



**Universidade Estadual da Paraíba**

Centro de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

**JOSÉ DE ANCHIETA DE MELO**

**TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS**

CAMPINA GRANDE – PB

2014

## **JOSÉ DE ANCHIETA DE MELO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado (a) em Matemática.

**Orientador:** Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande – PB

2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

M528t Melo, José de Anchieta de.  
Triângulos obliquângulos [manuscrito] / José de Anchieta de Melo. - 2014.  
30 p. : il.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. História da matemática. 2. Trigonometria. 3. Triângulo. I.  
Título.

21. ed. CDD 516.24

**JOSÉ DE ANCHIETA DE MELO**

**TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado (a) em Matemática.

Aprovado (a) em: 30/04/2014

**Banca Examinadora:**

*Fernando Luiz Tavares da Silva*

**Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva**

Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB

Orientador

*José Lamartine da Costa Barbosa*

**Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa**

Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UEPB

Examinador

*Núbia do Nascimento Martins*

**Prof. Esp. Núbia do Nascimento Martins**

Departamento de Matemática e Estatística – CCT/UEPB

Examinador

"Escrevo para que o aprendiz possa sempre aperceber-se do fundamento interno das coisas que aprende, de tal forma que a origem da invenção possa aparecer e, portanto, de tal forma que o aprendiz possa aprender tudo como se o tivesse inventado por si próprio"

**(LEIBNIZ)**

Dedico esse trabalho aos meus pais Maria Nunes de Melo (in memoriam), Severino Ferreira de Melo (in memoriam), minha esposa, filhos e todos que me apoiaram nessa longa e gratificante jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela realização deste trabalho, aos meus familiares, aos meus amigos, companheiros de curso e aos professores que sempre me apoiaram no decorrer da minha vida acadêmica em especial ao meu professor e orientador que tanto ajudou nas pesquisas, mediante paciência, compreensão e estímulo no acompanhamento da evolução do mesmo.

## RESUMO

Nesse trabalho, voltamos nosso olhar para a Trigonometria, mais precisamente em *Triângulos Obliquângulos*, como poderíamos ter escolhido alguma fração da Geometria Plana, Geometria Espacial, Análise Combinatória, Probabilidade, Matemática Financeira, por apresentarem obstáculos semelhantes.

Para que exista um percentual de aprendizagem, pelo menos razoável, é preciso que no mínimo, todo o conteúdo do tema em questão seja lecionado. Embora seja grande o número de docentes que cumprem o conteúdo programático em toda sua plenitude, existem outros tantos que não o fazem por n-fatores.

Por fim, esperando ter atendido as formalidades para obtenção do título de licenciado em Matemática, ficamos também na expectativa que essa modesta contribuição, possa despertar o interesse por essa área de estudo e estimule o desenvolvimento de outras ideias dentro da Matemática, bem como em outras áreas de conhecimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** História, Trigonometria, Triângulo, Oficinas e Aplicações.



## **ABSTRACT**

In this work, we turn our gaze to trigonometry, more precisely in Triangles Obliquângulos as we might have chosen some fraction of Plane Geometry, Spatial Geometry, Combinatorial Analysis, Probability, Financial Mathematics, because of their similar obstacles. For there to be a percentage of learning at least reasonable, it is necessary that at least the whole theme of the content in question is taught. Although large number of teachers who meet the curriculum in all its fullness, there are so many who do not n-factors. Finally, hoping to have attended the formalities for obtaining the bachelor's degree in mathematics, were also in the hope that this modest contribution, can arouse interest in this area of study and encourage the development of other ideas in mathematics and in other knowledge areas.

**KEYWORDS:** History, Trigonometry, Triangle, workshops and Applications.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>1.0 - FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA</b> .....	10
<b>2.0 – ESTUDO DOS TRIÂNGULOS</b> .....	16
<b>2.1–TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS (Triângulos Quaisquer)</b> .....	18
<b>2.1.1– Lei dos Senos</b> .....	18
<b>2.1.2–Lei dos Cossenos</b> .....	18
<b>2.1.3–Teorema da Área</b> .....	20
<b>2.1.4 - Teorema das Projeções</b> .....	21
<b>3.0 – APLICAÇÕES</b> .....	23
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	29
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	30

## INTRODUÇÃO

É verdade que um grande número de problemas envolvendo Trigonometria são resolvidos através da comparação com triângulos retângulos. Mas se o triângulo não for retângulo, o que deve ser feito?

