitos educadores estejam muito aquém das sugestões expostas no PCN+ Ensino Médio.

Segundo Zuin (2000, p. 14), os PCN

apresentam uma proposta de incorporação e/ou de mudanças nas práticas das disciplinas escolares. É nítido nos PCN de Matemática o interesse em promover a aquisição de determinados procedimentos cognitivos dos alunos, mas as formas de se atingir esses objetivos não são aplicadas.

Apesar dos PCN não ser diretriz para o ensino básico, muitas escolas os utiliza como uma ferramenta para dar direções às atividades escolares, embora tais documentos não disponham de “soluções” que sejam direcionadas ao ensino de Matemática.

2. A história da Trigonometria

Neste capítulo abordaremos sobre o surgimento da Trigonometria, como esta se desenvolveu e é utilizada nos dias atuais. Também falaremos de aspectos da Trigonometria voltados ao ensino desta disciplina.

2.1. O surgimento da Trigonometria

Os primeiros vestígios de elementos de Trigonometria apareceram no Egito, em aproximadamente 1650 a.C., na época observou-se no Papiro Rhind quatro problemas envolvendo $\sec\theta$ (secante) de um ângulo que foram utilizados nas medições das pirâmides. E foi também no Egito que surgiu a ideia de agregar sombras projetadas por uma vara na posição vertical para relacionar seu comprimento com as horas (relógio do sol) que mais tarde, na Grécia, passaria a chamar gnômon (EVES, 2004).

Os babilônios foram excelentes astrônomos, e como consequência criaram um calendário astrológico no século 28 a. C. e elaboraram uma tábua de eclipses lunares. Na China, usava-se triângulos para medir distâncias, comprimentos e profundidades.

Na Grécia, Thales ao usar a semelhança de triângulos fortaleceu os conceitos da Trigonometria, como por exemplo as razões trigonométricas. E a partir do teorema de Pitágoras “Em todo e qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”, surgiu a relação fundamental da Trigonometria $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (COSTA, 1997).

Dentre muitos dos personagens da História da Matemática, podemos destacar: Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.), Ptolomeu e Hiparco de Nicéia que viveu em torno de 140 a.C. (conhecido como “o pai da trigonometria”). Aristarco de Samos fez um tratado sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, mostrando através de seus estudos que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é $\sin 3^\circ$, onde concluiu que o Sol está num intervalo entre dezoito e vinte vezes mais longe da Terra que a Lua. (BOYER, 1974). Podemos apontar alguns personagens que contribuíram para a

história da Trigonometria:

Eratóstenes de Cirene mediu a circunferência da Terra, onde pode observar que em Siena, fixando uma vara na posição vertical, ao meio dia do solstício³, não era projetada sombra, enquanto em Alexandria os raios solares inclinavam-se um cinquentavo de um círculo em relação à vertical. Sabendo que a distância que ele conhecia era de 5000 estádios entre Alexandria e Siena, então ele pode efetuar os cálculos da circunferência da Terra (EVES, 2004).

Ptolomeu fez um tratado o qual ficou conhecido como Almagesto onde os métodos utilizados foram inspirados no Cordas num círculo de Hiparco. Hoje temos duas tabelas trigonométricas e a exposição de como foram elaboradas (BOYER, 1974).

Hiparco de Nicéia foi o primeiro personagem da História da Matemática a construir a tabela trigonométrica e também coube a Hiparco a divisão de uma circunferência em 360°, onde ele atribuiu arco de 1 grau a cada parte da circunferência dividida.

Na Índia, a Trigonometria tomou rumo a partir de textos como o Surya Siddhanta que para os hindus foi escrito pelo Deus do Sol (Surya). Com estes textos foi possível estabelecer a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente denominada de jiva, o que possibilitou visualizar um triângulo retângulo na circunferência. Os hindus também demonstraram algumas identidades trigonométricas (COSTA, 1997).

Assim como o Almagesto e o Siddhanta foram importantes para as civilizações gregas e hindus, respectivamente, o AL Battani foi fundamental para que os árabes pudessem calcular a altitude do Sol. Para isso eles precisaram construir ferramentas, como tábuas mais precisas utilizando as razões trigonométricas (COSTA, 1997).

Após as contribuições árabes o desenvolvimento da Trigonometria expandiu para o continente Europeu no século XI.

Por causa desses personagens e outros grandes matemáticos, é que a Trigonometria pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, tais como: na Engenharia, na Física, na Astronomia, na Música, na Medicina e em várias

3 Época em que o Sol passa por sua maior declinação boreal ou austral, e durante a qual cessa de afastar-se do equador. (Aurélio Eletrônico, versão 5.12, 2004).

situações do cotidiano.

2.2. O ensino da Trigonometria

A aprendizagem da Trigonometria, geralmente, é tratada como algo abstrato e de difícil aplicação onde são enfatizadas apenas as resoluções de cálculos algébricos e o excesso de formalismo, promovendo assim uma aula cansativa e pouco satisfatória por parte dos alunos que não pretendem seguir carreira nas ciências tecnológicas. Entretanto, é uma abordagem crucial para a aprendizagem dos alunos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM):

tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações [...] (BRASIL, 1999, p. 257).

Em contrapartida, quando exploramos na sala de aula as utilidades que a Matemática nos propõe no dia-a-dia, as aulas se tornam mais leves e passam a ser algo prazeroso para o alunado. Além de implementarmos nas aulas de Matemática às possibilidades de aplicação da Trigonometria no cotidiano, podemos inserir outros métodos didáticos que auxiliem na aprendizagem dos alunos.

De fato é imprescindível que os alunos possam verificar e aplicar o que a Trigonometria proporciona no dia-a-dia, mas o que devemos entender é que a Matemática se diferencia das outras ciências, a forma como é mostrada a generalização e a demonstração e que também pode ter uma ligação com o trabalho experimental com o uso dos raciocínios indutivo e dedutivo, proporcionando ao alunado que desenvolva o modo de pensar em Matemática.

A aprendizagem em Matemática não só se faz através da memorização, mas também da compreensão dos conceitos através da demonstração de fórmulas e mostrando aos alunos determinados significados em Matemática. Segundo, (GARBI, RPM nº 68, p. 3)

É falso o dilema entre entender ou decorar na Matemática. O aprendizado da Matemática se faz através da compreensão e da memorização. O ideal é que a compreensão preceda a memorização e uma não exclui a outra.

