UNIVERSDIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PRO-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DO ENSINO MEDIO – TURMA 2010

TEOREMA DE PITÁGORAS: Suas Diversas Demonstrações

MARCONI COELHO DOS SANTOS

Campina Grande – PB

Outubro/2011

MARCONI COELHO DOS SANTOS

TEOREMA DE PITÁGORAS: Suas Diversas Demonstrações

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande – PB

Outubro/2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

S237t Santos, Marconi Coelho dos.

Teorema de Pitágoras [manuscrito]: suas diversas demonstrações / Marconi Coelho dos Santos. - 2011.

42 f. il. color.

Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

“Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática”.

1. Geometria. 2. Matemática. I. Título. II. Pitágoras

21. ed. CDD 516

MARCONI COELHO DOS SANTOS

TEOREMA DE PITÁGORAS: Suas Diversas Demonstrações

Aprovado (a) em: 28 / 10 / 2011

Banca Examinadora:

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB

Orientador

Cicero da Silva Pereira

Prof. Esp. Cícero da Silva Pereira

Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UEPB

Examinador

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof. Ms. Maria da Conceição Vieira Fernandes

Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB

Examinadora

Campina Grande, 28 de OUTUBRO de 2011.

"...E nunca considerem seu estudo como uma obrigação, mas sim como uma oportunidade invejável de aprender, sobre a influência libertadora da beleza no domínio do espírito, para seu prazer pessoal e para o proveito da comunidade à qual pertencerá o seu trabalho futuro."

Albert Einstein

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Maria Vitória dos Santos (in memoriam), Luiz Miguel dos Santos (in memoriam), minha esposa Maria Betania Hemernegildo dos Santos, além de todos que de forma direta ou indireta torcem pelo meu sucesso e estão felizes por mais essa realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, aos meus pais (in memoriam), aos meus familiares, aos colegas de curso, ao meu orientador, Fernando Luiz que tanto ajudou nas pesquisas, mediante paciência, compreensão e estimulo no acompanhamento da evolução deste trabalho e a todos os professores e funcionários do Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, por toda ajuda prestada.

INDÍCE

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Esta monografia é resultado de um estudo sobre Pitágoras, o seu Teorema, como também sobre várias maneiras de demonstrações do denominado Teorema de Pitágoras. Veremos inicialmente um breve histórico de como a matemática foi incorporada na vida do homem e como ele passou a utilizá-la em soluções de problemas ocorridos no seu dia-a-dia, em seguida fazemos referência a uma abordagem histórica sobre a vida de Pitágoras, para isto foi utilizada referencias de vários autores que escrevem sobre a história da matemática como também aproveitamos a oportunidade para abordar os elementos que compõem o triângulo retângulo, sua definição, a proposição que relaciona os seus lados e também foram apresentados os primeiros métodos de demonstrações. Por fim serão desenvolvidas várias formas de demonstrar o Teorema de Pitágoras, tanto no campo geométrico, que são demonstrações que envolvem comparações de áreas, como também no campo algébrico onde são demonstrações baseadas nas relações métricas do triângulo retângulo.

PALAVRAS – CHAVE: Pitágoras. Teorema. Demonstrações.

1. INTRODUÇÃO

O homem primitivo não tinha a necessidade de contar, pois tudo que precisava retirava da natureza. Conforme ele foi evoluindo, a necessidade de contar e de resolver problemas foi se tornando mais presente em sua vida. Então ele por se diferenciar dos outros animais por sua capacidade de linguagem, o que foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato, desenvolveu uma linguagem que possibilitasse representar ou resolver determinadas situações vividas por ele.

Quando o homem deixou de retirar tudo o que precisava da natureza e começou a se fixar em determinada região, passando a criar animais, plantar, construir abrigos, fortificações e a representar quantidade de animais ou legumes, precisou começar a fazer uso de meios para enumerar quantidades. Então ele começou a fazer correspondências tendo para isso o uso de pequenas pedras, nós em cordas e talhes em ossos ou madeiras.

Há mais de quatro mil anos, pessoas de todo o mundo estudam, aprendem e usam a matemática, embora o seu ensino seja relativamente recente, em muitos países, para uma grande parte de suas populações.

Em sua trajetória vários acontecimentos, bem como grandes personagens contribuiram para sua evolução sendo citados e tidos como referência até os dias de hoje. Dentre eles podemos citar Pitágoras que segundo Boyer (2010), está envolto em lendas e apoteoses. Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos entre 570 a.C. e 571 a.C. e morreu em Metaponto entre 496 a.C. e 497 a.C. Se a história sobre a existência de personagem tão importante no mundo da Matemática não parece muito clara deve-se em parte à perda de documentos daquela época. Várias foram suas biografias escritas na antiguidade, mas se perderam com o tempo.

Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grega denominada em sua homenagem de pitagórica e a ele também está associado o Teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo que é universalmente conhecido pelo seu nome: Teorema de Pitágoras. Mesmo sendo um teorema já conhecido pelos babilônicos dos tempos de Hamurabi[1] a cerca de mais de mil anos antes, é creditado a Pitágoras a primeira demonstração deste teorema.

[1] Nascido supostamente por volta de 1810 a.C. e falecido em 1750 a.C., foi o sexto rei da primeira dinastia babilônica.

O Teorema de Pitágoras é considerado por vários estudiosos da matemática como um dos mais importantes da história. Vários resultados importantes em geometria teórica, bem como na solução de problemas práticos relacionados à medidas foram descobertos através desse teorema, ou deles se utilizam.

O fato é que o Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais famosos e úteis da geometria elementar e já foi demonstrado por várias civilizações no decorrer da história, tornando-se assim um excelente tema para ser aprofundado durante as aulas de matemática no ensino fundamental.

Barbosa (1993) cita que o professor de Matemática Elisha Scott Loomis do estado de Ohio, nos Estados Unidos reuniu 230 demosntrações do teorema num livro publicado em 1927; e na segunda edição do livro, de 1940, ampliou esse número de demonstrações para 370. Assim, é imprescindível que cada professor de matemática conheça pelo menos algumas demonstrações, para que utilize em suas aulas aquela ou aquelas que melhor se adaptem ao seu curso e preferencialmente permitam a participação dos alunos.

Ainda de acordo com Barbosa (1993), é necessário no ensino o entendimento de prova no sentido de prova adequada, com uso de demonstrações que esteja de acordo com o nível de informações e conhecimentos do educando, pois só assim haverá um juízo do rigor inerente a essa adaptação.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é buscar entender e divulgar outras tantas demonstrações existentes do teorema de Pitágoras, além das demonstrações tradicionais, para que sirvam de alicerce à professores de matemática e áreas afins. Tais demonstrações devem ser trabalhadas em sala de aula, proporcionando um aprofundamento do conhecimento dos alunos em relação ao tema em tela, utilizando aquelas que melhor se adaptem ao momento e que possam atrair os alunos para a sua construção.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Pitágoras – Breve Histórico

Pitágoras foi um matemático grego que tem a sua história envolta em lendas fantasiosas e mitos uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida. Pitágoras viveu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, por volta de 572 a .C. Eves (2008) afirma que segundos relatos, Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, talvez assassinado, com uma idade avançada entre setenta e cinco e oitenta anos. Já Barbosa (1993) cita que Pitágoras se possivelmente existiu foi exilado de Crotona, tendo morrido em Tarento.

Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales devido à proximidade das regiões onde nasceram. Para Eves (2004), Pitágoras era 50 anos mais novo que Tales e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Segundo Boyer (2010) Pitágoras era um místico, um profeta e algumas semelhanças em seus interesses devem-se ao fato de que Pitágoras também viajou pelo Egito e Babilônia. Pitágoras foi praticamente um contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse. Alguns fatos podem relatar que Pitágoras foi discípulo de Tales, mas isto é improvável devido à diferença entre suas idades.