Foi com esse intuito, ou seja, de difundir outras relações que permitem resolver situações diversas encontradas no cotidiano, que *Triângulos Obliquângulos* foi eleito como tema a ser desenvolvido nesse trabalho.

Em seu desenvolvimento, através de exemplos e aplicações, podemos perceber claramente, a importância das relações sublinhadas: Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Teorema da Área e o Teorema das Projeções. De fato, sem elas, muitos dos problemas propostos pelos livros didáticos, que representam situações encontradas naturalmente, não poderiam ser solucionados.

Por falar em livro didático, boa parte dos que abordam o estudo sobre *Triângulos Quaisquer*, enfatizam apenas a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, o que explica o quase total desconhecimento sobre os dois últimos teoremas; Teorema da Área e o Teorema das Projeções, tanto por parte dos alunos dos cursos de graduação e até mesmo de professores que lecionam no Ensino Médio. Ainda, no nosso ponto de vista, notamos que em alguns livros, a Lei dos Senos é mostrada, parcialmente na forma  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$ , e para tal,

sugerimos que seja  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$ .

Buscar exemplos e aplicações que se aproximem das situações vivenciadas pela sociedade, se torna gratificante no momento em que se identifica o interesse do aluno em participar e aprender a escutar o que o professor está querendo dizer sobre o que foi previamente selecionado, bem diferente de alguns modelos educacionais que ainda resistem, mas que aos poucos, vão sendo deixados de lado. Mediante a necessidade de representarmos, interpretarmos ou estimarmos uma situação real, buscamos auxílio no Desenho Geométrico, na Geometria Plana, na Geometria Espacial, na Física, na Estatística, etc.

Durante nosso estudo, foi possível destacar dentre outros tantos, alguns aspectos extremamente importantes na formação profissional, em especial na formação de um educador em matemática, tais como: estudar com regularidade, ser assíduo, pontual, valorizar uma definição, aprender a ouvir, argumentar, demonstrar.

## 1.0 - FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

O vale fértil do Tigre e do Eufrates foi um dos primeiros locais da sociedade humana. Foi lá que a arte de escrever foi inventada — marcas em cunha (“cuneiforme”) impressas com um estilete de junco em placas de argila mole, a qual era posta a secar, ao sol ou em fornos, para durarem. Essas placas eram de dimensões variadas, desde as pequenas do tamanho de cartas de baralho até as do tamanho de um livro, normalmente preenchidas na frente e no verso — e algumas vezes nos lados. Cerca de meio milhão de placas foram desenterradas, das quais somente algumas poucas centenas são de matemática. Estas últimas são de dois períodos, 1800 — 1600 a.C. (o período “babilônico antigo”, grosseiramente da dinastia Hamurabi) e de 300 a.C. ao início da presente era (período selêucida).

As exigências do comércio determinaram o desenvolvimento de uma classe especial de escribas, que recebiam um treinamento formal em escrita (em akadiano e no antigo sumeriano) e em matemática (aritmética, equações lineares em duas ou mais variáveis, equações do 2º grau e coisas afins, naturalmente de aplicações práticas). O sistema que era altamente racional para denotar números, permitia-lhes fazer cálculos com números escritos e isto os tornava capazes de fazer cálculos com facilidade, o que outras antigas culturas não conseguiam.

O papel da geometria na Babilônia foi bastante insignificante e não existiu como uma disciplina separada. Existiam tabelas de “coeficientes” para fabricação de tijolos, carregamento de navios, construção de paredes, triângulos, segmentos de um círculo, análise de cobre, ouro e para outras coisas mais, presumivelmente, cálculos de engenharia civil e comércio. Embora a área de um círculo muitas vezes fosse tomada como sendo  $3r^2$ , o valor  $3\frac{1}{8}$  para  $\pi$  já era conhecido. Uma tabela de “coeficientes” foi encontrada fornecendo a área do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular, do hexágono e do heptágono em função do quadrado da medida do lado. Uma vez que o conceito aritmético de razão existia — havia uma denominação especial para razão — talvez não seja surpresa que o conceito de semelhança para figuras geométricas fosse usado. A concepção de prova ou demonstração, tão proeminente na geometria grega, era inteiramente ausente.