Para que a aprendizagem em Matemática aconteça é necessário que os conceitos e fórmulas sejam formados e mostrados aos alunos, uma vez que eles terão oportunidade de acompanhar o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos envolvidos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) nos mostra, as duas vertentes que a Matemática traz para o ensino, dizem respeito a formação do aluno e ao caráter instrumental. A primeira expõe que o objetivo das aulas do Ensino de Matemática do Ensino Médio está ligado a formação do aluno para as atividades do cotidiano, resolução de problemas genuínos, confiança e outros. A segunda revela ao aluno a Matemática como uma ciência com padrões e técnicas que, na medida do possível, podem ser aplicadas em outra áreas do conhecimento.

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1999, p. 40-41).

Desse modo, entendemos que o ensino da Matemática não deve perder sua essência que é a utilização de definições, conceitos, as estruturas lógicas para o desenvolvimento de demonstrações que sirvam para validar algum resultado.

Além do mais, os PCN afirma que o ensino da Trigonometria deve está ligado as aplicações dando enfoque na resolução de problemas que envolvam o cálculo de distâncias inacessíveis, como também, a análise dos gráficos das funções trigonométricas, de modo que seja evitado o uso de cálculos desnecessários.

É importante ressaltar que tais conteúdos em Trigonometria não devem deixar de lado a forma como foram construídos os conceitos e como se pode

explorar as propriedades usando demonstrações, uma vez que, a Matemática dispõe desse mecanismo para encadear ideias e desenvolver a construção de outros conceitos matemáticos.

E ainda conforme os PCN,

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1999, p. 44).

Portanto, aliar as habilidades e os conteúdos do desenho ao ensino da Geometria contribui para a compreensão de ideias e definições, bem como, também, torna o aluno capaz de interpretar uma demonstração e aplicar na resolução de exercícios e na resolução de problemas em Trigonometria.

3. O desenho na Trigonometria: uma análise

Neste capítulo apresentaremos as definições dos elementos que contribuem para a construção do conceito de Trigonometria presentes nos livros didáticos: **Matemática: uma nova abordagem** de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno (2010) utilizado no 1º ano do Ensino Médio e **Matemática: contexto & aplicações** de Luiz Roberto Dante (2003) utilizado no 2º ano do Ensino Médio, com a finalidade de verificar a importância para auxiliar na aprendizagem de Trigonometria e também a contribuição do desenho na resolução de situações-problemas. Para isso, consideramos o aspecto da Trigonometria, mais especificamente, no ciclo trigonométrico.

Para atingirmos os objetivos da nossa pesquisa que inclui investigar a utilização do desenho nas situações de Trigonometria presentes nos livros didáticos, faremos a análise do capítulo sobre a Trigonometria no ciclo trigonométrico assunto estudado no 1º e/ou 2º ano do Ensino Médio. Para a análise consideramos elementos relevantes para a compreensão da trigonometria, a saber: definição de arco, de ângulo central, de radiano e das razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente. Discutiremos, ainda, a importância de desenhar um objeto matemático para representar uma ideia, um conceito ou uma definição.

Ao analisar os livros didáticos percebemos que os autores apresentam o conteúdo de Trigonometria no ciclo trigonométrico em séries diferentes. Em Giovanni & Bonjorno (2010) o assunto é estudado no 1º ano do Ensino Médio, já Dante (2003) apresenta o conteúdo no 2º ano do Ensino Médio.

Os PCNEM (2002), documento orientador do Ensino Médio, apresenta uma orientação para que o estudo da Trigonometria seja trabalhado articulando-se os conceitos envolvidos às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico, enfatizando-se os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Segundo o PCNEM (2002):

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os

aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos.

No documento, podemos observar que o texto trata apenas do desenvolvimento das habilidades e competências que o estudo da Trigonometria deve proporcionar ao aluno, nele não encontramos nenhuma especificação dos anos em que devem ser iniciados seus estudos.

3.1. Trigonometria: elementos relevantes

3.1.1. Arco de Circunferência

Antes de iniciarmos a análise da definição de **arco de circunferência**, é importante definirmos circunferência e círculo, uma vez que os conceitos são diferentes e muitas vezes são confundidos como sendo conceitos iguais. Para Dante (2005, p. 214) no livro Tudo é Matemática, uma circunferência é "formada por todos os pontos de um plano cuja distância à um ponto dado (centro) é sempre a mesma". Neste mesmo livro o autor não define círculo, apenas representa a figura geometricamente.

Para Giovanni Jr. & Castrucci (2009, p. 327), no livro A conquista da Matemática, circunferência é "a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano" e círculo é "a reunião da circunferência com sua região interna", enquanto que para o Aurélio (2000, p. 156) "a circunferência é a linha curva que contorna uma área" e círculo é "o corte de uma esfera por um plano".

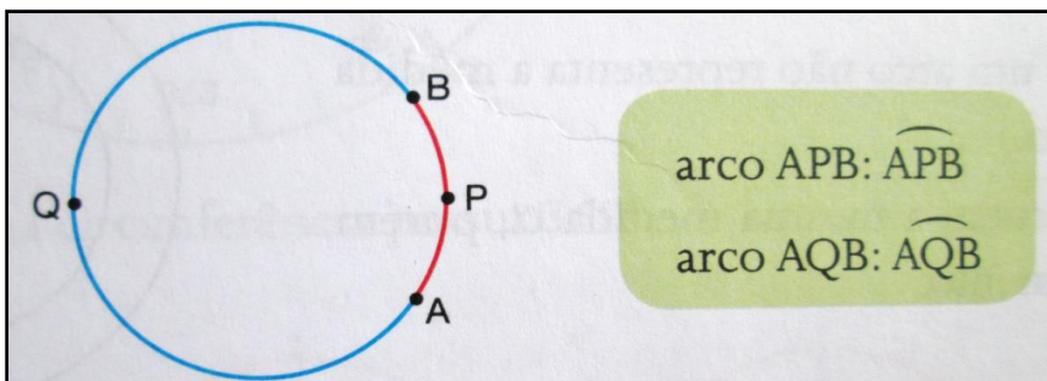
Notemos que as definições de círculo e circunferência apresentadas são definidas de maneiras distintas, mas que representam o mesmo objeto.

É importante ressaltar que o nosso estudo será voltado à circunferência e os demais elementos que são: arco, ângulo central, radiano e razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente.

Como citamos na introdução deste capítulo, analisaremos elementos que consideramos relevantes para a aprendizagem de Trigonometria. Nessa direção, iniciaremos a análise destacando como os autores definem arco de circunferência.

