UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I – CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JUCILEIDE MARIA DA SILVA

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB

2014

JUCILEIDE MARIA DA SILVA

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE – PB
2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586c Silva, Jucileide Maria da.
Congruência de triângulos e aplicações [manuscrito] / Jucileide Maria da Silva. - 2014.
54 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Congruência. 2. Triângulos. 3. Geometria. 4. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516.2

JUCILEIDE MARIA DA SILVA

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

Aprovada em: 16/12/2014.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabella Silva

Prof. Drª. Maria Isabella Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R. Freitas

Prof. Drª. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A minha irmã Josineide (in memorian), que esteve presente durante essa caminhada, me apoiando e incentivando, pelo força que tinha, pela vontade de viver, pelos sonhos que tinha, pelo exemplo que foi em minha vida e por me ensinar uma coisa que não vou esquecer, que não devermos jamais reclamar de nossa vida, mesmo nos momentos mais difíceis. Infelizmente não vai estar presente, fisicamente, neste momento tão importante da minha vida, mais como ela mesma falou em seus últimos momentos nesta vida, nós vamos ficar juntas pra sempre, sempre juntas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por está presente em minha vida, e por ter me dado força para superar todos os obstáculos que encontrei ao longo dessa caminhada.

A meus pais Severino Cosme e Maria Marly, pelo esforço que fizeram para me ajudar durante todo o curso e pelo apoio.

A meus irmãos Jaqueline, Jucélia, Josineide (in memorian) e Sérgio pelo apoio e incentivo.

Agradeço a Senhora Marluce e ao Senhor Eleno pelo apoio, ensinamento, paciência e pelo carinho com que me trataram, por terem me acolhido em sua residência durante todo o curso.

A Adeilma, amiga inseparável, pelos momentos que passamos juntas, por me receber em sua casa para estudarmos e pelo exemplo de ser humano que é.

Agradeço aos colegas de sala (Eliane Dias, Eliane Lins, Dayse Medeiros, Maria José, Luciana Cardoso, José Pereira e Josiel) pelo momentos que passamos juntos e em especial a Tiago, Wesklemyr e José Claudio por dedicarem um pouco de seu tempo para me ajudar a estudar e superar algumas dificuldades que tinha durante o curso e pela amizade que construímos.

Agradeço a todos os professores do curso por transmitirem um pouco de seus conhecimentos, pela dedicação, atenção, paciência e pela humildade com que tratavam os alunos, e em especial a Professora Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano pela paciência, dedicação e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

“A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.” (Júlio César de Mello e Souza)

RESUMO

Neste trabalho é apresentado a congruência de triângulos e algumas aplicações dos casos de congruência, tendo como principal objetivo servir de instrumento para auxiliar os alunos de graduação nas aulas de Tópicos de Geometria I. O trabalho foi desenvolvido através de pesquisas bibliográficas e na internet, buscando reunir conceitos que facilitem a abordagem do conteúdo estudado, visto que o alunado sente muita dificuldade em compreendê-lo. Iniciamos com uma abordagem histórica sobre triângulos e a biografia de Euclides de Alexandria, em seguida apresentamos algumas definições e teoremas que são de suma importância para o entendimento dos casos de congruência de triângulos, posteriormente apresentamos os casos de congruência com suas respectivas demonstrações. Finalizamos com algumas aplicações, cuja resolução foi feita da forma mais simples possível, buscando atingir nosso objetivo de facilitar o entendimento do conteúdo e despertar o interesse pelo estudo desta área da matemática.

Palavras-Chave: Triângulos; Congruência; Aplicações.

ABSTRACT

In this work the congruence of triangles and applications cases of congruence is presented. The study aims to serve as a tool to assist graduate students in the classes of geometry topics I. The work was developed through literature searches and the Internet, seeking to bring together concepts that facilitates approach the study content. And is divided into four chapters, the first is the introduction of work, presenting as did the study , the second is a historical approach on triangles and Euclid's biography of Alexandria , the third presents some definitions and theorems before being addressed case of congruence of triangles . In the fourth chapter are present applications cases of congruence of triangles with their respective resolutions. To meet the objective of this study the resolutions of the applications were made as simple as possible, trying to meet the needs of students. We conclude that this work had been available for reviews by the student, where it has access to work decided whether to aid to serve you in class topics because it was not possible to make their application in the classroom.

Keywords: Triangles; Congruence; Applications.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: SISTEMA DE COORDENADAS PARA A RETA. 17
FIGURA 2: PONTOS COLINEARES E DISTINTOS. 18
FIGURA 3: SEGMENTO DE RETA AB. 19
FIGURA 4: SEMI-RETAS DE ORIGEM A CONTENDO O PONTO B. 19
FIGURA 5: SEMI-RETA AB CONTENDO O PONTO P. 20
FIGURA 6: PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO. 20
FIGURA 7: ÂNGULO BAC. 21
FIGURA 8: PONTO EXTERIOR DO ÂNGULO BAC. 21
FIGURA 9: SEMI-RETA AB CONTIDA NA RETA ORIGEM DO SEMIPLANO H. 22
FIGURA 10: ADIÇÃO DE ÂNGULOS. 22
FIGURA 11: PAR LINEAR 23
FIGURA 12: ÂNGULO RETO. 23
FIGURA 13: ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE. 24
FIGURA 14: TRIÂNGULOS CONGRUENTES. 24
FIGURA 15: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO L.A.L. 25
FIGURA 16: TRIÂNGULO ISÓSCELES. 26
FIGURA 17: BISSETRIZ DE UM ÂNGULO. 26
FIGURA 18: UNICIDADE DA BISSETRIZ. 26
FIGURA 19: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO A.L.A. 27
FIGURA 20: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO L.L.L (COM B – H – C). 28
FIGURA 21: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO L.L.L(COM H – B – C). 29
FIGURA 22: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO L.L.L (COM H = B) 29
FIGURA 23: RETA PERPENDICULAR. 29
FIGURA 24: MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO. 30
FIGURA 25: MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO (CASO EM QUE P NÃO PERTENCE A AB). 31
FIGURA 26: ÂNGULO EXTERNO. 31
FIGURA 27: PARES DE ÂNGULOS EXTERNOS E OPOSTOS PELO VÉRTICE. 32
FIGURA 28: RELAÇÃO DO ÂNGULO EXTERNO COM ÂNGULO INTERNO. 32
FIGURA 29: TRIÂNGULO COM UM ÂNGULO RETO E DOIS AGUDOS. 33
FIGURA 30: EXISTÊNCIA DE RETA PERPENDICULAR. 33
FIGURA 31: UNICIDADE RETA PERPENDICULAR. 34
FIGURA 32: ALTURA DE UM TRIÂNGULO. 35
FIGURA 33: TRIÂNGULOS CONGRUENTES PELO CASO L.A.A. 35
FIGURA 34: TRIÂNGULOS RETÂNGULOS. 36
FIGURA 35: FIGURA DA APLICAÇÃO 1. 37
FIGURA 36: FIGURA DA APLICAÇÃO 2. 37
FIGURA 37: FIGURA DA APLICAÇÃO 3. 38
FIGURA 38: FIGURA DA APLICAÇÃO 4. 38
FIGURA 39: FIGURA DA APLICAÇÃO 5. 39
FIGURA 40: FIGURA DA APLICAÇÃO 6. 39
FIGURA 41: FIGURA DA APLICAÇÃO 7. 40
FIGURA 42: FIGURA DA APLICAÇÃO 8. 41
FIGURA 43: FIGURA DA APLICAÇÃO 9. 41
FIGURA 44: FIGURA DA APLICAÇÃO 10. 42
FIGURA 45: FIGURA DA APLICAÇÃO 11. 42
FIGURA 46: FIGURA DA APLICAÇÃO 12. 43
FIGURA 47: FIGURA DA APLICAÇÃO 13. 43
FIGURA 48: FIGURA DA APLICAÇÃO 14. 44

FIGURA 49: FIGURA DA APLICAÇÃO 15..44
FIGURA 50: FIGURA DA APLICAÇÃO 16..45
FIGURA 51: FIGURA DA APLICAÇÃO 17..46
FIGURA 52: FIGURA DA APLICAÇÃO 18..46
FIGURA 53: FIGURA DA APLICAÇÃO 19..47
FIGURA 54: FIGURA DA APLICAÇÃO 20..47
FIGURA 55: FIGURA DA APLICAÇÃO 21..48
FIGURA 56: FIGURA DA APLICAÇÃO 22..48
FIGURA 57: FIGURA DA APLICAÇÃO 23..49
FIGURA 58: FIGURA DA APLICAÇÃO 24..50
FIGURA 59: FIGURA DA APLICAÇÃO 25..50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
2 ABORDAGEM HISTÓRICA 13
  2.1 EUCLIDES 13
3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS 15
  3.1 CONCEITOS BÁSICOS 15
  3.2 RESULTADOS PRELIMINARES 16
  3.3 CASOS DE CONGRUÊNCIA 24
4 APLICAÇÕES 37
5 CONCLUSÃO 53
6 REFERÊNCIAS 54

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é sobre congruência de triângulos, mais especificamente sobre os casos de congruência de triângulos.

O desejo de desenvolver um trabalho sobre congruência de triângulos surgiu nas aulas de Tópicos de Geometria I, disciplina oferecida no curso de graduação em Matemática, por ser um conteúdo interessante, pois apresenta muitas demonstrações e nos mostra as condições mínimas para garantir que dois triângulos sejam congruentes.

O objetivo deste trabalho é servir de instrumento para auxiliar os alunos de graduação nas aulas de Tópicos de Geometria, pois apresenta a resolução de algumas aplicações dos casos de congruência de triângulos. Já que nas bibliografias trabalhadas na disciplina de tópicos sentia-se a necessidade de uma quantidade maior de aplicações resolvidas que servisse de instrumento para facilitar a compreensão do conteúdo, por isso elaboramos este trabalho com intuito de suprir essas necessidades.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capitulo 1 abordamos a presente Introdução. No Capitulo 2 apresentamos a abordagem histórica, que trata da historia dos triângulos e um pouco da biografia de Euclides de Alexandria. No Capitulo 3 abordamos alguns conceitos e definições, bem como alguns teoremas, com suas respectivas demonstrações, que são necessários para a apresentação dos casos de congruência de triângulos, que são: 1º caso – lado, ângulo, lado (L.A.L), 2º caso – ângulo, lado, ângulo (A.L.A), 3º caso – lado, lado, lado (L.L.L), 4º caso – lado, ângulo, ângulo (L.A.A) e o caso especial que é o Teorema da Hipotenusa e do Cateto. O capítulo 4 apresenta algumas aplicações dos casos de congruência de triângulos com suas respectivas resoluções.

A metodologia utilizada para elaborar o trabalho foi a pesquisa bibliográfica e na internet, buscando reunir os conceito e definições de um modo que facilite a apresentação do conteúdo abordado assim como sua compreensão pelo aluno.

2 ABORDAGEM HISTÓRICA

A Geometria (do grego geo = terra e metrein = medição) surgiu da necessidade que, desde os tempos mais remotos, o homem teve que medir terras, construir casas, templos e monumentos, navegar e calcular distâncias.

O triângulo pode ser considerado a figura mais importante da geometria, pois qualquer polígono com número maior de lados pode ser decomposto em triângulos, traçando suas diagonais a partir de um de seus vértices. Não há registros de quem tenha inventado o triângulo ou como ele tenha sido descoberto.

Com as inundações do rio Nilo as demarcações feitas para dividir os lotes de terras eram apagadas, e para fazer novas demarcações quando o rio baixava existia os chamados puxadores de corda. O que conta a historia é que eles usavam cordas nas quais davam nós em intervalos iguais entre si, e ao esticá-la formavam assim o que conheciam como triângulo de lados 3, 4 e 5. Esse processo ficou conhecido como corda de treze nós. Conseguiam com esse processo fazer as novas divisões dos lotes de terras.