Os egípcios construíram as pirâmides em uma época bem remota. Certamente um povo engajado em empreendimentos de tal magnitude deveria saber alguma matemática — pelo menos para fins práticos.

Todos os escritores gregos são unânimes ao atribuírem, sem inveja, aos egípcios, a prioridade da invenção das ciências matemáticas. Platão, em Fedro, diz: “Na cidade egípcia de Naucrates havia um famoso e velho deus cujo nome era Teutro, o pássaro que é chamado Íbis era sagrado para ele, e foi inventor de muitas artes, como a aritmética, o cálculo, a geometria e a astronomia, o jogo de damas e de dados. Mas sua maior descoberta foi o uso das letras”.

Aristóteles diz que a matemática teve o seu nascimento no Egito, porque lá a classe sacerdotal dispunha de toda a ociosidade para o seu estudo. A geometria, em particular, segundo Heródoto, Diódoro, Diógenes, Laércio, Jâmblico, e outros escritores antigos, originou-se no Egito. Em Heródoto encontramos isto (II. C 109), “Eles disseram também que este rei (Sésotris) dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a doar a cada pessoa um quadrângulo de mesmo tamanho, e para extrair disto dividendos pela imposição de uma taxa anual de impostos. Mas, cada um dos que o rio tirou algum pedaço de terra, foi até ele e notificou o que acontecia, ele então mandou observadores, os quais tinham que resolver o quanto ficou menor cada parte e, assim, estipular o que cada um devia proporcionalmente ao que sobrava das suas terras, levando em conta a taxa anual estabelecida. Deste modo me parece, originou-se a geometria, que então passou para Helas.”.

Por volta do sétimo século a.C. um ativo intercâmbio comercial expandia-se entre a Grécia e o Egito. Naturalmente havia uma troca de ideias, bem como de mercadorias. Os gregos, sedentos de conhecimento, procuram os sacerdotes egípcios para se instruírem. Tales, Pitágoras, Cenópides, Platão, Demócrito, Eudoxo, todos visitaram a terra das pirâmides. As ideias egípcias eram então transportadas por mar e, ao chegarem ao destino, estimularam o pensamento grego, direcionando-o para novas linhas de pensamento, dando, assim, aos gregos uma base em que pudessem trabalhar. A cultura grega, portanto, não é original. A Hélade tem uma dívida com os povos mais antigos, não só em matemática e artes. A Grécia está em débito com o Egito, entre outras coisas, no que diz respeito à geometria elementar. Mas isto não diminui a nossa admiração pelo pensamento grego. A partir do momento em que os filósofos helênicos predispuseram-se ao estudo da geometria egípcia, esta ciência adquiriu radicalmente um aspecto diferente. “Qualquer que seja o que nós gregos aceitamos, melhoramos e aperfeiçoamos”, diz Platão. Os egípcios levaram a geometria não mais além do que o absolutamente necessário para os seus desejos. Os gregos, ao contrário, possuíam uma forte tendência especulativa. Tinham um sentimento arraigado de descobrir as razões das

coisas. Encontravam prazer na contemplação de relações ideais, e amavam a ciência como ciência.

Nossas fontes de informações sobre a história da geometria grega antes de Euclides consistem em meras e esparsas notícias dadas pelos escritores antigos. Os primitivos matemáticos Tales e Pitágoras não deixaram qualquer registro de suas descobertas. Uma história completa da geometria e astronomia gregas durante este período, escrita por Eudemo, um aluno de Aristóteles, perdeu-se no tempo. Era muito bem conhecida por Proclo, que, em seus comentários sobre Euclides, nos deixou um breve apanhado da matéria. Este resumo é a nossa mais confiável informação a respeito. Vamos nos referir frequentemente a esse texto usando o título Sumário Eudemiano.