Barbosa (1993) diz que Pitágoras foi um filósofo, grego (sec. VI a. C.) natural da ilha de Samos, no mar Egeu. Várias lendas envolvem a vida de Pitágoras, e segundo uma delas, ele era um jovem inteligente de rara beleza, enviado a Mileto para estudar com Tales, onde, segundo Barbosa (1993), Pitágoras fundou uma comunidade religiosa, filosófica e política denominada de escola pitagórica que se fez presente em outras regiões do mundo.

Pitágoras era um homem religioso que acreditava em uma série de superstições. De acordo com Boyer (2010) a escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto aos seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação conseqüente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de um amigo morto e entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (lentilhas). Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta.

São várias as definições que os autores têm para Pitágoras. Para Boyer (2010) é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem Pitágoras, pois ele era visto como um filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico e charlatão.

Segundo Russell apud Strathern (1998), Pitágoras era “intelectualmente, um dos homens mais importantes que já existiram, tanto quando era sábio, como quando não o era. A matemática, como argumento dedutivo-demonstrativo, começa com ele e, nele, está ligada a uma forma peculiar de misticismo. A influência da matemática sobre a filosofia, em parte devida a ele, tem sido, desde então, tão profunda quanto funesta”.

Para Strathern (1998) “Pitágoras foi, provavelmente, o primeiro matemático, o primeiro filósofo e o primeiro a praticar a metempsicose. E isso, não por ter sido a primeira pessoa a usar números, a primeira a buscar uma explicação racional para o mundo ou a primeira a acreditar que numa vida anterior sua alma havia habitado uma planta, um faraó ou algo do gênero. Foi ele quem inventou ou usou pela primeira vez as palavras; matemático, filósofo e metempsicose nos sentidos hoje aceitos e logo aplicou a si mesmo. Também inventou a palavra cosmos, que aplicava ao mundo. (Em grego, Kosmo significa “ordem” e Pitágoras usou o termo para designar o mundo por causa de sua “perfeita harmonia e ordenação”).”

Já na definição de Kanh (1993), Pitágoras não é apenas o nome mais famoso na história da filosofia antes de Sócrates e Platão. Ele é também uma das figuras mais fascinantes e misteriosas da antiguidade. Pitágoras foi celebrado nas tradições antigas como matemático e filósofo da matemática, e seu nome continua associado a um importante teorema da geometria plana.

Mesmo com várias indagações, atribuições e questionamentos, Pitágoras é considerado o pai da matemática. Suas contribuições para a história, principalmente o teorema que lhe é atribuído e considerado como uma medida de ouro desperta o interesse de muitos estudiosos e matemáticos.

3. TEOREMA DE PITÁGORAS

3.1. O Triângulo 3, 4, 5

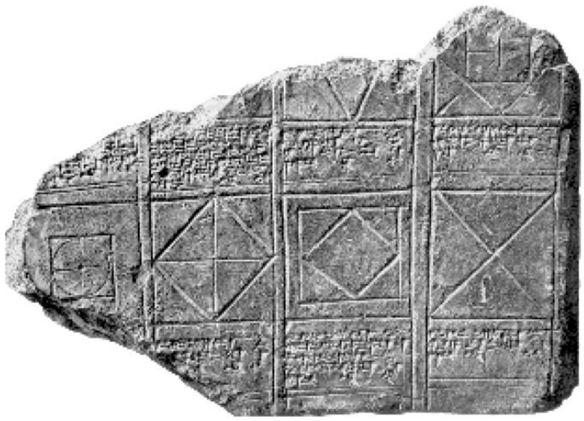
Existem provas concretas que os babilônios antigos conheciam o teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. Nesse tablete está escrito o seguinte:

"*4 é o comprimento, 5 é a diagonal, Qual é a altura? 4 vezes 4 da 16, 5 vezes 5 dá 25. Tirando 16 de 25 o resto é 9. Quantas vezes quanto devo tomar para ter 9? 3 vezes 3 dá 9. 3 é a altura.*"

Isto mostra que os babilônios tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo. Não há nenhuma demonstração, pois isto ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam receitas que davam certo e, com elas, resolviam inúmeros problemas (LIMA et al 2006).

Segundo Lima et al (2006) outro tablete que merece atenção está no museu da Universidade de Yale. É o único que contém figuras: um quadrado e suas diagonais. Neste fragmento de tablete que se pode ver na figura 1, o lado do quadrado é tomado como igual a 30 e o comprimento da diagonal aparece como 42, 25, 35.

Figura 1. Tablete de barros datados de 1800 a 1900 a. C. contendo figuras geométricas.



Segundo Eves (2004) existem registros que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíram triângulos com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos. Como não há evidências documentais que prove que os egípcios tivessem ciência ao menos de um caso particular do teorema de Pitágoras, podemos afirmar que os egípcios já conheciam o triângulo retângulo e faziam usos de suas medidas. Ainda segundo Eves (2004) os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

A proposição das áreas é atribuída a Pitágoras, recebendo o seu nome: Teorema de Pitágoras. Mas esta proposição era conhecida pelos chineses e babilônios bem antes de Pitágoras.

3.2. Enunciado do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os três lados de qualquer triângulo retângulo. Os livros de matemática trazem o enunciado do Teorema de Pitágoras escrito de várias formas.

Analisando alguns livros podemos observar algumas diferenças em seu enunciado. No livro Descobrindo Padrões Pitagóricos, Barbosa (1993) diz crer que o leitor já tem um pensamento sobre o enunciado da proposição de Pitágoras. Para Barbosa (1993) Teorema de Pitágoras deve ser enunciado da seguinte forma: *A área do quadrado construído com a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos com os catetos*, e que, provavelmente, o leitor tenha modificado o enunciado da proposição de Pitágoras para: *O quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos com os catetos*.

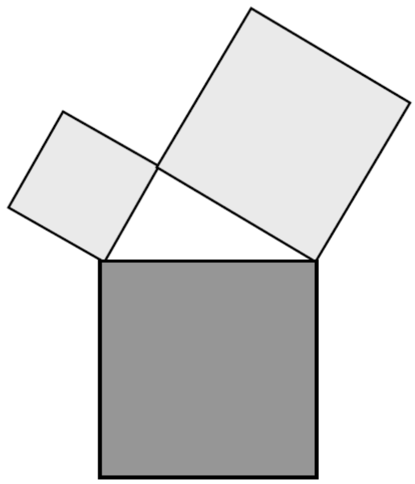
O livro Temas e Problemas Elementares de Lima et al. (2006) traz o enunciado do Teorema de Pitágoras da seguinte forma: *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos*. Já no livro Meu Professor de Matemática e Outras Histórias Lima (1991) define o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira: *A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados que têm como lado cada um dos catetos*. Temos ainda no livro O Teorema de Pitágoras de Cintra e Cintra (2003) a seguinte definição: *A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa* *de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo.*

Euclides escreveu em seu livro “Os Elementos” duas proposições que podemos relacionar com o Teorema de Pitágoras. A primeira é a preposição 47, que está escrita da seguinte forma: *Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.* Já a segunda é a preposição 48 e nela esta escrito que: *Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto.*

Nas definições citadas acima podemos observar que elas diferem um pouco na maneira de como são escritas, mas essa diferença não altera o seu entendimento. Barbosa (1993) diz que devemos ter cuidado para não repetir o enunciado que ele chama de simplista: ***“O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”***. Este enunciado simplista servindo apenas para facilitar a compreensão.

A Figura 2 apresenta de maneira geométrica o enunciado do Teorema de Pitágoras.

Figura 2. Representação geométrica do Teorema de Pitágoras



Se *a* é a medida da hipotenusa e se *b* e *c* são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema equivale a afirmar que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Na Figura 2 podemos observar que o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada em tom mais claro é igual a área sombreada em tom mais escuro.