O uso do triângulo na antiguidade aparece também com Tales de Mileto quando em uma de suas viagens ao Egito recebeu um pedido de um mensageiro do faraó, que calculasse a altura da pirâmide Quéope. Para isso enterrou na areia, em frente a pirâmide, uma vara na vertical, cujo comprimento ele conhecia, e mediu sua sombra. Fez o mesmo com a pirâmide, deduzindo assim sua altura, pois a sombra e a altura de ambas são proporcionais, qualquer que seja seus tamanhos, usando para isso a comparação entre triângulos.

2.1 EUCLIDES

O grande geômetra Euclides de Alexandria desenvolveu grandiosos trabalhos geométricos e os publicou em sua obra Os Elementos (a maior obra já publicada, neste ramo, de toda historia da humanidade). A Geometria Plana, como é conhecida, é também chamada de Geometria Euclidiana em homenagem ao seu grande mentor Euclides de Alexandria.

Não se sabe exatamente em que ano Euclides nasceu, sabe-se que seu nascimento foi registrado na Síria. Há poucos registros sobre sua vida, o que se pode afirmar é que ele foi convidado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter, em Alexandria, onde se destacou pela forma brilhante que ensinava geometria e Álgebra. Por isso ficou conhecido como Euclides de Alexandria.

Seus estudos não limitaram-se a Geometria, estenderam-se a Música, a Astronomia, a Física e a Moral. Muitas de suas obras foram perdidas, dentre as que foram encontradas estão:

- Os Elementos de Geometria (obra composta por treze livros ou capítulos, onde os seis primeiros são sobre geometria plana elementar).
- Óptica (teoria contraria á de Aristóteles, segundo o qual o olho envia os raios que vão até ao objeto que vemos e não o inverso).
- Os Fenômenos (estuda a geometria esférica e suas aplicações a astronomia).
- Dados (serve como guia para resolução de problemas que envolvem medidas lineares a angulares num círculo).
- Divisão de Figuras (divisão de figuras geométricas num número dado de partes iguais, ou obedecendo a uma razão dada).
- Cônicas (obra composta por quatro volumes que estuda as seções cônicas).

Euclides ficou conhecido e tornou-se um dos mais influentes matemáticos da antiguidade, devido a sua grandiosa obra Os Elementos, e é até hoje um dos mais importantes.

3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos que serão necessários para melhor compreender o conteúdo que será abordado, e uma noção dos termos indefinidos: ponto, reta e plano, já que não existe uma definição formal desses elementos da geometria.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

Ponto: Um ponto tem apenas posição, não tem comprimento, largura ou espessura.
O ponto será representado por uma letra maiúscula latina: A, B, C,...

Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Pontos coincidentes: dois pontos são coincidentes quando forem o mesmo ponto.

Reta: Uma reta tem comprimento, porém não tem largura ou espessura.
A reta será representada por uma letra minúscula latina: a, b, c,...

Plano: Um plano tem comprimento e largura, porém não espessura.
O plano será representado por uma letra grega minúscula: α, β, γ,...

Semiplano: Parte do plano limitado por uma reta.

Ângulos consecutivos: Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles coincide com um lado do outro.

Ângulos adjacentes: Dois ângulos consecutivos são adjacentes se não têm pontos internos em comum.

Ângulos opostos pelo vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.

Bissetriz de um ângulo: É a semi-reta, de origem no vértice de um ângulo, que divide esse ângulo em dois ângulos iguais.

Triângulo: É um polígono de três lados e tem como elementos: três vértices, três lados e três ângulos internos. Usaremos as seguintes notações:
$\Delta ABC \rightarrow$ triângulo ABC;

A, B, C $\rightarrow$ Vértices do triângulo;

AB, BC e CA $\rightarrow$ Os lados do triângulo;

$A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ ou $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$→ Os ângulos internos do triângulo;

O triângulo pode ser classificado quanto á:
Medida de seus lados em:

Triângulo equilátero, quando possui os três lados dois a dois congruentes.

Triângulo isósceles, quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado base do triângulo isósceles.

Triângulo escaleno, aquele em que quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Medida de seus ângulos em:

Triângulo retângulo, quando possui um ângulo reto. Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois são chamados catetos.

Triângulo acutângulo, quando possui os três ângulos agudos.

Triângulo obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso.

Triângulo equiângulo, quando possui os três ângulos dois a dois congruentes.

Abordaremos alguns conceitos decorrentes de retas e ângulos, que aparecerão na forma de postulados, teoremas e/ou definições. Sendo esses conceitos necessários para prosseguirmos com nosso trabalho.

3.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Os Postulados (1, 2 e 3) são denominados postulados de incidência.

Postulado 1- Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Postulado 2- Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Postulado 3- Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Postulado 4- (Postulado da distância) A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes. (este número é chamado distância entre os dois pontos e denotaremos por PQ a distância entre os pontos P e Q).

Postulado 5- (Postulado da régua) Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais de modo que:

1) Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real.
2) Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta.
3) A distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

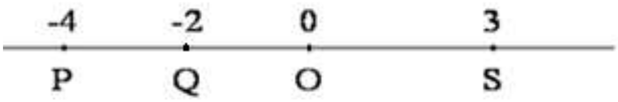

Figura 1: Sistema de coordenadas para a reta.

Temos na Figura 1 que o número real -4 está em correspondência com o ponto P, o -2 com o ponto Q e assim por diante.

Este postulado é chamado de postulado da régua, pois podemos, com uma "régua infinita" colocada sobre uma reta, medir a distância entre dois pontos quaisquer da reta.

Chamamos de um sistema de coordenadas para a reta, uma correspondência do tipo descrita neste postulado. A coordenada de um ponto é o número correspondente a qualquer ponto da reta. Portanto, se temos dois pontos A e B com coordenadas a e b respectivamente, a distância entre os pontos A e B é dada por AB = $|\, a - b \,|$.

Postulado 6- (Postulado da colocação da régua) Dados dois pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

Definição: Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, dizemos que B está entre A e C, o que denotaremos por A – B – C.

Figura 2: Pontos colineares e distintos.

Note que se temos A – B – C então temos também C – B – A.

Para apresentarmos os teoremas a seguir devemos lembrar da relação para os números reais: "Estar entre": Se x, y e z são números reais e se x < y < z ou z < y < x, então dizemos que y está entre x e z, o que representaremos por x – y – z.

Teorema- Sejam dados uma reta *r* e três pontos A, B e C pertencentes a ela, com coordenadas *x*, *y* e *z*, respectivamente. Se $x - y - z$, então A – B – C.

Demonstração: Se $x < y < z$, então AB = $|y - x| = y - x$; BC = $|z - y| = z - y$; e AC = $|z - x| = z - x$. Logo temos AB + BC = $(y - x) + (z - y) = z - x$ = AC. Logo temos A – B – C. Se $z < y < x$, procedendo analogamente obtemos $C - B - A$.

Teorema- Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração: Sejam A, B e C três pontos colineares distintos. Vamos mostrar inicialmente que um deles está entre os outros dois.

Sejam *x*, *y* e *z* as coordenadas dos pontos A, B e C, respectivamente. Por propriedades de números reais, apenas um, entre os números *x*, *y* e *z*, está entre os outros dois. Pelo teorema anterior obtemos que o correspondente ponto A, B ou C está entre os outros dois.

Agora vamos mostrar a unicidade, isto é, considerando que um dos pontos, por exemplo B, está entre os pontos A e C, vamos mostrar que não podemos ter que A está entre B e C e nem que C está entre A e B.

De fato, se A estivesse entre B e C, teríamos $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$. Como por hipótese. B está entre A e C, temos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. De ambos resulta $2\overline{AB} = 0$, o que é impossível, visto que A e B são pontos distintos. Analogamente, demonstramos que C não pode estar entre A e B.

Teorema- Se A e B são pontos distintos quaisquer, então

1) Existe um ponto C tal que A – B – C;

2) Existe um ponto C′ tal que C′ – A – B;

3) Existe um ponto D tal que A – D – B.

Demonstração: Sejam x e y as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. Suponhamos $x < y$. Tomamos o ponto C com coordenada $y + 1$, o ponto C′ com coordenada $x - 1$ e o ponto D com coordenada $\frac{x+y}{2}$, e as situações 1), 2) e 3) acima são facilmente verificadas. Para o caso $y < x$ o procedimento é análogo.

Definições: Sejam A e B pontos distintos.

a) O segmento de reta $\overline{AB}$, ou simplesmente segmento $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X tais que A – X – B. Os pontos A e B são denominados extremidades do segmento $\overline{AB}$.

Figura 3: Segmento de reta $\overline{AB}$.

Observação: O ponto médio de um segmento bissecciona o segmento.

b) A medida ou comprimento de um segmento $\overline{AB}$ é definido como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotado por AB.

c) A semi- reta de origem A contendo o ponto B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que A – B – X. O ponto A é denominado origem da semi-reta.

Figura 4: Semi-retas de origem A contendo o ponto B.

Se A está entre B e C, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas semi-retas opostas.

Definição: Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados de segmentos congruentes.

Teorema- (Teorema da localização de pontos) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que AP = x.

Demonstração: Pelo postulado da colocação da régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo *r*.

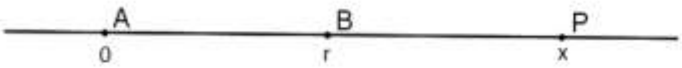

Figura 5: Semi-reta $\overrightarrow{AB}$ contendo o ponto P.

Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo *x*. Então P pertence a $\overrightarrow{AB}$ e AP = | x – 0 | = | x | = x. Como somente um ponto da semi-reta tem a coordenada *x*, somente um ponto da semi-reta estará a uma distância *x* de A.

Definição: Um ponto B é ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se B está entre A e C, e
$\overline{AB} = \overline{BC}$.

Figura 6: Ponto médio de um segmento.

Teorema- Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração: Vamos inicialmente provar a existência do ponto médio. Consideremos o segmento $\overline{AC}$. Queremos obter um ponto B tal que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Consideremos o número real positivo $x = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Pelo Teorema da Localização de Pontos, existe um único ponto B na semi-reta $\overrightarrow{AC}$ tal que AB = *x*.

Como B está em $\overrightarrow{AC}$, temos que B ou está em $\overline{AC}$ ou A – C – B, sendo B ≠ A, e B ≠ C.

Se B está em $\overline{AC}$ temos A – B – C, logo $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e portanto

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AB}.$$

Se B é tal que A – C – B então temos $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ e portanto

$$\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AC} < 0, \text{ o que é um absurdo.}$$

Logo temos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, isto é, B é ponto médio de $\overline{AC}$.

Para provarmos a unicidade do ponto médio, suponhamos que existe M, um outro ponto médio de $\overline{AC}$, isto é, um ponto M satisfazendo: $\overline{AM} + \overline{MC} = \overline{AC}$ e $\overline{AM} = \overline{MC}$.

Dessa forma, teríamos $2\overline{AM} = \overline{AC}$, portanto $\overline{AM} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$, e pelo Teorema da Localização dos Pontos, M coincidiria com B. Logo o ponto médio do $\overline{AC}$ é único.

Definição: Um ângulo é a união de duas semi-retas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então essas semi-retas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e respectivamente por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\hat{A}$.

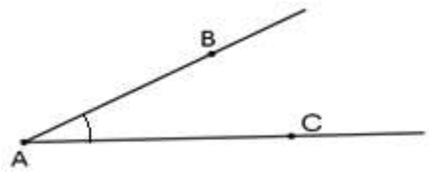

Figura 7: Ângulo BAC.