A Tales (640 — 546 a.C), de Mileto, um dos “sete sábios” e fundador da escola jônica, cabe a honra de ter introduzido na Grécia o estudo de geometria. Durante o seu período de meia-idade dedicou-se ao comércio, o que o levou até o Egito. Consta que ele passou alguns anos lá, e assim estudou com os sacerdotes egípcios as ciências físicas e matemáticas. Plutarco diz que Tales logo superou seus mestres e agradou o rei Amasis por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides com a ajuda de suas sombras. De acordo com Plutarco, isto foi feito por que a razão do comprimento da sombra de um bastão vertical para o comprimento da sombra da pirâmide é igual a razão entre as alturas do bastão e da pirâmide. Esta solução pressupõe um conhecimento de proporção que o papiro de Ahmes mostra que os egípcios possuíam. Segundo Cajori (2007), as pirâmides foram medidas por Tales de modo diferente; a saber, medindo o comprimento da sombra da pirâmide e no momento em que o comprimento da sombra do bastão é igual à altura deste. Provavelmente os dois métodos foram usados, isto é, um deles, medindo a sombra da pirâmide a qualquer momento, e o outro quando a sombra e altura do bastão são iguais.

O Sumário Eudemiano aponta Tales como o inventor dos teoremas da igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, do da bissetção de um círculo por seu diâmetro, e o da congruência de dois triângulos que possuam um lado igual e dois ângulos adjacentes a esse lado também iguais. Este último teorema, combinado (temos razões para suspeitar) com o teorema de triângulos semelhantes, foram aplicados por Tales para medir as distâncias dos navios à praia. Assim, Tales foi o primeiro a aplicar a geometria usos práticos. O teorema que diz em ser retos os ângulos inscritos num semicírculo é atribuído por alguns escritores antigos a Tales e a Pitágoras, por outros. Tales estava indubitavelmente familiarizado com outros teoremas, não assinalados por outros historiadores. Tem sido inferido que ele sabia que a

soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos e que os lados dos triângulos equiláteros são proporcionais. Os egípcios devem ter feito uso desses teoremas nas suas construções, como assinala o papiro de Ahmes, mas foi deixada para os filósofos gregos a tarefa de provar as suas verdades que outros viram mas não formularam em palavras, de forma explícita, em expressão abstrata e as colocaram em linguagem científica, sujeitas à prova que outros meramente sentiram ser verdade. Pode-se dizer que Tales criou a geometria de superfícies e os rudimentos da geometria dos sólidos, ou seja, aspectos empíricos do seu caráter.

Já Pitágoras (580? — 500? a.C.) foi uma daquelas figuras históricas que, exercendo sempre impressões na imaginação de sucessivas épocas, a tal ponto que, as suas vidas verdadeiras ficam difíceis de serem separadas do véu místico que as cercam. O seguinte registro sobre Pitágoras exclui as mais duvidosas passagens de sua vida. Ele foi nativo de Samos, e, levado pela fama de Perecides, transferiu-se para ilha de Siros. Lá então visitou o velho Tales, que o aconselhou a estudar no Egito. Pitágoras por muitos anos visitou Egito, e pode ser que tenha conhecido a Babilônia. De volta a Samos, achou-se sob a tirania de Polícrates. Não tendo sucesso em fundar aí uma escola, deixou novamente a terra de nascimento e, seguindo a moda da época, isto é, a corrente da civilização, dirigiu-se para a Magna Grécia, no sul da Itália. Estabeleceu-se em Crotona, e fundou a famosa escola pitagórica. Esta não era apenas uma academia para o ensino de filosofia, matemática e ciência natural, mas sim, uma irmandade, cujos membros estavam unidos no viver. Esta irmandade tinha procedimentos de conduta bem próximos das peculiaridades maçônicas. Seus membros estavam proibidos de divulgar suas descobertas e as doutrinas da sua escola. Portanto, somos obrigados a falar dos pitagóricos como uma entidade única, sem possibilidade de creditar a algum dos seus componentes uma descoberta particular. Os próprios pitagóricos tinham por hábito atribuírem ao fundador da seita as descobertas da irmandade.

Semelhante à geometria egípcia, a geometria dos pitagóricos estava muito voltada para o cálculo de áreas. É atribuído a Pitágoras o importante teorema do quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo ser igual a soma dos quadrados dos catetos. Ele provavelmente aprendeu dos egípcios a verdade do teorema no caso especial em que os lados são 3, 4 e 5.