O Teorema de Pitágoras parece claro e evidente. Mas para que possamos nos convencer de sua veracidade precisamos de uma demonstração.

4. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E AS DEMONSTRAÇÕES

4.1. Sistemas Axiomáticos

A matemática, ciência que foi criada a fim de contar e resolver problemas, inicialmente se limitava a resolver problemas práticos onde o homem fazia uso dos conhecimentos matemáticos para contar, medir e calcular. Neste período o homem não lidava com a matemática abstrata, ele não necessitava de definições, fórmulas ou teoremas com suas demonstrações. Conforme a matemática foi evoluindo, raciocínios mais abstratos que envolvem argumentação lógica surgiram com os matemáticos gregos aproximadamente em 300 a. C. Na concepção de Fossa (2001):

> Os matemáticos gregos foram os primeiros a exigir demonstração para os teoremas de matemática. Antes, os babilônicos e os egípcios aceitavam seus teoremas na base da evidência empírica ou de um simples pragmatismo. Os gregos, porém, procuravam um conhecimento mais profundo e, desde os primeiros contatos com a matemática, na época de Tales, eles buscavam demonstrações abstratas para os seus teoremas.
>
> No início do período grego, esta procura de demonstrações não foi nada sistemática. Cada matemático baseava suas demonstrações em teoremas anteriores e em um certo fundo amorfo de conhecimentos matemáticos comuns. Foi só no auge do período clássico da Grécia que Aristóteles fez um balanço desta maneira de proceder e ficou insatisfeito.

Para Fossa (2001) Aristóteles raciocinou que em qualquer demonstração, relacionamos o teorema a ser demonstrado com certas razões que garantem a verdade do teorema. Mas, a demonstração será convincente somente se temos certeza sobre estas razões. Precisamos, portanto, de novas demonstrações para garantir a verdade das razões alegadas na demonstração original. Para tanto, precisamos de mais algumas demonstrações para garantir a verdade destas novas razões.

Não adianta, portanto, demonstrar tudo. Precisamos de um ponto de partida, um lugar seguro a partir do qual podemos iniciar as nossas demonstrações. Fossa (2001) afirma que esse ponto de partida são os postulados, ou seja, proposições que aceitamos sem qualquer demonstração. Mas se não podemos garantir a veracidade dos postulados mediante demonstrações, então os postulados tem de ser um tipo muito especial de proposição. Eles têm de ser intuitivamente óbvios. Os postulados devem ser tão óbvios que nenhum homem são os negaria. Postulados deste tipo, claros e obviamente verdadeiros, é a base segura que garante a verdade de todos os teoremas geométricos e, assim, a própria geometria é concebida como uma ciência de conhecimento seguro.

Muitos autores justificam a utilização da História da Matemática para responder alguns "porquês" nas aulas de matemática. A História da Matemática pode estar respondendo as questões dos alunos dando uma fundamentação ao conteúdo e à originalidade de certas coisas.

Quando está transmitindo um determinado tópico da matéria o professor pode ser questionado em relação à origem daquele conteúdo com perguntas do tipo: "quem inventou isso?"; "para que isso serve"; "quem foi este matemático?"; "como e quando surgiu esta idéia?"; "como foi possível chegar a este resultado?". E nem sempre o docente tem uma fundamentação teórica do conhecimento que está transmitindo. Isto pode ocasionar que ele não contemple que o conhecimento que está sendo transmitido passou por inúmeras modificações ao longo da história e não é algo pronto e acabado. É necessário que o professor tenha o domínio do conteúdo e conhecimentos sobre a história para não ensinar de modo que não responda apenas o "para quê', mas responda de modo que os alunos se conscientizem que a matemática está dentro de um processo evolutivo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), mencionam propostas alternativas para o Ensino da Matemática em sala de aula, tais como utilização de jogos, de softwares matemáticos e da História da Matemática. Em relação a esta última alternativa, eles posicionam que os "conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor informativo"; portanto a História da Matemática fornece, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

> "A Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento." (BRASIL, PCN de Matemática,1998).

Segundo indica os PCN´s uma abordagem histórica envolvendo os conteúdos matemáticos pode ser usado como um elemento motivador para a aprendizagem. O Teorema de Pitágoras tem um papel destacado na história da geometria e é clássico dentro da matemática; além do mais possibilitou diversas aplicações dentro e fora dos campos dessa ciência. Por essas razões, os livros didáticos deveriam apresentar um conteúdo histórico mais significativo em relação ao teorema de Pitágoras, mas isto ainda não acontece ou se acontece é de maneira pouco usual.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (BRASIL, 1998).

Para os PCN´s o professor deve desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o Teorema de Pitágoras. Isto ocorre devido que alguns conhecimentos precedem outros necessários e deve-se escolher certo percurso. A Matemática move-se quase exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações. Para demonstrar suas afirmações, o matemático emprega apenas raciocínios e cálculos

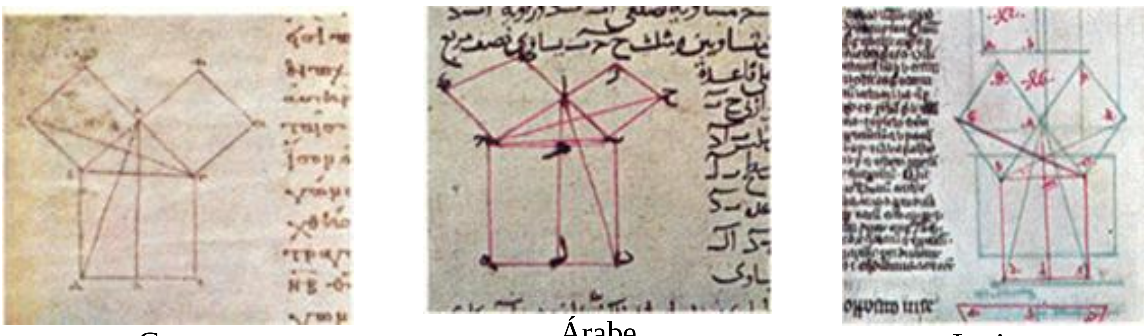
É certo que os matemáticos também fazem constante uso de modelos e analogias físicas e recorrem a exemplos bem concretos, na descoberta de teoremas e métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por um raciocínio lógico (BRASIL, 1998).

5. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

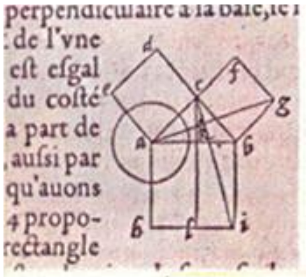
Serão apresentadas algumas provas interessantes do Teorema de Pitágoras, obtidas por mentes matemáticas brilhantes, tais como Bhaskara, Euclides e Pólya; e também de matemáticos amadores, como o ex-presidente americano J. A. Garfield ou do entusiasta pelas ciências H. Perigal.

O Teorema de Pitágoras ao longo da história tem sido demonstrado por várias civilizações e muitos matemáticos e estudiosos têm dado grande importância a demonstração deste teorema com centenas de provas já desenvolvidas. Estes fatos mostram sua importância e torna-o um excelente tema para discussão em sala de aula. A figura 3 traz alguns fragmentos de prova que percorreram o mundo e os tempos.

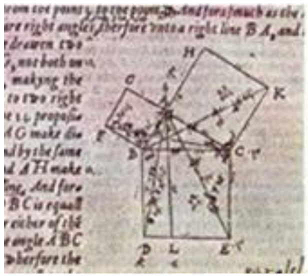
Figura 3: Prova do Teorema de Pitágoras por várias civilizações.