Definição: Dizemos que o ponto P está no interior do ângulo $B\hat{A}C$ ou é ponto interior do ângulo $B\hat{A}C$se os pontos P e B estão no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e os pontos P e C estão no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

O exterior de $B\hat{A}C$ é o conjunto dos pontos que não estão no interior e não estão no próprio ângulo $B\hat{A}C$. Um ponto desse tipo é chamado ponto exterior do ângulo $B\hat{A}C$.

Na Figura 8, P é o ponto interior de $B\hat{A}C$, pois P e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ e P e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Os pontos Q, R, T, S e U são pontos exteriores do $B\hat{A}C$.

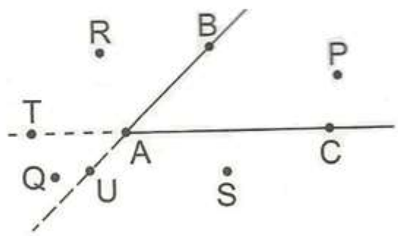

Figura 8: Ponto exterior do ângulo $B\hat{A}C$.

Postulado 7- (Postulado da Medida de Ângulos) A cada ângulo BAC corresponde um número real entre 0 e 180.

Definições:
(a) O número correspondente ao postulado anterior é chamado medida do ângulo, o que é denotado por $mB\hat{A}C$.

(b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes.

Se $B\hat{A}C$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes, isto é denotado por $B\hat{A}C \equiv P\hat{Q}R$.

Postulado 8- (Postulado da Construção do Ângulo) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na reta origem de um semiplano $\mathcal{H}$. Para cada numero r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$ com P em $\mathcal{H}$, tal que $mP\hat{A}B = r$.

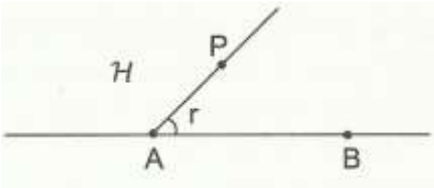

Figura 9: Semi-reta $\overrightarrow{AB}$ contida na reta origem do semiplano H.

Postulado 9- (Postulado da Adição de Ângulos) Se D é um ponto interior do $B\hat{A}C$, então $mB\hat{A}C = mB\hat{A}D + mD\hat{A}C$.

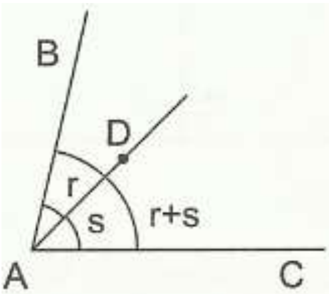

Figura 10: Adição de ângulos.

Definição: Se a soma das medidas de dois ângulos é 180º então dizemos que os ângulos são suplementares e que cada um é o suplemento do outro.

Definição: Se a soma das medidas de dois ângulos é 90º, então os ângulos são chamados complementares, e cada um é o complemento do outro.

Um ângulo com medida menor que 90º é chamado ângulo agudo, e um ângulo com medida maior que 90º é chamado ângulo obtuso.

Definição: Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semi-retas opostas e $\overrightarrow{AD}$ é uma outra semi-reta, então $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$ formam um par linear.

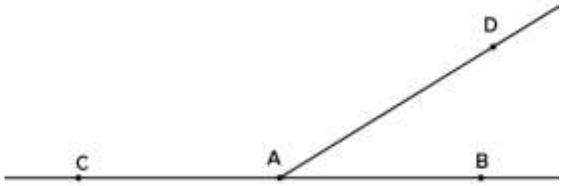

Figura 11: Par linear

Postulado 10- (Postulado do Suplemento) Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares.

Definição: Se dois ângulos de um par linear são congruentes, então cada um é um ângulo reto.

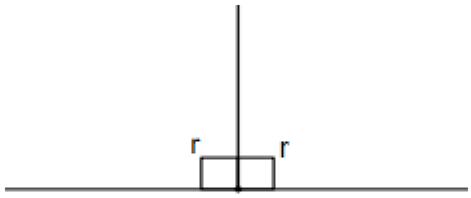

Figura 12: Ângulo reto.

Definição: Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semi-reta, ou um segmento, são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto.

Sejam r e s retas perpendiculares, denotaremos isso por $r \perp s$.

Definição: Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as semi-retas opostas aos lados do outro.

Teorema- Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Consideremos os ângulos opostos pelo vértice $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$ tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$, e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sejam dois pares de semi-retas opostas. Então, pelo Postulado do Suplemento,

$B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$, e $C\hat{A}D$ e $D\hat{A}E$ são pares de ângulos suplementares. Assim $B\hat{A}C$ e $E\hat{A}D$ têm o mesmo suplemento. Portanto $mC\hat{A}B = mD\hat{A}E$.

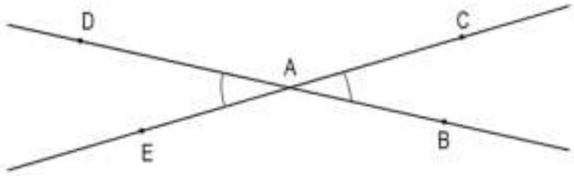

Figura 13: Ângulos opostos pelo vértice.

3.3 CASOS DE CONGRUÊNCIA

Dizemos que duas figuras planas são congruentes se ao deslocarmos uma delas não se altere sua forma nem suas medidas, de modo a coincidirem uma com a outra. Aqui iremos mostrar a congruência entre triângulos. Denotaremos por ΔABC ≡ ΔEFG, a congruência entre os triângulos ABC e EFG.

Apresentaremos e demonstraremos as condições mínimas para garantir que dois triângulos sejam congruentes, é o que chamaremos de casos de congruência de triângulos. Para dá suporte as nossas demonstrações quando necessário abordaremos alguns teoremas, corolários e definições.

Definição: Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Para representarmos a congruência de triângulos iremos usar a notação: ΔABC ≡ ΔEFG.

Consideremos os triângulos abaixo ABC e EFG:

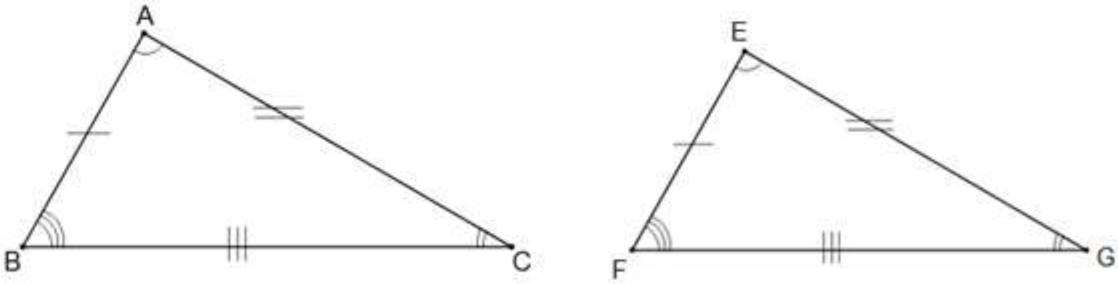

Figura 14: Triângulos congruentes.

Se ΔABC e ΔEFG são congruentes então temos as seguintes correspondências:

A ↔ E,

B ↔ F

C ↔ G

E valem as seguintes relações:

$\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ $\overline{BC} \equiv \overline{FG}$ $\overline{AC} \equiv \overline{EG}$

$\hat{A} \equiv \hat{E}$ $\hat{B} \equiv \hat{F}$ $\hat{C} \equiv \hat{G}$

Postulado 11- (1º Caso de Congruência de triângulos – caso L.A.L) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ então ΔABC ≡ ΔDEF.

Figura 15: Triângulos congruentes pelo caso L.A.L.

Teorema- (Teorema do Triângulo Isósceles) Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Consideremos o triângulo isósceles ABC com base $\overline{BC}$.

Queremos provar que $\hat{B} \equiv \hat{C}$. Para isso, consideremos a correspondência que leva o triângulo ABC nele mesmo de modo que A ↔ A, B ↔ C e C ↔ B.

Por hipótese obtemos $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ e, como $\hat{A} \equiv \hat{A}$ segue, pelo caso L.A.L de congruência de triângulos, que ΔABC ≡ ΔACB.

Como consequência temos $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

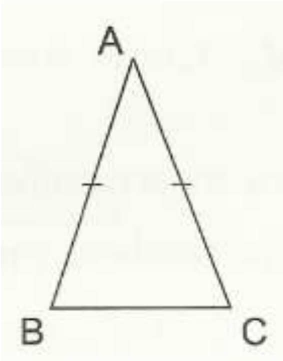

Figura 16: Triângulo isósceles.

Corolário: Todo triângulo equilátero possui seus três ângulos com a mesma medida.

Definição: Uma semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é uma bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ se C está no interior de $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$. Neste caso, temos $mA\hat{O}C = mB\hat{O}C = \frac{1}{2}mA\hat{O}B$.

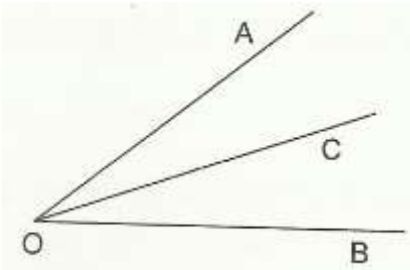

Figura 17: Bissetriz de um ângulo.

Teorema- Todo ângulo tem exatamente uma bissetriz.

Demonstração: Consideremos o ângulo $\hat{A}$ da figura:

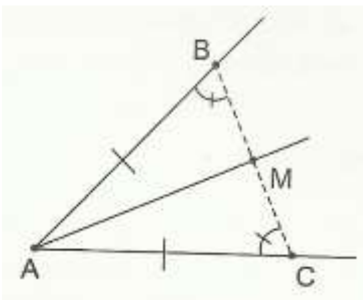

Figura 18: Unicidade da bissetriz.

Escolhemos os pontos B e C, um em cada lado de $\hat{A}$, tais que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Seja M o ponto médio do $\overline{BC}$, que está no interior de $\hat{A}$. Pelo Teorema do Triângulo isósceles aplicado ao triângulo ABC, obtemos a congruência dos ângulos $A\hat{B}M$ e $A\hat{C}M$. Pelo caso L.A.L de congruência de triângulos, obtemos ΔABM ≡ ΔACM. Como consequência temos $B\hat{A}M \equiv C\hat{A}M$. Portanto $\overrightarrow{AM}$ é bissetriz do $B\hat{A}C$.

Para mostrarmos a unicidade da bissetriz, suponhamos que uma outra semi-reta, $\overrightarrow{AD}$, seja também uma bissetriz de $\hat{A}$. Então $mB\hat{A}D = mB\hat{A}M = \frac{1}{2}mB\hat{A}C$, do que resulta que $\overrightarrow{AD}$coincide com $\overrightarrow{AM}$, pelo Postulado da Construção do Ângulo. Portanto $\overrightarrow{AM}$ é a única bissetriz de $\hat{A}$.

Definição: Uma bissetriz de um triângulo é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto. (Cada triângulo possui três bissetrizes.)

Teorema- (2º Caso de Congruência de Triângulo - caso A.L.A) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então os triângulos são congruentes.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, satisfazendo as hipóteses do teorema.

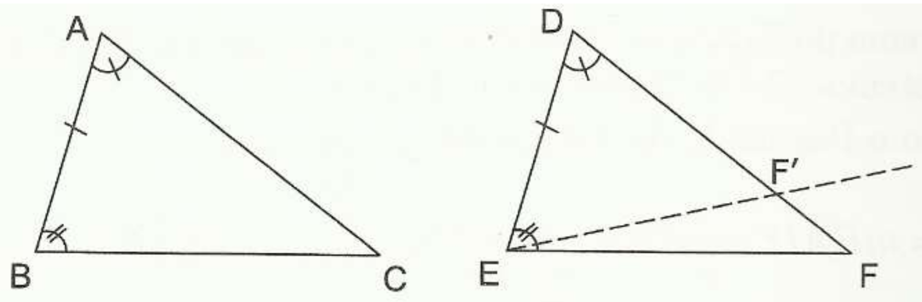

Figura 19: Triângulos congruentes pelo caso A.L.A.