O teorema sobre a soma dos três ângulos de um triângulo, presumivelmente conhecido por Tales, foi provado pelos pitagóricos e em seguida pela maneira dada em Euclides. Os pitagóricos demonstraram também que em torno de um ponto, um plano pode ser coberto

completamente por seis triângulos equiláteros, quatro quadrados, ou três hexágonos regulares, de modo que seja possível dividir o plano em figuras de qualquer tipo.

Do triângulo equilátero e do quadrado constroem-se os sólidos regulares: o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo. Estes sólidos eram, com toda probabilidade, conhecidos dos egípcios, exceto, talvez, o icosaedro.

Euclides de Alexandria (360 a.C. – 295 a.C.) foi um professor, matemático platônico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Ele era ativo em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I (323-283 a.C.). Sua obra *Os Elementos* é uma das mais influentes na história da matemática. Nessa obra, os princípios do que é hoje chamado de geometria euclidiana, foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. Euclides também escreveu obras sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor.

Algumas das suas obras como *Os elementos*, *Os dados*, outro livro de texto, uma espécie de manual de tabelas de uso interno na Academia e complemento dos seis primeiros volumes de *Os Elementos*, *Divisão de figuras*, sobre a divisão geométrica de figuras planas, *Os Fenômenos*, sobre astronomia, e *Óptica*, sobre a visão, sobreviveram parcialmente e hoje são, depois de *A Esfera de Autólico*, os mais antigos tratados científicos gregos existentes. Pela sua maneira de expor nos escritos deduz-se que tenha sido um habilíssimo professor.

Não há menção de Euclides nas primeiras cópias ainda remanescentes de *Os Elementos*, e a maioria das cópias dizem que são "a partir da edição de Theon" ou as "palestras de Theon", enquanto o texto considerado primário, guardado pelo Vaticano, não menciona qualquer autor. A única referência que os historiadores se baseiam para Euclides ter escrito *Os Elementos* veio de Proclo, que brevemente em seu comentário sobre *Os Elementos* atribui Euclides como o seu autor.

*Os Elementos* de Euclides contêm 465 proposições nos treze livros que estão organizados da seguinte maneira:

Livro I: Ensina a grosso modo sobre triângulos, começando com definições, axiomas e postulados onde as quarenta e oito proposições são divididas em três grupos: o primeiro possuindo 26 proposições abordando propriedades do triângulo e teoremas de congruência, o segundo possuindo cinco proposições abordando a teoria das paralelas provando que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, o terceiro possuindo quatorze proposições abordando paralelogramos, triângulos quadrados (dando especial atenção a relação entre áreas), finalizando o restante das proposições com o teorema de Pitágoras.



Livro II: Ensina sobre Álgebra Geométrica (incluindo os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas) e apresentam quatorze proposições que tratam de transformações de áreas.

Livro III: Contém trinta e nove proposições com diversos teoremas familiares sobre círculos, circunferências, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.

Livro IV: Polígonos Inscritos e Circunscritos.

Livro V: Estudo geométrico das proporções.

Livro VI: Semelhança de polígonos.

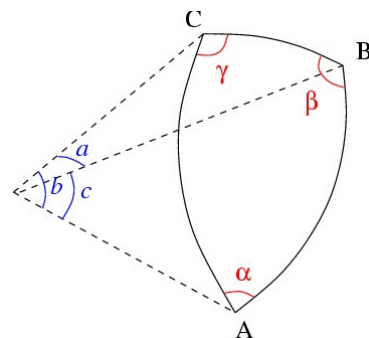
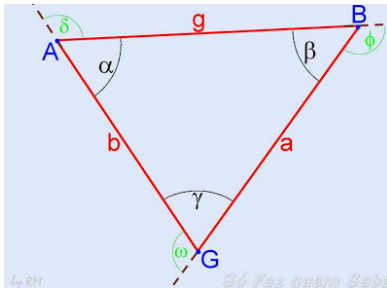
Livro VII a IX: Aritmética (teoria dos números).

Livro X: Comprimentos de segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado (irracionais).

Livro XI a XIII: Geometria espacial.