Arco de circunferência, segundo Giovanni & Bonjorno (2010), no livro **Matemática: uma nova abordagem** “é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos, sejam eles coincidentes ou não”. Após esta definição, o autor representou a definição citada conforme a figura abaixo (Figura 1).

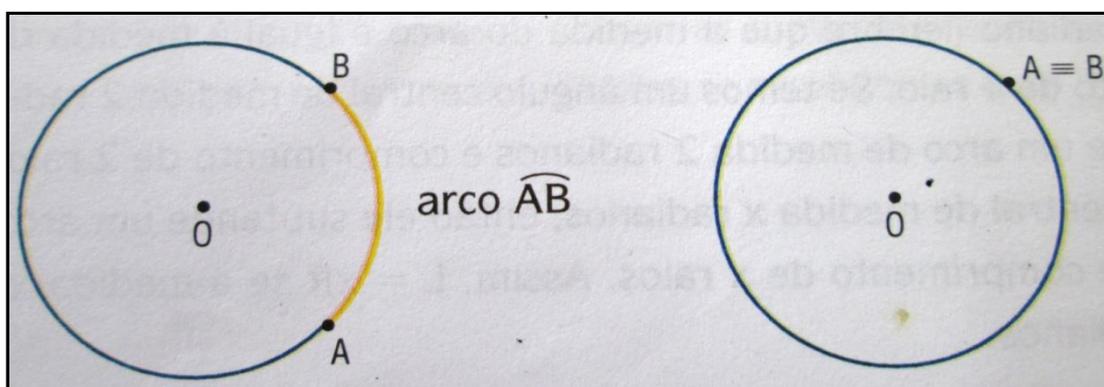
Figura 1: Arco de circunferência



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 313.

Arco de circunferência ou arco geométrico, para Luiz Roberto Dante (2003, p. 27), no livro **Matemática: contexto & aplicações** “é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive. Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta”. Em seguida, o autor representa a definição como mostra a Figura 2.

Figura 2: Arco de circunferência e arco nulo



Fonte: Matemática: contexto e aplicações, p. 27.

Observando a definição de **arco de circunferência** dado por Giovanni & Bonjorno, perguntamos: é possível entender essa definição apenas lendo-a?

Após lermos a definição, tentamos imaginar como seria representado um **arco de circunferência**, desenhando uma circunferência e sobre esta situando os pontos. Concluímos que seria uma dificuldade compreender a definição apresentada sem o recurso do desenho, visto que o leitor não consegue visualizar o objeto definido sendo necessário usar a ilustração para compreendermos o que o autor quer dizer na definição citada. Daí a importância do desenho para representar esta definição.

Percebemos, a partir do desenho (Figura 1) que o arco foi dividido em duas partes, obtendo-se dois arcos de circunferência: **o arco APB e o arco AQB**. Desse modo, é possível perceber o que a definição quer dizer, quando fazemos alguma ilustração que represente algo que queremos mostrar.

Comparando a mesma definição de arco de circunferência apresentada pelo autor Luiz Roberto Dante, no livro **Matemática: contexto & aplicações** (2003), destacamos que é possível que o leitor imagine uma circunferência e faça as divisões delimitando os dois pontos que determinarão os dois arcos. Em seguida, como mostra a Figura 2, o autor constrói a definição utilizando o recurso do desenho.

Percebemos que a definição apenas lida não permite uma compreensão imediata, uma vez que, na Matemática os objetos são abstratos e quanto mais utilizarmos diferentes ferramentas para ajudar na compreensão, melhores serão os resultados para o entendimento do conceito estudado. Segundo Sant'anna & Sant'anna (2004, p. 19):

Recursos didáticos se constituem por materiais instrucionais que atuam positivamente na aprendizagem, são estimuladores e reforçadores da mesma. São elementos que instrumentalizam o aluno favorecendo o processo de assimilação, a criatividade, o desenvolvimento cognitivo, adaptando-o ao meio e à sua própria realidade.

Diante disso, entendemos que o desenho é um recurso metodológico, visto que promove o desenvolvimento cognitivo, a criatividade, a imaginação. Além

disso, os recursos didáticos são ferramentas que podem proporcionar uma melhoria no ensino tanto da Trigonometria quanto de outros conteúdos em Matemática.

De acordo com Oliveira (2005), no contexto geométrico, a habilidade da visualização assume importância fundamental, pois, quando visualizamos os objetos geométricos passamos a ter controle sobre o conjunto das operações mentais tratados na Geometria ou na Trigonometria, não só no que se refere a resolução de exercícios, mas também, na compreensão de conceitos e definições.

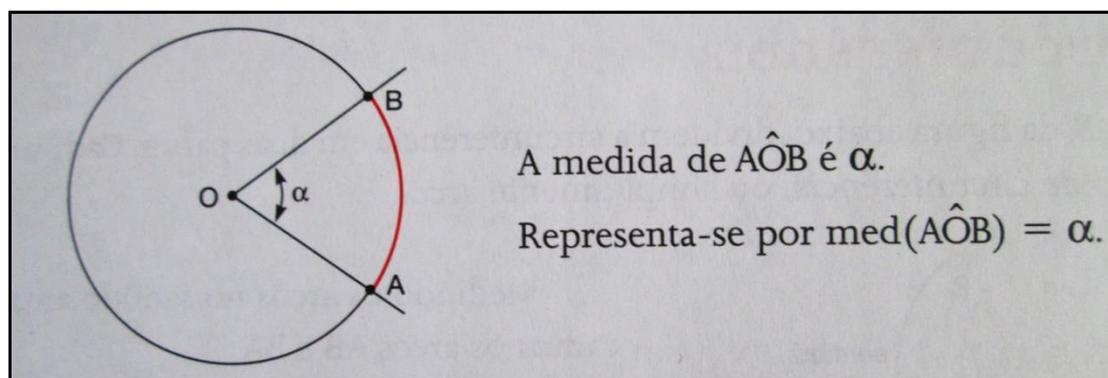
Ao expressarmos nossos pensamentos no desenho estamos mostrando que o desenho não é um recurso apenas visual, porém uma ferramenta que busca auxiliar na interpretação de enunciados, teoremas e outros. O desenho não é somente uma ilustração, mas algo de onde podemos retirar informações importantes para a aprendizagem.

3.1.2. Arco e Ângulo Central

Analisaremos agora como os autores Giovanni & Bonjorno e Dante definem arco e ângulo central.