Seja F′ um ponto da semi-reta DF tal que DF′ = AC.

Comparemos os triângulos ABC e DEF′.

Como $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DF'}$, segue que eles são congruentes, pelo caso L.A.L. Portanto $A\hat{B}C \equiv D\hat{E}F'$.

Deste fato e da hipótese segue que $D\hat{E}F \equiv D\hat{E}F'$. Pelo Postulado da Construção do Ângulo, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{EF'}$ coincidem.

Portanto F e F′ são o mesmo ponto, logo os triângulos DEF e DEF′ coincidem, e como temos que ΔABC ≡ ΔDEF′, então ΔABC ≡ ΔDEF.

Teorema- (3º Caso de Congruência de Triângulos – caso L.L.L) Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{FD}$.

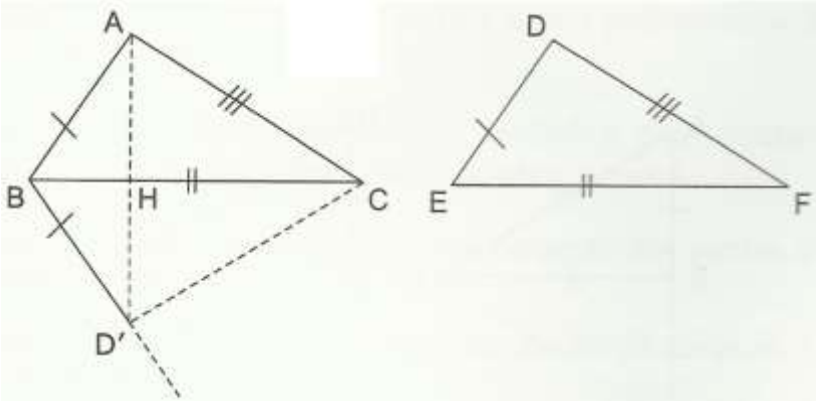

Figura 20: Triângulos congruentes pelo caso L.L.L (com B – H – C).

No semipleno determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semi-reta de origem B formando com $\overrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao $D\hat{E}F$. Escolhamos sobre ela um ponto D′ tal que BD′ = DE. Pelo caso L.A.L., obtemos ΔD′BC ≡ ΔDEF.

Vamos mostrar agora que ΔABC ≡ ΔD′BC.

Seja H o ponto em que $\overline{AD'}$ corta $\overleftrightarrow{BC}$.

Vamos supor primeiro que H está entre B e C, como na figura 20.

Pelo Teorema do Triângulo Isósceles aplicado aos triângulos BD′A e CAD′ respectivamente, obtemos $B\hat{A}D' \equiv B\widehat{D'}A$ e $C\hat{A}D' \equiv C\widehat{D'}A$.

Utilizando o Postulado da Adição de Ângulos, obtemos

$mB\hat{A}C = mB\hat{A}D' + mD'\hat{A}C = mB\widehat{D'}A + mA\widehat{D'}C = mB\widehat{D'}C.$

Daí, pelo caso L.A.L, segue que ΔABC ≡ ΔD′BC.

No caso em que B está entre H e C como na figura 21, é demonstrado analogamente que ΔD′BC ≡ ΔDEF e que ΔABC ≡ ΔD′BC.

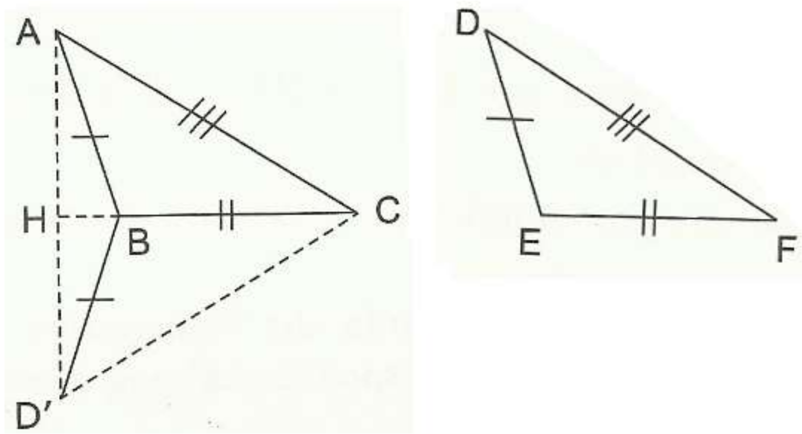

Figura 21: Triângulos congruentes pelo caso L.L.L(com H – B – C).

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos ΔABC ≡ ΔDEF.

Analisemos agora o caso em que H = B, isto é, A, B e D′ são colineares.

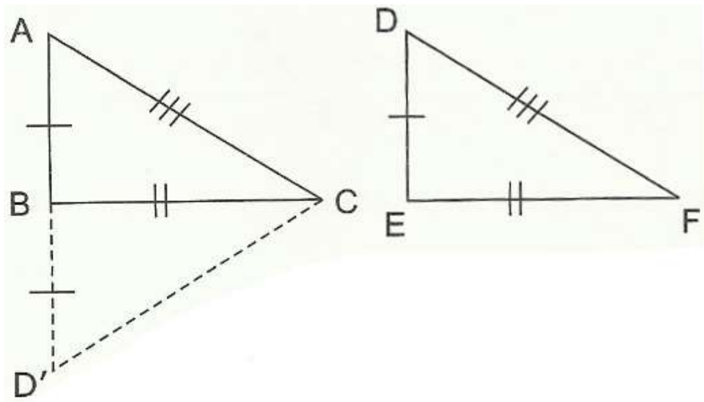

Figura 22: Triângulos congruentes pelo caso L.L.L (com H = B)

Neste caso, $\hat{A} \equiv \widehat{D}'$, pelo Teorema do Triângulo Isósceles, e, por transitividade, $\hat{A} \equiv \widehat{D}$. Novamente, pelo caso L.A.L e por transitividade, obtemos ΔABC ≡ ΔDEF.

Teorema: Por um ponto de uma reta dada passa uma única reta perpendicular a essa reta.

Demonstração: Consideremos a reta r e o ponto P pertencente a r.

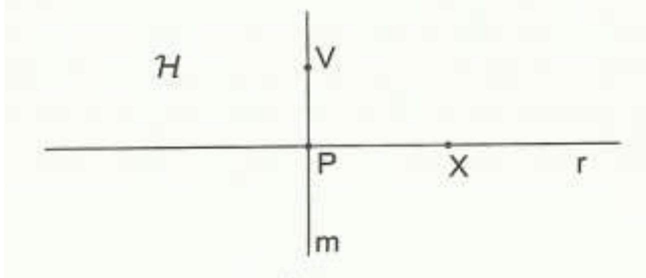

Figura 23: Reta perpendicular.

Seja H um dos semiplanos que contêm r como origem, e seja X um ponto de r distinto de P. Pelo Postulado da Construção do Ângulo, existe um ponto Y em H tal que $X\hat{P}Y$ é um ângulo reto. Seja m a reta $\overleftrightarrow{PY}$. Então $m \perp r$ e, assim, temos demonstrado que existe pelo menos uma reta que satisfaz as condições do teorema.

Para mostrarmos a unicidade, suponhamos que existam duas retas, m_1 e m_2, passando pelo ponto P e perpendiculares a r, e contendo respectivamente os pontos Y_1 e Y_2 ambos pertencentes a H.

As retas m_1 e m_2 contêm respectivamente as semi-retas $\overrightarrow{PY}_1$ e $\overrightarrow{PY}_2$, que estão no mesmo semipleno H que tem r como origem. Pela definição de retas perpendiculares, $mX\hat{P}Y_1$ = 90º. De modo análogo, $mX\hat{P}Y_2$ = 90º. Isto contradiz o Postulado da Construção do Ângulo que diz que existe somente uma semi-reta $\overrightarrow{PY}$ com Y em H, tal que $mX\hat{P}Y$ = 90º. Portanto temos uma única reta passando por P e perpendicular a r.

Definição: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contêm seu ponto médio.

Teorema: A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

Demonstração: Seja $\overline{AB}$ um segmento com ponto médio M. Seja m a mediatriz de $\overline{AB}$ e seja P um ponto perpendicular a m.

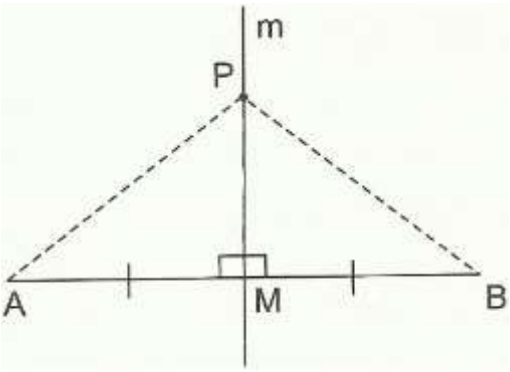

Figura 24: Mediatriz de um segmento.

Se P está em $\overline{AB}$, então P = M e portanto $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$, pela definição de ponto médio.

Se P não está no $\overline{AB}$, então temos $\overline{PM}$ = $\overline{PM}$, $\overline{MA}$ = $\overline{MB}$ e $P\widehat{M}A$ = $P\widehat{M}B$ pela hipótese. Pelo caso L.A.L., temos ΔPMA ≡ ΔPMB. Portanto $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$. Nos dois casos obtemos que P é equidistante dos pontos A e B.

Agora, seja P um ponto equidistante dos pontos A e B. Se P está em $\overline{AB}$, então P coincide com o ponto médio M de $\overline{AB}$, e, portanto, P está em m.

Consideremos agora o caso em que P não pertence a $\overline{AB}$.

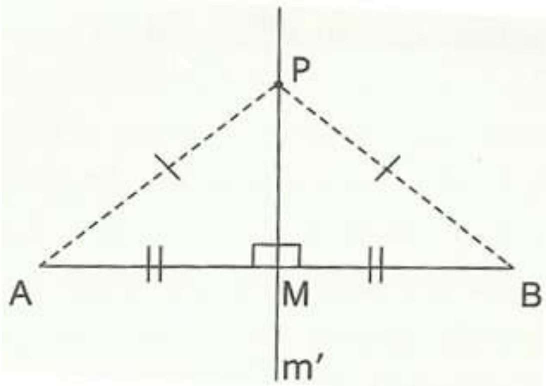

Figura 25: Mediatriz de um segmento (caso em que P não pertence a $\overline{AB}$).

Seja m' = $\overleftrightarrow{PM}$. Como $\overline{PM}$ = $\overline{PM}$, $\overline{MA}$ = $\overline{MB}$ e $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$, pelo caso L.L.L. temos ΔPMA ≡ ΔPMB. Portanto $mP\widehat{M}A$ = $mP\widehat{M}B$ = 90º, e, pela definição de retas perpendiculares, m' é perpendicular a $\overline{AB}$. Pela unicidade da mediatriz temos m = m' e, portanto, P está em m.

Definição: Uma mediana de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.

Definição: Se C está entre B e D então $A\hat{C}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC.

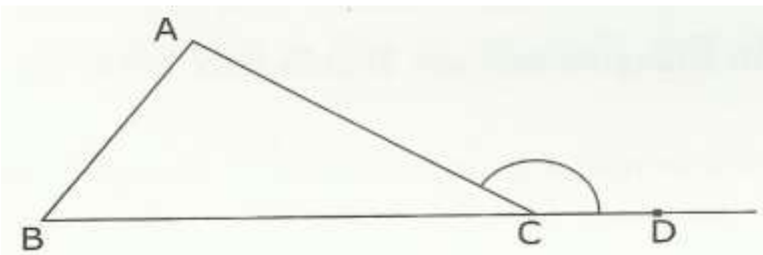

Figura 26: Ângulo externo.