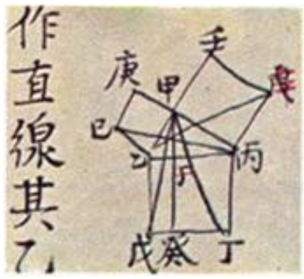
Grego Árabe Latino



Francês



Inglês



Chinês

O teorema de Pitágoras já era conhecido pelos egípcios e babilônicos bem antes dos gregos. Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: “Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa”. Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era cristã, sabia-se que os triângulos de lado 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos (LIMA, 1998).

Portanto, nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema, sendo a primeira demonstração creditada a Pitágoras ou a alguém da sua escola, o que dá no mesmo porque naquela época o conhecimento era comum e todo crédito era dado ao mestre.

A verificação da proposição para alguns casos particulares tornaram-na credível. Então é possível construir um triângulo retângulo onde a área do quadrado cujo lado é a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos. Podemos citar como exemplo o caso em que os catetos medem 5u (unidades) e 12u, e medirmos a hipotenusa obtendo 13u. Então confirmaríamos $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ que é 13^2 e assim existem outros casos particulares que aumentam a credibilidade da proposição. Mas bastaria apenas um caso que fosse contrário para que a preposição não fosse aceita como verdadeira (BARBOSA, 1993).

Para Barbosa (1993), a matemática possui muitos casos desta natureza, como o caso da fórmula matemática proposta para encontrar números primos, $p = n^2 + n + 11$, que é verdadeira para $n = 0, 1, 2, 3, ..., 9$ e falha para $n = 10$ onde encontramos 121, que é múltiplo do próprio 11, ou ainda $p = n^2 + n + 41$ que é correta para o espantoso número de 40 casos, mas não é verdadeira para $n = 40$, onde encontramos 1681 que é 41 x 41.

Na matemática para verificar a veracidade de uma proposição se faz necessário uma prova que seja válida para todos os casos. Essa é uma particularidade da matemática. Então para que a proposição referente ao teorema de Pitágoras seja válida, se faz necessário que ela seja verdadeira para qualquer triângulo retângulo. Só assim teremos um teorema.

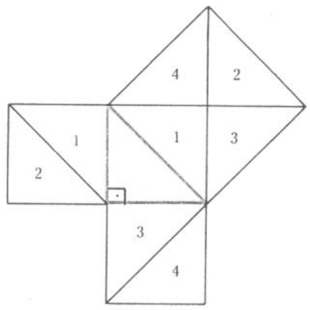
Existem dois tipos de prova para o Teorema de Pitágoras: provas algébricas e provas geométricas. As provas algébricas são baseadas nas relações métricas de um triângulo retângulo e as provas geométricas são baseadas em comparação de áreas.

6. PROVAS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Prova 1. Prova do Teorema de Pitágoras através de triângulos isósceles.

Observando a Figura 4, constituída de nove triângulos retângulos isósceles, todos iguais, observamos que, em volta do triângulo central existem três quadrados. Um formado pelo lado correspondente a hipotenusa e os outros dois formados com lados correspondentes aos catetos. Os triângulos retângulos isósceles que formam o quadrado que tem como lado a hipotenusa são os mesmo que formam os quadrados onde os lados são os catetos. Então podemos afirmar que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

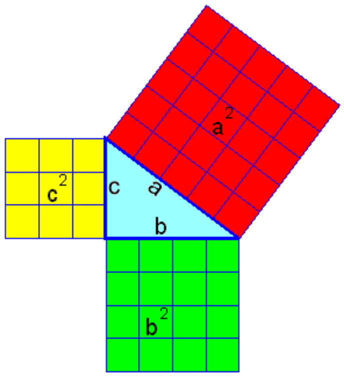
Figura 4. Prova do Teorema de Pitágoras através de triângulos isósceles



Prova 2. Prova do Teorema de Pitágoras através de quadriculações

Será que construindo em triângulos retângulos que não são isósceles esses três quadrados continuam obedecendo esta mesma proposição? Para responder esta pergunta vamos construir um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e consequentemente a hipotenusa medindo 5. Vamos construir quadrados sobre a hipotenusa e os catetos e fazendo quadriculações em cada quadrado construído, e verificar a veracidade da proposição, conforma a Figura 5.

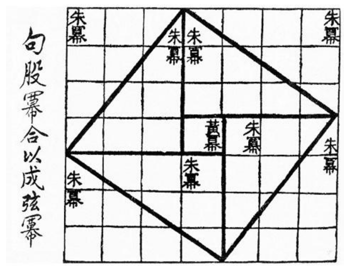
Figura 5. Prova do Teorema de Pitágoras através de quadriculações



Contando os quadradinhos em cada quadrado chegamos a 9, 16 e 25 quadradinhos de área e então como 9 + 16 = 25, chegamos ao mesmo resultado, ou seja, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

O que foi visto acima pode ser comparado com o quadriculado encontrado no Chou-pei, Figura 6. Fazendo um análise da figura podemos ver que cada triângulo tem área 6, e a área do quadradinho central é 1; portanto o quadrado grande tem área igual a 4 x 6 + 1 = 25 e então o comprimento do lado do quadrado da hipotenusa é 5, pois $5^2 = 25$ (Barbosa 1993).

Figura 6. Chou-pei: antigo trabalho chinês que pode ser designado matemático.



Prova 3. Prova Experimental

Cortando-se em uma folha de cartolina (ou papel – cartão) as seguintes figuras:

- 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (1)
- 1 quadrado de lado congruente a um dos catetos (2)
- 1 quadrado de lado congruente a outro cateto (3)
- 1 quadrado de lado congruente a hipotenusa (4)
- 2 quadrados de lado igual à soma dos catetos (5)

Fase preliminar

Agora vamos verificar por superposição com os alunos que os quatro triângulos são congruentes. Verifique por justaposição (encostando) as medidas das figuras, observando quais são iguais.

EXPERIÊNCIA

Fase 1

Por superposição cubra, portanto sem deixar espaços vazios, um dos quadrados (5) com os quadrados (2) e (3) e os triângulos (1), sem que haja remonte ou sobra (Figura 6)

Fase 2

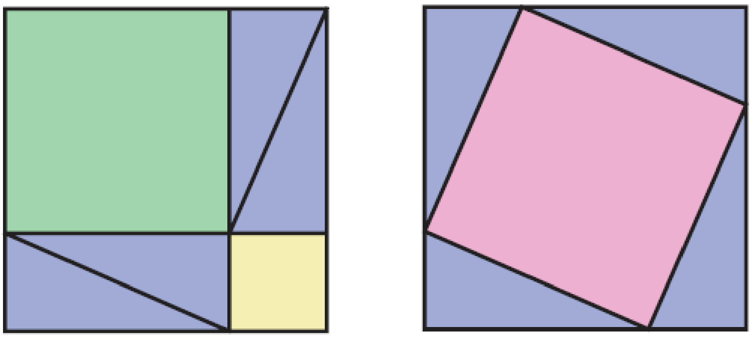
Por superposição cubra outro quadrado (5) com o quadrado (4) e os triângulos (1), sem remonte ou sobra (figura 6)

Fase 3

Analisando as figuras, podemos chegar a seguinte conclusão:

(área do quadrado 2) + (área do quadrado 3) = (área do quadrado 4) ou o padrão pitagórico: (soma das áreas dos quadrados dos catetos) = (área do quadrado da hipotenusa) Barbosa (1993).

Figura 7. Prova experimental do Teorema de Pitágoras



A prova 3 é do tipo geométrico e permite a participação do aluno na construção do material concreto como também na montagem do "quebra-cabeça". A interação do aluno com este tipo de demonstração permite despertar o seu interesse e aguçar a sua criatividade tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento.