Arco e ângulo central, para Giovanni & Bonjorno no livro **Matemática: uma nova abordagem** (2010, p. 314), é “a medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente”. Após a definição os autores apresentam a ilustração abaixo como mostra a Figura 3:

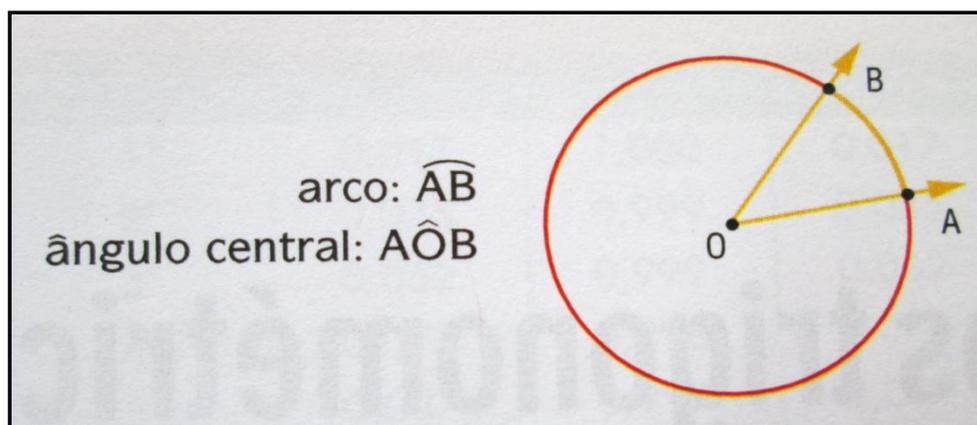
Figura 3: Arco e ângulo central



Fonte: **Matemática: uma nova abordagem**, p. 314.

Arco e ângulo central, segundo Dante (2003, p. 28) no livro **Matemática: uma nova abordagem** é “todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende”. Em seguida, o autor traz ilustração destacada na Figura 4 para representar o texto da definição de ângulo central:

Figura 4: Arco e Ângulo central



Fonte: Matemática: Contexto & Aplicações, p. 28.

Ao destacarmos as definições apresentadas pelos autores, novamente questionamos: é possível formalizar essa definição somente lendo-a? Para isso, o autor ilustrou a definição de ângulo central, como mostra a Figura 3, para que o leitor possa compreender melhor o que o autor quer dizer. O desenho é uma forma de traduzir o pensamento do autor/professor para algo que ele quer explicar.

Vejamos um exemplo do desenho em uma definição, envolvendo o tema arco e ângulo central extraído do livro **Matemática: Contexto & Aplicações**. Iremos analisar como o autor desenvolve o conteúdo a partir da definição de ângulo central e se o mesmo utiliza o recurso desenho para explicar a definição dada.

Observemos que a definição acima citada necessita que o aluno compreenda o que é arco e a partir daí entender. Novamente percebemos a utilização do desenho para dar suporte ao entendimento da definição de ângulo central.

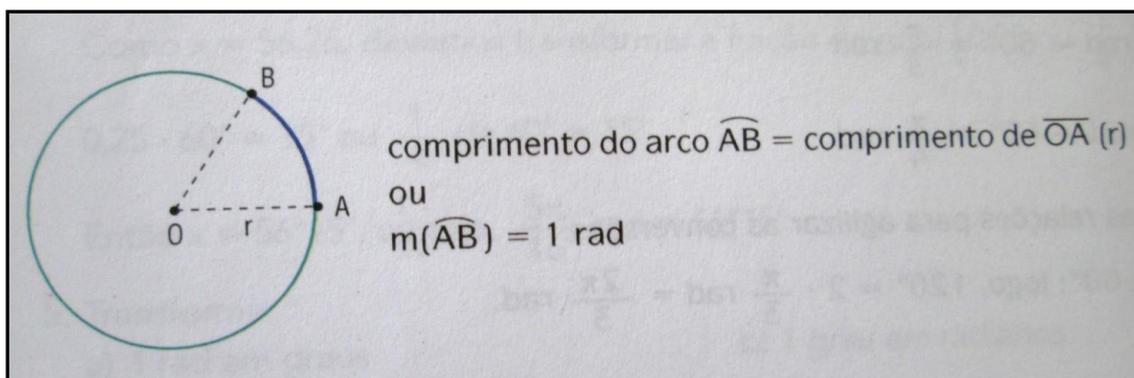
Sobre *Radiano*, mostraremos como os autores Giovanni & Bonjorno e

Dante trabalham esse conceito na seção a seguir.

3.1.3. Radiano

Sobre o desenvolvimento do conceito de *Radiano*, Giovanni & Bonjorno definem como “um arco de medida 1 radiano (indicamos por 1 rad) corresponde a um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém”. Notamos que a definição dada tem como pré-requisito uma compreensão prévia sobre **arco**. Desse modo, se o aluno não compreendeu bem o que é arco, a definição de radiano dificilmente será compreendida. O autor representa geometricamente radiano conforme a figura (Figura 5).

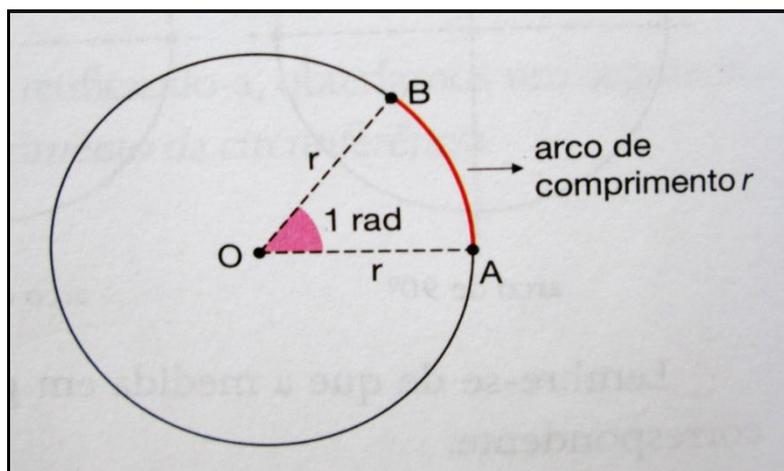
Figura 5: Radiano



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 316.