Ainda, como no triângulo ABC os ângulos $A\hat{B}C$, $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$ são os ângulos internos do triângulo, os suplementos desses ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo. Neste caso, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo $A\hat{C}D$.

Cada triângulo tem seis ângulos externos, como indicados na Figura 27. Estes ângulos formam três pares de ângulos congruentes, pois constituem três pares de ângulos opostos pelo vértice.

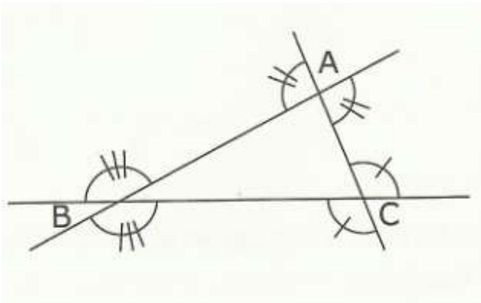

Figura 27: Pares de ângulos externos e opostos pelo vértice.

Teorema- (Teorema do Ângulo Externo) Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo qualquer.

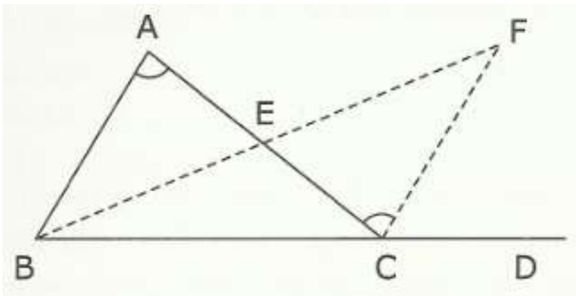

Figura 28: Relação do ângulo externo com ângulo interno.

Seja D um ponto tal que C está entre B e D; vamos demonstrar que

$$A\hat{C}D > \hat{A} \text{ e } A\hat{C}D > \hat{B}.$$

Seja E o ponto médio de $\overline{AC}$ e seja F o ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{EB}$ tal que

$$\overline{EF} = \overline{EB}.$$

Temos ΔBEA ≡ ΔFEC pelo Postulado L.A.L., já que $\overline{AE} \equiv \overline{CE}$ e $\overline{BE} \equiv \overline{FE}$ por construção e $B\hat{E}A \equiv F\hat{E}C$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Portanto $\hat{A} \equiv E\hat{C}F$.

Disso, e verificando que o ponto F é ponto interior ao ângulo $A\hat{C}D$, pelo Postulado da Adição de Ângulos aplicado aos ângulos $A\hat{C}D$, $A\hat{C}F$ e $F\hat{C}D$, obtemos $A\hat{C}D > \hat{A}$.

Analogamente mostramos que $A\hat{C}D > \hat{B}$.

Corolário: Se um triângulo tem um ângulo reto, então os seus outros dois ângulos são agudos.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC, retângulo em B, e o ponto D com B entre C e D. Observamos que $D\hat{B}A$ e $A\hat{B}C$ formam um par linear, portanto ambos são ângulos retos.

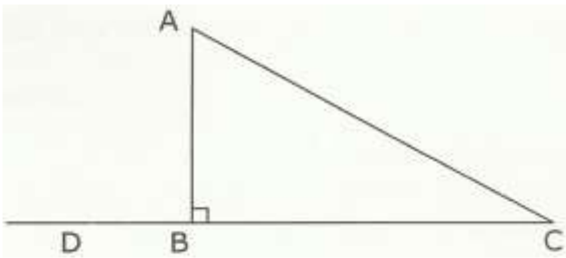

Figura 29: Triângulo com um ângulo reto e dois agudos.

Pelo teorema anterior $mA\hat{B}D > m\hat{C}$, e portanto $mB\hat{C}A < 90º$.

De maneira análoga, podemos mostrar que $mB\hat{A}C < 90º$.

Teorema: Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.

Demonstração: Sejam *r* uma reta e P um ponto não pertencente a ela.

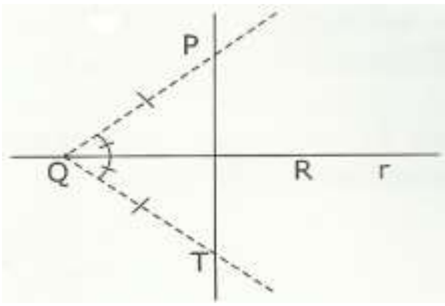

Figura 30: Existência de reta perpendicular.

Existência: Vamos construir por P uma reta perpendicular à reta r. Sejam Q e R dois pontos distintos quaisquer de r. Se $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{PR}$ for perpendicular a r, não há mais o que construir.

Se não, consideremos, no semiplano determinado por *r* e que não contém P, uma semi-reta com origem no ponto Q, formando com $\overrightarrow{QR}$ um ângulo congruente ao $P\hat{Q}R$.

Seja T um ponto dessa semi-reta tal que $\overline{QP}$ = $\overline{QT}$. O triângulo QTP assim determinado é isósceles com base $\overline{PT}$, sendo $\overrightarrow{QR}$ a bissetriz do ângulo $T\hat{Q}P$. Logo $\overleftrightarrow{PT}$ é perpendicular a *r*.

Unicidade: Suponhamos que pelo ponto P não pertencente à reta *r* passem duas retas *s* e *t*, ambos perpendiculares à reta *r*, as quais cortam *r* nos pontos S e T respectivamente.

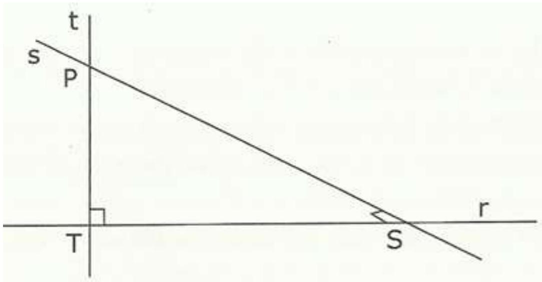

Figura 31: Unicidade reta perpendicular.

Dessa forma temos $P\hat{T}S$ e $P\hat{S}T$ ambos ângulos retos do triângulo PTS, o que contradiz o corolário 3.35.16. Logo a reta perpendicular é única.

Dado um ponto A e uma reta *r*, o ponto A′ onde a perpendicular por A encontra a reta *r* é chamado pé da perpendicular baixada de A até *r*, ou também, projeção ortogonal de A sobre *r* (ou simplesmente projeção de A sobre *r*) e denotado por proj_rA. O ponto A” pertencente à reta AA′ tal que A”A′ = A′A é o simétrico do ponto A em relação à reta *r*.

A projeção ortogonal de um segmento AB qualquer sobre a reta *r* é o segmento A′B′, denotado por $\text{proj}_r\overline{AB}$, tal que A′ = proj_rA e B′ = proj_rB.

Definição: Uma altura de um triângulo é o segmento perpendicular que une um vértice do triângulo à reta que contem o lado oposto.

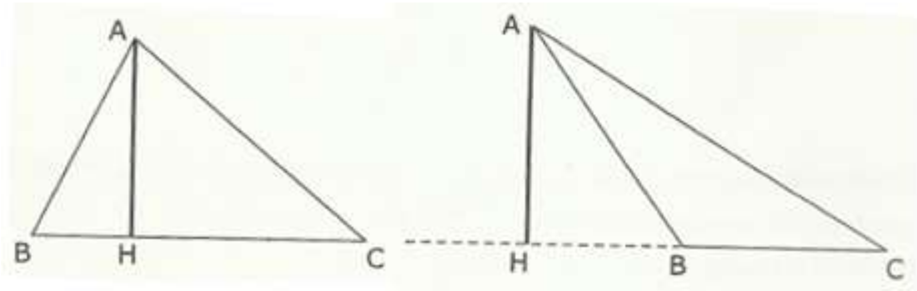

Figura 32: Altura de um triângulo.

Denotamos por $\overline{AH}$ a altura desde A a $\overleftrightarrow{BC}$, ou altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Teorema- (4º Caso de congruência de triângulos - L.A.A) Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Então ΔABC ≡ ΔDEF.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, e X um ponto da semi-reta $\overrightarrow{BC}$ tal que $\overline{BX} = \overline{EF}$. Consideremos inicialmente B – X – C.

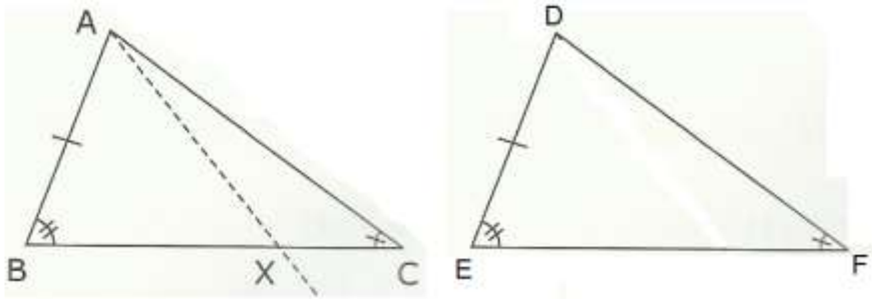

Figura 33: Triângulos congruentes pelo caso L.A.A.

Pelo Postulado L.A.L. obtemos ΔABX ≡ ΔDEF. Disto, portanto, obtemos $A\hat{X}B \equiv D\hat{F}E$ (I).

Mas, $A\hat{B}X$ é um ângulo externo do ΔAXC, do qual $A\hat{C}X$ é ângulo interno não adjacente. Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, $A\hat{X}B > A\hat{C}X$ e, portanto, pela hipotese, $A\hat{X}B > D\hat{F}E$, o que contradiz (I).

Se tivéssemos B – C – X, demonstraríamos analogamente que $A\hat{X}B < D\hat{F}E$, o que novamente contradiz (I).

Logo o ponto coincide com C, e portanto ΔABC ≡ ΔDEF.

Teorema- (Teorema da Hipotenusa e do Cateto) Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto do triangulo ABC são congruentes com as partes correspondentes do triângulo DEF, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF com $m\hat{B}$ = $m\hat{E}$ = 90º, $\overline{AC}$ ≡ $\overline{DF}$ e $\overline{AB}$ ≡ $\overline{DE}$.

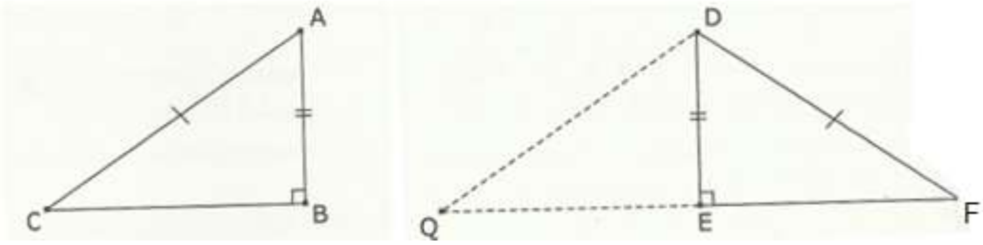

Figura 34: Triângulos retângulos.

Tomemos o ponto Q na semi-reta oposta a $\overrightarrow{EF}$ de modo que $\overline{EQ}$ = $\overline{BC}$. Pelo Postulado L.A.L. temos ΔDEQ ≡ ΔABC (I).

O triângulo DQF assim obtido é um triangulo isósceles visto que, por (I) e pela hipótese, $\overline{DQ}$ ≡ $\overline{DF}$. Logo $E\hat{F}D$ ≡ $E\hat{Q}D$. Disso e de (I) decorre que $E\hat{F}D$ ≡ $B\hat{C}A$. Então, pelo Teorema L.A.A., obtemos ΔDEF ≡ ΔABC.

4 APLICAÇÕES

Neste capitulo apresentaremos algumas aplicações dos casos de congruência de triângulos com suas respectivas resoluções.

1) Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ se bisseccionam no ponto F, então ΔFAB ≡ ΔFHR.

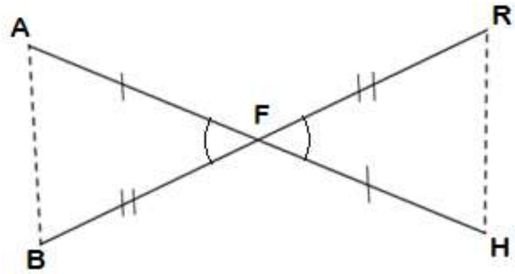

Figura 35: Figura da aplicação 1.

Solução:

Por hipótese $\overline{AF}$ = $\overline{FH}$ e $\overline{RF}$ = $\overline{FB}$, pois $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ se bisseccionam no ponto F.

Daí, temos: $\overline{AF}$ = $\overline{FH}$ (hipótese), $R\hat{F}A$ = $H\hat{F}B$ (ângulos opostos pelo vértice) e $\overline{RF}$ = $\overline{FB}$ (hipótese), logo, pelo caso L.A.L de congruência de triângulos tem-se ΔFAB ≡ ΔFHR.

2) Na figura 36, temos $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$. Mostre que $D\hat{B}C \equiv E\hat{C}B$.

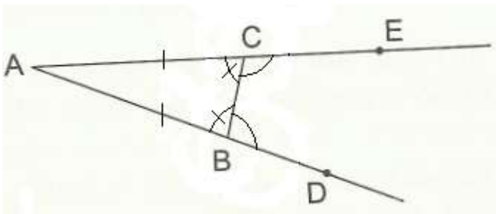

Figura 36: Figura da aplicação 2.

Solução:

Temos $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$ por hipótese, logo o triângulo ABC é isósceles, sendo assim $\overline{BC}$ é a base desse triângulo e $A\hat{B}C$ = $A\hat{C}B$, pois, são os ângulos da base.

Sabendo que $C\hat{B}D$ e $E\hat{C}B$ são os suplementos dos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ respectivamente, como os suplementos de ângulos congruentes são também congruentes, temos que $C\hat{B}D$ = $E\hat{C}B$.

3) Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se bisseccionam, então $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

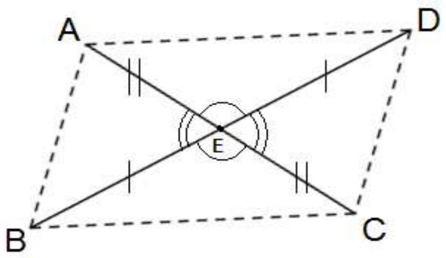

Figura 37: Figura da aplicação 3.

Solução:

Considere E como sendo o ponto onde $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se bisseccionam, assim $\overline{AE} = \overline{CE}$ e $\overline{BE} = \overline{DE}$. Considerando os triângulos AED e CEB, temos: $\overline{AE} = \overline{CE}$ (por hipótese), $A\hat{E}D = C\hat{E}B$ (ângulos opostos pelo vértice) e $\overline{DE} = \overline{BE}$ (hipótese), logo ΔAED ≡ ΔCEB pelo caso L.A.L de congruência de triângulos. Assim $\overline{AD} = \overline{BC}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes são congruentes).

4) Sejam $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{DC}$ como na figura 38. Mostre que $A\hat{B}D \equiv A\hat{C}D$.

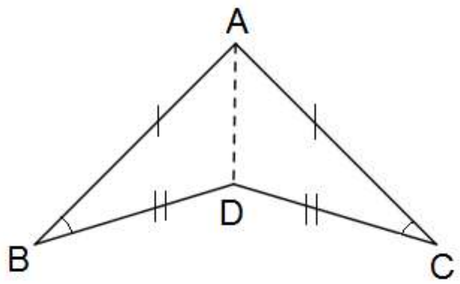

Figura 38: Figura da aplicação 4.

Solução:

Traçando $\overline{AD}$ teremos:

ΔABD e ΔACD e deles temos: $\overline{AB} = \overline{AC}$ (hipótese), $\overline{BD} = \overline{CD}$ (hipótese) e $\overline{AD} = \overline{AD}$ (lado comum aos triângulos).

Logo pelo caso L.L.L de congruência de triângulos temos ΔABC ≡ ΔACD, portanto,

$A\bar{B}D \equiv A\hat{C}D$ (ângulos correspondentes de triângulos congruentes são congruentes).

5) Mostre que, se dois ângulos de um triangulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

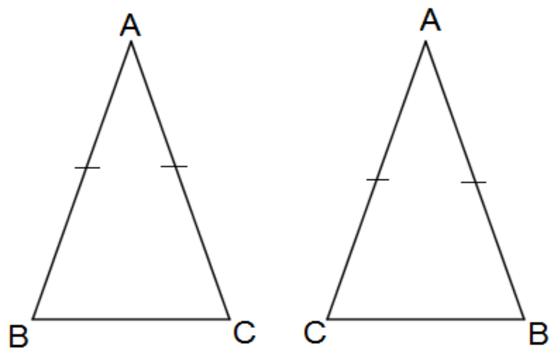

Figura 39: Figura da aplicação 5.

Solução:

Seja ABC um triângulo com $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$. Comparando o triângulo com ele mesmo teremos as seguintes correspondências entre seus vértices: A↔A, B↔C e C↔B. Assim, $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$ (hipótese), $\overline{BC}$ = $\overline{CB}$ (hipótese) e $A\hat{C}B$ = $A\hat{B}C$(lado comum aos triângulos), logo pelo caso A.L.A de congruência de triângulos o triângulo ABC é congruente a ele mesmo. Assim como conseqüência $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$, portanto o triângulo ABC é isósceles.

6) Considere um triângulo equilátero ABC em que P, Q e R são os pontos médios dos seus lados, respectivamente. Mostre que o ΔPQR é equilátero.

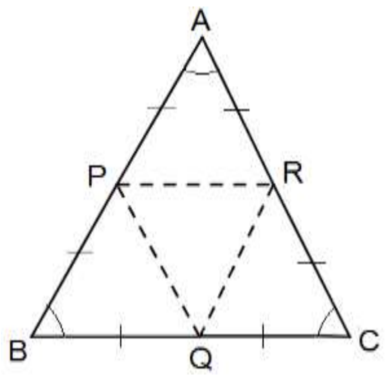

Figura 40: Figura da aplicação 6.

Solução:

O ΔABC é equilátero por hipótese, logo temos $B\hat{A}C$ = $A\hat{B}C$ = $A\hat{C}B$ e $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$ = $\overline{AC}$. Como P, Q e R são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, traçando $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{PR}$, teremos os seguintes triângulos: ΔPBQ, ΔRCQ, ΔAPR e ΔPQR. Considerando ΔPBQ e ΔRCQ, temos:

$\overline{PB} = \overline{RC}$ (hipótese)

$P\hat{B}Q = R\hat{C}Q$ (hipótese)

$\overline{BQ} = \overline{CQ}$ (hipótese)

Logo pelo caso L.A.L de congruência de triângulos ΔPBQ ≡ ΔRCQ, disso $\overline{PQ} = \overline{RQ}$ (I).

Agora considerando ΔPBQ e ΔPAR, temos:

$\overline{PB} = \overline{PA}$ (hipótese)

$P\hat{B}Q = P\hat{A}R$ (hipótese)

$\overline{BQ} = \overline{AR}$ (hipótese)

Logo ΔPBQ ≡ ΔPAR pelo caso L.A.L, portanto $\overline{PQ} = \overline{PR}$ (II).

De (I) e (II) temos, $\overline{PQ} = \overline{RQ} = \overline{PQ} = \overline{PR}$, ou seja, $\overline{PQ} = \overline{RQ} = \overline{PR}$, daí o triângulo PQR é eqüilátero.

7) Sejam $F\hat{B}A \equiv R\hat{M}Q$ e $\overline{HB} \equiv \overline{HM}$ como na figura 41. Mostre que $\overline{HF} \equiv \overline{HR}$.

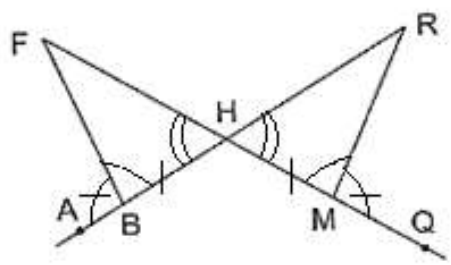

Figura 41: Figura da aplicação 7.

Solução:

Na figura 41 podemos observar que os ângulos $F\hat{B}H$ e $R\hat{M}H$ são os suplementos dos ângulos $F\hat{B}A$ e $R\hat{M}Q$ respectivamente. Como $F\hat{B}A \equiv R\hat{M}Q$ então $F\hat{B}H \equiv R\hat{M}H$, pois suplementos de ângulos congruentes são também congruentes.

Considerando ΔFBH e ΔRMH, teremos:

$F\hat{B}H = R\hat{M}H$ (suplementos dos ângulos $F\hat{B}A$ e $R\hat{M}Q$)

$\overline{BH} = \overline{MH}$ (hipótese)

$F\hat{H}B = R\hat{H}M$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo pelo caso A.L.A de congruência de triângulos ΔFBH ≡ ΔRMH. Assim $\overline{HF} = \overline{HR}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes são congruentes).

8) Na figura 42 temos $\overline{AR}$ = $\overline{AH}$ e $\overline{RF}$ = $\overline{BH}$. Mostre que $\overline{AB}$ = $\overline{AF}$.

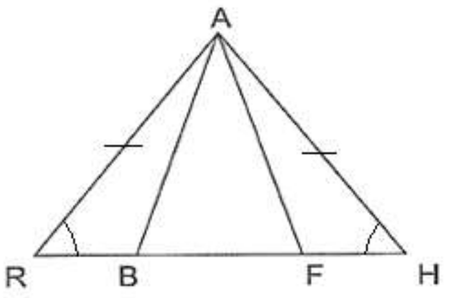

Figura 42: Figura da aplicação 8.

Solução:

Como por hipótese $\overline{AR}$ = $\overline{AH}$ então o triângulo ARH é isósceles, sendo assim $A\hat{R}H$ = $A\hat{H}R$, pois são os ângulos da base do triângulo ARH. Considerando ΔARF e ΔABH, temos:
$\overline{AR}$ = $\overline{AH}$ (hipótese), $A\hat{R}F$ = $A\hat{H}B$ (ângulos da base ΔARH) e $\overline{RF}$ = $\overline{BH}$ (hipótese), logo pelo caso L.A.L ΔARF ≡ ΔABH. Portanto $\overline{AB}$ = $\overline{AF}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes).

9) Como na figura 43, sejam: $\overline{PA}$ = $\overline{PB}$, M o ponto médio de $\overline{AB}$, e Q pertencente a reta $\overleftrightarrow{PM}$. Mostre que $\overline{QA}$ = $\overline{QB}$.

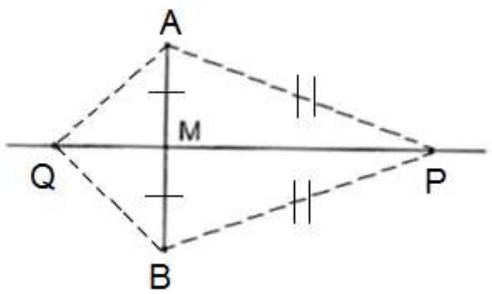

Figura 43: Figura da aplicação 9.

Solução:

Considerando ΔAMP e ΔBMP, temos: $\overline{AP}$ = $\overline{BP}$ (hipótese), $\overline{MB}$ = $\overline{MA}$ (hipótese) e $\overline{MP}$ = $\overline{MP}$ (lado comum aos triângulos), pelo caso L.L.L de congruência de triângulos ΔAMP ≡ ΔBMP, assim $A\hat{M}P$ = $B\hat{M}P$. Logo os ângulos $A\hat{M}Q$ e $B\hat{M}Q$ são os suplementos dos ângulos $A\hat{M}P$ e $B\hat{M}P$ respectivamente, sendo assim $A\hat{M}Q$ = $B\hat{M}Q$.

