UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JOSYCLESIO LIMA DA SILVA

A TEORIA DA MEDIDA, INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE E ALGUNS MODOS DE CONVERGÊNCIA

Campina Grande - PB

Dezembro de 2014

JOSYCLESIO LIMA DA SILVA

A TEORIA DA MEDIDA, INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE E ALGUNS MODOS DE CONVERGÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Sob orientação do

Prof. Dr. DAVIS MATIAS DE OLIVEIRA

Campina Grande - PB

Dezembro de 2014

S586t Silva, Josyclesio Lima da.
A Teoria da medida, integração de Lebesgue e alguns modos de convergência [manuscrito] / Josyclesio Lima da Silva. - 2014.
79 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, Departamento de Matemática".

1. Teoria da medida. 2. Integral de Lebesgue. 3. Espaço Lp. 4. Modos de convergência. I. Título.

21. ed. CDD 515.4

JOSYCLESIO LIMA DA SILVA

A TEORIA DA MEDIDA, INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE E ALGUNS MODOS DE CONVERGÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 12 de dezembro de 2014.

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

Orientador

LucianaFreitas

Prof^{a}. Dr^{a}. Luciana Roze de Freitas

Examinadora

Aldo trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Examinador

Dedicatória

A Deus e aos anjos que Ele confiou aqui na terra para cuidade de mim: Jorge e Rozy.

DEDICO

Agradecimentos

Não poderia iniciar estes agradecimentos senão pensando, em primeira instância, em meu Pai Celestial. O Deus onipotente, onipresente e onisciente a quem devo o dom da vida, a quem me dá a capacidade de realizar tudo com desenvoltura o que Ele próprio me propõe a fazer, por sua grande misericórdia de não me castigar severamente todas as vezes que sou falho (e olhe que são muitas vezes). Agradeço também pela disposição para realizar tais atividades e pela força dada através de suas grandes mãos fazendo com que eu permaneça de pé e não desista na primeira dificuldade, embora este seja o primeiro pensamento quando elas ocorrem. A Ele, toda honra e toda glória sejam dados para sempre!

Aos meus pais, Josivan Jorvino (Jorge) e Damiana Ferreira (Rozy) que inicialmente me amaram, cuidaram de mim, me amaram novamente, me ensinaram o caminho do bem e do mal, me amaram de novo e a quem devo tudo o que tenho e tudo o que sou, pois não é fácil guerrear com o mundo para dar educação, bons modos, sustentação e tudo o que precisei até o presente dia. Sobretudo, são aquelas pessoas que, independente de qualquer situação, estarão ao meu lado. Este amor a que os devoto é inigualável e incomensurável.

Agradeço imensamente ao grande orientador e amigo Davis Matias de Oliveira, que foi quem primeiro acreditou em mim nesta universidade. A ele, sou muito grato por toda paciência e perseverança nesses dois anos, de explicar uma, duas, três ou quantas vezes fosse necessário para a minha compreensão e não esquecendo o lado humano que, ao meu ver, é o mais marcante. Lembro-me bem todas as orientações da iniciação científica quando eu não conseguia justificar alguma passagem, ele calmamente esclarecia minha dúvida e dizia: “isso se chama maturidade (na matemática) Josyclesio". São momentos que, onde quer que eu esteja, nunca esquecerei!

Aos professores Aldo Trajano Lourêdo e Luciana Rose de Freitas o meu muito obrigado por aceitarem o convite de participar da minha banca e por todas as dicas valiosas que foram de fundamental importância para a conclusão deste trabalho. Abro um parênteses nestes agradecimentos para comunicar que os convites feitos não foram por acaso, uma vez que este é um dos momentos mais importantes do curso e não poderia deixar de chamar para partilhar comigo profissionais e pessoas que tanto admiro. Aldo com sua experiência, vontade de ensinar o que sabe, vontade de mudar a realidade de seus alunos e Luciana como uma verdadeira mãe, que exala tranqüilidade e bondade até para dizer quando nós estamos errados. Tudo isso além de serem profissionais “top de linha".

Agradeço também a todos os professores que participaram da minha formação aqui nesta instituição, principalmente a: Thiciany Matsudo, Vandenberg Lopes, Joselma Soares, José Elias, Fernando Luiz e Kátia Susana. A esta galera, juntamente com os três mencionados acima, só tenho a agradecer. Tenho certeza que não sei nada na Matemática, mas um dia se eu souber um $\varepsilon > 0$ deverei imensa gratidão a estes que compuseram os momentos de formação da minha base.

De um modo especial, quero citar os professores José Roberto Júnior e Aluska Macedo que - apesar de não serem da área que eu pretendo seguir carreira - me ensinaram grandes e verdadeiras lições a respeito da profissão que eu escolhi e digo mais, são profissionais e pessoas que admiro muito, pois percebemos ao vê-los trabalhar que são, de fato, comprometidos com a educação. A eles meus parabéns e muito obrigado.

Agora chegou o momento de agradecer as pessoas que estavam ao meu lado nesta dura jornada, que de um modo singular não permaneceram na minha vida nesse intervalo de tempo por acaso. Sou capaz de citar inúmeros momentos que passamos juntos, os quais que são divididos entre sorrisos e decepções, alegrias e frustrações, mas que estavam sempre ao meu lado dando força e carões quando necessário. Neste grupo, eu existo devido ao grande acolhimento que me deram quando precisei. Aos meus amigos: Alex Júnior, Elionora Ramos, Elivelton Serafim, Isabella Duarte e Thâmara Chaves, agradeço todo o auxílio, carinho e amizade neste tempo. De igual modo, agradeço a tantos outros amigos desta universidade, à minha turma do turno da noite e também pessoas selecionadas que, por meio da universidade, tornaram-se grandes amigos a exemplo de Misleide Santiago e Juscelino Araújo. Também agradeço de coração às pessoas que não conviveram comigo na universidade, mas que me ajudaram em dúvidas pertinentes ao curso, são eles: Renato Diniz e Emanuella Régia. Eu não poderia deixar de agradecer também a Rayane Dantas que está ao meu lado desde sempre, amizade de colégio que permaneceu até os dias de hoje, sei que com ela posso contar em qualquer momento.

Aos meus amigos do LMC SENAI\ PB também devo imensa gratidão por me acompanharem durante esta jornada e acreditarem que eu seria capaz de tudo que quizesse. Agradeço pela compreensão sempre que eu precisei faltar no trabalho pra resolver algo do meu curso e inclusive por serem amigos, cumplices e psicólogos dentro e fora do ambiente de trabalho. Admiro e agradeço a vocês André Tavares e Guiomar Cirne Loureiro.

A todos e a cada um, o meu muito obrigado, sem vocês e todas as outras pessoas que eu não comentei aqui devido a extensão destes agradecimentos, eu não teria conseguido!

Epígrafe

O SUCESSO É CONSTRUIDO À NOITE

Não conheço ninguém que conseguiu realizar seu sonho, sem sacrificar feriados e domingos pelo menos uma centena de vezes. Da mesma forma, se você quiser construir uma relação amiga com seus filhos, terá que se dedicar a isso, superar o cansaço, arrumar tempo para ficar com eles, deixar de lado o orgulho e o comodismo. Se quiser um casamento gratificante, terá que investir tempo, energia e sentimentos nesse objetivo, pois ao contrário, acabará perdendo seu grande amor.

O sucesso é construído à noite! Durante o dia você faz o que todos fazem. Mas, para obter um resultado diferente da maioria, você tem que ser especial. Se fizer igual a todo mundo, obterá os mesmos resultados. Não se compare à maioria, pois infelizmente ela não é modelo de sucesso. Se você quiser atingir uma meta especial, terá que estudar no horário em que os outros estão tomando chope com batatas fritas. Terá de planejar, enquanto os outros permanecem à frente da televisão. Terá de trabalhar enquanto os outros tomam sol à beira da piscina.

A realização de um sonho depende de dedicação. Há muita gente que espera que o sonho se realize por mágica. Mas toda mágica é ilusão. A ilusão não tira ninguém de onde está. Ilusão é combustível de perdedores. Quem quer fazer alguma coisa, encontra um meio. Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa.

DÊ UM GAS EXTRA NOS SEUS PROJETOS PORQUE O SEU LUGAR É NO PODIUM.

Roberto Shinyashiki

Resumo

Iremos abordar neste trabalho a teoria da Integração de Lebesgue, a qual é construída a partir da Teoria da Medida, lembrando que este não é o único meio da sua construção (Vide Referência [6]). A integral de Lebesgue estende a integral de Riemann para uma classe maior de funções, em virtude de alguns resultados que também serão estudados nesta pesquisa. Por fim, apresentaremos alguns modos de convergência além daqueles já estudados no curso de Análise Matemática, são elas: Quase certamente, em Medida, em L_p e quase uniforme. Além disso, será ilustrado um diagrama relacionando estes novos tipos de convergência.

Palavras-chave: Teoria da Medida; Integral de Lebesgue; Espaços L_p; Modos de Convergência.

Abstract

We will approach in this paper the theory of Lebesgue integration, which is built from the Measure Theory, remembering that this is not the only way of its construction (See References [6]). The Lebesgue's integral extends the Riemann's integral to a larger class of functions, because some results which will also be studied in this study. Finally, we present some convergences modes beyond those already studied in the course of Mathematical Analysis, they are: Almost everywhere, in Measure, in L_p and almost uniform. Furthermore, it is shown a diagram relating these new types of convergence.

Keywords: Theory Measure; Lebesgue's Integral; L_p spaces; Convergences Modes.

Sumário

1 A TEORIA DA MEDIDA **5**
1.1 Funções Mensuráveis **5**
1.1.1 σ-álgebra de Borel 6
1.2 Espaços de Medida **16**

2 A INTEGRAL DE LEBESGUE **22**
2.1 A Integral de Lebesgue **22**
2.1.1 Funções Integráveis 37

3 OS ESPAÇOS L_p E ALGUNS MODOS DE CONVERGÊNCIA **45**
3.1 Os espaços L_p de Lebesgue **45**
3.1.1 O espaço L_1 de Lebesgue 46
3.1.2 Os espaços L_p, $1 \leq p < +\infty$ 47
3.1.3 O espaço L_∞. 53
3.2 Modos de convergência **55**
3.2.1 Convergência em L_p 55
3.2.2 Convergência em medida 59
3.2.3 Convergência quase uniforme 65
3.2.4 Relação entre os Modos de Convergência 67

Referências **70**

Introdução

O presente trabalho é fruto de uma pesquisa feita no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC), realizado nesta mesma universidade na cota de $2013-2014$ intitulado por “Uma Introdução à Teoria da Medida e Integração de Lebesgue", onde o objetivo do professor-orientador foi de introduzir ao aluno bolsista um novo conceito ligado a matemática pura, uma vez que nosso curso é voltado para a formação de professores e ainda temos pouco contato com este ramo da matemática.

Apesar de inicialmente não ter recebido este nome, a teoria da integração tem origem na Grécia antiga com matemáticos como Eudoxos $(408-355$ a.C.$)$ e Archimedes $(287-212$ a.C.$)$ a partir do “método de exaustão", os quais foram responsáveis pela noção de aproximações de regiões curvas a partir de regiões poligonais. O movimento do século XIX em direção ao rigor matemático tentou colocar o cálculo em bases sólidas, desse modo, muitos matemáticos dedicaram tempo para o estudo de sequências e funções até chegarem a primeira definição formal de função e logo em seguida a definição de diferenciação e integração, dentre eles podemos destacar Leibniz $(1646-1716)$, Cauchy $(1789-1857)$ e Riemann $(1826-1866)$. As ideias fundamentais do cálculo integral não foram desenvolvidas diretamente por Riemann, mas esta foi um resultado do aprofundamento nos estudos de Newton $(1642-1727)$, Leibniz, Cauchy, entre outros. Riemann ampliou a definição de integral dada por Cauchy, distinguindo continuidade de integrabilidade.

Durante muito tempo foi predominante a teoria da integração segundo as ideias de Riemann, uma vez que era a única teoria estabelecida em bases rigorosas onde fornecia o resultado esperado para muitos problemas conhecidos e, para problemas novos que iam surgindo. Não obstante, ela vem sendo substituída pelo pioneiro trabalho do matemático francês Henri Léon Lebesgue $(1875-1941)$ desde o início do século passado. A princípio, suas ideias não foram bem aceitas, mas a originalidade dessas ideias encontraram crescente reconhecimento, vindo a complementar certas lacunas inerentes a integral já existente, pois a integral de Riemann não interage bem com as operações de limite de sequências de funções. Isto é importante, por exemplo, no estudo das Séries de Fourier. Já com a integral de Lebesgue é mais fácil saber quando é possível tomar o limite dentro da integral e tirá-lo da integral sob menos hipóteses. Estas propriedades melhores decorrem do fato que a integral de Lebesgue é, num paralelo com séries, “absolutamente convergente", enquanto a integral de Riemann é “condicionalmente convergente".

A integral de Lebesgue estende, para uma classe maior de funções, a integral de Riemann e, toda função integrável a Riemann em um intervalo é também integrável a Lebesgue e seus respectivos valores coincidem, em virtude do seguinte resultado cuja demonstração não é cabível neste trabalho, podendo ser encontrada na Referência [8].

Para distinguir a integral de Riemann da integral de Lebesgue, aqui nesta introdução, denotamos por $\mathcal{R}$ o conjunto das funções integráveis a Riemann e por $\mathcal{L}$ o conjunto das funções integráveis a Lebesgue, as quais são atribuidas, respectivamente, as seguintes notações

$$\mathcal{R}\int_a^b f dx \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\int_a^b f dx.$$

Teorema 0.0.1. *Se $f \in \mathcal{R}$ em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{L}$ em $[a,b]$, e o valor de suas integrais é o mesmo; isto é,*

$$\mathcal{L}\int_a^b f dx = \mathcal{R}\int_a^b f dx.$$

Além desse importante teorema que acabamos de enunciar, podemos apresentar outras vantagens que a integral de Lebesgue tem sobre a integral de Riemann. Para funções $f_n \geq 0$ integráveis a Lebesgue vale:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Esta é uma consequência do **Corolário 2.1.7**. No entanto, para uma sequência de funções integráveis a Riemann a integral à esquerda da igualdade acima pode não está definida. Por exemplo, seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma sequência enumerável dos racionais do intervalo $[0,1]$ e considere para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, onde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = x_n; \\ 0, \text{ se } x \neq x_n. \end{cases}$$

Constate que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, onde f é a função de Dirichlet, que vale 1 se $x \in \mathbb{Q}$ e 0 se $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, a qual é Lebesgue-integrável, mas não é Riemann-Integrável.

Também podemos apresentar alguns resultados que, a partir da teoria da integração de Lebesgue, podem ter suas hipóteses enfraquecidas para obtenção das mesmas conclusões ou, até mesmo, resultados melhores. Podemos citar:

Teorema 0.0.2. *Se uma sequência de funções integráveis a Riemann $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função f, então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teorema 0.0.3. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável a Riemann, então $|f|$ é integrável a Riemann em $[a,b]$ e*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

As demonstrações do **Teoremas 0.0.2** e do **Teorema 0.0.3** podem ser encontradas na Referência [5]. Após alguns estudos a respeito da integração de Lebesgue, podemos comparar o **Teorema 0.0.2** com o **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 2.1.4)** e o **Teorema 0.0.3** com o **Teorema 2.1.2**, os quais, em um certo ponto de vista técnico, são mais simples de trabalhar e alguns têm soluções mais fortes.