## 2.0 – AGORA PASSAMOS PARA O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS

No plano, triângulo (também aceito como trilátero) é a figura geométrica que ocupa o espaço interno limitado por três linhas retas que concorrem, duas a duas, em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos que somam  $180^\circ$ . Também se pode definir um triângulo em superfícies gerais. Nesse caso, são chamados de triângulos geodésicos e têm propriedades diferentes. Também podemos dizer que o triângulo é a união de três pontos não colineares (pertencente a um plano, em decorrência da definição dos mesmos), por três segmentos de reta.



O triângulo é o único polígono que não possui diagonais e cada um de seus ângulos externos é suplementar do ângulo interno adjacente. O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos seus lados. Denomina-se a região interna de um triângulo de região convexa (curvado na face externa) e a região externa de região côncava (curvado na face interna).

### Tipos de triângulos

Os triângulos mais simples são classificados de acordo com os limites das proporções relativas de seus lados e de seus ângulos internos:

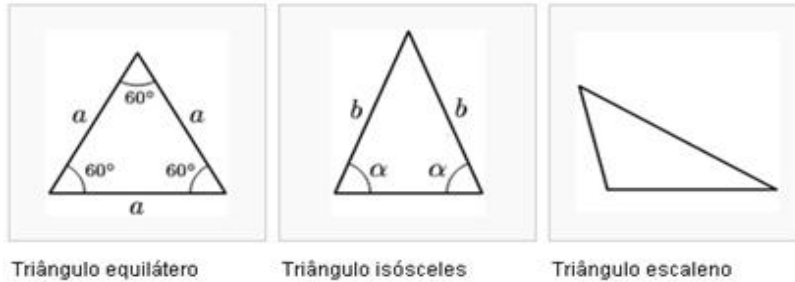
Um triângulo equilátero possui todos os lados congruentes, ou seja, iguais. Um triângulo equilátero é também equiângulo: todos os seus ângulos internos são congruentes (medem  $60^\circ$ ), sendo, portanto, classificado como um polígono regular.

Um triângulo isósceles possui pelo menos dois lados de mesma medida e dois ângulos congruentes. O triângulo equilátero é, conseqüentemente, um caso especial de um triângulo isósceles, que apresenta não somente dois, mas todos os três lados iguais, assim como os ângulos, que medem todos  $60^\circ$ . Num triângulo isósceles, o ângulo formado pelos lados

congruentes é chamado ângulo do vértice. Os demais ângulos denominam-se ângulos da base e são congruentes.

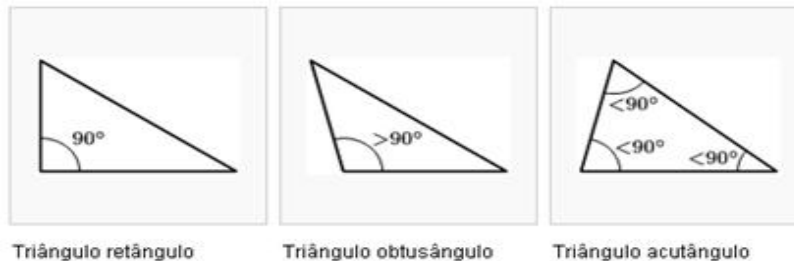
Em um triângulo escaleno, as medidas dos três lados são diferentes. Os ângulos internos de um triângulo escaleno também possuem medidas diferentes.

Denomina-se base o lado sobre qual se apoia o triângulo. No triângulo isósceles, considera-se base o lado de medida diferente.



Todos esses triângulos são os mesmos encontrados num plano de duas dimensões, porém em grandes extensões, como na superfície do planeta por exemplo. Os ângulos para continuarem os mesmos é necessário que o comprimento dos lados sejam deformados, ou seja, ampliados em igual proporção ao perímetro da esfera.

Um triângulo retângulo possui um ângulo reto. Num triângulo retângulo, denomina-



se hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se catetos. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares (ou seja, sua soma é igual a 90°).

Um triângulo obtusângulo possui um ângulo obtuso e dois ângulos agudos.

Em um triângulo acutângulo, os três ângulos são agudos (formando 180°).