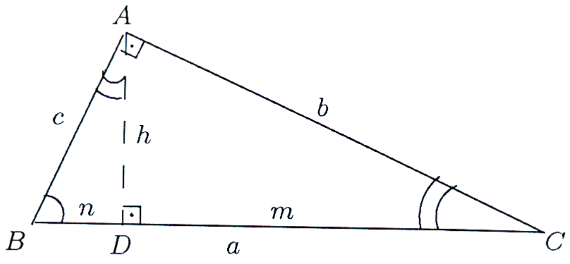
Prova 4. Prova Tradicional

Segundo Barbosa (1993), nos cursos tradicionais de geometria plana, como nos livros sem preocupação educacional, a prova empregada é a prova por semelhança de triângulos. Para Lima (1998), esta é a prova mais curta e também a mais conhecida.

No triângulo ABC, retângulo em A (Figura 8), a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\hat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\hat{C}$).

Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

Figura 8. Triângulo retângulo com as projeções dos catetos e a altura.



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

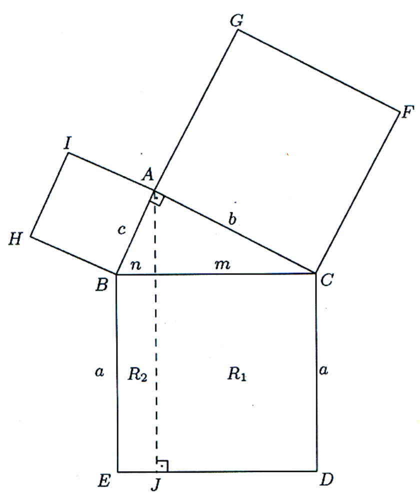
A expressão acima fornece $c^2 = an$ e $b^2 = am$, conhecidas como relações Métricas de Euclides. Adicionando-as obtemos $b^2 + c^2 = am + na = a(m + n) = a \times a = a^2$. (Barbosa, 1993).

Esta demonstração é a mais freqüente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar outras relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$ e $h^2 = mn$.

Prova 5.

Seja um triângulo ABC, construindo-se sobre os seus lados os quadrados BCDE, ACFG, ABHI e os segmento AJ, como mostra a Figura 9.

Figura 9



Na figura 9, R_1 é um retângulo cujos lados medem a e m, e R_2 é outro retângulo de lados medindo a e n.

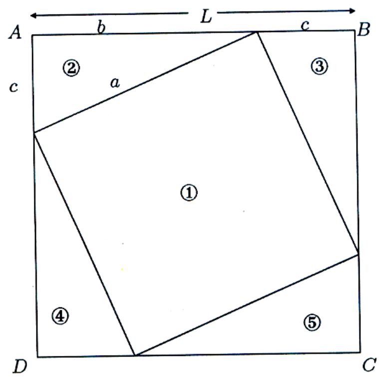
A área do retângulo de vértices BCDE é igual a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2, ou seja $a^2 = am + na$.

Observando a prova 1, temos que $am = b^2$, $an = c^2$, e assim temos que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova 6.

Construindo-se os triângulos 2, 3, 4, 5 e o quadrado 1 como podemos observar na figura 10.

Figura 10



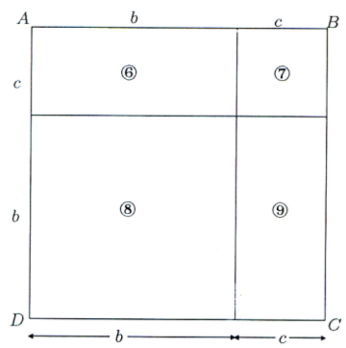
Os quatros triângulos construídos na figura 10 são todos congruentes entre si. E, portanto, têm a mesma área, dada por: $\frac{1}{2}bc$.

Da figura 10 ainda concluímos que área do quadrilátero ABCD é igual a soma das áreas do quadrado 1 com as áreas dos quatro triângulos congruentes entre si. Então temos:

$L^2 = a^2 + 4\frac{1}{2}bc = a^2 + 2bc$. (I)

Dividindo-se o quadrado ABCD como é mostrado na figura 10.

Figura 11



Observando a figura 10, temos que:

L^2 = área 6 + área 7 + área 8 + área 9 = $BC + c^2 + 2bc + c^2$ ou seja, $L^2 = b^2 + 2bc + c^2$ (II)

Comparando as equações (I) e (II), temos: $a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$. Então podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova 7.

Considerando o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c (figura 12), construindo-se a figura 13, onde BCDE é um quadrado de lado a.

Figura 12

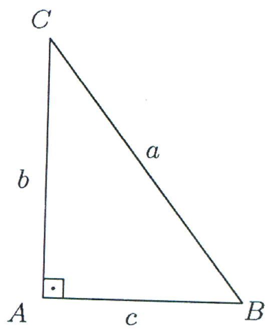
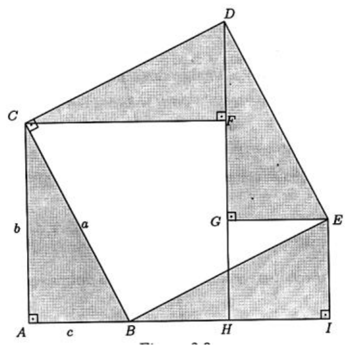


Figura 13



Na figura os quatros triângulos sombreados sãos congruentes entre si, resultando que $\overline{AB} = \overline{EI} = \overline{GE} = \overline{DF} = c$. Comparando-se as áreas da figura 11, temos:

Área (acfh) + ÁREA (GEIH) = área (BCFGEB) + 2áreas (ABC) = área(BCDE).

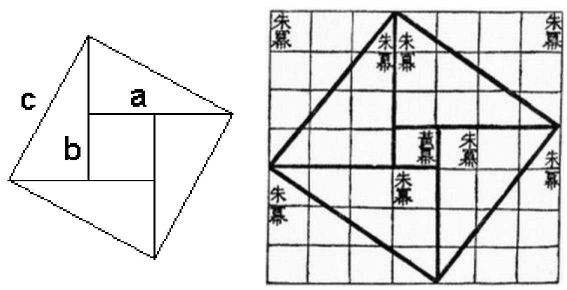
Logo podemos concluir que: $b^2 + c^2 = a^2$.

Prova 8. Prova De Bháskara

Segundo Barbosa (1993), Bháskara foi um matemático hindu que não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado “veja” “ou contemple”, talvez sugerindo que em seu diagrama a disposição induzia a uma bela prova do teorema de Pitágoras.

Procedendo de modo análogo a figura que aparece no Chou-pei[2], mais de forma geral, construindo os triângulos retângulo com hipotenusa a e catetos b e c. (figura 13).

Figura 14



No interior, ao centro, encontramos um quadrado de lado b – c. Temos por área que:

$a^2 = (b-c)^2 + 4\frac{bc}{2}$ ou $a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$ ou ainda $a^2 = b^2 + c^2$

[2] O **Chou Pei Suan Ching** é um dos mais antigos e famosos textos chineses sobre matemática. A tradução literal do título é **O Clássico de Aritmética do Gnômon e das Trajetórias Circulares do Céu.**

De acordo com a estratégia utilizada, esta demonstração pode ser do tipo geométrico ou do tipo algébrico, vai depender da estratégia utilizada. Acima utilizamos a demonstração algébrica.

O professor poderá organizar uma oficina de trabalho gráfico com seus alunos, utilizando uma sequencia didática com o padrão tipo Chou-pei, aumentando a credibilidade do padrão pitagórico com triângulos de catetos: 5 e 12, 6 e 8, 8 e 15, ou mesmo 2 e 6, concluindo com esta de Bhaskará que é geral.

Prova 9. Demonstração do Presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1981) era também general e também gostava de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras. (Lima 1998).