Com a pretenção de possuir um material para futuros possíveis estudos nesta área, tentamos justificar ao máximo os passos de cada resultado. Além disso, este trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro Capítulo apresentaremos os conceitos de σ-álgebra, funções mensuráveis, medida, e algumas teorias que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Vale salientar que a integral de Lebesgue apresentada aqui é construída a partir da Teoria da Medida, mas este não é o único caminho. É possível construir a Teoria de Integração sem a Teoria da Medida e utilizar a integral para definir medida. Para detalhes ver Referência [2]. Olhando por esta vertente, uma medida em uma σ-álgebra de X é uma função que atribui a cada elemento de $\mathcal{X}$ um número real estendido. Podendo ser interpretada como área, massa, volume, capacidade térmica ou qualquer propriedade aditiva; isto é, uma propriedade tal que a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual a soma de suas medidas; no segundo Capítulo discutiremos a Integral de Lebesgue e as funções que são Lebesgue-integráveis. Neste capítulo encontra-se grande parte da teoria estudada para o desenvolvimento deste TCC, sendo ele também a motivação para tais escritos; no terceiro Capítulo definiremos os Espaços L_p de Lebesgue e alguns resultados que estes carregam consigo. Exibiremos também alguns modos de convergência além daqueles que já aprendemos na disciplina de Análise Matemática, são elas: quase certamente, em medida, em L_p e quase uniforme. E por fim, elaboramos um fluxograma resumindo os resultados apresentados em nosso trabalho a respeito dos tipos de convergência que apresentamos neste.

1 A Teoria da Medida

Faremos neste capítulo a construção da Teoria da Medida de Lebesgue, apresentando os conceitos pertinentes para que, a partir deles, possamos definir a Integral de Lebesgue e, finalmente, apresentar alguns modos de convergência em determinados espaços. Para tanto, definiremos os conceitos de σ-álgebra, funções mensuráveis e alguns tipos de funções, juntamente com algumas propriedades importantes que estas carregam consigo. Também abordaremos o conceito de medida de conjuntos, relatando algumas propriedades, tais como a propriedade μ-ae, a qual é a base para toda a construção desta Teoria. Por fim, encerraremos o capítulo com o conceito de medida com sinal ou carga, sendo esta necessária para estudar o caso da nossa conhecida integral indefinida.

1.1 Funções Mensuráveis

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto. Uma σ-álgebra (ou um σ-campo) é uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset$ e X pertence a $\mathcal{X}$;

(ii) Se A pertence a $\mathcal{X}$, então o complemento $A^c = (X \setminus A)$ pertencem a $\mathcal{X}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então a união $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathcal{X}$.

Observação 1.1.1. *O ítem (iii) da **Definição 1.1.1** é válido para uma união finita, basta considerar o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, onde $A_j = \emptyset$, para $j \geq n+1$.*

Observação 1.1.2. *Se $(A_n) \in \mathcal{X}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$; isto é, na **Definição 1.1.1**, poderíamos substituir, sem perda de generalidade, a união pela interseção em (iii).*

Justificativa: Com efeito, se tivermos $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$ então, pelo item (ii) da **Definição 1.1.1**, temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X} \Longrightarrow \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \in \mathcal{X}.$$

Agora, pelas Leis de De Morgan, inferimos que

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)^c \in \mathcal{X}.$$

Exemplo 1.1.1. *Seja X um conjunto não enumerável, isto é, não conseguimos exibir uma bijeção de X com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. A família*

$$\mathcal{X} = \{A \subset X;\ A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável } \}$$

é uma σ-álgebra.

Solução:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$. De fato,

$$\emptyset \text{ é enumerável} \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{X} \quad \text{ e } \quad X^c = \emptyset \text{ é enumerável} \Longrightarrow X \in \mathcal{X}.$$

(ii) Se $A \in \mathcal{X}$, então A é enumerável ou A^c é enumerável. Suponha que A é enumerável e como $A = (A^c)^c$, então $A^c \in \mathcal{X}$. Por outro lado, se A^c é enumerável, então $A^c \in \mathcal{X}$.

(iii) Suponha que (A_n) é uma sequência de conjuntos enumeráveis de $\mathcal{X}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável. Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$. Agora, suponha que ao menos um dos seus elementos é não enumerável e seja A_{n_0} este elemento. Por hipótese, $A_{n_0}^c$ é enumerável. Pelas Leis de De Morgan, inferimos que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c.$$

Desse modo, $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ é enumerável. E, portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

1.1.1 σ-álgebra de Borel

A álgebra de Borel é uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por todo intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.2. *Seja $X = \mathbb{R}$ e defina a coleção $\mathcal{C} = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$. A **$\sigma$-álgebra de Borel** de $\mathbb{R}$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se define como a coleção de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que cumpre:*

(i) *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é uma σ-álgebra;*

(ii) *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$;*

(iii) *$\mathcal{B}$ é mínima; isto é, se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, então $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$.*

Os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se chamam Conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ ou Conjuntos Borel medíveis ou ainda Borelianos de $\mathbb{R}$.

Definimos a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ como sendo a menor σ-álgebra gerada por todos os intervalos da forma $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Vamos exibir explicitamente alguns elementos desta σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

(1) $(x, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $(x, +\infty) = (-\infty, x]^c, \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $(-\infty, x) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]^c, \forall x \in \mathbb{R}$;

(3) $[x, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $[x, +\infty) = (-\infty, x)^c, \forall x \in \mathbb{R}$;

(4) $[x, y] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $[x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(5) $[x, y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $[x, y) = (-\infty, y) - (-\infty, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(6) $(x, y] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x], \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(7) $(x, y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $(x, y) = (-\infty, y) - (-\infty, x], \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(8) Tomando $x = y$ em (4), $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(9) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(10) $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]$.

Observação 1.1.3. *Um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é chamado **espaço mensurável**. Qualquer conjunto, o qual é elemento de $\mathcal{X}$, é chamado **$\mathcal{X}$-conjunto mensurável**, mas quando a σ-álgebra $\mathcal{X}$ é fixada, o conjunto geralmente é dito **mensurável**.*

Podemos exemplificar um conjunto limitado o qual é não mensurável consultando a Referência [6].

Definição 1.1.3. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **$\mathcal{X}$-mensurável**, ou simplesmente **mensurável**, quando para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$[f > \alpha] := \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

*é mensurável; isto é, $[f > \alpha] \in \mathcal{X}$. Ou ainda, se $(X, \mathcal{X})$ e $(Y, \mathcal{Y})$ são espaços mensuráveis, uma função $f : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$ é **$\mathcal{X}$-mensurável** se $f^{-1}(Y_1) \in \mathcal{X}$ para cada $Y_1 \in \mathcal{Y}$.*

Exemplo 1.1.2. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = c$, em que c é constante, então f é mensurável. Ou seja, toda função constante é mensurável.*

Solução: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, \text{ se } \alpha \geq c; \\ X, \text{ se } \alpha < c. \end{cases}$$

Em ambos os casos, $[f > \alpha] \in \mathcal{X}$. Portanto, f é mensurável.

O Lema posterior nos diz que a forma de apresentar a **Definição 1.1.3** não é única; isto é, podemos apresentá-la com os conjuntos abaixo descritos.

Lema 1.1.1. *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(b) $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(c) $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(d) $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demostração: Por simplicidade, trataremos os conjuntos em (a), (b), (c) e (d) respectivamente por:

$$[f(x) > \alpha], \quad [f(x) \leq \alpha], \quad [f(x) \geq \alpha] \quad \text{e} \quad [f(x) < \alpha].$$

De acordo com a **Definição 1.1.1**, temos que $(a) \Longleftrightarrow (b)$ e $(c) \Longleftrightarrow (d)$, pois

$$([f > \alpha])^c = [f \leq \alpha] \quad \text{e} \quad ([f < \alpha])^c = [f \geq \alpha].$$

Desse modo, se provarmos que $(a) \Longleftrightarrow (c)$, então o presente Lema estará demonstrado. Supondo que (a) ocorre, então $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. De fato,

$$x \in C_\alpha \Longrightarrow f(x) \geq \alpha > \alpha - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in A_{\alpha - \frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \Longrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x) \geq \alpha \Longrightarrow x \in C_\alpha.$$

Logo, $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Como (a) ocorre, então

$$A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow C_\alpha \in \mathcal{X}.$$

o que implica na ocorrência de (c).

Reciprocamente, suponhamos que (c) ocorre. Então $C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, $\bigcup_{n}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$. Queremos mostrar que $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Com efeito,

$$x \in A_\alpha \Longrightarrow f(x) > \alpha \Longrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} > \alpha,$$

para algum n_0 suficientemente grande. Então $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Agora,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \Longrightarrow x \in C_{\alpha + \frac{1}{n_0}} \Longrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} > \alpha \Longrightarrow x \in A_\alpha.$$

Assim, $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, donde segue que $A_\alpha \in \mathcal{X}$, implicando na ocorrência de (a).

■

Exemplo 1.1.3 (Função Característica). *Se $E \in \mathcal{X}$, então a **função característica** $\chi_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E; \\ 0, & se\ x \in E^c. \end{cases}$$

é mensurável.

Solução: Com efeito,

$$\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \alpha \geq 1; \\ E, & \text{se } 0 \leq \alpha < 1; \\ X, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Como $\emptyset, E, X \in \mathcal{X}$, segue que $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\}$ é mensurável.

Lema 1.1.2. *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$cf, \ \ f^2, \ \ f+g, \ \ f-g, \ \ fg, \ \ |f|,$$

são também funções mensuráveis.

Demonstração: Para facilitar na manipulação da demonstração, enumeraremos as acertivas acima como (a), (b), (c), (d), (e) e (f), respectivamente.

(a) De fato, se $c = 0$, temos que $cf \equiv 0$ que é constante e, portanto, mensurável.

Se $c > 0$, então

$$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\},$$

que é mensurável pela **Definição 1.1.3**.

Se $c < 0$, então

$$\{x \in X : cf(x) < \alpha\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\},$$

que é mensurável pela **Definição 1.1.3**.

(b) Note que, se $\alpha < 0$, então

$$\left\{x \in X : f^2(x) > \alpha\right\} = X \in \mathcal{X}.$$

Agora, se $\alpha \geq 0$, temos

$$\left\{x \in X : f^2(x) > \alpha\right\} = \left\{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in X : f(x) < -\sqrt{\alpha}\right\}.$$

Como o segundo membro da igualdade é a união de conjuntos mensuráveis, segue que f^2 é mensurável.

(c) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$, considere o conjunto

$$S_r = \{x \in X : f(x) > r\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - r\} \in \mathcal{X}$$

e observe que

$$\{x \in X : (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \mathcal{X}. \tag{1.1}$$

De fato, seja $x_0 \in \{x \in X : (f+g)(x) > \alpha\}$. Logo,

$$(f+g)(x_0) > \alpha \Longrightarrow f(x_0) + g(x_0) > \alpha \Longrightarrow f(x_0) > \alpha - g(x_0).$$

Seja $r_0 \in \mathbb{Q}$, tal que $f(x_0) > r_0 > \alpha - g(x_0)$ (r_0 existe, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$). Temos que $f(x_0) > r_0$ e $g(x_0) > \alpha - r_0$, logo $x_0 \in S_{r_0}$. Agora, se $x_0 \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, então, para algum $r_0 \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, temos $x_0 \in S_r$. Logo, $f(x_0) > r_0$ e $g(x_0) > \alpha - r_0$, ou ainda, $(f+g)(x_0) > \alpha$. Daí, $x_0 \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}$ e, portanto, temos a igualdade **(1.1)**.

(d) De fato, $f - g = f + (-g)$. Por (a) e (b), temos $f - g$ é mensurável.

(e) Observe a seguinte igualdade

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

Segue-se a partir de (a), (b) e (c) que $f.g$ é mensurável.

(f) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$.

Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, então

$$\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : f(x) < -\alpha\} \in \mathcal{X}.$$

Assim, a função $|f|$ é mensurável.

$\blacksquare$

Definição 1.1.4 (Parte Positiva e Parte Negativa de uma Função). *Seja f qualquer função de X em $\mathbb{R}$ e, sejam f^- e f^+ funções reais não-negativas definidas em X por*

$$f^+(x) = \sup_{x \in X}\{f(x), 0\} \quad e \quad f^-(x) = \sup_{x \in X}\{-f(x), 0\}.$$

A função f^+ é chamada a ***parte positiva de*** *f e a função f^- é chamada a* ***parte negativa de*** *f.*

Observe que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

donde segue, a partir destas identidades, que

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{e} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Pelo **Lema 1.1.2**, concluímos que f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Em lidar com sequências de funções mensuráveis frequentemente desejamos a forma suprema, limites, etc, e é conveniente permitir a extensão dos números reais, ou seja, permitiremos que $-\infty$ e $+\infty$ sejam tomados como “valores"; isto é, terão as propriedades que intuitivamente esperamos para “infinito"e “menos infinito".

Definição 1.1.5 (Sistema Numérico Real Estendido). *A reta estendida é o conjunto*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \textit{ou} \quad [-\infty, \infty].$$

Em $\overline{\mathbb{R}}$, definimos as operações usuais de $\mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} a + \infty = \infty + a = \infty, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}; \\ a - \infty = -\infty + a = -\infty, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}; \\ \infty + \infty = \infty \text{ e } -\infty + (-\infty) = -\infty; \\ b \cdot \infty = \infty \cdot b = \begin{cases} \infty, \text{ se } b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } b > 0; \\ -\infty, \text{ se } b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } b < 0; \end{cases} \\ b \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot b = \begin{cases} -\infty, \text{ se } b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } b > 0; \\ \infty, \text{ se } b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } b < 0; \end{cases} \\ 0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Definição 1.1.6 (Função de Valores Reais Estendidos). *Uma função a valores reais estendidos $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observação 1.1.4. *A coleção de todas as funções $\mathcal{X}$-mensurável de X nos números reais estendidos será denotado por $M(X, \mathcal{X})$. Já a representação $M^+(X, \mathcal{X})$ diz respeito ao conjunto $\{f \in M(X, \mathcal{X}); f \geq 0\}$.*

Se $f \in M(X,\mathcal{X})$, mostra-se

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\} \in \mathcal{X}$$

e,

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\}\right]^c \in \mathcal{X}.$$

Lema 1.1.3. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então, f é mensurável se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \quad e \quad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertencem a $\mathcal{X}$ e a função de valores reais f_1 definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \ se\ x \in (A \cup B)^c, \\ 0, \ se\ x \in A \cup B. \end{cases}$$

é mensurável.

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que f é mensurável. Então $A, B \in \mathcal{X}$, pois

$$x \in A \Longleftrightarrow f(x) > n, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}$$

e,

$$x \in B \Longleftrightarrow f(x) \leq -n, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < -n\}.$$

Note que

$$\{x \in X; f_1(x) < \alpha\} = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \setminus A = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \cap A^c \in \mathcal{X}, \text{ se } \alpha \leq 0$$

e,

$$\{x \in X; f_1(x) < \alpha\} = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \cup B \in \mathcal{X}, \text{ se } \alpha > 0.$$

Logo, f_1 é mensurável.

Reciprocamente, suponhamos que $A, B \in \mathcal{X}$ e f_1 é mensurável. Como

$$\{x \in X; f(x) < \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) < \alpha\} \cup A, \text{ se } \alpha \geq 0$$

$$\{x \in X; f(x) < \alpha\} = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \setminus B, \text{ se } \alpha > 0,$$

então f é mensurável.

■

Observação 1.1.5. *É uma consequência dos **Lemas 1.1.2** e **1.1.3** que se $f \in M(X,\mathcal{X})$, então as funções*

$$cf, f^2, |f|, f^+ \text{ e } f^-$$

também pertencem a $M(X,\mathcal{X})$. Basta observar que

$$f \in M(X,\mathcal{X}) \Longrightarrow f_1 \text{ é mensurável } \Longrightarrow cf_1, f_1^2, |f_1|, f_1^+ \text{ e } f_1^- \text{ são mensuráveis } \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow cf, f^2, |f|, f^+ \text{ e } f^- \text{ são mensuráveis.}$$

Adotaremos a convenção que $0(+\infty) = 0$, de modo que $cf \equiv 0$, quando $c = 0$.