Condição de existência de um triângulo

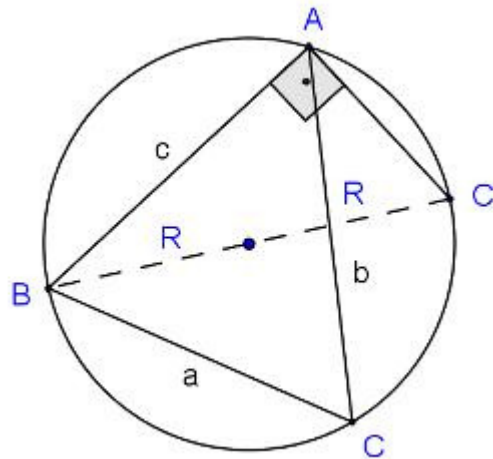
Para que se possa construir um triângulo é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas.

$$|b - c| < a < b + c$$

## 2.1–TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS (Triângulos Quaisquer)

### 2.1.1– Lei dos Senos

Em qualquer triângulo, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto, é igual a duas vezes o raio da circunferência circunscrita.



Demonstração:

Note que  $\hat{C} \cong \hat{C}'$ , pois geram o mesmo arco  $AB$ .

No  $\Delta ABC'$ ,  $\text{sen } \hat{C}' = \frac{c}{2R}$  pois  $ABC'$  é retângulo em  $A$ .

Como  $\hat{C}' \cong \hat{C}$ , temos que  $\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$

Estendendo aos outros vértices, vem:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

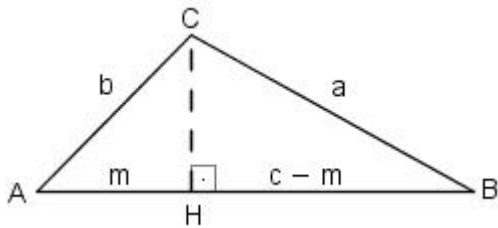
### 2.1.2–Lei dos Cossenos

Em todo triângulo, o quadrado da medida de um de seus lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração:

1º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , acutângulo, e  $\overline{CH} = h$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .



Mas  $m = b \cos A$ .

Assim:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos C$$

$$\Delta BCH : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \quad (I)$$

$$\Delta ACH : h^2 = b^2 - m^2 \quad (II)$$

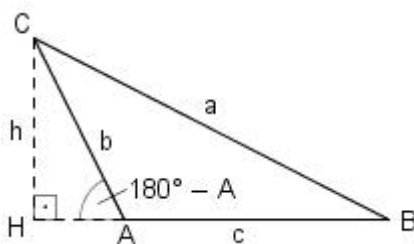
Substituindo (II) em (I), temos:

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2mc$$

### 2º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , obtusângulo em  $A$ , e  $\overline{CH} = h$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .



$$\Delta BCH : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \quad (I)$$

$$\Delta ACH : h^2 = b^2 - m^2 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2mc$$

Mas  $m = b \cos(180 - A) = b(-\cos A) = -b \cos A$

Assim:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

De forma análoga, obtemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos C$$

### 3º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo (em  $A$ , por exemplo), como  $\cos 90^\circ = 0$ , verifica-se a igualdade:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ$ , que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo ( $b$  e  $c$ ) caberia uma demonstração análoga a do 1º caso.

Como podemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo  $ABC$  temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos C$$

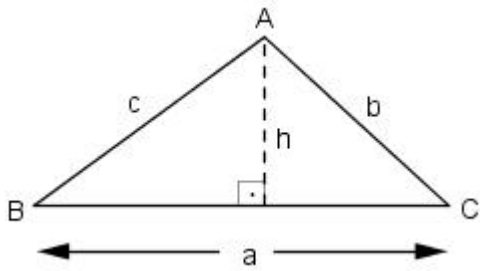
### 2.1.3—Teorema da Área

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

Demonstração:

1º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , acutângulo e  $h$  a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .



$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

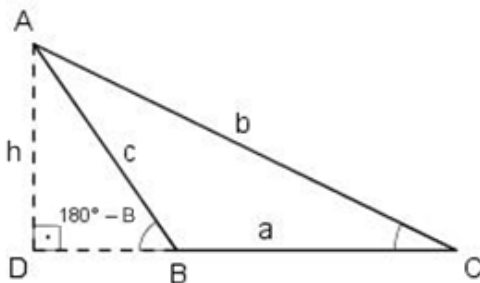
Estendendo aos outros vértices temos:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

2º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , obtusângulo em  $B$ , e altura  $\overline{AD} = h$ .