Analisando a figura 15 temos um trapézio que foi decomposto em três triângulos retângulos de lados a, b e c. Onde a área do trapézio com base a, b e altura a + b é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual á soma das áreas de três triângulos retângulos. Portanto

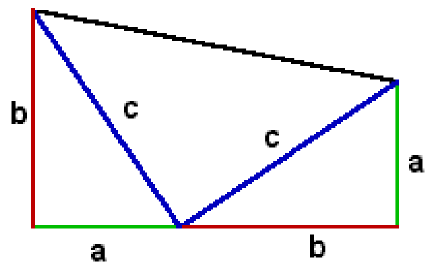
$$\frac{a+b}{2}x(a+b) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}$$

Mas podemos obter também à área pela soma das áreas dos triângulos:

$$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$

Comparando-as e multiplicando por 2, temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 15



O Presidente usou o conceito de comparação de áreas para provar o Teorema de Pitágoras. Assim como outras demonstrações também se utilizam deste conceito, mas elas se diferem por trabalharem como figuras planas distintas.

Prova 10. Prova de Polya

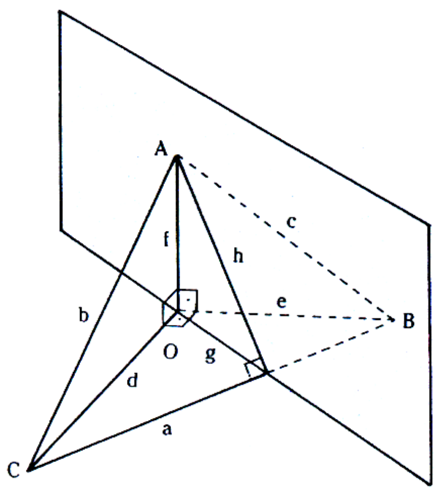
George Pólya (1887-1985) nasceu na Hungria e começou seus estudos em Direito. Entretanto, logo acho as ciências enfadonhas, mudando seus estudos para literatura e filosofia. E para entender com amplitude os conceitos filosóficos, acabou mudando novamente de curso, recebendo seu doutorado em Matemática no ano de 1912 (Cintra & Cintra 2003).

Atuou na Europa muito tempo, tendo trabalhando em várias áreas da matemática, como Teoria dos Números, Probabilidade e Astronomia. Por volta de 1914, Pólya é convocado para a guerra, algo que ele não aceitaria, pois havia adotado a doutrina filosófica de Russel. Temendo ser preso por anti-patriotismo, Pólya se muda para os Estados Unidos. Só retornaria à Hungrtia depois da II Guerra Mundial(CINTRA e CINTRA 2003).

Lima (1998) diz que no seu entender a demonstração mais inteligente do Teorema de Pitágoras não esta incluída entre as 370 colecionadas pelo Professor Loomis. Ela é encontrada no livro Induction na Analogy in Mathematics, de autoria do matemático húngaro George Polya.

Seja o tetraedro OABC tri-retângulo em O (Figura 16), portanto com as faces OAB, BOC e COA triângulos retângulos. Seja D a área da face triangular ABC: $D = a\frac{h}{2}$ ou $4D^2 = a^2h^2$.

Figura 16



Interceptamos o tetraedro com om plano contendo a altura e o vértice O. a interseção é um triângulo retângulo, sua hipotenusa mede h e os catetos f e g; então

$h^2 = g^2 + f^2$. Portanto: $4D^2 = a^2g^2 + a^2f^2 = 4A^2 + a^2f^2$, onde A é a área da face BOC oposta ao vértice A do tetraedro. Mas $a^2 = d^2 + e^2$ no triângulo BOC; então temos:

$$4D^2 = 4A^2 + (d^2 + e2)f^2 = 4A^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

Porém B = df/2 e C = ef/2 são as áreas dos triângulos COA e AOB respectivamente opostos aos vértices B e C.

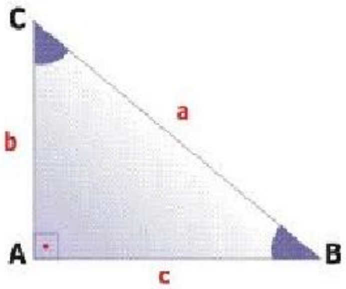
$$\text{Segue que } 4D^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 \text{ ou } D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Prova 11. Prova com a Fórmula de Heron

Heron (10?, 75) foi um geômetra e mecânico, viveu em Alexandria e tudo leva a crer que trabalhou (lecionando) no Museu de Alexandria.

A fórmula de Heron da área de um triângulo em função do semiperímetro p e lado a, b e c é dada por: Considere um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c como mostra a figura abaixo.

Figura 17



Pela fórmula de Heron, a área desse triângulo é dada por:

Área(ABC) = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Efetuando o produto dentro do radical, com p = $\frac{1}{2}(a+b+c)$, obtemos área(ABC) = $\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.

Por outro lado: área(ABC) = $\frac{1}{2}bc$.

Comparando essas duas equações, temos:

$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{1}{2}bc$, ou seja,

$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4b^2c^2$.

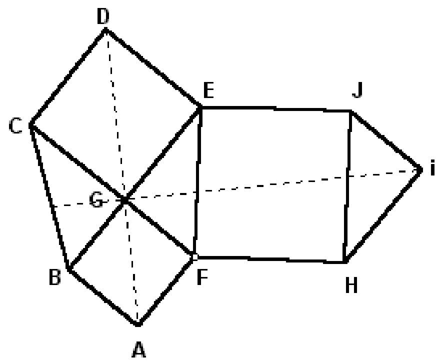
Rearrumando essa última expressão e efetuando as devidas simplificações, temos:

$(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 0$, logo $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova 12. Demonstração de Leonardo Da Vinci

Leonardo da Vinci nasceu na Itália em 15 de abril de 1452, pintor e escultor italiano um dos grandes gênios da humanidade, criador do quadro Mona Lisa também concebeu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que se baseia na figura 18.

Figura 18



Os quadriláteros ABCD, DEFA, GFHI e GEJI são congruentes. Logo os hexágonos ABCDEF e GEJIHF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado FEJH é a soma das áreas dos quadrados ABGF e CDEG Lima (1998).

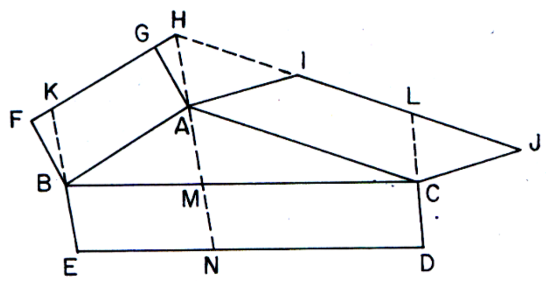
Da Vinci se baseou no princípio de comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos.

Prova 13. A Demonstração de Papus

Segundo Lima (1998), não se trata de uma nova demonstração mas de uma generalização bastante interessante do teorema de Pitágoras. Em vez de um triângulo retângulo, toma-se um triângulo arbitrário ABC; em vez de quadrados sobre os lados, tomam-se paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de CD ser paralelo a HA, e com o mesmo comprimento.

O teorema de Papus afirma que a área do paralelogramo BCDE é a soma das áreas de ADFG e AIJC. A demonstração se baseia na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento tem a mesma área.

Figura 19



Assim, por outro lado, AHKB tem a mesma área que ADFG e por outro lado, a mesma área que BMNE. Segue-se que as áreas de BMNE e ABFG são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de CDNM e CAIJ. Portanto, a área de BCDE é a soma das áreas de ABFG e CAIJ (LIMA 1998).

Para Lima (1998), o Teorema de Pitágoras é caso particular do de Papus. Basta tomar o triângulo retângulo ABC e três quadrados em lugar dos três paralelogramos.

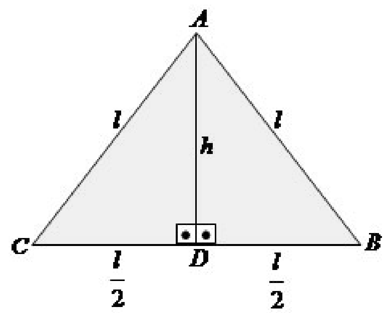
Prova 14. Demonstração com Triângulos Equiláteros

Vamos iniciar esta verificação para um triângulo bem especial, o triângulo de catetos 3 e 4 unidades e a hipotenusa consequentemente medindo 5 unidades. Agora ao invés de usar a quadriculação, vamos usar a triangulação e como fizemos nos quadrados, cada triângulo equilátero corresponde a uma unidade de área.