Agora traçando $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$, temos ΔAMQ e ΔBMQ, assim $\overline{AM}$ = $\overline{BM}$ (hipótese), $A\hat{M}Q$ = $B\hat{M}Q$ (suplementos dos $A\hat{M}P$ e $B\hat{M}P$) e $\overline{QM}$ = $\overline{QM}$ (lado comum aos triângulos), logo pelo caso L.A.L de congruência de triângulos ΔAMQ ≡ ΔBMQ, como conseqüência $\overline{QA}$ = $\overline{QB}$.

10) Sejam m a mediatriz do segmento $\overline{QT}$, P um ponto do mesmo lado de m que Q, e R o ponto de intersecção de m e $\overline{PT}$. Demonstre que $\overline{PT}$ = $\overline{PR}$ + $\overline{RQ}$.

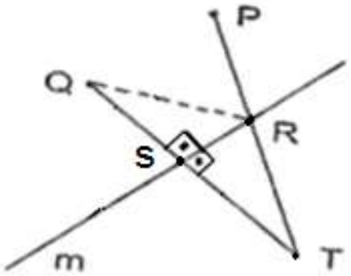

Figura 44: Figura da aplicação 10.

Solução:

Trace $\overline{QR}$, agora comparemos os ΔQSR e ΔTSR e deles temos: $\overline{SQ}$ = $\overline{ST}$ (S é ponto médio de $\overline{QT}$), $Q\hat{S}R$ = $T\hat{S}R$ (a reta m é perpendicular a $\overline{QT}$) e $\overline{SR}$ = $\overline{SR}$ (lado comum aos triângulos), assim concluímos que os ΔQSR ≡ ΔTSR pelo caso L.A.L de congruência de triângulos e que $\overline{QR}$ = $\overline{TR}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes).

Como $\overline{PT}$ = $\overline{PR}$ + $\overline{TR}$, mais $\overline{TR}$ = $\overline{QR}$, logo $\overline{PT}$ = $\overline{PR}$ + $\overline{QR}$.

11) Em um triângulo ABC a altura do vértice A é perpendicular ao lado $\overline{BC}$ e o divide em dois segmentos congruentes. Mostre que $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$.

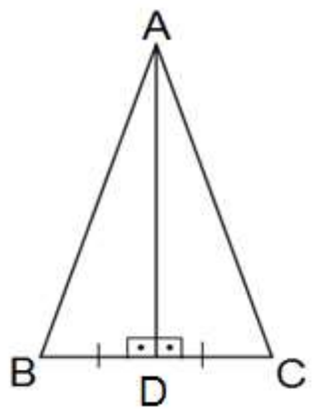

Figura 45: Figura da aplicação 11.

Solução:

Como $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ então $A\hat{D}B$ e $A\hat{D}C$ são ambos ângulos retos. Considerando ΔADB e ΔADC, temos: $\overline{BD}$ = $\overline{DC}$ (por hipótese), $A\hat{D}B$ = $A\hat{D}C$ (ângulos retos) e $\overline{AD}$ = $\overline{AD}$ (lado comum aos triângulos), logo pelo caso L.A.L de congruência de triângulos o ΔADB ≡ ΔADC, como conseqüência $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$.

12) Na figura 46, $\overline{AC}$ = $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$. Prove que os triângulos ACB e ADB são congruentes.

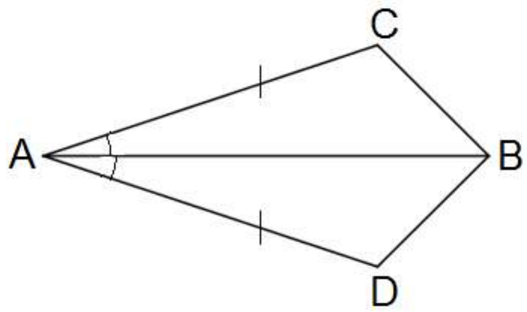

Figura 46: Figura da aplicação 12.

Solução:

Como $\overline{AB}$ é bissetriz de $C\hat{A}D$ então $C\hat{A}B$ = $D\hat{A}B$. Temos que $\overline{AC}$ = $\overline{AD}$ (por hipótese), $C\hat{A}B$ = $D\hat{A}B$ e $\overline{AB}$ = $\overline{AB}$ (lado comum aos triângulos), logo pelo caso L.A.L de congruência de triângulos o ΔACB ≡ ΔADB.

13) Em um quadrilátero ABCD sabe-se que $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ = $\overline{AD}$. Mostre que os triângulos ACB e CAD são congruentes.

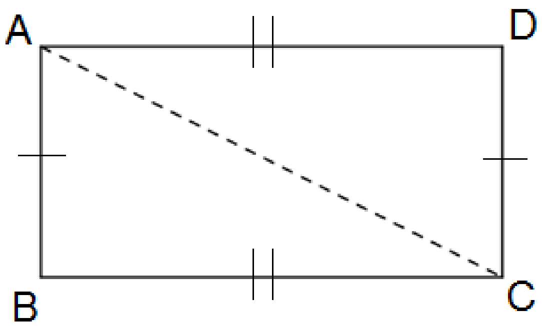

Figura 47: Figura da aplicação 13.

Solução:

Traçando $\overline{AC}$ temos ΔACB e ΔCAD, por hipótese $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ = $\overline{AD}$, e $\overline{AC}$ = $\overline{AC}$, pois $\overline{AC}$ é lado comum aos triângulos, logo pelo caso L.L.L o ΔACB ≡ ΔCAD.

14) Na figura 48 o ponto A é ponto médio do segmento $\overline{CB}$ e $\overline{DE}$. Prove que os triângulos ABD e ACE são congruentes.

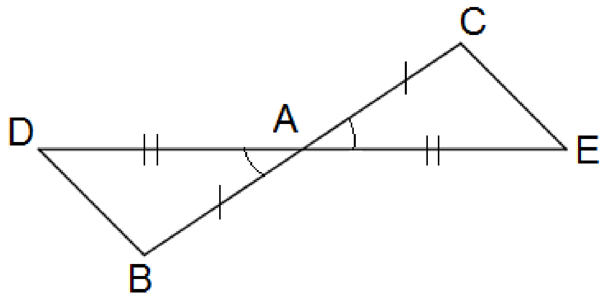

Figura 48: Figura da aplicação 14.

Solução:

Considerando os triângulos ABD e ACE temos:

$\overline{AD}$ = $\overline{AE}$ (hipótese), $D\hat{A}B$ = $E\hat{A}C$ (ângulos opostos pelo vértice) e $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$ (por hipótese), assim pelo caso LA.L o ΔABD ≡ ΔACE.

15) Na figura abaixo os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são retos e o segmento $\overline{DE}$ corta $\overline{CA}$ no ponto médio B de $\overline{AC}$. Mostre que $\overline{DA}$ = $\overline{CE}$.

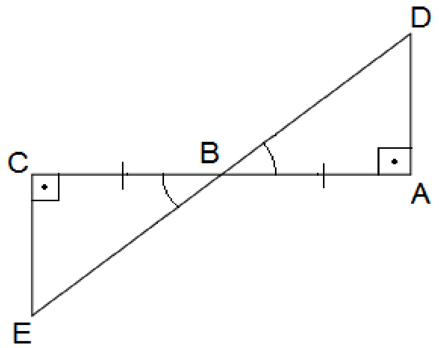

Figura 49: Figura da aplicação 15.

Solução:

Considere ΔBEC e ΔBDA, daí $E\hat{C}B$ = $D\hat{A}B$ (hipótese), $\overline{CB}$ = $\overline{BA}$ (pois B é ponto médio de $\overline{CA}$) e $C\hat{B}E$ = $A\hat{B}D$ (ângulos opostos pelo vértice), logo pelo caso A.L.A de congruência de triângulos o ΔBEC ≡ ΔBDA, portanto $\overline{DA}$ = $\overline{CE}$.

16) Da figura abaixo sabe-se que $\overline{OC}$ = $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ = $\overline{AO}$ e $B\hat{O}D$ = $C\hat{O}A$. Mostre que $\overline{CD}$ = $\overline{BA}$. Se, além disto, soubermos que $\overline{CD}$ = $\overline{OB}$ conclua que os três triângulos formados são isósceles.

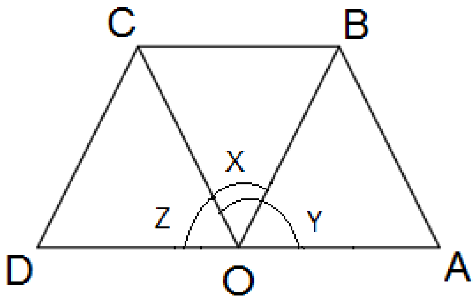

Figura 50: Figura da aplicação 16.

Solução:

Chame $C\hat{O}B$ de $\hat{X}$, $C\hat{O}D$ de $\hat{Z}$ e $B\hat{O}A$ de $\hat{Y}$, sendo assim $B\hat{O}D$ = $\hat{X}$ + $\hat{Z}$ e $C\hat{O}A$ = $\hat{X}$ + $\hat{Y}$. Como $B\hat{O}D$ = $C\hat{O}A$ (por hipótese), então $\hat{X}$ + $\hat{Z}$ = $\hat{X}$ + $\hat{Y}$. Daí, $\hat{Z}$ = $\hat{Y}$, ou seja, $C\hat{O}D$ = $B\hat{O}A$. Logo temos que: $\overline{OC}$ = $\overline{OB}$ (hipótese), $C\hat{O}D$ = $B\hat{O}A$ e $\overline{OD}$ = $\overline{AO}$ (hipótese), portanto pelo caso L.A.L ΔCOD ≡ ΔBOA e como consequência $\overline{CD}$ = $\overline{BA}$.

Por hipótese temos que $\overline{OC}$ = $\overline{OB}$, disso podemos concluir que o triângulo COB é isósceles, pois se um triângulo tem dois lados congruentes ele é isósceles.

Temos $\overline{CD}$ = $\overline{OB}$, mais como $\overline{OB}$ = $\overline{OC}$ então $\overline{CD}$ = $\overline{OB}$ = $\overline{OC}$ assim $\overline{CD}$ = $\overline{OC}$, portanto o triângulo COD é isósceles. E agora $\overline{CD}$ = $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$ = $\overline{OB}$, logo $\overline{CD}$ = $\overline{BA}$ = $\overline{OB}$ sendo assim $\overline{BA}$ = $\overline{OB}$ e, portanto, o triângulo BOA é isósceles.

17) Prove que, se um triângulo tem dois ângulos externos congruentes, então ele é isósceles.

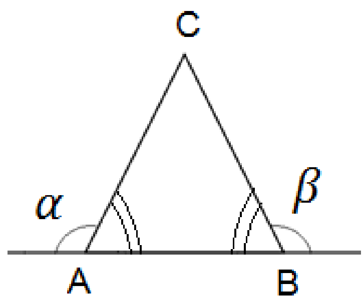

Figura 51: Figura da aplicação 17.

Solução:

Como α e β são os suplementos dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ respectivamente, então temos: $\alpha + \hat{A} = 180^{o} = \beta + \hat{B}$, mais $\alpha = \beta$ logo $\hat{A} = \hat{B}$. Como vimos anteriormente se dois ângulos de um triângulo são congruentes então o triângulo é isósceles. Portanto, como $\hat{A} = \hat{B}$ então o triângulo ABC é isósceles.