De acordo com Dante (2003, p. 29) *Radiano* é “um arco de um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência. Isso deve ser interpretado da seguinte forma: se temos um ângulo central de medida 1 radiano, então ele subtende um arco de medida 1 radiano (lembre que a medida do arco é igual à medida do ângulo) e comprimento de 1 raio. Se temos um ângulo central de medida 2 radianos, então ele subtende um arco de medida de 2 radianos e comprimento de 2 raios. Se temos um ângulo central de medida x radianos, então ele subtende um arco de medida x radianos e comprimento de x raios. Assim, $L = xR$ se a medida x do arco for dada em radianos”. A definição citada foi interpretada pela seguinte ilustração (Figura 6):

Figura 6: Radiano



Matemática: contexto & aplicações, p. 29.

Vemos que Giovanni & Bonjorno (2010) prosseguem fazendo uso do desenho para tornar o conceito de radiano mais visual para o leitor, conforme figura acima (Figura 5). Na ilustração percebemos que, os autores tem o cuidado de detalhar a imagem de forma que possibilite ao leitor identificar os elementos que ele citou na definição. Com o desenho a interpretação de *Radiano* fica bem mais clara, pois o mesmo tem também essa finalidade que é mostrar algo que não entendemos claramente quando lemos o texto.

Segundo Kaleff (2004), “para alguns pesquisadores, a habilidade da visualização geométrica é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente”. Percebemos que o autor do livro **Matemática: Contexto & Aplicações**, além de definir **radiano**, também explica como a definição deve ser interpretada, em seguida o autor exemplifica a definição através do desenho, como podemos ver na Figura 6.

Ambos autores analisados se preocupam em facilitar a compreensão da definição de radiano fazendo uso do desenho, embora o autor Luiz Roberto Dante explique melhor a definição de radiano no seu texto. Podemos destacar que ambos os desenhos das figuras 5 e 6 expressam exatamente a definição, porém Dante detalha mais a definição.

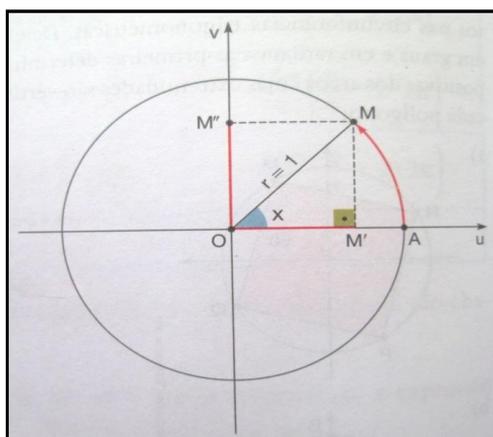
3.1.4. Razões Trigonômicas na Circunferência

Nesta seção traremos as definições de **razões trigonométricas na circunferência**, observando como os autores Giovanni & Bonjorno e Dante apresentam tais definições e se é possível a compreensão conforme eles expõem em seus textos.

Seno e Cosseno, segundo Giovanni & Bonjorno (2010, p. 326) no livro **Matemática: uma nova abordagem**, são definidos pelos autores como: “consideremos no ciclo trigonométrico o ponto M, que é a imagem do número real x ”, conforme indica a Figura 7.

Consideremos também o arco AM, que corresponde ao ângulo central de medida x . Seja OM o raio do ciclo, e M'' e M' as projeções do ponto M nos eixos v e u , respectivamente. Do triângulo retângulo $OM'M''$, temos:

Figura 7: Seno e cosseno



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 326.

A Figura 7 é utilizada pelos autores como recurso complementar para explicação da definição de *seno e cosseno*:

$$\text{sen } x = \frac{M'M}{OM} = \frac{OM''}{1} = OM'' \therefore \text{sen } x = OM''$$

$$\text{cos } x = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{1} = OM' \therefore \text{cos } x = OM'$$

Seno e Cosseno, de acordo com o livro **Matemática: contexto & aplicações**, são definidos separadamente, sendo o *Seno* definido como: “consideremos $P(x, y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do

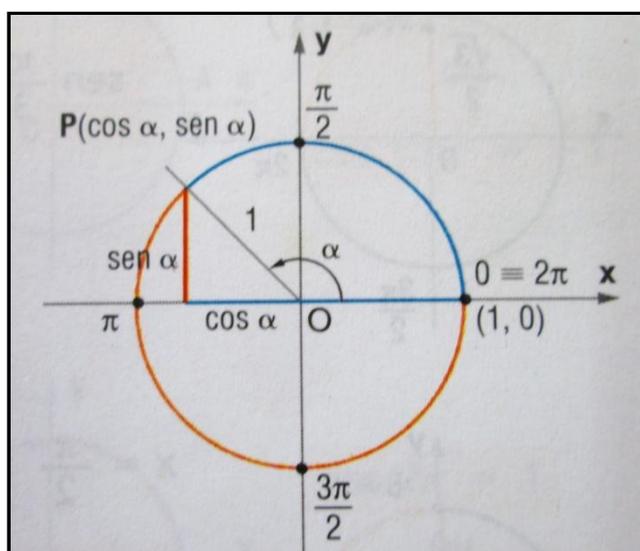
arco de medida α rad, definido a partir do número real α ". Nestas condições, o autor define:

$$\text{sen } \alpha = \text{ordenada de } \mathbf{P}$$

$$\text{cos } \alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}$$

Percebemos que, para facilitar a compreensão dos conceitos do *Seno* e do *Cosseno*, o autor se vale de representações geométricas, conforme Figura 8.

Figura 8: Seno e Cosseno



Fonte: Matemática: contexto & aplicações, p. 43.

Ao analisar o desenvolvimento dos autores no livro **Matemática: uma nova abordagem**, observamos que a definição apresentada requer que o leitor imagine o que está descrito na definição. Em seguida, o autor faz referência ao desenho que foi utilizado para ilustrá-la. Percebemos que, o este além de ser uma ilustração, descreve os elementos citados na definição, de forma que o leitor compreenda o que está sendo mencionado. Na representação, o autor utiliza, também, cores para destacar os elementos mencionados na definição. O fato de realçar a figura com diversas cores ajuda ao leitor perceber quais elementos estão sendo destacados na definição.

Tomemos agora, as definições de *Seno* e *Cosseno* dada por Luiz Roberto Dante em seu livro **Matemática: contexto & aplicações**, (2003, pág. 43).

Notamos que o autor utiliza a mesma linguagem para ambas as definições. No final, apresenta os resultados obtidos da sua definição, ou seja, usa as fórmulas para expressar as definições. A forma como o autor define *Seno* e *Cosseno* é breve, porém nota-se a necessidade de ilustrar tais definições.