Observação 1.1.6. *Se f e g pertencem a $M(X,\mathcal{X})$, então a soma $f+g$ não está bem definida pela fórmula $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ nos conjuntos*

$$E_1 = \{x \in X : f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\},$$

$$E_2 = \{x \in X : f(x) = +\infty \text{ e } g(x) = -\infty\},$$

*com, ao menos um, sendo não vazio. Não obstante, se definirmos $f+g$ como sendo zero em $E_1 \cup E_2$ e f_1, g_1 definidas como no **Lema 1.1.3**, então*

$$f, g \in M(X,\mathcal{X}) \Longrightarrow f_1, g_1 \in M(X,\mathcal{X}) \Longrightarrow f_1 + g_1 \in M(X,\mathcal{X}).$$

Isto é,

$$f+g = \begin{cases} -\infty, \text{ se } f = -\infty \text{ ou } g = -\infty, \\ +\infty, \text{ se } f = +\infty \text{ ou } g = +\infty, \\ 0, \text{ se } f = \pm\infty \text{ e } g = \mp\infty. \end{cases}$$

Desse modo $f+g$ é mensurável.

Lema 1.1.4. *Dada uma sequência (f_n) em $M(X,\mathcal{X})$, as seguintes funções são mensuráveis:*

a) $f(x) = \inf f_n(x)$;

b) $F(x) = \sup f_n(x)$;

c) $f^*(x) = \liminf f_n(x)$;

d) $F^*(x) = \limsup f_n(x)$.

Demonstração: (a) Para provar que f é mensurável basta notar que

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, seja $x \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$, como $f(x) = \inf f_n(x)$ segue que

$$f_n(x) \geq f(x) \geq \alpha, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$, então $f_n(x) \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Desse modo, α é cota inferior de $f_n(x)$. Como o ínfimo é a maior de todas as cotas inferiores, segue que $f(x) \geq \alpha$, donde $x \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ e, portanto f é mensurável sempre que (f_n) for mensurável.

(b) Agora, considere a igualdade

$$\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}.$$

Para justificar esta igualdade acima, temos

$$x \in \{x \in X; F(x) > \alpha\} \Longleftrightarrow F(x) > \alpha \Longleftrightarrow \sup f_n(x) > \alpha,$$

se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < f_{n_0}(x) < F(x) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}.$$

Logo, a igualdade acima se verifica e concluímos que f é mensurável sempre que (f_n) for mensurável.

(c) Observe que

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

e aplicando os ítens (a) e (b), segue que f^* é mensurável.

(d) Temos que

$$F^*(x) = \limsup f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}.$$

Logo, pelos ítens (a) e (b), F^* é mensurável.

■

Corolário 1.1.1. *Se (f_n) é uma sequência em $M(X, \mathcal{X})$ e $\lim f_n(x) = f(x)$, então $f \in M(X, \mathcal{X})$.*

Demonstração: Desde que $\lim f_n(x) = f(x)$, então

$$\limsup f_n(x) = f(x) = \liminf f_n(x), \forall x \in X.$$

Logo, pelo **Lema 1.1.4**, $f \in M(X, \mathcal{X})$.

$\blacksquare$

Observação 1.1.7. *Se $f, g \in M(X, \mathcal{X})$, então $fg \in M(X, \mathcal{X})$.*

Justificativa: Ver referência [4]

Foi visto no **Corolário 1.1.1** que o limite de uma sequência de funções em $M(X,\mathcal{X})$ pertence também a $M(X,\mathcal{X})$. Vamos mostrar no **Lema** posterior que uma função não-negativa em $M(X,\mathcal{X})$ é limite de uma sequência não-decrescente em $M(X,\mathcal{X})$ e tal sequência pode ser escolhida de modo que seja não negativa e assumindo apenas um número finito de valores reais.

Lema 1.1.5. *Se f é uma função não-negativa em $M(X,\mathcal{X})$, então existe uma sequência $(\varphi_n) \in M(X,\mathcal{X})$ tal que*

(a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, *para $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$;*

(b) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *para cada $x \in X$;*

(c) Cada φ_n assume apenas um número finito de valores.

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Considere os conjuntos

$$E_{k,n} = \left\{x \in X; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, k = 0, 1, \ldots, n2^{n-1};$$

$$E_{k,n} = \{x \in X; f(x) \geq n\}, k = n2^n.$$

Isto é,

$$E_{0,n} = \left\{x \in X; 0 \leq f(x) < \frac{1}{2^n}\right\};$$

$$E_{1,n} = \left\{x \in X; \frac{1}{2^n} \leq f(x) < \frac{1}{2^{n-1}}\right\};$$

$$\vdots$$

$$E_{n2^n-1,n} = \left\{x \in X; n - \frac{1}{2^n} \leq f(x) < n\right\};$$

$$E_{n2^n,n} = \{x \in X; f(x) \geq n\}.$$

Com isso, podemos afirmar que

$$E_{k,n} \cap E_{j,n} = \emptyset, \text{ se } k \neq j \text{ e } X = \bigcup_{k=0}^{n2^n} E_{k,n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$E_{k,n} = \left(\left\{x \in X; f(x) \geq \frac{k}{2^n}\right\} \bigcap \left\{x \in X; f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}\right)$$

ou $E_{k,n} = \{x \in X; f(x) \geq n\}$. Logo, $E_{k,n}$ é mensurável para cada k.

Definindo a função $\varphi_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{k,n}}(x)$$

pode-se observar que φ_n é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$, pois $E_{k,n}$ é mensurável pelo **Exemplo 1.1.3**.

(a) Como $k = 0, 1, 2, \ldots, n2^{n-1}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{k}{2^n} \geq \frac{k}{2^{n+1}}.$$

Portanto, $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, para $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\chi_{E_{k,n}}(X) \geq 0$.

(b) Se $f(x) = +\infty$, então $x \in E_{k,n}$, com $k = n2^n$. Logo,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{n2^n}{2^n} \chi_{E_{k,n}}(x) = \frac{n2^n}{2^n} = n,$$

de modo que $\varphi_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$. Por outro lado, se $f(x) < +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x \in E_{k,n_0}$. Daí,

$$\frac{k}{2^{n_0}} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^{n_0}} < \frac{k+1}{2^n}, \forall n \geq n_0,$$

de modo que

$$0 \leq \frac{k}{2^{n_0}} - \frac{k}{2^n} \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \forall n \geq n_0.$$

Com isso, podemos observar que se $f(x) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$0 \leq |f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_1,$$

mostrando que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

(c) Observe que cada φ_n assume $n2^n + 1$ valores reais.

1.2 Espaços de Medida

Consideraremos agora certas funções as quais são definidas em $\mathcal{X}$ e podem assumir tanto valores reais como valores reais extendidos. Tais funções serão chamadas de “medidas" e são sugeridas por nossa ideia de comprimento, área, volume e assim por diante.

Definição 1.2.1 (Medida). *Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável. Uma medida em $\mathcal{X}$ é uma função $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(E) \geq 0$, *para todo* $E \in \mathcal{X}$;

(iii) μ *é* ***contável aditiva****, ou seja, se* $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, *com* $E_i \bigcap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{1.2}$$

Observação 1.2.1. *Quando* $\mu(E) < +\infty$ *para todo* $E \in \mathcal{X}$, *dizemos que a medida é finita. Quando existe* $(A_n) \in \mathcal{X}$ *tal que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e $\mu(A_n) < +\infty$, *dizemos que* μ *é* ***σ-finita****.*

Exemplo 1.2.1 (Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$). *Sejam* $X = \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{X} = \mathcal{B}$. *Considere a aplicação* $\lambda : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *definida por* $\lambda((a,b)) = b - a$, *com* $a, b \in \mathbb{R}$. *Esta é a única medida definida em* $\mathcal{B}$ *que coincide com o comprimento de intervalos abertos. Ela não é uma medida finita, mas é* σ*-finita, pois*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) \quad e \quad \lambda((-n,n)) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 1.2.1. *Seja* μ *uma medida definida em uma* σ*-álgebra* $\mathcal{X}$. *Se* $E, F \in \mathcal{X}$ *e* $E \subseteq F$, *então* $\mu(E) \leq \mu(F)$. *Se* $\mu(E) < +\infty$, *então* $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demonstração: Podemos escrever F como uma união de conjuntos disjuntos, $F = E \cup (F \setminus E)$. Logo,

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E) \Longrightarrow \mu(E) \leq \mu(F).$$

Agora, seja $\mu(E) < +\infty$, então

$$\mu(F) - \mu(E) = [\mu(E) + \mu(F \setminus E)] - \mu(E) = \mu(F \setminus E).$$

Portanto, $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

■

Lema 1.2.2. *Seja* μ *uma medida definida em uma* σ*-algebra* $\mathcal{X}$.

(a) Se (E_n) *é uma sequência em* $\mathcal{X}$, *com* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E_n \ldots$, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n). \tag{1.3}$$

(b) Se (F_n) é uma sequência em $\mathcal{X}$, com $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \ldots$ e $\mu(F_1) < +\infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n). \tag{1.4}$$

(c) Se (T_n) é uma sequência em $\mathcal{X}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n) \tag{1.5}$$

Demonstração: (a) Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Então, ambos os lados de **(1.3)** são $+\infty$. De fato, desde que (E_n) é crescente e $\mu(E_n) = +\infty$ para todo $n \geq n_0$, segue que $\mu(E_n) \geq \mu(E_{n_0})$. Daí,

$$\lim \mu(E_n) = +\infty. \tag{1.6}$$

Por outro lado,

$$E_{n_0} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty. \tag{1.7}$$

De **(1.6)** e **(1.7)** resulta que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

Suponha agora que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere (A_n) uma sequência de elementos de $\mathcal{X}$, definida por

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1; \\ A_2 &= E_2 \setminus E_1; \\ A_3 &= E_3 \setminus E_2; \\ &\vdots \\ A_n &= E_n \setminus E_{n-1}; \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que os (A_n) são disjuntos e

$$E_N = \bigcup_{j=1}^{N} E_j = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \text{ para cada } N \in \mathbb{N}.$$

Observe ainda que,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Utilizando o **Lema 1.2.1** em **(1.8)** e pela **Definição de Medida**, inferimos que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\mu(E_1) + \sum_{j=2}^{N} (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1}))\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} [\mu(E_1) + (\mu(E_2) - \mu(E_1)) + \ldots + (\mu(E_N) - \mu(E_{N-1}))] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(E_N).
\end{aligned}$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

(b) Sejam $B_n = F_1 \setminus F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$. Logo, utilizando o ítem (a) e o **Lema 1.2.1**, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \lim \mu(B_n) = \lim(\mu(F_1) - \mu(F_n)) \\
&= \mu(F_1) - \lim \mu(F_n). \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelas regras de De Morgan,

$$F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right). \qquad (1.10)$$

De **(1.9)** e **(1.10)** segue que

$$\mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n).$$

Daí,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

(c) Considere a sequência $(C_n) \subset \mathcal{X}$, definida por:

$$\begin{aligned} C_1 &= T_1; \\ C_2 &= T_2 \setminus T_1; \\ C_3 &= T_3 \setminus (T_2 \cup T_1); \\ &\dots \\ C_n &= T_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} T_j \right); \\ &\dots \end{aligned}$$

Podemos observar que os (C_n) são conjuntos disjuntos e $C_n \subset T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \\ &= \lim \sum_{j=1}^{n} \mu(C_j) \leq \lim \sum_{j=1}^{n} \mu(T_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n). \end{aligned}$$

A desigualdade acima se deu mediante ao **Lema 1.2.1**. Portanto,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T_n).$$

■

Definição 1.2.2 (Espaço de Medida). *Chamamos de* ***espaço de medida*** *uma tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$ consistindo de um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X, e uma medida μ definida em $\mathcal{X}$.*

Agora, apresentaremos uma noção muito importante para a Teoria da Medida, que se dá quando uma certa propriedade ocorre μ-quase certamente ou μ-quase todo ponto (μ-ae ou μ-qtp); isto é, se existe um subconjunto $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$ tal que a propriedade ocorre no complementar de N.

Por exemplo, dizemos que duas funções f e g são iguais μ-ae, no caso em que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in N^c$, sendo $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$ e, dizemos que o conjunto N tem medida nula. Para este caso escrevemos

$$f = g, \quad \mu\text{-ae ou } \mu\text{-qtp}.$$

Do mesmo modo, dizemos que uma sequência (f_n) de funções em X converge μ-ea se existe um conjunto $N \in \mathcal{X}$, com $\mu(N) = 0$, tal que $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in N^c$ e escrevemos

$$f = \lim f_n, \quad \mu\text{-ea}.$$

Exemplo 1.2.2. *Seja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, exceto em $\mathbb{Q} \cap (a,b)$. Então, f é contínua μ-ae em (a,b).*

Solução: De fato, $\mathbb{Q} \cap (a,b)$ é um subconjunto da σ-álgebra gerada por $\mathbb{R}$. Além disso, observe que $\mu(\mathbb{Q} \cap (a,b)) = 0$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Temos, por hipótese que f é contínua exceto nos racionais de (a,b). Logo, f é contínua μ-ae em (a,b).

É importante comentar a respeito de alguns casos em que uma função comporta-se como uma medida, mas que podem ser assumidos tanto valores positivos como negativos. Para contornar o problema de se ter a expressão $(+\infty) + (-\infty)$, uma vez que nem sempre estes símbolos são permitidos, introduziremos o conceito de carga.

Definição 1.2.3. *Se $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, então uma função de valores reais λ definida em $\mathcal{X}$ é dita ser **carga** se $\lambda(\emptyset) = 0$ e λ é contável aditiva no sentido que se (E_n) é uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{X}$, então*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Note que a soma e a diferença de duas cargas é uma carga. Mais geralmente, qualquer combinação linear finita de cargas é uma carga.

2 A Integral de Lebesgue

Introduziremos aqui a Integral de Lebesgue, a qual é dada a partir das funções simples. Aqui também faremos alguns resultados relevantes ligados a esta, por exemplo, o Teorema da Convergência Monótona, o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Citaremos também algumas classes de funções integráveis a Lebesgue. Devemos considerar a partir de agora, um espaço mensurável fixo $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Denotaremos a coleção de toda função $\mathcal{X}$-mensurável de X em $\overline{\mathbb{R}}$ por $M = M(X, \mathcal{X})$ e a coleção de toda $\mathcal{X}$-função mensurável não negativa de X em $\overline{\mathbb{R}}$ por $M^+ = M^+(X, \mathcal{X})$. É conveniente exigir que funções simples tenham valores em $\mathbb{R}$ e não em $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1 A Integral de Lebesgue

Definição 2.1.1 (Função Simples). *Uma função de valores reais é dita* ***função simples*** *se ela tem apenas um número finito de valores, a qual pode ser representada por*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \tag{2.1}$$

onde χ_{E_j} é a função característica de um conjunto $E_j = \{x \in X; \varphi(x) = a_j\} = \varphi^{-1}(\{a_j\})$ em $\mathcal{X}$ e $a_j \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1.1. *Os valores assumidos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em* ***(2.1)*** *são distintos e os E_j disjuntos, com $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Por estes motivos, a representação* ***(2.1)*** *é chamada de* ***forma fundamental****. Se não exigirmos que os a_j sejam distintos e/ou os conjuntos E_j sejam disjuntos, então podemos ter outras representações para uma função simples, por exemplo, uma combinação linear de funções características.*

Observação 2.1.2. $\varphi \in M^+(X, \mathcal{X})$ *se, e somente se, $E_j \in \mathcal{X}$, com $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Justificativa: Seja $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$. Se $\varphi \in M^+(X, \mathcal{X})$ e

$$E_j = [\varphi \geq a_j] \cap [\varphi \leq a_j], \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Como a interseção acima pertence a $\mathcal{X}$, pois cada um dos subconjuntos também pertencem, então $E_j \in \mathcal{X}$, com $j = 1, 2, \ldots, n$.

Reciprocamente, se $E_j \in \mathcal{X}$, com $j = 1, 2, \ldots, n$, então $\chi_{E_j} \in M^+(X, \mathcal{X})$, com $j = 1, 2, \ldots, n$ e, portanto,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) \in M^+(X, \mathcal{X}),$$

pois a soma e a multiplicação por escalar de funções mensurável é mensurável.