18) Na figura abaixo os ângulos externos $A\hat{C}E$ e $A\hat{B}D$ satisfazem a desigualdade: $A\hat{C}E < A\hat{B}D$. Mostre que $A\hat{B}D > A\hat{B}C$.

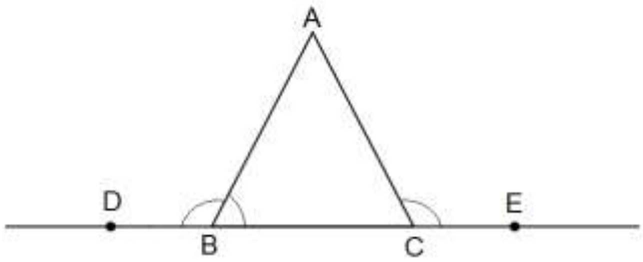

Figura 52: Figura da aplicação 18.

Solução:

Pelo teorema do ângulo externo $A\hat{C}E > A\hat{B}C$, mas por hipótese $A\hat{B}D > A\hat{C}E$, assim $A\hat{B}D > A\hat{C}E > A\hat{B}C$, portanto por transitividade $A\hat{B}D > A\hat{B}C$.

19) Na figura abaixo O é o ponto médio de $\overline{AD}$ e $A\hat{B}O = D\hat{C}O$. Se B, O e C são colineares, conclua que os triângulos ABO e DOC são congruentes.

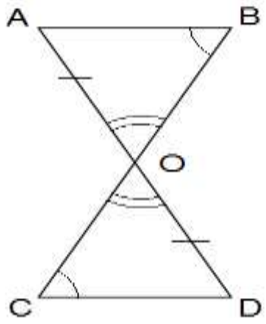

Figura 53: Figura da aplicação 19.

Solução:

Como O é o ponto médio de $\overline{AD}$ então $\overline{AO}$ = $\overline{OD}$. Assim $\overline{AO}$ = $\overline{OD}$ (por hipótese), $A\hat{O}B$ = $C\hat{O}D$ (ângulos opostos pelo vértice) e $A\hat{B}O$ = $D\hat{C}O$ (hipótese), logo pelo caso L.A.A de congruência de triângulos o ΔABO ≡ ΔDOC.

20) Mostre que em todo triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

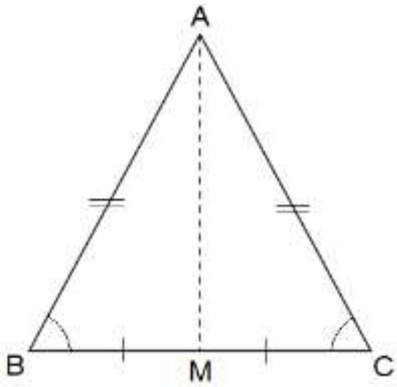

Figura 54: Figura da aplicação 20.

Solução:

Seja ABC um triângulo isósceles com base $\overline{BC}$ e seja $\overline{AM}$ sua mediana relativa a base. Devemos provar que $B\hat{A}M$ = $C\hat{A}M$ e que $A\hat{M}B$ é reto. Considere ΔABM e ΔACM, comparando-os temos:

$\overline{BM}$ = $\overline{CM}$ (pois AM é mediana)

$A\hat{B}C$ = $A\hat{C}B$ (ângulos da base do triângulo ABC)

$\overline{AB}$ = $\overline{AC}$ (lados congruentes do triângulo isósceles ABC)

Logo pelo caso L.A.L o ΔABM ≡ ΔACM, daí temos:

$B\hat{A}M = C\hat{A}M$ (I) e $A\hat{M}B = A\hat{M}C$ (II).

De (I) temos que $\overline{AM}$ é bissetriz do $B\hat{A}C$. Como $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são adjacentes e suplementares então $A\hat{M}B + A\hat{M}C = 180°$. Mas de (II) temos $A\hat{M}B = A\hat{M}C$ então concluímos que $A\hat{M}B = A\hat{M}C = 90°$. Portanto $\overline{AM}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{AM}$ é a altura do triângulo ABC.

21) Na figura 55, M é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, ou seja, $\overline{CM} \equiv \overline{MD}$. $A\hat{C}M \equiv B\hat{D}M$ e os pontos A, M e B são colineares. Prove que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

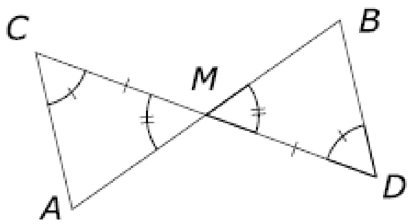

Figura 55: Figura da aplicação 21.

Solução:

Comparando os triângulos ACM e BDM temos:

$A\hat{C}M = B\hat{D}M$ (por hipótese), $\overline{CM} = \overline{MD}$ (por hipótese) e$A\hat{M}C = B\hat{M}D$ (ângulos opostos pelo vértice), sendo assim pelo caso A.L.A o ΔACM ≡ ΔBDM, portanto $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

22) Dado um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, considere as bissetrizes internas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ desse triângulo. Prove que $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$.

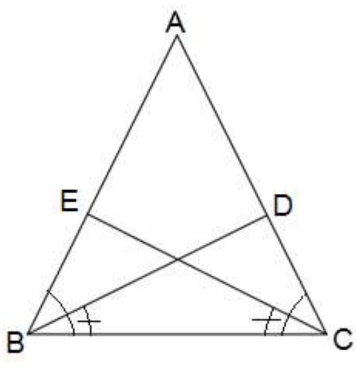

Figura 56: Figura da aplicação 22.

Solução:

Da figura 56 considere os triângulos BEC e CDB e deles temos:

$E\hat{B}C = D\hat{C}B$ (ângulos da base do triângulo isósceles ABC)

$\overline{BC} = \overline{BC}$ (lado comum aos triângulos)

$B\hat{C}E = C\hat{B}D$ (pois $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são as bissetrizes do $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ respectivamente e ainda $A\hat{B}C = A\hat{C}B$).

Logo pelo caso A.L.A o ΔBEC ≡ ΔCDB, portanto $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$.

23) Prove que as medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

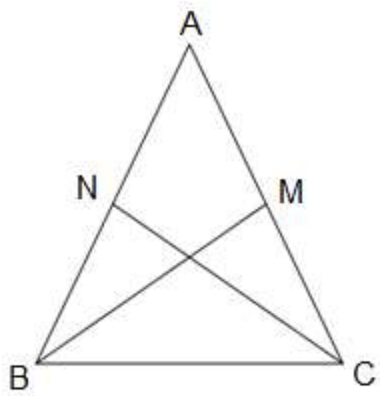

Figura 57: Figura da aplicação 23.

Solução:

Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$.

Considerando os triângulos BAM e CAN temos:

$\overline{AB} = \overline{AC}$ (lados congruentes do triângulo isósceles ABC) $B\hat{A}M = C\hat{A}N$ (ângulo comum aos triângulos)

$\overline{AM} = \overline{NA}$ (pois $\overline{CN}$ e $\overline{BM}$ são as medianas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$)

Logo o ΔBAM ≡ ΔCAN pelo caso L.A.L então $\overline{BM} = \overline{CN}$.

24) Na figura 58 tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{CE}$. Mostre que: ΔACD ≡ ΔABE e ΔBCD ≡ ΔBCE.

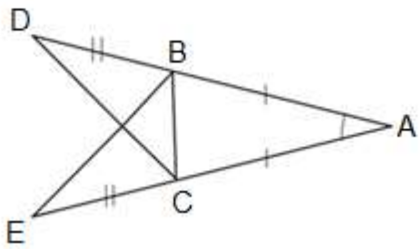

Figura 58: Figura da aplicação 24.

Solução:

Considere primeiro os triângulos ACD e ABE.

Como $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE}$ e $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ e ainda,

$\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\overline{CE} = \overline{BD}$, daí $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$.

Portanto $\overline{AE} = \overline{AD}$. Assim, como $\overline{AB} = \overline{AC}$ (por hipótese),

$B\hat{A}E = C\hat{A}D$ (ângulo comum) e $\overline{AE} = \overline{AD}$ (como vimos), pelo caso L.A.L o ΔACD ≡ ΔABE, logo $\overline{DC} = \overline{BE}$.

Agora considere os triângulos BCD e CBE.

$\overline{BD} = \overline{CE}$ (por hipótese), $\overline{BC} = \overline{BC}$ (lado comum) e $\overline{DC} = \overline{BE}$ (como concluímos anteriormente), logo pelo caso L.L.L o ΔBCD ≡ ΔCBE.

25) Na figura abaixo tem-se $\overline{AD} = \overline{DE}$, $D\hat{A}B = D\hat{E}C$ e $A\hat{D}E = B\hat{C}D$. Mostre que os triângulos ADB e EDC são congruentes.

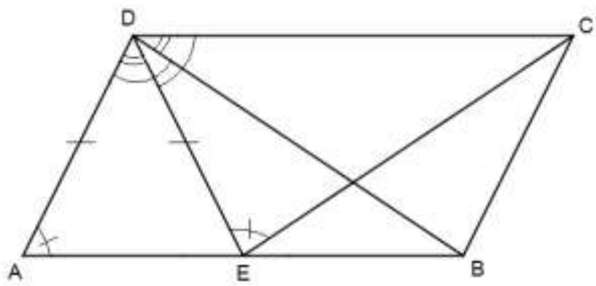

Figura 59: Figura da aplicação 25.

Solução:

Considere os triângulos ADB e EDC.

O ângulo $A\hat{D}B = A\hat{D}E + E\hat{D}B$ e $E\hat{D}C = B\hat{D}C + E\hat{D}B$, como $A\hat{D}E = B\hat{D}C$

Logo $A\widehat{D}B$ = $B\widehat{D}C$ + $E\widehat{D}B$ = $E\widehat{D}C$, então concluímos que $A\widehat{D}B$ = $E\widehat{D}C$.

Assim, $B\hat{A}D$ = $C\hat{E}D$ (por hipótese), $\overline{AD}$ = $\overline{DE}$ (por hipótese) e $A\widehat{D}B$ = $E\widehat{D}C$ (como concluímos), logo pelo caso A.L.A o ΔADB ≡ ΔEDC.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos o conteúdo congruência de triângulos, que tem como objetivo servir de instrumento para auxiliar os alunos nas aulas de tópicos de geometria I, foram apresentados teoremas, definições e os casos de congruência de triângulos, bem como algumas aplicações dos mesmos. Podemos concluir que este trabalho contribuirá de forma significativa na compreensão do conteúdo e na resolução de questões que envolvam congruência de triângulos, já que muitos alunos enfrentam dificuldades quando lhes é apresentado este conteúdo. Portanto as resoluções das aplicações foram feitas de modo a facilitar a vida dos alunos.

Foi de grande importância o desenvolvimento deste trabalho, pois contribuiu para um maior domínio do conteúdo abordado e proporcionou a satisfação de poder de alguma forma colaborar com a aprendizagem de futuros alunos.

6 REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana plana, coleção do professor de Matemática, 6ª edição, Rio de Janeiro.

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. Geometria Plana: Fundamentos de Matemática Elementar, volume 09, 7ª edição, Atual editora, 1997, São Paulo-SP.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; Queiroz, Maria Lúcia Bontorim de. Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. 2ª edição, editora Unicamp, 2008, São Paulo-SP.

RICH, Barnett. Geometria: Teoria e problemas de geometria, coleção Schaum, 3ª edição, editora Bookman, 2003, Porto Alegre-RS.

SITES REFERIDOS

http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2007/08/euclides-de-alexandria.html - 07/09/14

http://geometriamat.blogspot.com.br/2009/09/como-surgiu-geometria.html - 09/09/14

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm - 08/10/14

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/egipcios.htm - 26/11/14

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/historia.htm - 27/11/14

http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=20322 - 28/11/14

http://www.prof2000.pt/users/secjeste/modtri01/Pg000730.htm - 28/11/14