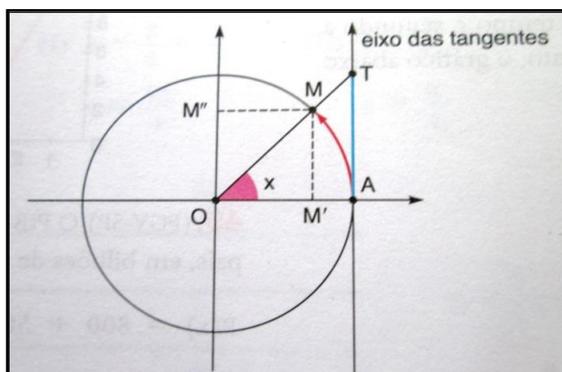
Observando a ilustração, notamos que o autor ilustrou em uma mesma figura a definição de *Seno* e *Cosseno*. Também usou cores para destacar, porém a ilustração pode confundir o leitor, visto que estão sendo definidos dois objetos matemáticos numa mesma figura.

Tangente, segundo Giovanni & Bonjorno (2010, p. 342), no livro **Matemática: uma nova abordagem**, é definida da seguinte forma: “considere a circunferência trigonométrica da figura e o arco AM de medida x . Definimos como tangente do arco AM a ordenada do ponto T”,

$$\text{tg } x = \text{AT}”$$

Dada a definição de tangente, o autor a interpreta geometricamente como mostra a figura 9 a seguir:

Figura 9: Tangente



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 342.

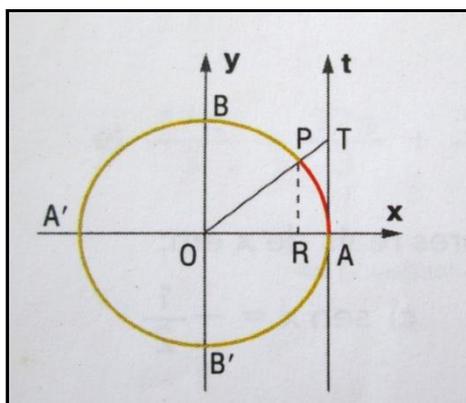
Tangente, no livro **Matemática: contexto & aplicações**, é apresentada pelo autor da seguinte forma:

“Consideremos $P(x, y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida α rad, definido a partir do número real α ”.

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}, \text{ para } \text{cos } x \neq 0$$

Para representar a definição de tangente, o autor traz uma ilustração conforme mostra a Figura 10 a seguir:

Figura 10: Tangente



Fonte: Matemática: contexto & aplicações, p. 52.

Vejamos, agora, a definição de **tangente** apresentada no livro **Matemática: uma nova abordagem** (2010, p. 342).

Os autores iniciam a definição já utilizando uma figura. A partir daí, questionamos se a definição de tangente poderia ser descrita sem a menção de figura? Percebemos que essa definição já induz o leitor a observar o desenho.

Podemos notar que a representação geométrica traz todos os objetos citados na definição acima, também notamos a presença de cores, pois mostra a cuidado do autor a diferenciar os elementos descritos na definição.

Nela o autor menciona a medida α rad, porém no desenho esse elemento não é visualizado. É importante que ao desenhar o objeto matemático a ser estudado, sejam realçados todos os elementos, de forma que os conceitos fiquem claros para o leitor.

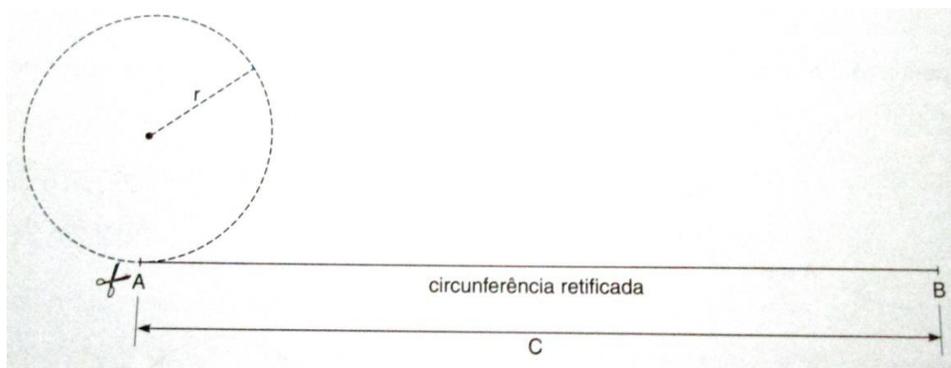
3.1.5. O desenho no Ciclo Trigonométrico

Iniciamos esta seção do trabalho a partir do mesmo questionamento, ou seja: é possível falar da circunferência trigonométrica sem utilizar os recursos que o desenho proporciona, quer seja através de instrumentos técnicos ou com auxílio de softwares?

Analisando o livro didático **Matemática: uma nova abordagem**, notamos que o desenho foi utilizado diversas vezes como recurso para apresentar os conceitos em torno do ciclo trigonométrico, nas seguintes situações:

- Identificando o raio da circunferência

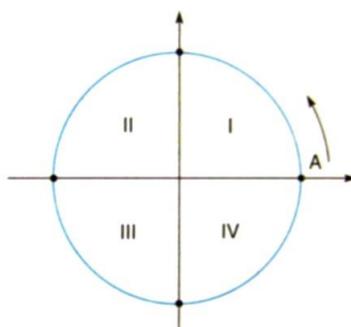
Figura 11: Raio da circunferência



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 314.

- Apresentando os quadrantes

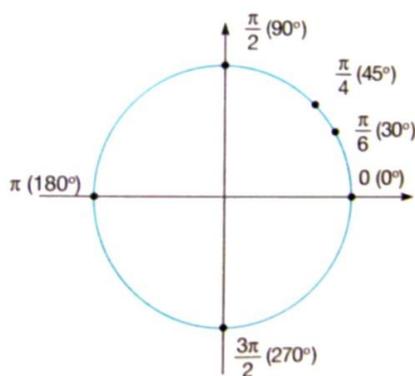
Figura 12: Quadrantes



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 323

- Representando a medida dos arcos em graus ou radianos

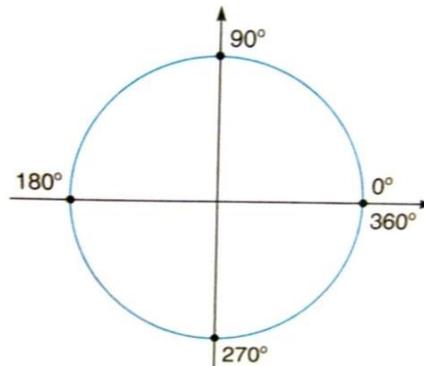
Figura 13: Graus e radianos



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 323.