Observação 2.1.3. *A forma fundamental é única.*

Justificativa: Sejam $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$ e $\sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}(x)$ duas formas fundamentais de φ. Agora, por definição, se $x \in E_j$ então $\varphi(x) = a_j = b_k$, para algum $k = 1, 2, \ldots, m$. Logo,

$$E_j = \left\{x \in X; \varphi(x) = a_j\right\} = \{x \in X; \varphi(x) = b_k\} = F_k.$$

Como $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$, segue que $\bigcup_{k=1}^{m} F_k = X$. Donde concluímos que $m = n$ e como $a_j = b_k$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ temos que a representação é única.

Definição 2.1.2 (A Integral). *Seja φ uma função simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ com a representação da **Definição 2.1.1**. Definimos a integração de φ com respeito a μ como sendo um número real extendido dado por*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Observação 2.1.4. *A seguir, por simplicidade, omitiremos o conjunto sobre o qual estamos integrando. Quando este for um conjunto diferente do conjunto X, evidenciaremos na notação da integral em questão.*

Lema 2.1.1. *Propriedades elementares da integral:*

(a) Se φ e ψ são funções simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ e $c \in \mathbb{R}$, com $c \geq 0$, então

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu \tag{2.2}$$

e,

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu. \tag{2.3}$$

(b) Se λ é definida em um conjunto E de $\mathcal{X}$ por

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu,$$

então λ é uma medida em $\mathcal{X}$.

Demonstração: (a) Se $c=0$, então $c\varphi = 0\varphi = 0$ e

$$\int c\varphi d\mu = 0\mu(X) = 0 = 0\int \varphi d\mu = c\int \varphi d\mu.$$

Se $c>0$ e $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$ é a representação fundamental, então $c\varphi \in \mathcal{X}$ e

$$\begin{aligned}
\int c\varphi d\mu &= \int \left(c\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j} \right) d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} ca_j\chi_{E_j} \right) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} ca_j\mu(E_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j) = c\int \varphi(x) d\mu,
\end{aligned}$$

o que prova **(2.2)**.

Sejam φ e ψ duas funções simples com representações fundamentais,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}(x) \quad \text{e} \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k}(x).$$

Observe que dado $x \in X$, existem $j,k \in \mathbb{N}$, tais que $E_j \cap F_k \neq \emptyset$. A função simples de $\varphi + \psi$ é representada por

$$\begin{aligned}
\varphi + \psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k} \\
&= (a_1\chi_{E_1} + a_2\chi_{E_2} + \ldots + a_n\chi_{E_n}) + (b_1\chi_{F_1} + b_2\chi_{F_2} + \ldots + b_m\chi_{F_m}) \\
&= (a_1+b_1)\chi_{E_1\cap F_1} + \ldots + (a_1+b_m)\chi_{E_1\cap F_m} + (a_2+b_1)\chi_{E_2\cap F_1} + \ldots + \\
&+ (a_2+b_m)\chi_{E_2\cap F_m} + \ldots + (a_n+b_1)\chi_{E_n\cap F_1} + \ldots + (a_n+b_m)\chi_{E_n\cap F_m} \\
&= \sum_{j=1}^{n} [(a_j+b_1)\chi_{E_j\cap F_1} + (a_j+b_2)\chi_{E_j\cap F_2} + \ldots + (a_j+b_m)\chi_{E_j\cap F_m}] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j+b_k)\chi_{E_j\cap F_k}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j+b_k)\chi_{E_j\cap F_k}. \tag{2.4}$$

A representação **(2.4)** como uma combinação linear de funções características de conjuntos disjuntos $E_j \cap F_k$ não necessariamente é a representação fundamental para $\varphi+\psi$, pois os valores $a_j + b_k$ podem permanecer inalterados para alguns valores j,k, ou seja, os valores $a_j + b_k$ podem não ser distintos e assim a representação não é única. Para manipular tal problema, considere o seguinte conjunto

$$A_{j_k} = \left\{ a_j + b_k, \text{ com } j = 1,2,\ldots,n \text{ e } k = 1,2,\ldots,m \right\}$$

e sejam c_h, com $h = 1,2,\dots,p$ como sendo os valores distintos dos elementos de A_{j_k} e

$$G_h = \bigcup_{j,k}(E_j \cap F_k), \text{ com } E_j \cap F_k \neq \emptyset \text{ e } a_j + b_k = c_h.$$

Como $E_j \cap F_k \neq \emptyset$, $j \neq k$ e pelo **Lema 1.2.2**, temos

$$\mu(G_h) = \mu\left(\bigcup_{j,k}(E_j \cap F_k)\right) = \sum_h \mu(E_j \cap F_k).$$

A forma fundamental de $\varphi + \psi$ é dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{h=1}^{p} c_h\mu(G_h) = \sum_{h=1}^{p} c_h \sum_{j,k}\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{h=1}^{p}\sum_{j,k}(a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j\mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_j\mu(E_j \cap F_k).
\end{aligned}$$

Desde que

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X \quad \text{e} \quad \bigcup_{k=1}^{m} F_k = X,$$

onde, $E_j \cap E_i = \emptyset = F_k \cap F_l$, se $j \neq i$ e $k \neq l$, pois

$$E_j \cap F_k \subset E_j \quad \text{e} \quad E_i \cap F_k \subset E_i \Longrightarrow (E_j \cap F_k) \cap (E_i \cap F_k) \subset (E_i \cap E_j) = \emptyset$$

e,

$$E_j \cap F_k \subset F_k \quad \text{e} \quad E_j \cap F_l \subset F_l \Longrightarrow (E_j \cap F_k) \cap (E_j \cap F_e) \subset (F_k \cap F_l) = \emptyset.$$

Temos que

$$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right) = \bigcup_{k=1}^{m}(E_j \cap F_k)$$

e,

$$F_k = F_k \cap X = F_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}(E_j \cap F_k).$$

Logo,

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m}\mu(E_j \cap F_k) \quad \text{e} \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n}\mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto, de **(2.5)**, temos

$$
\begin{aligned}
\int (\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} b_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_j \mu(F_k) \\
&= \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.
\end{aligned}
$$

provando **(2.3)**.

(b) Para que tal função seja uma medida, é necessário atender aos três critérios da **Definição 1.2.1**. Temos

(i) $\lambda(\emptyset) = \int \varphi\chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$

(ii) Usando o fato que $\chi_k \chi_t = \chi_{k\cap t}$, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda(E) &= \int \varphi\chi_E d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \right) \chi_E d\mu \\
&= \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \chi_E \right) d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E} \right) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

(iii) $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $(E_j) \subset \mathcal{X}$, $(E_i \cap E_j) = \emptyset$, com $i \neq j$, e $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}$. Temos

$$
\begin{aligned}
\lambda(E) &= \int \varphi\chi_E d\mu = \int \varphi \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{F_k} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} \right) d\mu \\
&= \int \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int \sum_{j=1}^{\infty} a_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_k \chi_{F_k \cap E_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_j).
\end{aligned}
$$

Logo, λ é uma medida em $\mathcal{X}$.

$\blacksquare$

Observação 2.1.5. *Podemos mostrar, por indução matemática, que*

$$\int(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)d\mu=\int\varphi_1 d\mu+\int\varphi_2 d\mu+\ldots+\int\varphi_n d\mu.$$

No que segue, introduziremos a integral de uma função arbitrária de M^+. Note que não é exigido que o valor da integral seja finito e este é um dos motivos que difere a integral de Lebesgue da integral de Riemann.

Definição 2.1.3 (Integração de Funções Não-Negativas). *Se $f \in M^+(X,\mathcal{X})$, definimos a integral de f com respeito a μ como sendo um número real extendido dado por*

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre toda função simples $\varphi \in M^+(X,\mathcal{X})$ satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. Se $f \in M^+(X,\mathcal{X})$ e $E \in \mathcal{X}$, então $f\chi_E \in M^+(X,\mathcal{X})$ e definimos a integral de f sobre E com respeito a μ como sendo o número real estendido

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu.$$

Lema 2.1.2. *Sejam $f,g \in M^+(X,\mathcal{X})$:*

(a) Se $f \leq g$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(b) Se $E,F \in \mathcal{X}$, e se $E \subseteq F$, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Demonstração: (a) Considere os seguintes conjuntos

$$A = \left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in M^+(X,\mathcal{X}), \varphi \text{ é função simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\right\}$$

$$B = \left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in M^+(X,\mathcal{X}), \varphi \text{ é função simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq g(x)\right\}$$

e como $f \leq g$, temos que $\sup A \leq \sup B$, pois $A \subseteq B$. Logo,

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(b) Note que $f\chi_E \leq f\chi_F$, pois $E \subseteq F$. Logo, pelo ítem (a), temos que

$$\int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu.$$

Donde,

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

$\blacksquare$

Apresentaremos agora um resultado muito importante. Este Teorema fornece a chave para as propriedades fundamentais de convergência da integral de Lebesgue.

Teorema 2.1.1 (**Teorema da Convergência Monótona (TCM) / Beppo Levi).** *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\mathcal{X})$ a qual converge para f, então*

$$\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: De acordo com o **Corolário 1.1.1**, a função f é mensurável, pois as (f_n) são mensuráveis. Como

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x), \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},$$

segue do **Lema 2.1.2(a)** que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, existe em $\mathcal{X}$ o limite

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \lim_n \int f d\mu = \int f d\mu. \tag{2.5}$$

Por outro lado, seja $\varphi \in M^+(X,\mathcal{X})$ uma função simples dada por

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}(x)$$

satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < 1$. Considere o conjunto

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}, n \in \mathbb{N}.$$

Note que $A_n \in \mathcal{X}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_n \subseteq A_{n+1}$. De fato, para cada n, $f_n \in M^+(X,\mathcal{X})$ e $\alpha\varphi \in M^+(X,\mathcal{X})$, por hipótese. Logo,

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\} \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow \{x \in X : f_n(x) - \alpha\varphi(x) \geq 0\} \in \mathcal{X}.$$

Como $f_n(x) - \alpha\varphi(x) \in M^+(X, \mathcal{X})$ segue que A_n é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, seja $x_0 \in X$ qualquer. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Considerando $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < f(x_0) - \alpha\varphi(x_0)$, temos que

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon < f(x_0) - \alpha\varphi(x_0), n > n_0.$$

Assim, $f_n(x_0) > \alpha\varphi(x_0)$ e, portanto, $x_0 \in A_n$, $\forall\ n > n_0$. Donde $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, daí $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como naturalmente $A_n \subset X$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, segue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X$. Logo,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

E, ainda temos que $A_n \subset A_{n+1}$, pois $f_n \leq f_{n+1}$. De acordo com o **Lema 2.1.2**

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \tag{2.6}$$

Além disso, para cada j fixado,

$$E_j \in \mathcal{X}, \quad E_j \cap A_n \in \mathcal{X}, \quad E_j \cap A_n \in (E_j \cap A_{n+1}) \quad \text{e} \quad E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_j \cap A_n.$$

Utilizaremos os **Lemas 2.1.1(b)** e **1.2.2(a)** para fazer as seguintes deduções

$$\mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_n E_j \cap A_n\right) = \lim_n \mu(E_j \cap A_n).$$

Desse modo, podemos observar que,

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{A_n} \varphi d\mu &= \lim_n \int \varphi\chi_{A_n} = \lim_n \int \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}\chi_{A_n}\right) d\mu \\
&= \lim_n \int \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j \cap A_n} d\mu = \lim_n \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j \cap A_n) \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_j \lim_n \mu(E_j \cap A_n) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) = \int \varphi d\mu.
\end{aligned}$$

Donde segue

$$\lim_n \int_{A_n} \varphi d\mu = \int \varphi d\mu. \tag{2.7}$$

Tomando o limite com respeito a n em **(2.6)** e combinando com **(2.7)**, obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu, \text{ para todo } 0 < \alpha < 1.$$

Assim, inferimos que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

uma vez que φ é uma função simples arbitrária em M^+ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Daí, concluímos que

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

ou ainda,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n} \int f_n d\mu. \tag{2.8}$$

De **(2.5)** e **(2.8)**, segue que

$$\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

■

Vamos agora apresentar algumas consequências do **Teorema da Convergência Monótona (Teorema 2.1.1)**

Corolário 2.1.1. *Se* $f, g \in M^+$ *e* $c \geq 0$, *então*

(a) $cf \in M^+$ *e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

(b) $f + g \in M^+$ *e*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração: (a) Se $c = 0$, então $cf = 0$ e pela **Definição 2.1.3**,

$$\int cf d\mu = \sup \int \varphi d\mu,$$

onde φ é uma função simples de M^+, a qual satisfaz

$$0 \leq \varphi(x) \leq cf(x), \forall x \in X.$$

Donde,

$$\int cf d\mu = 0 = 0 \left(\sup \int \varphi d\mu \right) = c \int f d\mu.$$

Se $c > 0$, então pelo **Lema 1.1.5** existe uma sucessão de funções simples não-negativas e não-decrescente (φ_n) tal que

$$\lim \varphi_n(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Então,

$$\lim c\varphi_n = c\lim \varphi_n = cf.$$

Utilizando o **Lema 2.1.1(a)** e o **TCM (Teorema 2.1.1)**, inferimos

$$\int cf d\mu = \int \lim c\varphi_n d\mu = c\lim \int \varphi_n d\mu = c\int f d\mu.$$

(b) Suponha que (φ_n) e (ψ_n) são sequências monótonas não-decrescente de funções simples tais que

$$\lim \varphi_n = f \quad \text{ e } \quad \lim \psi_n = g,$$

então $(\varphi_n + \psi_n)$ é também uma sequência monótona não-decrescente e além disso

$$\lim(\varphi_n + \psi_n) = \lim \varphi_n + \lim \psi_n = f + g.$$

Segue do **TCM (Teorema 2.1.1)** que

$$\begin{aligned} \int (f+g)d\mu &= \lim \int (\varphi_n + \psi_n)d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

■

Observação 2.1.6. *Podemos mostrar, por indução matemática, que a propriedade acima é válida para qualquer soma finita de funções em M^+; isto é,*

$$\int (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu + \ldots + \int f_n d\mu.$$

O próximo **Lema** trata de nos apresentar um importante resultado para quando estamos lidando com sequências de funções não monótonas e este é uma consequência do **TCM (Teorema 2.1.1)**.

Lema 2.1.3 (Lema de Fatou). *Se $(f_n) \in M^+(X, \mathcal{X})$, então*

$$\int (\liminf f_n)d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Seja $g_m = \inf\limits_{n \geq m} \{f_n\}$. Desse modo, $g_m \leq g_k$, para todo $k \geq m$, uma vez que

$$g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\} \leq \inf\{f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\} = g_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Isto é, (g_m) é uma sequência não-decrescente de funções e, portanto

$$\lim_m g_m = \sup_m (g_m) = \sup_m (\inf_{n \geq m} f_n) = \liminf f_n.$$

Logo, pelo **TCM (Teorema 2.1.1)**,

$$\lim_m \int g_m d\mu = \int (\liminf f_n) d\mu. \tag{2.9}$$

Note que $g_m \leq f_n$, para todo $m \leq n$. Logo, pelo **Lema 2.1.2(a)**, temos

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \forall n \geq m.$$

Pela **definição de Ínfimo**, segue que

$$\int g_m d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int f_n d\mu.$$

Portanto,

$$\sup_m \int g_m d\mu \leq \sup_m \left(\inf_{n \geq m} \int f_n d\mu \right) = \liminf_m \int f_n d\mu,$$

ou ainda, pelo fato de $\int g_m d\mu$ ser uma sequência não-decrescente, podemos ter

$$\lim_m \int g_m d\mu \leq \liminf_m \int f_n d\mu. \tag{2.10}$$

Donde, por **(2.9)** e **(2.10)**, obtemos

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

■

Corolário 2.1.2. *Se $f \in M^+$ e se λ é definida em X por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu,$$

então λ é uma medida sobre X.

Demonstração: Para que λ seja uma medida, devemos mostrar que as três condições da **Definição 1.2.1** são satisfeitas.