Verificando a figura podemos observar que a proposição foi verificada pois 9 +16 = 25. Porém podemos dizer que esse é um caso bem particular. Então procuraremos provas para triângulos equiláteros construídos com os lados de um triângulo retângulo qualquer.

Vamos inicialmente estabelecer a fórmula da área de um triângulo equilátero de lado qualquer (Figura 20).

Figura 20



Quando traçamos a altura de um triângulo equilátero que é também sua mediana e sua bissetriz, esta altura forma dois triângulos retângulos onde a altura é mediatriz da base; portanto aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \text{ ou que } h^2 = \frac{3l^2}{4} \text{ ou ainda } h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo uso da formula da área de um triângulo equilátero $A_l = \frac{bh}{2}$ e agora substituindo h por $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos $A_l = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

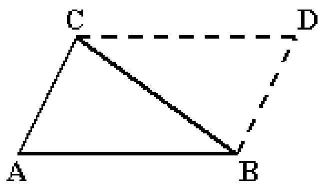
Para triângulos equiláteros construídos com os catetos b e c teremos respectivamente $A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ e $A_c = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$; somando temos $A_b + A_c = (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$. Como $b^2 + c^2 = a^2$, então podemos escrever $A_b + A_c = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ ou $A_b + A_c = A_l$; portanto o padrão pitagórico das áreas é validado para triângulos equiláteros.

Prova 15. Demonstração de Euclides

Pouco se sabe a respeito de Euclides de Alexandria.

A demonstração do Teorema de Pitágoras elaborada por Euclides é um exemplo do seu estilo matemático. Nesta demonstração Euclides socorre-se do seguinte teorema: A área de um triângulo é igual à metade da área de um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura.

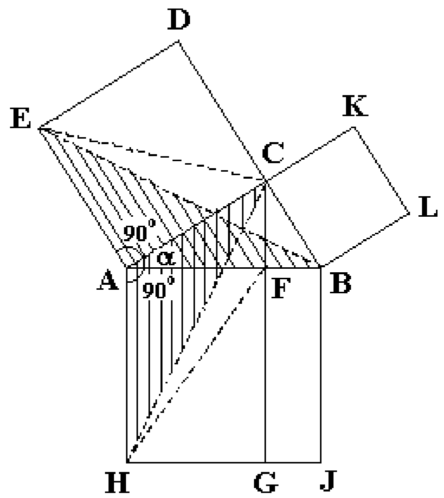
Figura 21



Para demonstrar, Euclides, primeiro, prova que em todo triângulo retângulo o quadrado construído sobre um cateto é igual ao retângulo que tem por lados a hipotenusa e a projeção, sobre esta, do cateto em questão.

Demonstração:

Figura 22



Considere-se o triângulo retângulo ABC. Vamos construir sobre o cateto AC o quadrado ACDE. Traçando FG = AH = AB, BD é uma reta já que os ângulos ACB e ACD são cada um igual a 90º.

Ligando-se E a A e H a C obtém-se:

EA = CA; AB = AH; e AB = AH; EÂB = CÂH

Por outro lado, ΔEAB = 1/2 EACD, pois ambos possuem a mesma base e se encontram entre as paralelas EA e DB. Verifica-se também que ΔCAH = 1/2 AHGF ambos possuem a base AH e CG.

Portanto,

1/2 EACD = 1/2 AHFG

logo EACD = AHFG, como queríamos demonstrar. Com isto o Teorema de Pitágoras é facilmente demonstrável, pois temos ACDE = AHGF e BCKL = BFGJ,

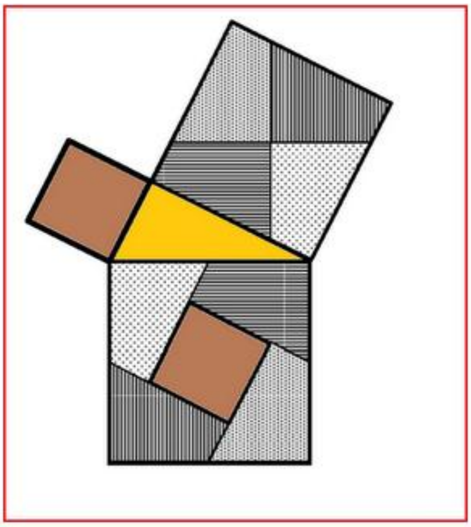
o que dá ACDE + BCKL = AHJB

Portanto, Euclides mostra desta forma puramente geométrica, que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Prova 16. Demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro de Londres, publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar ma figura abaixo. Trata-se de uma forma evidente de mostrar que soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 23



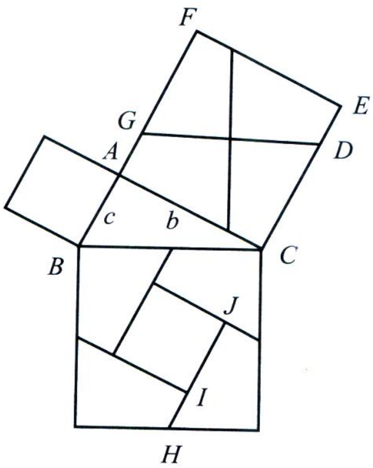
Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes, mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Observando a figura, vemos que é uma bela demonstração, mas devemos provar que a região que fica no interior do quadrado maior é realmente congruente com o quadrado menor.

Então vamos à prova!

1. Sejam AC = b e AB = c os lados dos quadrados construídos sobre os catetos. Como as quatro peças interiores ao quadrado ACEF são congruentes, sejam AG = DE = x.

Figura 24



Sendo BCDG um paralelogramo, BG = CD, ou seja, c + x = b – x, ou seja, c = b – 2x. Como HJ = GF = CD e HI = DE, temos IJ = HJ – HI = b – x – x = b – 2x = c.

2. Sejam: x – r, x e x + r os lados de um triângulo retângulo. Considerando r > 0, x + r é a hipotenusa e, portanto $(x + r)^2 = x^2 + (x - r)$. Desenvolvendo e simplificando, obtemos x = 4r. Portanto, os lados medem 3r, 4r e 5r.

3. Como os dois lados da desigualdade são positivos, observe as equivalências:

$b + c < a + h \Leftrightarrow (b + c)^2 < (a + h)^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc < a^2 + h^2 + 2ah \Leftrightarrow 2bc < h^2 + 2ah \Leftrightarrow 0 < h^2$.

A desigualdade é verdadeira.

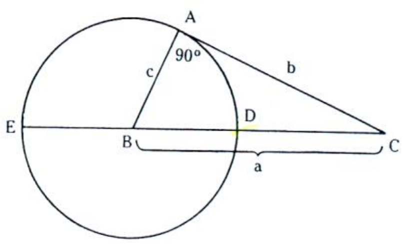
4. Sejam r_1, r_2 e r os raios dos círculos inscritos nos triângulos AHB, AHC e ABC. Esses três triângulos são semelhantes e, portanto $\frac{r1}{c} = \frac{r2}{b} = \frac{r}{a}$. Elevando ao quadrado e multiplicando por π, temos: $\frac{\pi r_1^2}{c^2} = \frac{\pi r_2^2}{b^2} = \frac{\pi r^2}{a^2}$. Como $b^2 + c^2 = a^2$, concluímos que $\pi r_1^2 + \pi_2^2 = \pi r^2$.