- **Mostrando os eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais**

Figura 14: Coordenadas cartesianas ortogonais



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 323.

Daí, observamos que a representação geométrica pode ser utilizada para explicar conteúdos matemáticos, no nosso caso, com ênfase no ciclo trigonométrico. Portanto, falar sobre ciclo trigonométrico utilizando o desenho como uma ferramenta complementar, pode tornar as aulas de Trigonometria mais agradáveis de forma que a aprendizagem aconteça.

Segundo Raymundo (2010), o desenho favorece a forma que nos permitem interpretar, representar, visualizar e descrever de forma gráfica o nosso cotidiano.

3.2. O desenho na resolução de uma situação-problema.

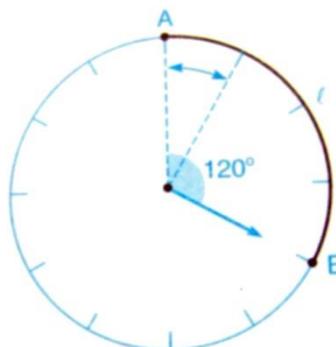
Neste tópico verificaremos o uso do desenho para solucionar uma situação-problema, conforme consta em um dos nossos objetivos estabelecidos neste estudo. Para isso, observamos duas situações-problemas de cada livro analisado. Nossa análise terá como norte a resposta à dois questionamentos: apenas ao ler os problemas destacados, é possível resolvê-los? Quais os ganhos de se recorrer a um desenho, para resolver as situações que destacamos?

Vejamos a seguinte situação extraída do livro **Matemática: uma nova abordagem** (2010, p. 318):

SITUAÇÃO 1 – Comprimento de arco

O ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 cm. Qual a distância que sua extremidade percorre no período de 20 minutos? Considere $\pi = 3,14$.

Figura 15: Comprimento de arco



Fonte: Matemática: uma nova abordagem, p. 318.

A partir da figura foram retiradas informações importantes como o número de graus que o ponteiro dos minutos percorre. Neste problema, percebemos que o desenho apenas esclareceu e ajudou na forma como o problema deveria ser resolvido, tornando-se portanto, importante na exploração das informações contidas na questão.

SITUAÇÃO 2 – Comprimento da circunferência

(Ufop-MG) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km em torno de uma pista circular de raio 200 m. Calcule o número aproximado de voltas que ele deve dar. Use $\pi = 3,14$.

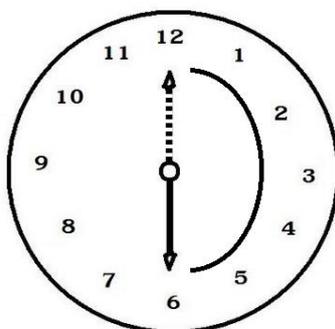
Notamos que esta situação não exige do leitor que se faça um desenho para ilustrar a questão, pois trata de conceitos que exigem apenas o conhecimento de fórmulas. O desenho por si próprio não soluciona problemas, mas pode fornecer informações significativas dispor de ferramentas que contribuem para a compreensão e resolução do mesmo.

As Situações 3 e 4 destacadas a seguir são referentes ao livro **Matemática: contexto & aplicações** do autor Luiz Roberto Dante (2003). Vejamos o enfoque dado pelo autor:

SITUAÇÃO 3 – Comprimento de arco

O ponteiro de um relógio mede 10 cm. Qual é a distância que sua extremidade percorre em 30 minutos?

Figura 16: Comprimento de arco



Fonte: Matemática: contexto & aplicações, p. 32.

Neste caso, o autor traz uma figura, conforme mostramos a seguir, para extrair do enunciado os elementos que estavam sendo mencionados na questão, ou seja, o autor apenas ilustrou a situação-problema, de forma que a ilustração não trouxe nenhuma informação complementar que ajudasse a resolver o exercício proposto, uma vez que todos os dados estavam expressos na questão. Entendemos que, nem sempre o desenho irá trazer alguma informação importante para auxiliar na resolução da questão e às vezes se faz uso desse recurso, apenas para visualizar a situação.

SITUAÇÃO 4 – Arcos côngruos

(Efei-MG) Um dos problemas mais antigos de que se tem registro na história da Matemática é o da divisão da circunferência em arcos de mesma medida. O grau teve sua origem por volta de 5.000 a.C. Acredita-se que seu surgimento se deu

pela necessidade da contagem de tempo. Analisando os números do mostrador de um relógio, colocando em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, percebe-se que cada uma das partes mede 30° . Dessa forma, calcule o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalado 1h 40min.

Fonte: Matemática: contexto & aplicações, p. 40.

Para resolver esse problema seria necessária uma ilustração afim de que o leitor percebesse os elementos e o que ele deseja solucionar. Sabe-se que queremos saber o menor ângulo formado pelos ponteiros. Dessa forma, uma figura poderá mostrar qual ângulo está sendo pedido no problema. Percebemos que ao desenhar o relógio, o problema ainda não será solucionado, mas ajudará na visualização e no raciocínio da questão.

Respondendo aos nossos questionamentos iniciais que foram: i) apenas ao ler os problemas destacados, é possível resolvê-los?

Pelo que vimos nas análises das situações-problema, em alguns casos, como por exemplo, a Situação 1, o desenho foi utilizado para retirar informações importantes onde apenas lendo o enunciado não era possível. Os desenhos ajudaram no raciocínio para se chegar a solução do problema. Em contrapartida, nas Situações 2 e 3, o desenho não foi utilizado como um recurso que retirasse algum tipo de informação e apenas lendo a questão é possível resolver o problema.

Em muitos casos, o desenho pode, quando bem feito, ser uma ferramenta auxiliar para ajudar no desenvolvimento de um problema ou até mesmo na solução do mesmo, porém existem casos que o desenho será utilizado, apenas, como uma ilustração, isto é, não será uma ferramenta que auxilie o leitor na solução do problema proposto.