(a) Se $E = \emptyset$, então como não existe $x \in E$, segue que $\chi_E(x) = 0$, para todo $x \in X$. Daí, $f\chi_E = 0$. Logo,

$$\lambda(E) = \lambda(\emptyset) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

(b) Desde que $f \geq 0$, por hipótese, então pelo **Lema 2.1.2**, temos

$$\lambda(E) = \int f\chi_E d\mu \geq 0.$$

(c) Seja (E_n) uma sucessão de conjuntos disjuntos em $\mathcal{X}$, de modo que

$$E = \bigcup_{n}^{\infty} E_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{E_k}(x).$$

Logo, pelo **Corolário 2.1.1**

$$\begin{aligned} \int f_n d\mu &= \int \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{E_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \int f(x)\chi_{E_k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k). \end{aligned}$$

Perceba que,

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x)\chi_{E_k}(x) = f(x)\chi_{E_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{E_k}(x) = f(x)\chi_{E_{n+1}}(x) + f_n(x) \geq f_n(x).$$

E ainda,

$$\begin{aligned} \lim_n f_n(x) &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{E_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{E_k}(x) \\ &= f(x)\chi_{E_1}(x) + f(x)\chi_{E_2}(x) + f(x)\chi_{E_3}(x) + \ldots \\ &= f(x)\left[\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) + \chi_{E_3}(x) + \ldots\right] \\ &= f(x)\chi_E(x). \end{aligned}$$

Isto é, (f_n) é uma sequência monótona não-decrescente que converge para $f\chi_E$. Pelo **TCM (Teorema 2.1.1)**, temos

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \lim \int f_n d\mu = \lim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).$$

Logo,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Portanto, de (a), (b) e (c), obtemos o resultado.

■

Corolário 2.1.3. *Assuma que $f \in M^+$. Então $f(x) = 0$ μ-ae em X se, e somente se*

$$\int f d\mu = 0.$$

Demonstração: Suponhamos que $f = 0$ μ-ae em X. Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Considere a sequência de funções mensuráveis $f_n = n\chi_E$, com $n \in \mathbb{N}$. Constata-se que

$$f \leq \liminf f_n = \sup_m \left\{ \inf_{n \geq m} (f_m) \right\}$$

e,

$$\int f_n d\mu = \int n\chi_E d\mu = n\mu(E) = 0.$$

Logo, utilizando o **Lema de Fatou (Lema 2.1.3)** e a igualdade acima, inferimos que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0.$$

E, portanto,

$$\int f d\mu = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\int f d\mu = 0$ e seja $E_n = \left\{x \in X; f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Note que $E_n \subset E_{n+1}$ e $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Daí, pelo **Lema 2.1.2**

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0.$$

Logo, $\mu(E_n) = 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Pelo **Lema 1.2.2**, obtemos

$$\mu(\{x \in X; f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0.$$

Portanto, $f = 0$ μ-ae em X.

$\blacksquare$

Corolário 2.1.4. *Seja $f \in M^+$. Então $f = g$ μ-ae se, e somente se $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

Demonstração: Temos que

$$f = g \quad \mu\text{-ae} \Longrightarrow f - g = 0 \quad \mu\text{-ae}.$$

Agora, pelo **Corolário 2.1.3**, segue que $\int (f-g)d\mu = 0$. Daí, do **Corolário 2.1.1**, concluímos que

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\int f d\mu = \int g d\mu$. Daí, $\int (f-g)d\mu = 0$, pelo **Corolário 2.1.1**. Segue do **Corolário 2.1.3** que $f - g = 0$ μ-ae e, portanto, $f = g$ μ-ae.

■

Definição 2.1.4. *Dizemos que uma medida $\lambda \in \mathcal{X}$ é **absolutamente contínua** com relação a uma medida $\mu \in \mathcal{X}$ se*

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(E) = 0.$$

Corolário 2.1.5. *A medida*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \text{ com } f \in M^+(X, \mathcal{X})$$

é absolutamente contínua em relação a μ.

Demonstração: Com efeito, seja $E \in \mathcal{X}$, com $\mu(E) = 0$. Observe que

$$E_1 = \{x \in X; f\chi_E(x) > 0\} \subset E.$$

Logo, $\mu(E_1) \leq \mu(E) = 0$. Donde, $\mu(E_1) = 0$. Daí, $f\chi_E = 0$ μ-ae e portanto, pelo **Corolário 2.1.3** concluímos que $\int f\chi_E = 0$. Ou ainda,

$$\lambda(E) = \int f d\mu = \int f\chi_E d\mu = 0.$$

■

Corolário 2.1.6. *Se (f_n) é uma sequência monótona não-crescente de funções em $M^+(X, \mathcal{X})$ a qual converge μ-ae em X para uma função $f \in M^+$, então*

$$\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Seja $N \in X$ com $\mu(N) = 0$ tal que f_n converge em todo ponto de $M = (X \setminus N)$. Temos que $(f_n(x)\chi_M(x))$ converge para $f(x)\chi_M(x)$, para todo $x \in M$. Pela hipótese de (f_n) ser monótona não-crescente e da convergência de $(f_n(x)\chi_M(x))$, segue do **TCM (Teorema 2.1.1)** que

$$\int f\chi_M d\mu = \int \lim f_n\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu.$$

Por outro lado, desde que $\mu(E) = 0$, pelo **Corolário 2.1.5** temos

$$\int_N f d\mu = \int_N f_n d\mu = 0 \quad \mu\text{-ae em } X. \tag{2.11}$$

Observe que

$$f = f\chi_X = f\chi_{M\cup N} = f\chi_M + f\chi_N \quad \text{e} \quad f_n = f_n\chi_X = f_n\chi_{M\cup N} = f_n\chi_M + f_n\chi_N.$$

Daí, pelo **Corolário 2.1.1** e por **(2.11)**, obtemos

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int (f\chi_M + f\chi_N) d\mu = \int f\chi_M d\mu + \int f\chi_N d\mu \\ &= \int f\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu \\ &= \lim \left(\int f_n\chi_M d\mu + \int f_n\chi_N d\mu \right) = \lim \int f_n\chi_M d\mu. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.1.7. *Seja (g_n) uma sequência em M^+, então*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right).$$

Demonstração: Seja $f_n = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n$. Como cada $(g_n) \in M^+$, então

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i \in M^+.$$

Vejamos

$$f_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} g_i = \sum_{i=1}^{n} g_i + g_{n+1} \geq \sum_{i=1}^{n} g_i = f_n \quad \text{e} \quad \lim \int f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \int g_i.$$

Aplicando o **TCM (Teorema 2.1.1)**, obtemos

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} g_i d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int g_i d\mu.$$

■

2.1.1 Funções Integráveis

Discutiremos nessa seção a integração de funções mensuráveis positivas e negativas, uma vez que até agora discutimos apenas funções em M^+. Aqui é mais conveniente lidar com valores reais tanto das funções como também da integral.

Definição 2.1.5. *A coleção $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ é composta por todas as funções $\mathcal{X}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ ($f : X \to \mathbb{R}$) , tais que ambas as partes, positiva f^+ e negativa f^- de f, têm integrais finitas com respeito a μ. Neste caso, definimos a integral de f com respeito a μ como sendo*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \tag{2.12}$$

Se $E \in \mathcal{X}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Embora a integral de f seja definida como a diferença das integrais de f^+ e f^-, podemos verificar que se $f = f_1 - f_2$, onde f_1, f_2 são quaisquer funções mensuráveis não-negativas com integrais finitas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Com efeito,

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Longrightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Logo,

$$\int (f^+ + f_2) d\mu = \int (f_1 + f^-) d\mu \overset{Cor.2.1.1(b)}{\Longrightarrow} \int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Uma vez que todos estes termos são finitos, obtemos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu. \tag{2.13}$$

Lema 2.1.4. *Se $f \in L$ e $\lambda : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ com*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \tag{2.14}$$

então λ é uma carga.

Demonstração: Por hipótese, $f \in L$, isto é,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

com as integrais de f^+ e f^- finitas. Além disso, $f^+, f^- \in M^+$. Defina as funções λ^+ e λ^- por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \quad \text{e} \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

Logo, pelo **Corolário 2.1.2**, as funções λ^+ e λ^- são medidas em $\mathcal{X}$. Recorde, pela **Definição 1.1.4** que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Agora estamos na condição de vertificar se λ é uma carga.

(a) Sendo $E = \emptyset$, então

$$\int_\emptyset f d\mu = \int_\emptyset f^+ d\mu - \int_\emptyset f^- d\mu.$$

Nessas condições, pelo item (a) da Demonstração do **Corolário 2.1.2**, segue que $\lambda(\emptyset) = 0$.

(b) Temos que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \lambda^-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right). \tag{2.15}$$

Desde que λ^+ e λ^- são medidas sobre $\mathcal{X}$, então

$$\lambda^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \lambda^-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^+(E_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^-(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^+(E_n) + \lambda^-(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n). \tag{2.16}$$

Logo, de **(2.15)** e **(2.16)**, obtemos

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Portanto, de (a) e (b), inferimos que λ é uma carga.

■

Observação 2.1.7. *Uma vez que λ é definida como no **Lema 2.1.4** e esta é uma carga, se (E_n) é uma sequência disjunta em $\mathcal{X}$ com união E, então*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Quando nos referimos a este fato, dizemos que a integral indefinida de uma função em L é contável aditiva.

Teorema 2.1.2. *Uma função $f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Além disso,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Demonstração: Suponhamos que $f \in L$. Logo, por definição, $f^+ \in L$, $f^- \in L$ e

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < +\infty.$$

Desde que $0 \leq |f| = f^+ + f^-$, então $|f|^+ = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$. Segue do **Lema 2.1.2(a)** e do **Corolário 2.1.1(b)**,

$$\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty$$

e,

$$\int |f|^- d\mu = \int 0 d\mu = 0 < +\infty.$$

Portanto, $|f| \in L$.

Reciprocamente, suponhamos que $|f| \in L$, temos que

$$\int |f|^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int |f|^- d\mu < +\infty.$$

Com isso,

$$\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|^+ d\mu < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < +\infty,$$

donde $f \in L$.

Agora,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Logo, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \\
&\leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| \\
&= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int \left(f^+ + f^-\right) d\mu \\
&= \int |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$

■

Observação 2.1.8. *A recíproca do* ***Teorema 2.1.2*** *não é válido para a Integral de Riemann.*

Exemplo 2.1.1. *Admitindo que o leitor tenha conhecimento a respeito da integral de Riemann e seus principais resultados, seja $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ se\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ -1, \ se\ x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

Note que f não é Riemann Integrável, mas $|f|$ é Riemann Integrável.

Solução: De fato, $|f|$ é Riemann Integrável, pois $|f| \equiv 1$. Por outro lado, qualquer que seja a partição $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ de $[0,1]$ em cada um de seus subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1,2,\ldots,n$, existem números racionais e irracionais, portanto $m_i = -1$ e $M_i = 1$. Logo

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = -1(1-0) = -1 \quad \text{e} \quad S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1(1-0) = 1,$$

o que implica em

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = -1 \neq 1 = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Logo, f não é integrável a Riemann.

Corolário 2.1.8. *Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e*

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

Demonstração: Como $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$, então $f^+ \leq |f|$ e $f^- \leq |f|$. Por hipótese, $|f| \leq |g|$. Daí as desigualdades são válidas também para as integrais. Desse modo,

$$\int f^+ d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty.$$

Logo, $f \in L$. Desde que, $|f| \leq |g|$, segue pelo **Lema 2.1.2** que

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

■

Teorema 2.1.3. *Se $f, g \in L$, então $\alpha f \in L$, $f + g \in L$ e vale*

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \quad e \quad \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração: Se $\alpha = 0$, então

$$\int \alpha f d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Por outro lado,

$$\alpha \int f d\mu = 0 \int f d\mu = 0.$$

Se $\alpha > 0$, então $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, utilizando o **Corolário 2.1.1(a)**, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \\
&= \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu \\
&= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu \\
&= \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\
&= \alpha \int f d\mu.
\end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$, então $(\alpha f)^+ = (|\alpha| f)^- = |\alpha| f^-$ e $(\alpha f)^- = (|\alpha| f)^+ = |\alpha| f^+$, novamente pelo **Corolário 2.1.1(a)**, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \\
&= \int |\alpha| f^- d\mu - \int |\alpha| f^+ d\mu \\
&= |\alpha| \int f^- d\mu - |\alpha| \int f^+ d\mu \\
&= |\alpha| \left(\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \right).
\end{aligned}$$

Por **(2.13)**, segue que em qualquer um dos casos

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

Agora, se $f, g \in L$, pelo **Teorema 2.1.2**, segue que $|f|, |g| \in L$. Neste sentido, pela Desigualdade Triangular obtemos $|f + g| \leq |f| + |g|$. Observe que f e g são mensuráveis, donde $f + g$ também é mensurável pelo **Corolário 2.1.1(b)**. E, utilizando o **Corolário 2.1.8**, concluímos que $f + g \in L$. Para estabelecer a relação desejada, observe que

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Como $f^+, f^-, g^+, g^- \in M^+$, segue de **(2.13)** que

$$\int (f+g)d\mu = \int \left[(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)\right] d\mu.$$

Aplicando o **Corolário 2.1.1(b)**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu &= \int (f^+ + g^+)d\mu - \int (f^- + g^-)d\mu \\
&= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\
&= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

■

A seguir, enunciaremos e demonstraremos um dos resultados mais importantes da integral de Lebesgue.

Teorema 2.1.4 (**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (TCD)**). *Seja $(f_n) \subset L$ uma sequência que converge μ-ae para uma função mensurável $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e, seja g uma função integrável tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L$ e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Por hipótese,

$$\lim f_n(x) = f(x) \quad \mu\text{-ae em } X.$$

Logo, existe $E \in \mathcal{X}$, com $\mu(E) = 0$ e

$$\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E^c.$$

Considere as funções mensuráveis $\widetilde{f_n}$ e $\widetilde{f}$ dadas por

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x), \text{ se } x \in E^c, \\ 0, \text{ se } x \in E \end{cases}$$

e

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), \text{ se } x\in E^c, \\ 0, \text{ se } x\in E. \end{cases}$$

Observe que

$$\lim \widetilde{f_n}(x)=\widetilde{f}(x), \forall x\in X \quad \text{ e } \quad |\widetilde{f_n}(x)|\leq g(x), \forall x\in X, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Passando ao limite na desigualdade acima, obtemos

$$|\widetilde{f}(x)|\leq g(x), \forall x\in X.$$

Utilizando o **Corolário 2.1.8**, pode-se concluir que $\widetilde{f}\in L$. Além disso,

$$-g\leq \widetilde{f_n}\leq g. \tag{2.17}$$

Tomando a primeira desigualdade de **(2.17)**, obtemos

$$\widetilde{f_n}+g\geq 0.$$

Assim, pelo **Lema de Fatou (Lema 2.1.2)**

$$\int (\liminf(g+\widetilde{f_n}))d\mu \leq \liminf \int (g+\widetilde{f_n})d\mu.$$

Portanto, pelo **Teorema 2.1.2**,

$$\begin{aligned} \int (\liminf g)d\mu+\int (\liminf \widetilde{f_n})d\mu &\leq \liminf \int gd\mu+\liminf \int \widetilde{f_n}d\mu \\ \int gd\mu+\int \widetilde{f}d\mu &\leq \int gd\mu+\liminf \int \widetilde{f_n}d\mu \\ \int \widetilde{f}d\mu &\leq \liminf \int \widetilde{f_n}d\mu. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora, tomando a segunda desigualdade de **(2.17)**, obtemos

$$g-\widetilde{f_n}\geq 0.$$

Novamente, pelo **Lema de Fatou (Lema 2.1.3)**

$$\int (\liminf(g-\widetilde{f_n}))d\mu \leq \liminf \int (g-\widetilde{f_n})d\mu.$$

Pelo **Teorema 2.1.2**,

$$\begin{aligned} \int (\liminf g)d\mu+\int (\liminf(-\widetilde{f_n}))d\mu &\leq \liminf \int gd\mu+\liminf \int (-\widetilde{f_n})d\mu \\ \int gd\mu-\int \widetilde{f}d\mu &\leq \int gd\mu+\liminf \int (-\widetilde{f_n})d\mu \\ -\int \widetilde{f}d\mu &\leq \liminf \int (-\widetilde{f_n})d\mu. \end{aligned}$$

Use o fato de que $\inf(-A) = -\sup A$, com $A \subset \mathbb{R}$, para inferir que

$$\int \widetilde{f} d\mu \geq \limsup \int \widetilde{f}_n d\mu. \tag{2.19}$$

De **(2.18)** e **(2.19)**, temos que

$$\int \widetilde{f} d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_n d\mu \leq \limsup \int \widetilde{f}_n d\mu \leq \int \widetilde{f} d\mu.$$

Daí,

$$\liminf \int \widetilde{f}_n d\mu = \limsup \int \widetilde{f}_n d\mu = \int \widetilde{f} d\mu.$$

E, portanto,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

■

Observação 2.1.9. *O espaço L munido da adição e multiplicação por um escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *satisfaz as condições de espaço vetorial.*

3 Os espaços L_p e alguns modos de convergência

Este capítulo trata de apresentar os espaços L_p de Lebesgue (ou também denotados por espaços L^p de Lebesgue), os quais são espaços de classes funcionais bastante importantes para o tratamento na Teoria da Medida, como também na Análise Funcional. Inicialmente definiremos os espaços L_1, L_p e L_∞ de Lebesgue e mostraremos que ambos são espaços de Banach sobre determinada norma. Também introduziremos quatro novos tipos de convergência (além das que já conhecemos no curso de Análise na Reta), são elas: Convergência quase certamente, convergência em L_p, convergência em medida e convergência quase uniforme. Além disso, apresentaremos resultados que nos garantem boas relações entre elas.