Prova 17. Prova de um Ex-Aluno

Barbosa (1993) diz que quando lecionava numa cidade do interior paulista, no Instituto de Educação local, após estudar com os alunos as relações métrica no circulo, um de seus alunos da então 4ª série ginasial (hoje correspondente ao 9º ano), apresentou em uma folha de caderno sua prova do teorema de Pitágoras. A demonstração era conseqüência de uma dessas relações e, mesmo que não inédita (parece ser de Hoffmann, 1821), mostrava criatividade e era a prova do interesse que o teorema despertava. Ainda segundo Barbosa (1993) a apresentação sucinta da prova do ex-aluno era a seguinte:

Considerando o triângulo BAC retângulo em A (fig. 13). Construindo-se a circunferência de centro em B e raio BA, que "corta" BC no ponto D. Como o ângulo A é reto, sei que CA é tangente à circunferência. Prolongando-se CB até encontrar a circunferência no ponto E; logo CE, é secante. Pela relação métrica entre secante e tangente temos a igualdade:

Figura 25

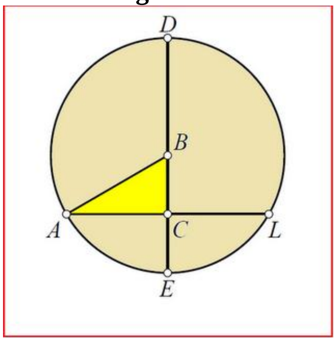


$CA^2 = CD \cdot CE$ ou $b^2 = (a - c)(a + c)$ ou $b^2 = a^2 - c^2$; portanto $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova 18. Demonstração baseada nas relações métricas da circunferência.

Esta demonstração do Teorema de Pitágoras baseia-se nas relações métricas da circunferência.

Figura 26



Considere o ΔABC (Figura 26). Tomando como centro o ponto B e raio igual a hipotenusa, traçamos uma circunferência.

A seguir prolongamos os catetos AC e BC, interceptando a circunferência nos pontos L, D e E respectivamente.

Pelo teorema das cordas, temos:

$$\overline{AC}\, x\, \overline{CL} = \overline{DC}\, x\, \overline{CE} \ (1)$$

$$\text{Note que: } \overline{DC} = \overline{DB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} \ (2)$$

$$\overline{CL} = \overline{AC} \ (3) \text{ e } \overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{BC} \ (4)$$

Substituindo (2), (3) e (4) em (1), segue que

$$\overline{AC}^2 = (\overline{AB} + \overline{BC})(\overline{AB} - \overline{BC}) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

$$\text{Logo, } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Demonstração retirada de: García Capitán, Francisco Javier. Algunas Demonstraciones del Teorema de Pitágoras.

7. TEOREMA RECÍPOCRO E CONTRÁRIO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Provamos o Teorema de Pitágoras com várias demonstrações. Mas a pergunta agora é: se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a, b e c é retângulo? Primeiramente, vamos enunciar o Teorema de Pitágoras: *"Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos"*. Agora surge outra pergunta: Qual deve ser o enunciado para que possamos ter o enunciado da proposição recíproca?

Barbosa (1993) sugere a preposição direta e inversa da seguinte forma:

Direta: Se um ângulo de um triângulo é reto, então o quadrado da medida do lado oposto é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Recíproca: Se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto é reto.

Devemos ter o cuidado de não colocar no enunciado da recíproca as palavras catetos ou hipotenusa, porque é bem possível que não esteja certo, pois já estaríamos admitindo que o triângulo é retângulo, desde que essas são denominações específicas de lados de um triângulo retângulo (BARBOSA, 1993).

Intuitivamente, pensamos que as preposições acima são verdadeiras. Mas, devemos demonstrar.

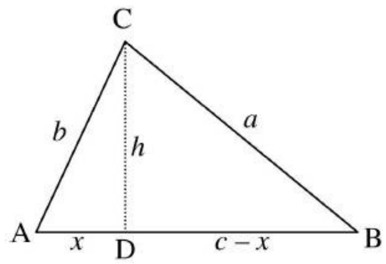
Vamos a Prova:

Considerando-se o triângulo ABC, com AB = c, BC = a e CA = b para qual temos, por hipótese, $a^2 = b^2 + c^2$.

1º Caso: $\hat{A} < 90°$

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam AD = x e CD = h

Figura 27



Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$.

Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

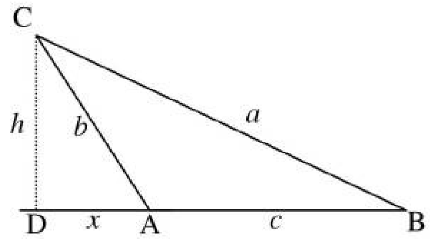
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, o que contradiz a condição inicial.

2º Caso: $\hat{A} > 90°$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.

Figura 28



Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$., novamente contradizendo a condição inicial. Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c.

$A < 90° \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

$\hat{A} > 90° \rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\hat{A} = 90°$.

Existe um grande número de demonstrações para provar o Teorema de Pitágoras, e as demonstrações aqui expostas são oriundas de diversos autores e servem como alguns exemplos notórios de como se demonstrar o Teorema de Pitágoras. Em seu livro "Meu Professor de Matemática e outras histórias", Elon Lages Lima comenta que o professor de matemática norte-americano Elisha Scott Loomis conseguiu, em 1940, catalogar, ao todo, 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras, dividindo-as em algébricas (baseadas nas relações métricas) e provas geométricas (envolvendo a comparação entre áreas).

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras é tido como um dos mais importantes teoremas da Geometria Plana. Desde a Antiguidade, muitos estudiosos têm dele se ocupado, desenvolvendo relações voltadas a atividades diárias ligadas a agrimensura, arquitetura, edificações, urbanização, física, dentre outras áreas, inclusive a própria matemática.

Durante a estruturação deste trabalho, fomos estimulados a caminhar através de textos didáticos, que nos propiciaram ampliação de conhecimentos, bem como compreender o que está subentendido nas entrelinhas.

A idéia, que não é original, tomou forma, diante da curiosidade em estudar outras formas de abordagens do referido teorema, dentre inúmeras existentes, e posteriormente, divulgar algumas dessas demonstrações. Até os dias de hoje, para grande parte dos alunos, o Teorema de Pitágoras, em princípio, deixa a impressão, quase certeza, de que a sua obtenção se dá segundo a sua demonstração tradicional. Esse fato também é verdade para grande parte dos professores que ensinam esse assunto. Nesse sentido, o professor deve ser perseverante e, em suas abordagens, reservar espaços para atividades que envolvam aspectos dedutivos, demonstrativos, se possível relacionando tais conteúdos com a sua evolução através dos tempos.

Aproveitamos então a oportunidade, e realizamos um relato do ponto de vista histórico, sobre datas significativas, fatos relevantes, personagens importantes, relacionados ao tema em tela. Com isso, além da matemática correspondente, um pouco de história, devidamente relacionada e narrada, acompanhada de algumas notas biográficas informativas complementares, dá ao trabalho um perfil seguramente valorizado pelas correntes da educação matemática.

Procuramos conduzir esse trabalho, na perspectiva de contribuir com a melhoria do ensino de matemática, na expectativa de que o mesmo sirva como fonte de consulta para atividades educacionais, novas investigações e sugerimos sua leitura a professores de Matemática, de Prática de Ensino e acreditamos fortemente que pode servir propostas de atividades a serem refletidas e conduzidas nos Laboratórios/Oficinas de Matemática, no ensino do Desenho Geométrico e porque não, nas atividades de Educação Artística.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.** São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

CINTRA, C. de O.; CINTRA, R. J. de S. **O teorema de Pitágoras.** 1. ed. Recife: O Autor, 2003. 93p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: EDUEPA, 2001. 181p.

KAHN, C. H. **Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história.** Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 1993. 233p.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, A. **Temas e Problemas Elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256p.

RUSSEL, B. apud STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.** Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. 82p.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.** Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. 82p.