No que se refere aos ganhos de se recorrer a um desenho, para resolver as situações que destacamos pelo que observamos nas análises das situações, ele é um excelente recurso para desenvolver a criatividade, de modo que ao ler o enunciado o leitor cria formas para encontrar a solução do problema; ajuda a desenvolver o raciocínio matemático, criando passos para encontrar a resposta/solução seja do exercício, problema ou desafio; em princípio, o desenho

faz com que o leitor use a imaginação para transpor para o papel o que se pensou e que possa ser útil na resolução da situação-problema, de modo que o leitor visualize o que sendo proposto no enunciado.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do nosso estudo, pudemos observar o porquê do desenho está inserido na Matemática, na Geometria e no nosso objeto de estudo que é a Trigonometria. O desenho ou até mesmo o esboço, possibilita a interpretação de dados e a condução do raciocínio.

As considerações feitas ao longo deste trabalho tinham a intenção de destacar até que ponto os livros didáticos apresentavam situações que evidenciassem as contribuições do desenho geométrico frente aos conceitos de Trigonometria, como forma de enfatizar a importância do desenho como recurso para o ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Diante disso, analisamos os livros didáticos **Matemática: uma nova abordagem** de Giovanni & Bonjorno (2010) e **Matemática: contexto & aplicações** do autor Luiz Roberto Dante (2003) e observamos que os autores exploram o desenho para explicar as definições nos conteúdos de Trigonometria. Notamos também que em alguns casos o desenho se torna um recurso importante na resolução de um problema e em outros casos ele não é importante.

O principal objetivo deste processo de pesquisa foi mostrar o quanto é importante o desenho nas aulas de Matemática, pois se mostra uma ferramenta indispensável para que os alunos visualizem conceitos que foram ditos ou até para ilustrar uma demonstração de fórmulas trigonométricas ou de qualquer outro conteúdo tanto na Trigonometria, Geometria como também na Álgebra.

O desenho na Trigonometria pode não solucionar um problema, às vezes irá somente ilustrar ou poderá fornecer algum detalhe para solucionar um exercício, por outro lado ajudará na interpretação de definições ou conceitos. Nesse estudo, vemos que é importante o desenho ao se tratar de Trigonometria, uma vez que ele possibilita analisar tabelas, gráficos e circunferências. E ainda segundo Filho (2007, pág. 163),

Em diversas circunstâncias, reconhecemos o fato das figuras poderem “dizer” mais do que as palavras. Entretanto, é bom ficar atento, pois desenhos são apenas dispositivos usados para auxiliar, eles sozinhos não podem demonstrar coisa alguma. É necessário extrair deles as informações que precisamos.

É importante ressaltar que ao usar o desenho para demonstrar ou até

mesmo orientar na resolução de algum problema, é imprescindível que este esteja bem realizado, pois uma vez mal desenhado pode induzir ao erro. Não é necessário que seja um desenho artístico, mas que os elementos estejam bem dispostos. O desenho não só é aplicável na Trigonometria como também é indispensável, pois todo o seu estudo é representado por figuras geométricas e estas são necessárias para a construção do conhecimento geométrico, trigonométrico e matemático.

Observando a importância do desenho nos conteúdos de Matemática, em especial, na Trigonometria, acreditamos que seu uso pode ser eficiente para a compreensão de conteúdos em muitos outros ramos da Matemática, como por exemplo, a Álgebra. O grande desafio é tornar o desenho uma ferramenta que venha ser utilizada nas aulas de Álgebra, visto que por muitas vezes, seu ensino é baseado no excesso de cálculos algébricos.

Em síntese, partindo das análises dos livros didáticos, acreditamos que ao propor a inserção do desenho geométrico tanto na Trigonometria como em todos os conteúdos em Matemática, quando possível, ao invés de cálculos puramente cansativos, as aulas de Matemática podem tornar-se mais proveitosas e significativas ao alunado.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. **História da Matemática** – trad. de Elza Gomide. Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo - SP, 1974.

BRASIL. **Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Secretária de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio: Matemática.** Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1999.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B. **Geometria e trigonometria:** dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. In: John A. Fossa (org). *Presenças Matemáticas.* Natal: Edufrn, 2004.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **A História da Trigonometria.** PUCSP. São Paulo, 1997.

DANTE, Luiz Roberto Dante. **Matemática:** contexto & aplicações. 2 ed. v. 2. Editora Ática. São Paulo – SP, 2003.

DANTE, Luiz Roberto Dante. **Tudo é Matemática.** 2 ed. v. 2. Editora Ática. São Paulo – SP, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** – trad. de Higyno H. Domingues. Ed. Unicamp, Campinas – SP, 2004.

FARIA. Caroline. Artigo: **A História do Desenho.** Publicado em 24.02.2009 e acessado em 15.08.2011. Disponível em: <http://www.infoescola.com/artes/historia-do-desenho/>.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio Século XXI Escolar**. 4ª ed. Nova Fronteira. Rio de Janeiro – RJ, 2000.

FILHO. Daniel Cordeiro de Moraes. **Um convite à Matemática**. EDUFMG – Campina Grande, 2007.

GARBI, Gilberto. **Decorar é preciso. Demonstrar também é**. Revista do Professor de Matemática (RPM) nº 68. SBD: São Paulo, 2009.

GARCIA, Luciane Maia Insuela. **A Visualização e a Representação Geométrica de Conceitos Matemáticos e suas Influências na Constituição do Conceito Matemático**. IGCE/UNESP – Rio Claro, 2006.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. 2 ed. v. 1. FTD: São Paulo, 2010.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**. Ed. renovada. FTD: São Paulo – SP, 2009.

LUYTEN, Sonia M. Bibe. **O que é histórias em quadrinhos**. Editora Brasiliense – São Paulo, 1985.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e entendendo poliedros**. 2º ed. EdUFF. Editora da Universidade Federal Fluminense, Niterói, R.J. Disponível também em www.cempem.fuer.unicamp.br/te091100.html_23k. Acesso em novembro de 2004.

KOPKE, Regina Coeli Moraes. Disponível em www.ufjf.br. Acesso em 04 de novembro de 2007. Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Fundamentos de Projetos.

MARINHO, Jéssica et al. **A Importância do Desenho Geométrico no Ensino Básico e Técnico de nível Médio**. IFTO, 2010.

RAYMUNDO, Márcia Fonseca Soutello Moreira. **Construção de Conceitos Geométricos: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado. Universidade Severino Sombra. Vassouras, 2010.

RIVED. **Trigonometria.** Disponível em: <<http://www.rived.mec.gov.br/>>. Acesso em: 12 nov. 2013.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Artigo: **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino das Construções Geométricas, entre outras considerações.** GT 19 – Educação Matemática, São Paulo, 2000.