3.1 Os espaços L_p de Lebesgue

Definição 3.1.1. *Se V é um espaço real linear (ou espaço vetorial real), então uma função de valores reais N de V é dito uma norma para V se satisfaz:*

(a) $N(v) \geq 0$, *para todo* $v \in V$*;*

(b) $N(v) = 0$, *se e somente se,* $v = 0$*;*

(c) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$, *para todo* $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(d) $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$, *para todo* $v, w \in V$.

Observação 3.1.1.

(1) Se valem as acertivas acima, exceto (b)*, então a aplicação N é dita **semi-norma** ou **pseudo-norma** para V;*

(2) Um espaço normado linear é um espaço linear V munido de uma norma para V.

Definição 3.1.2. *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço mensurável. Se $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$, definimos*

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu.$$

Lema 3.1.1. *O espaço $L(X, \mathcal{X}, \mu)$ é um espaço linear com as operações definidas por:*

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$*;*

(ii) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X$,

e N_μ é uma semi-norma em $L(X, \mathcal{X}, \mu)$. Além disso,

$$N_\mu(f) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \mu\text{-qtp em } X.$$

Demontração: Vimos no **Teorema 2.1.3** que se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αf, $f + g \in L$. Logo, $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ é um espaço vetorial sob as operações indicadas. Note que

a) $N_\mu(f) \geq 0, \forall f \in L$, pois se $|f| \geq 0 \Longrightarrow \int |f| d\mu \geq 0$;

b) $N_\mu(\alpha f) = \int |\alpha f| d\mu = \int |\alpha||f| d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu = |\alpha| N_\mu(f)$;

c) $N_\mu(f+g) = \int |f+g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g)$.

Como N_μ satisfaz $(a), (c)$ e (d) da **Definição 3.1.1**, então N_μ é uma semi-norma em L. Observe ainda que de acordo com o **Corolário 2.1.3**, temos

$$N_\mu(f) = 0 \Longleftrightarrow \int |f| d\mu = 0 \Longleftrightarrow |f(x)| = 0 \quad \mu\text{-ae} \Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-ae}.$$

■

3.1.1 O espaço L_1 de Lebesgue

Com o intuíto de fazer de $L(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço vetorial normado, procedemos com a identificação de duas funções de $L(X, \mathcal{X}, \mu)$ que são iguais em quase todo ponto de X.

Definição 3.1.3. *Duas funções $f, g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ são μ-equivalentes se, e somente se,*

$$f = g, \quad \mu\text{-ae em } X.$$

Dado $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$, sua classe de equivalência é denotada por

$$[f] = \{g \in L; f = g \quad \mu\text{-ae}\},$$

ou seja, em cada classe de equivalência escolhemos um único representante. O espaço de Lebesgue $L_1 = L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste de todas as classes μ-equivalentes de L, isto é,

$$L_1 = \{[f]; f \in L\}.$$

Se $[f] \in L_1$, defina a função

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu \tag{3.1}$$

a qual, como provado no resultado abaixo, define uma norma sobre $L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$.

Observação 3.1.2. *Note que a função em* **(3.1)** *está bem definida em virtude do* **Corolário 2.1.4**.

Teorema 3.1.1. *O espaço de Lebesgue $L_1(X,\mathcal{X},\mu)$ é um espaço vetorial normado.*

Demontração: As operações com vetores em L_1 são definidas por

$$[f+g] = [f]+[g] \quad \text{e} \quad [\alpha f] = \alpha[f], \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}$$

e o elemento zero de L_1 é $[0]$. Agora, queremos mostrar que $\|.\|$ define uma norma em L_1. Com efeito, $\|[0]\|_1 = 0$ e $\|[f]\|_1 \geq 0$. Além disso, se $\|[f]\|_1 = 0$, então

$$\int |f|d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-ae} \Longrightarrow [f] = [0].$$

Perceba que são satisfeitas as condições (b) e (c) da **Definição 3.1.1**, as quais seguem do **Lema 3.1.1**. Portanto, $\|.\|_1$ define uma norma em L_1.

■

3.1.2 Os espaços L_p, $1 \leq p < +\infty$

Consideraremos agora uma família de espaços normados lineares de classes de equivalência de funções mensuráveis. Por simplicidade, representaremos a classe de funções $[f]$ por f.

Definição 3.1.4. *Se $1 \leq p < +\infty$, o espaço $L_p = L_p(X,\mathcal{X},\mu)$ consiste de todas as classes μ-equivalentes de funções $\mathcal{X}$-mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais*

$$\int |f|^p d\mu < +\infty.$$

Defina

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p}. \tag{3.2}$$

Se $p = 1$, então **(3.2)** reduz-se a norma em L_1. Mostraremos posteriormente que se tivermos $1 \leq p < +\infty$, então L_p é uma espaço linear normado completo (espaço de Banach) munido da norma **(3.2)**. A soma das classes de equivalência, tendo f e g como respectivas representantes, é a classe de equivalência representada por $f+g$ e, similarmente para o profuto cf, isto é, as operações em L_p são:

$$[f+g] = [f]+[g] \quad \text{e} \quad [cf] = c[f]; \quad \text{com } f \in L_p \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.1.2 (Desigualdade de Young). *Sejam A e B números reais não negativos, $p > 1$ e $q < \infty$, com $q \neq 0$, verificando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \quad e \quad AB = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \Longleftrightarrow A^p = B^q$$

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < 1$. Considere a função φ definida para $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha} \Longrightarrow \varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1}.$$

Note que $\varphi'(t) < 0$ para $0 < t < 1$ e $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$. Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado ao interalo $[t, 1]$ ou $[1, t]$, temos que, em ambos os casos,

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \quad \text{e que} \quad \varphi(t) = \varphi(1) \Longleftrightarrow t = 1.$$

Desse modo,

$$\alpha t - t^{\alpha} \geq \alpha - 1 \Longrightarrow -t^{\alpha} \geq -\alpha t + \alpha - 1 \Longrightarrow t^{\alpha} \leq \alpha t + (1 - \alpha), \quad t \geq 0.$$

Fazendo $t = \dfrac{a}{b}$, com a e b não negativos e $b \neq 0$, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leq \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + (1 - \alpha) \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} b \leq \alpha \left(\frac{a}{b}\right) b + (1 - \alpha) b \Longrightarrow a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b.$$

Donde teremos uma igualdade se, e somente se, $a = b$.

Agora, sejam p e q satisfazendo $1 < p < \infty$, $q < \infty$, com $q \neq 0$ e verificando $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Tome $\alpha = \dfrac{1}{p}$. Se A e B são números reais não negativos, então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \quad \text{e} \quad AB = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \Longleftrightarrow A^p = B^q$$

$\blacksquare$

Lema 3.1.3 (Desigualdade de Hölder). *Suponha que $p > 1$ e sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L \quad e \quad \|fg\|_1 < \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Suponha que $f \in L_p$ e $g \in L_q$, com $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Note que o produto fg é mensurável (a partir da **Observação 1.1.7**) e se

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

segue do **Lema 3.1.2** que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}. \tag{3.3}$$

Como $f \in L_p$ e $g \in L_q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Assim, ambas as parcelas do lado direito de **(3.3)** são integráveis. Segue do **Corolário 2.1.8** e do **Teorema 2.1.3** que fg é integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} \int \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu &\leq \int \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} d\mu + \int \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} d\mu \\ \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu \\ \|fg\|_1 &\leq \|f\|_p \|g\|_q . \end{aligned}$$

■

Observação 3.1.3. *Dois números satisfazendo a relação do* ***Lema 3.1.3*** *são chamados* ***índices conjugados****. O produto de duas funções em L_2 é integrável, pois $p = 2$ é o único auto conjugado.*

Lema 3.1.4 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsli-Schwarz). *Se $f, g \in L_2$, então fg é integrável e*

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Lema 3.1.5 (Desigualdade de Minkowski). *Se $f, h \in L_p$, com $p \geq 1$, então $f + h \in L_p$ e*

$$\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p .$$

Demonstração: Se $\|f+h\|_p = 0$, então

$$\left(\int |f+h|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Longrightarrow \int |f+h|^p = 0, \text{ com } 1 \leq p < \infty,$$

a qual é finita, logo $f + h \in L_p$. Suponha que $\|f+h\|_p \neq 0$ e perceba que para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)+h(x)|^p &\leq (|f(x)|+|h(x)|)^p \\ &\leq (\max\{|f(x)|,|h(x)|\} + \max\{|f(x)|,|h(x)|\})^p \\ &\leq 2^p \max\{|f(x)|^p,|h(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |h(x)|^p) \end{aligned}$$

e daí segue que $f + h \in L_p$.

Agora vamos provar que $\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$. Se $p = 1$,

$$\int |f+h| \leq \int (|f|+|h|) \leq \int |f| + \int |h|.$$

Suponha que $p > 1$, então

$$|f+h|^p = |f+h||f+h|^{p-1} \leq (|f|+|h|)|f+h|^{p-1} = |f||f+h|^{p-1} + |g||f+h|^{p-1}. \quad (3.4)$$

Como $f+h \in L_p$, então $|f+h|^p \in L_1$. Se $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, temos $p=(p-1)q$ e portanto $|f+h|^{p-1} \in L_p$, uma vez que $\displaystyle\int (|f+h|^{p-1})^q d\mu = \int |f+h|^p d\mu$. Pela **desigualdade de Hölder (Lema 3.1.3)**, temos

$$\int |f||f+h|^{p-1} d\mu \leq \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+h|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

e,

$$\int |h||f+h|^{p-1} d\mu \leq \left[\int |h|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+h|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Das desigualdades acima e de **(3.4)**, temos que

$$\begin{aligned}
\int |f+h|^p d\mu &\leq \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+h|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left[\int |h|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int (|f+h|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int |f+h|^p d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |h|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

e, dividindo ambos os membros por $\left(\displaystyle\int |f+h|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, segue que

$$\left(\int |f+h|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |h|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O que implica em $\|f+h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$.

■

Observação 3.1.4. *O espaço L_p é um espaço vetorial normado sob a norma **(3.2)**, onde o ítem (d) da **Definição 3.1.1** é exatamente a **desigualdade de Minkowski (Lema 3.1.5)**. Resta-nos apenas mostrar que L_p munido de $\|.\|_p$ é completo.*

Definição 3.1.5. *Uma sequência de funções $(f_n) \subset L_p$ é uma **sequência de Cauchy** em L_p se para cada $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n \geq M(\varepsilon)$, então*

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

*Uma sequência de funções $(f_n) \subset L_p$ **converge em** L_p para uma função $f \in L_p$ quando dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então*

$$\|f - f_n\|_p < \varepsilon.$$

*Um espaço linear normado é **completo** se cada sequência de Cauchy converge para um elemento do próprio espaço. Um espaço linear normado completo é usualmente chamado de **espaço de Banach**.*

Lema 3.1.6. *Se $(f_n) \subset L_p$ converge para f em L_p, então (f_n) é de Cauchy.*

Demonstração: Como (f_n) converge para f em L_p, então dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que se $n, m \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, então

$$\|f - f_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \|f - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\|f_n - f_m\|_p = \|f_n - f + f - f_m\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

■

Teorema 3.1.2 (Teorema da Completeza ou Teorema da Perfeição). *Se $1 \leq p < +\infty$, então o espaço L_p é um espaço linear normado completo sobre a norma*

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Ou ainda, o espaço $L_p = (L_p, \|.\|_p)$ com $1 \leq p < +\infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Como já foi afirmado, o espaço L_p é um espaço linear normado sobre a norma em questão. Agora resta-nos mostrar que ele é completo. Seja (f_n) de Cauchy relativa a norma $\|.\|_p$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq M(\varepsilon)$, então

$$\int |f_m - f_n|^p d\mu = \|f_m - f_n\|_p^p < \varepsilon^p. \tag{3.5}$$

Seja (g_k) uma subsequência de (f_n) verificando $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Defina uma função $g \in M^+(X, \mathcal{X})$ por

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
|g(x)|^p &= \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p \\
\int \liminf |g|^p d\mu &= \int \left[\liminf \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \right] d\mu \\
\int |g|^p d\mu &= \int \left[\liminf \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \right] d\mu
\end{aligned}$$

Aplicando o **Lema de Fatou (Lema 2.1.3)**

$$\begin{aligned}
\int |g|^p d\mu &\leq \lim_{n\to+\infty}\inf \int \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu \\
\left\{\int |g|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{\lim_{n\to+\infty}\inf \int \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Pela **desigualdade de Minkowski (Lema 3.1.5)**, temos

$$\begin{aligned}
\left\{\int |g|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \lim_{n\to+\infty}\inf \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p\right) \\
&< \lim_{n\to+\infty}\inf \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) \\
&< \|g_1\|_p + 1.
\end{aligned}$$

A ultima desigualdade ocorre em virtude da série geométrica convergir, cuja soma é igual a 1.

Considere o conjunto $E = \{x \in X; g(x) < +\infty\}$ e note que $E \in \mathcal{X}$ e $\mu(X \setminus E) = 0$. Daí, segue que a série dada na definição de g converge μ-ae em X e $g\chi_E \in L_p$.

Agora, definamos $f \in X$ por

$$f(x) = g\chi_E \in L_p = \begin{cases} g(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[g_{k+1}(x) - g_k(x)], \text{ se } x \in E, \\ 0, \text{ se } x \in E^c. \end{cases}$$

Observe,

$$g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + (g_4 - g_3) + \ldots + (g_k - g_{k-1}) = g_1 + \sum_{j=1}^{k-1}(g_{j+1} - g_j).$$

E ainda,

$$|g_k| \leq |g_1| + \sum_{j=1}^{k-1} \left|g_{j+1} - g_j\right| \leq g.$$

Além disso, uma vez que (g_k) converge para f μ-ae, então pelo **TCD (Teorema 2.1.4)**, temos que $f \in L_p$. Uma vez que $|f - g_k|^p \leq 2^p g^p$, segue que

$$\lim |f - g_k|^p = 0 \Longrightarrow \int \lim |f - g_k|^p d\mu = 0$$

Novamente pelo **TCD (Teorema 2.1.4)**, temos

$$\lim \int |f - g_k|^p d\mu = 0 \Longrightarrow \left\{\lim \int |f - g_k|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Longrightarrow \lim \|f - g_k\|_p = 0, \tag{3.6}$$

de modo que (g_k) converge em L_p para f. Se $m \geq M(\varepsilon)$ e k for suficientemente grande, então podemos escrever **(3.5)** da seguinte forma

$$\int |f_m - g_k|^p d\mu < \varepsilon^p \Longrightarrow \liminf_k \int |f_m - g_k|^p d\mu \leq \liminf_k \varepsilon^p = \varepsilon^p.$$

Podemos concluir pelo **Lema de Fatou (Lema 2.1.3)** que

$$\int \liminf_k |f_m - g_k|^p d\mu \leq \liminf_k \int |f_m - g_k|^p d\mu \leq \varepsilon^p. \tag{3.7}$$

Donde, de **(3.6)** e **(3.7)**, obtemos

$$\int |f_m - f|^p d\mu \leq \liminf_k \int |f_m - g_k|^p d\mu \leq \varepsilon^p, \text{ sempre que } m \geq M(\varepsilon).$$

Logo,

$$\left\{ \int |f_m - f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \{\varepsilon^p\}^{\frac{1}{p}} = \varepsilon \Longrightarrow \|f_m - f\|_p \leq \varepsilon, \forall m \geq M(\varepsilon).$$

Isto é, a sequência (f_n) converge para f na norma de L_p. Portanto, L_p é de Banach.

■

3.1.3 O espaço L_∞.

O espaço L_∞ é formulado pelos L_p-espaços.

Definição 3.1.6. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser* ***essencialmente limitada*** *se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq c, \quad \mu\text{-ae em } X.$$

O espaço $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalências de $\mathcal{X}$-função mensurável de valores reais as quais são essencialmente limitadas. Se $f \in L_\infty$ e $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = \sup\{|f(x)|; x \notin N\}$$

e,

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\}. \tag{3.8}$$

Teorema 3.1.3. *O espaço L_∞ é um espaço linear normado completo sobre a norma* ***(3.8)****.*

Demonstração: Conseguimos mostrar sem muitos problemas que L_∞ é um espaço linear, cuja prova será omitida para não tornar tão extensa a demonstração do presente Teorema. Agora, note que

(a) $\|f\|_\infty \geq 0, \forall f \in L_\infty$, pois $|f| \geq 0$;

(b) Se $f = 0$, então, $\|f\|_\infty = 0$. Por outro lado, se $\|f\|_\infty = 0$, então existe um conjunto $N_k \in \mathcal{X}$ com $\mu(N_k) = 0$ tal que $|f(x)| \leq \dfrac{1}{k}$ para $x \notin N_k$. Se fizermos $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, então $N \in \mathcal{X}$, $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| = 0$ para $x \notin N$ (usando o fato de $|f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$). Logo, $f(x) = 0$ para quase todo x.

(c)

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_\infty &= \inf\{\sup[|\alpha f(x)| : x \notin N] : N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\} \\
&= \inf\{|\alpha| \sup[|f(x)| : x \notin N] : N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\} \\
&= |\alpha| \inf\{\sup[|f(x)| : x \notin N] : N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\} \\
&= |\alpha| \, \|f\|_\infty, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(d) Se $f, g \in L_\infty$, então existem conjuntos N_1, N_2 em $\mathcal{X}$, com $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ tal que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para $x \notin N_1$ e $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ para $x \notin N_2$. Desse modo,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \;\; para \;\; x \notin (N_1 \cup N_2).$$

Logo,

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

De (a), (b), (c) e (d), resulta que L_∞ é um espaço linear normado sob $\|.\|$.

Resta-nos apenas provar que L_∞ é completo. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L_∞ e $M \in \mathcal{X}$, com $\mu(M) = 0$, tal que $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ para $x \notin M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, para todo $x \notin M$, com $n, m = 1, 2, \ldots$. Então, para cada $x \notin M$, a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto convergente em $(X \setminus M)$ e fazendo

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), \text{ se } x \notin M, \\ 0, \text{ se } x \in M. \end{cases}$$

Segue então que f é mensurável e sendo (f_n) de Cauchy, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_o$, então

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Fixando n e fazendo $m \to \infty$, segue que

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{3.9}$$

sempre que $n \geq n_0$. Assim, (f_n) é absolutamente convergente para $f \in (X \setminus M)$. De **(3.9)** resulta que $f_n - f \in L_\infty$ para n suficientemente grande. Daí, como $f = f_n - (f_n - f)$, segue então que $f \in L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$. Desse modo, por **(3.9)** concluímos que

$$\|[f_n] - [f]\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

sempre que $n \geq n_0$. Logo, (f_n) converge para f em L_∞ e, portanto, L_∞ é completo, isto é, L_∞ é espaço de Banach.

■

3.2 Modos de convergência

Nesta seção vamos considerar apenas funções de valores reais definidas em um espaço mensurável fixado $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Quando necessitarmos de um resultado com funções a valores reais estendidos, faremos a devida modificação no resultado pertinente.

Definição 3.2.1. *Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$* ***converge uniformemente*** *para uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$ e $x \in X$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Definição 3.2.2. *Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$* ***converge pontualmente*** *para uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N(\varepsilon, x)$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Definição 3.2.3. *Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$* ***converge quase certamente*** *(μ-ae) para uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se existe um conjunto $E \in \mathcal{X}$, com $\mu(E) = 0$, tal que (f_n) converge pontualmente para f em $(X \setminus E)$.*

Observação 3.2.1. *Valem as seguintes implicações:*
Convergência uniforme $\Longrightarrow$ Convergência pontual $\Longrightarrow$ Convergência quase certamente.

Justificativa: As implicações seguem das respectivas definições. Além disso, para as recíprocas, Convergência quase certamente $\Longrightarrow$ Convergência pontual se o único conjunto com medida nula é o conjunto vazio. E, Convergência pontual $\Longrightarrow$ Convergência uniforme se X consiste apenas de um número finito de pontos.

3.2.1 Convergência em L_p

Definição 3.2.4. *Uma sequência de funções $(f_n) \in L_p = L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$* ***converge em L_p*** *para uma função $f \in L_p$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então*

$$\|f_n - f\|_p = \left\{ \int |f_n - f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Definição 3.2.5. *Uma sequência de funções $(f_n) \in L_p$ é dita de* ***Cauchy em L_p***, *se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N(\varepsilon)$, então*

$$\|f_m - f_n\|_p = \left\{ \int |f_m - f_n|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Observação 3.2.2. *É possível mostrar que uma sequência* $(f_n) \subset L_p$ *converge uniformemente em* X *para uma função* $f \in L_p$*, mas não converge em* L_p*, por exemplo, a sequência dada por* $f_n = n^{-1/p}\chi_{[0,n]}$ *converge uniformemente para a* 0*-função, mas não converge em* $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$*, o qual ocorre na reta real com medida de Lebesgue definida nos subconjuntos de Borel de* $\mathbb{R}$*, para mais detalhes ver Referência [*1*]. Não obstante, se considerarmos* $\mu(X) < \infty$*, podemos garantir a convergência em* L_p*. É o que nos mostra o resultado a seguir.*

Teorema 3.2.1. *Suponha que* $\mu(X) < +\infty$ *e que* (f_n) *é uma sequência em* L_p *a qual converge uniformemente em* X *para* f*. Então,* $f \in L_p$ *e a sequência* (f_n) *converge em* L_p *para* f*.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$,então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}}, \forall x \in X.$$

Daí, se $n \geq N(\varepsilon)$, então

$$\|f_n - f\|_p = \left\{ \int |f_n - f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int \frac{\varepsilon^p}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}} \mu(X)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

E, portanto, $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

■

Observação 3.2.3. *É possível mostrar que uma sequência* $(f_n) \in L_p$ *converge pontualmente e, portanto quase certamente para uma função* $f \in L_p$*, mas não converge em* L_p *mesmo quando* $\mu(X) < \infty$*, por exemplo, a sequência dada por* $f_n = n\chi_{[1/n, 2/n]}$ *converge quase certamente para a* 0*-função, mas não converge em* $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$*, o qual ocorre na reta real com medida de Lebesgue definida nos subconjuntos de Borel de* $\mathbb{R}$*, para mais detalhes ver Referência [*1*]. Todavia, se a sequência é dominada por uma função em* L_p*, então a convergência em* L_p *ocorre. Para isto, atentemos para o resultado a seguir.*

Teorema 3.2.2. *Seja* (f_n) *uma sequência em* L_p *a qual converge quase certamente para uma função mensurável* f*. Se existe uma função* $g \in L_p$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

então $f \in L_p$ *e* (f_n) *converge em* L_p *para* f*.*

Demonstração: Passando ao limite em **(3.10)**, temos

$$\lim_n |f_n(x)| = \left| \lim_n f_n(x) \right| \leq \lim_n g(x), \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

segue da hipótese que

$$|f(x)| \leq g(x), \mu\text{-ae}.$$

Daí, inferimos do **Corolário 2.1.8** que $f \in L_p$. Agora, observe

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x), \mu\text{-ae}, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g(x)^p, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que

$$\lim |f_n(x) - f(x)|^p = 0 \quad \text{e} \quad 2^p g(x)^p \in L_1, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

segue do **TCD (Teorema 2.1.4)** que

$$\int \lim |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = \lim \int |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = 0.$$

Logo, (f_n) converge em L_p para f.

■

Corolário 3.2.1. *Seja $\mu(X) < +\infty$, e seja (f_n) uma sequência em L_p a qual converge quase certamente para uma função mensurável f. Se existe uma constante K tal que*

$$|f_n(x)| \leq K, x \in X, n \in \mathbb{N},$$

então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração: Se $\mu(X) < +\infty$, então a função constante $g(x) = K$ pertence a L_p. Desse modo, retornamos ao caso do **Teorema 3.2.2**.

■

A observação a seguir é um **IMPORTANTE** resultado no ponto de vista dos modos de convergência nos espaços L_p, pois dada uma sequência em L_p, podemos constuir uma subsequência convergente μ-ae.

Observação 3.2.4. *Convergência em $L_p \Longrightarrow$ Existe um subsequência que converge μ-ae.*

Justificativa: Tendo em vista o **Corolário 2.1.3**, poderíamos pensar que “convergência em $L_p \Longrightarrow$ convergência μ-ae". Mas, antes de tirarmos quaisquer conclusões, atentemos para o exemplo a seguir. Seja $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a σ-algebra de Borel e μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Considere os intervalos:

$$\begin{aligned}
I_1 &= [0,1]\\
I_2 &= \left[0,\frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2},1\right]\\
I_4 &= \left[0,\frac{1}{3}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \quad I_6 = \left[\frac{2}{3},1\right]\\
I_7 &= \left[0,\frac{1}{4}\right], \quad I_8 = \left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right], \quad I_9 = \left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right], \quad I_{10} = \left[\frac{3}{4},1\right]\\
I_{11} &= \left[0,\frac{1}{5}\right], \quad I_{12} = \left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right], \quad I_{13} = \left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right], \quad I_{14} = \left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right], \quad I_{15} = \left[\frac{4}{5},1\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Seja $f_n = \chi_{I_n}$, onde I_n é o n-ésimo intervalo da lista acima e seja $f \equiv 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
\mu(I_1) &= 1;\\
\mu(I_2) &= \mu(I_3) = \frac{1}{2};\\
\mu(I_4) &= \mu(I_5) = \mu(I_6) = \frac{1}{3};\\
\mu(I_7) &= \mu(I_8) = \mu(I_9) = \mu(I_{10}) = \frac{1}{4};\\
\mu(I_{11}) &= \mu(I_{12}) = \mu(I_{13}) = \mu(I_{14}) = \mu(I_{15}) = \frac{1}{5};\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se $n \geq (1+2+3+4+\ldots+m)$, então $\mu(I_n) < \dfrac{1}{m}$. Desse modo, $\mu(I_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Observe que $f_n \to 0$ em L_p. Com efeito,

$$\|f_n - f\|_p = \|f_n\|_p = \left\{\int |f_n|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_{I_n} d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} = \mu\{I_n\}^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(I_n) < \varepsilon^p, \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow f_n \to 0 \text{ em } L_p([0,1]).$$

Por outro lado, dado $x \in [0,1]$ arbitrário, existem duas subsequências $(f_{n_j}(x))$ e $(f_{n_k}(x))$ tais que

$$f_{n_j}(x) = 0, \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad f_{n_k}(x) = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donde,

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 1.$$

Portanto, (f_n) não converge em nenhum $x \in [0,1]$. Mas, $f_{n_j} \to f, \mu$-ae.

3.2.2 Convergência em medida

Apesar de convergência em L_p não implicar em convergência quase certamente, ela implica em outro tipo de convergência a qual apresentaremos nesta seção.

Definição 3.2.6. *Uma sequência (f_n) de funções mensuráveis* ***converge em medida*** *para uma função real mensurável f se para cada $\alpha > 0$, tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) < \varepsilon,$$

para cada $\alpha > 0$ fixado.

Definição 3.2.7. *A sequência (f_n) é dita ser de* ***Cauchy em medida*** *se para cada $\alpha > 0$, tem-se*

$$\lim_{m,n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Ou ainda, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se $m,n \geq N(\varepsilon)$, então

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}) < \varepsilon,$$

para cada $\alpha > 0$ fixado.

Observação 3.2.5. *Convergência uniforme $\Longrightarrow$ convergência em medida.*

Justificativa: De fato, se (f_n) converge uniformemente para f então, fixado $\alpha > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$, tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \alpha, \forall x \in X.$$

Portanto, para $n \geq N$, temos

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset.$$

Logo,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0, \text{ com } n \geq N.$$

Donde,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Observação 3.2.6. *Convergência em $L_p \Longrightarrow$ convergência em medida.*

Justificativa: Observe que se considerarmos uma sequência $(f_n) \subset L_p$ tal que (f_n) converge em L_p para f, então

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Para cada $\alpha > 0$, defina o conjunto

$$E_n(\alpha) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

e atente para

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \alpha^p \mu(E_n(\alpha)).$$

Como $\|f_n - f\|_p = 0$, então $\lim \alpha^p \mu(E_n(\alpha)) = 0$. Logo, $\lim \mu(E_n(\alpha)) = 0$ e, portanto, (f_n) converge em medida para f.

Observação 3.2.7. *Convergência pontural $\not\Rightarrow$ convergência em medida.*

Justificativa: Seja $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Mostremos que $f_n \to 0$ pontualmente, mas f_n não converge em medida. Vejamos

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in [n, n+1], \\ 0, \text{ se } x \notin [n, n+1]. \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{R}$, então, pela propriedade de Arquimedes, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_o$. Logo, $x \notin [n, n+1]$, $\forall n \geq n_o$ que implica que

$$f_n(x) = 0, \forall n \geq n_o \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Por outro lado, para $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = [n, n+1]$$

o que implica em

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

acarretando

$$\lim_{n\to+\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 1$$

e, portanto, $f_n \not\to 0$ em medida.

Teorema 3.2.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de valores reais que é de Cauchy em medida. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge μ-ae e em medida para uma função mensurável de valores reais f.*

Demonstração: Considere uma subsequência $(g_k) \subset (f_n)$ tal que o conjunto

$$E_k = \left\{x \in X : |g_{k+1} - g_k| \geq 2^{-k}\right\}, \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

é tal que $\mu(E_k) < 2^{-k}$. Seja $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ de modo que $F_k \in \mathcal{X}$, pois, $E_j \in \mathcal{X}, \forall j \geq k$, e

$$\mu(F_k) = \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

isto é, $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$. Se $i \geq j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$\begin{aligned}
|g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + |g_{i-1}(x) - g_{i-2}(x)| + \ldots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \\
&\leq 2^{-(i-1)} + 2^{-(i-2)} + \ldots + 2^{-j} \\
&= \sum_{n=j}^{i-1} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^j}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{j-1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|g_i(x) - g_j(x)| < \frac{1}{2^{j-1}}. \tag{3.11}$$

Agora, considere $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. Note que $F \in \mathcal{X}$, pois, $F_k \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{N}$, e

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim \mu(F_k) \leq \lim \frac{1}{2^{k-1}} = 0,$$

em virtude do **Lema 1.2.2-(b)**. Se $x \notin F$, então $x \notin F_k$ para todo k. Passando ao limite em **(3.11)**, seque que o lado direito da igualdade converge para 0, donde concluímos que (g_j) é de Cauchy em $\mathbb{R}$ para todo $x \in (X \setminus F)$ e, daí, (g_j) converge em $(X \setminus F)$. Defina f por

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(x), \text{ se } x \notin F, \\ 0, \text{ se } x \in F, \end{cases}$$

então (g_j) converge μ-*ae* em X para uma função mensurável de valores reais f. Note que, dado $\delta > 0$, se tomarmos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \delta$ temos que $\mu(F_k) < \delta$ e passando ao limite em **(3.11)** quando $i \to +\infty$, temos que se $j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{3.12}$$

Isso mostra que a sequência (g_j) converge uniformemente para f no complemento de cada conjunto F_k. Para ver que (g_j) converge em medida para f, sejam $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ números reais e escolha $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)} < \inf(\alpha, \varepsilon)$. Se $j \geq k$, então por **(3.12)**, temos

$$\left\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\right\} \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq 2^{-(k-1)}\right\} \subseteq F_k.$$

Logo,

$$\mu(\left\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\right\}) \leq \mu(F_k) < \varepsilon, \forall j \geq k.$$

Portanto, (g_j) converge na medida para f.

$\blacksquare$

Observação 3.2.8. *Convergência em medida $\Longrightarrow$ Existe uma subsequência que converge μ-ae.*

Justificativa: Se (f_n) converge em medida, então dado $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $m, n \geq n_0$. Logo,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) < \varepsilon_1,$$

e

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) < \varepsilon_2.$$

Podemos constatar que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

e considere

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}, \\ B &= \left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}, \\ C &= \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Isso implica que $A \subseteq B \cup C$, pois, se $x \notin B \cup C$, então $x \notin B$ e $x \notin C$. Assim, $|f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\alpha}{2}$ e $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \alpha$. Logo, $x \notin A$. Pelo **Lema 1.2.1** e da **Definição 1.2.1-(iii)**, temos

$$\mu(A) \leq \mu(B \cup C) \leq \mu(B) + \mu(C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

com $\dfrac{\varepsilon}{2} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Logo, $\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}) < \varepsilon$ e, portanto (f_n) é de Cauchy em medida. Agora, pelo **Teorema 3.2.3** temos o resultado.

Corolário 3.2.2. *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de valores reais a qual é de Cauchy em medida. Então, existe uma função real mensurável f tal que $f_n \to f$ em medida. Além disso, f é única μ-ae.*

Demonstração: Do **Teorema 3.2.3** temos que existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge para uma função f em medida. Uma vez que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_n(x)|$$

segue

$$\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\} \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

De fato, considere

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}; \\ B &= \left\{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}; \\ C &= \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Se $x \notin B \cup C$, então

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad |f_{n_k}(x) - f_n(x)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Logo,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_n(x)| < \alpha.$$

Daí,

$$x \notin \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\} \Longrightarrow \mu(A) = \mu(B \cup C) \leq \mu(B) + \mu(C) < \varepsilon$$

pela convergência de Cauchy em medida. Desse modo, podemos concluir que (f_n) converge para f em medida. Provaremos agora a unicidade de f. Suponha que a sequência (f_n) converge em medida para ambas f e g. Uma vez que

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

segue que

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\} \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\}) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right), \end{aligned}$$

soma esta que converge para 0, por definição. Pelo **Teorema do Confronto**, obtemos

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\}) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $f = g, \mu$-ae, o que prova a unicidade de f.

■

Observação 3.2.9. *Sabemos que convergência em L_p implica em convergência em medida* ***(Observação 3.2.6)****. Mas, geralmente o contrário não ocorre, por exemplo, a sequência dada por $f_n = n\chi_{[1/n,2/n]}$ converge em medida para a 0-função, mas não converge em $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, o qual ocorre na reta real com medida de Lebesgue definida nos subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, para mais detalhes ver Referência [1]. Para que tenhamos a recíproca da presente afirmação, temos que acrescentar a hipótese que a sequência é dominada por uma função em L_p; é o que nos mostra o próximo resultado.*

Teorema 3.2.4. *Seja $(f_n) \subset L_p$ a qual converge em medida para f e seja $g \in L_p$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \ \mu\text{-ae}.$$

Então, $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração: Suponha por absurdo que (f_n) não converge em L_p para f. Então existe uma subsequência $(g_k) \subset (f_n)$ e um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|g_k - f\|_p > \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que (g_k) é uma subsequência de (f_n) e usando o fato que se uma sequência converge em medida então sua subsequência também converge em medida para o mesmo limite, temos que $g_k \to f$ em medida. Pelo **Teorema 3.2.3**, existe uma subsequência $(h_r) \subset (g_k)$ que converge μ-ae e em medida para uma função h. Segue do **Corolário 3.2.2** que $h = f$ μ-ae em X. Como que (h_r) converge μ-ae para f e é dominada por g, o **Teorema 3.2.2** implica $f \in L_p$ e $h_r \to f$ em L_p, isto é,

$$\|h_r - f\|_p \to 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, (f_n) converge em L_p para f.

■

3.2.3 Convergência quase uniforme

Definição 3.2.8. *Uma sequência (f_n) de funções mensuráveis é dita ser* ***convergente quase uniformemente*** *para uma função mensurável f se para cada $\delta > 0$, existe um conjunto $E_\delta \in \mathcal{X}$ com $\mu(E_\delta) < \delta$, tal que (f_n) converge uniformemente para f em $(X \setminus E_\delta)$.*

Definição 3.2.9. *Uma sequência de funções mensuráveis é dita ser uma* ***sequência de Cauchy quase uniformemente*** *se para todo $\delta > 0$, existe um conjunto $E_\delta \in \mathcal{X}$ com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) é uniformemente convergente em $(X \setminus E_\delta)$.*

Observação 3.2.10. *Convergência quase uniforme $\Rightarrow$ convergência de Cauchy quase uniforme.*

Justificativa: Segue imediato das definições.

Lema 3.2.1. *Seja (f_n) uma sequência de Cauchy quase uniforme. Então, existe uma função mensurável f tal que (f_n) converge quase uniformemente e μ-ae para f.*

Demonstração: Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $E_k \in \mathcal{X}$ com $\mu(E_k) < 2^{-k}$ tal que (f_n) converge uniformemente em $(X \setminus E_k)$. Considere $F_k \in \mathcal{X}$ tal que $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ e

$$\mu(F_k) = \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu\left(E_j\right) < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Observe que (f_n) é uniformemente convergente em $(X \setminus F_k)$, pois $(X \setminus F_k) \subseteq (X \setminus E_k)$. No que segue, definamos g_k por

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), \text{ se } x \notin F_k, \\ 0, \text{ se } x \in F_k. \end{cases}$$

Note que se $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, então $F \in \mathcal{X}$. Além disso, temos que $F_{k+1} \subset F_k$, então, podemos usar o **Lema 1.2.2-(b)** para mostrar que

$$0 \leq \mu(F) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim_k \mu(F_k) < \lim_k \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

Portanto, $\mu(F) = 0$. Se tivermos $h \geq k$, então $g_h(x) \leq g_k(x), \forall x \notin F_h$, pois $F_k \subset F_h$. Segue que, $\lim_k g_k(x) = \lim_k g_h(x) = g_h, \forall x \notin F_h$. Logo, a sequência (g_k) converge em todo X para uma função limitada mensurável a qual denotamos por f. Assim, se $x \notin F_k$, então $f(x) = g_k(x) = \lim f_n(x)$. Se $x \notin F$, então $x \notin F_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\lim f_n = f$ em $(X \setminus F)$, com $\mu(F) = 0$. Daí, (f_n) converge para f *μ-ae* em X. Agora, dado $\varepsilon > 0$, obtemos k suficientemente grande, tal que $2^{-(k-1)} < \varepsilon$. Então $\mu(F_k) < \varepsilon$ e (f_n) converge uniformemente para $g_k = f$ em $(X \setminus F_k)$.

$\blacksquare$

Teorema 3.2.5. *Se uma sequência (f_n) converge quase uniformemente para f, então ela converge em medida. Reciprocamente, se uma sequência (h_n) converge na medida para h, então alguma subsequência de (h_n) converge quase uniformemente para h.*

Demonstração: Suponha que (f_n) converge quase uniformemente para f. Sejam α e β números reais positivos. Então, existe um $E_\varepsilon \in \mathcal{X}$ com $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, tal que (f_n) converge uniformemente para f em $(X \setminus E_\varepsilon)$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall x \in (X \setminus E_\varepsilon), \forall n \geq n_0.$$

Se n for suficientemente grande, então o conjunto

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subseteq E_\varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subseteq E_\varepsilon) \leq \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, (f_n) converge em medida para f.

Reciprocamente, suponha que (h_n) converge em medida para h. Segue do **Teorema 3.2.3** que existe uma subsequência $(g_k) \subset (h_n)$ que converge em medida para uma função g e a prova do **Teorema 3.2.3** mostra que a convergência é quase uniforme. Se (g_k) converge em medida para ambos h e g, segue do **Corolário 3.2.2** que $h = g$, μ-ae em X. Portanto, a subsequência $(g_k) \subset (h_n)$ converge quase uniformemente para g.

$\blacksquare$

Teorema 3.2.6 (Teorema de Egoroff). *Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis de valores reais que converge μ-ae em X para uma função real mensurável f. Então a sequência (f_n) converge quase uniformemente e em medida para f.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que (f_n) converge para f em todo ponto de X. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, defina

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\},$$

e observe que $E_n(m) \in \mathcal{X}$ e $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$. Além disso, $f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$, logo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset$. Uma vez que $\mu(X) < \infty$ e $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$, seque do **Lema 1.2.2** que

$$\lim \mu(E_n(m)) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m)\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Portanto, para $m \in \mathbb{N}$ fixado e $n \to +\infty$, temos

$$\lim \mu(E_n(m)) = 0.$$

Agora, dado $\delta > 0$, escolha um $k_m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $\mu(E_{k_m}) < \dfrac{\delta}{2^m}$ e seja $E_\delta = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$. Desse modo $E_\delta \in \mathcal{X}$ e

$$\begin{aligned}
\mu(E_\delta) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_{k_m}) \\
&= \mu(E_{k_1}) + \sum_{m=2}^{\infty} \mu(E_{k_{m-1}}) < \frac{\delta}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} \\
&= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Assim, $\mu(E_\delta) < \delta$. Observe que se $x \notin E_\delta$, então $x \notin E_{k_m}(m)$. Logo,

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \forall k \geq k_m \text{ e } x \in (X \setminus E_\delta).$$

Portanto, (f_n) converge quase uniformemente para f. E, pelo **Teorema 3.2.5**, segue que (f_n) converge em medida para f.

■

3.2.4 Relação entre os Modos de Convergência

Agora, apresentaremos um diagrama que retrata um resumo entre os modos de convergência estudados neste trabalho. No que segue, as setas completas indicam que uma convergência implica em outra convergência e as setas tracejadas indicam que uma convergência implica em uma subsequência convergente. No caso da ausência destes dois casos citados, pelo menos um contra-exemplo pode ser construído. É entendido também que na discussão da convergência em L_p, é assumido que as funções pertencem a L_p.

Notações:

AE: Convergência “almost everywhere", ou ainda, convergência quase certamente;

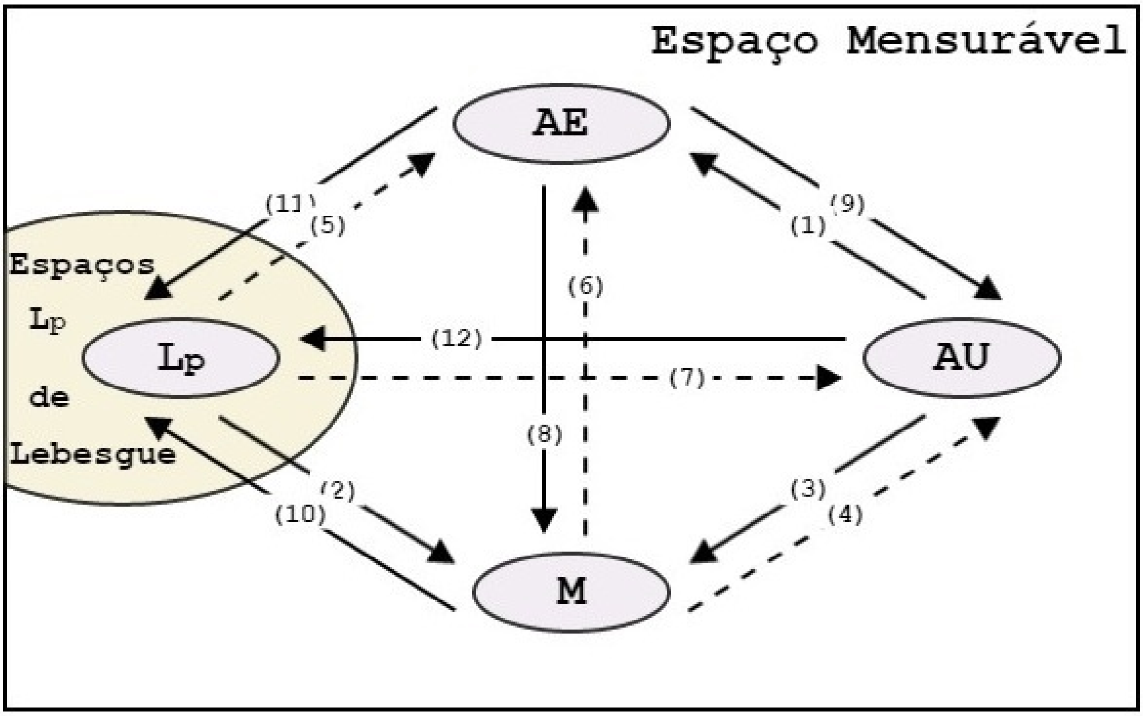
AU: Convergência quase uniforme;

L_p: Convergência em L_p;

M: Convergência em medida.

Vale ressaltar que as implicações de (1) a (7) se dão em um espaço mensurável qualquer. Para as implicações (8) e (9) relatamos o caso de um espaço mensurável finito. Já para as implicações de (10) a (12), acrescentamos a suposição que a sequência (f_n) é dominada por uma função g em L_p.

Diagrama da Relação entre os Modos de Convergência



Fonte: Autoria própria.

Justificativas:

(1) Segue da **Observação 3.2.10** e do **Lema 3.2.1**.

(2) Segue da **Observação 2.1.1**.

(3) Segue do **Teorema 3.2.5**.

(4) Segue do **Teorema 3.2.5**.

(5) Segue da **Observação 3.2.4**.

(6) Segue da **Observação 3.2.8**.

(7) Segue de **(2)** e **(4)**.

(8) Segue do **Teorema de Egoroff (Teorema 3.2.6)**.

(9) Segue do **Teorema de Egoroff (Teorema 3.2.6)**.

(10) Segue do **Teorema 3.2.4**.

(11) Segue do **Teorema 3.2.2**.

(12) Segue de **(3)** e **(10)**.

Referências

[1] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics Library, 1995.

[2] CABRAL, M.A.P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: 2013.

[3] COELHO, E.R.S. **Introdução à Integral de Lebesgue**. Monografia - Departamento de Matemática, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2014

[4] FELIX, D.D. **A integral de Lebesgue e alguns resultados de convergência nos Espaços L_p**. Monografia (Especialização) - Departamento de Matemática, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2014.

[5] MACIEL, A.B.; LIMA, O.A. **Introdução à Análise Real**. EDUEP: Campina Grande - PB, 2008.

[6] MEDEIROS, L.A.J.; MELLO, E.A. **A Integral de Lebesgue**. 6. ed. Rio de Jenairo: Instituto de Matemática - UFRJ, 2008.

[7] PELLEGRINO, D. **Notas de aula de Teoria da Medida**. Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2008.

[8] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. Madison: McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, 1976.