$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$S = \frac{a \times h}{2}$$

$$\text{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \frac{h}{c}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

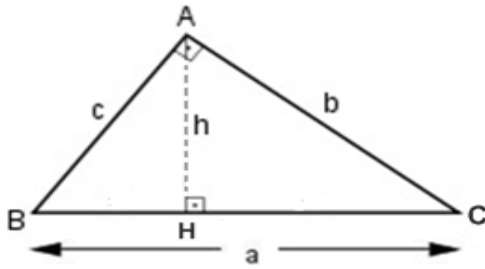
Estendendo aos outros vértices, temos:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

### 3º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , e altura  $\overline{AH} = h$



$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

Por outro lado, como  $A = 90^\circ$ , temos:

$\sin \hat{A} = \sin 90^\circ = 1$  e  $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$ , ou seja, a área de um triângulo retângulo vale a metade do produto dos catetos.

### 2.1.4 - Teorema das Projeções

A medida de um lado é a soma entre o produto dos outros dois lados pelo cosseno do ângulo adjacente.

Demonstração:

#### 1º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , acutângulo em  $B$  e a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{BD}}{c} \Rightarrow \overline{BD} = c \cdot \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b \cdot \cos \hat{C}$$

Note que:

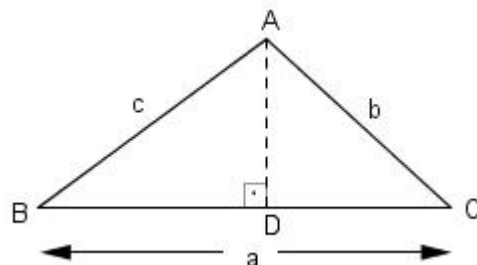
$$a = \overline{BD} + \overline{DC}$$

$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

Estendendo aos outros vértices, temos:

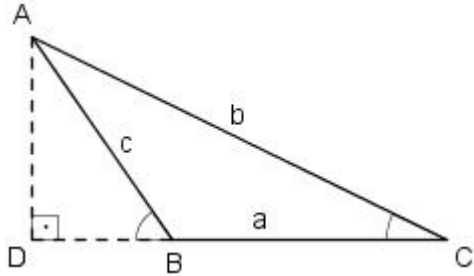
$$b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A}$$

$$c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}$$



## 2º CASO

Seja o triângulo  $ABC$ , obtusângulo em  $B$ , e altura  $\overline{AD} = h$ .



$$\overline{DC} = a + \overline{DB}$$

$$a = \overline{DC} - \overline{DB}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b \cdot \cos \hat{C}$$

$$\cos(180^\circ - \hat{B}) = \frac{\overline{DB}}{c} \Rightarrow$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{DB}}{c} \Rightarrow \overline{DB} = -c \cdot \cos \hat{B}$$

$$a = b \cdot \cos \hat{C} - (-c \cdot \cos \hat{B})$$

$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

Estendendo aos outros vértices, temos:

$$b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A}$$

$$c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}$$



### 3.0 – APLICAÇÕES

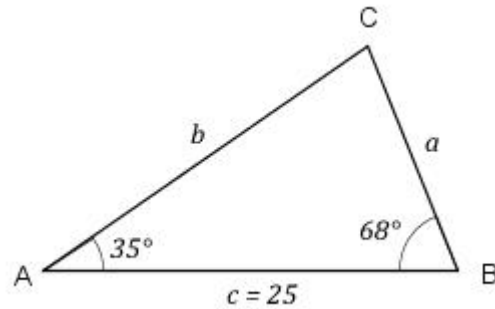
1. Resolver o triângulo  $ABC$ , sendo dados  $c = 25$ ,  $\hat{A} = 35^\circ$  e  $\hat{B} = 68^\circ$ .

Para achar  $\hat{C}$ :

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - 103^\circ = 77^\circ$$

Para achar  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{25 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 77^\circ} \\ &= \frac{25(0,5736)}{0,9744} = 15. \end{aligned}$$



Para achar  $b$ :

$$\begin{aligned} b &= \frac{c \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{25 \operatorname{sen} 68^\circ}{\operatorname{sen} 77^\circ} \\ &= \frac{25(0,9272)}{0,9744} = 24. \end{aligned}$$

Para verificação, pela fórmula da projeção:

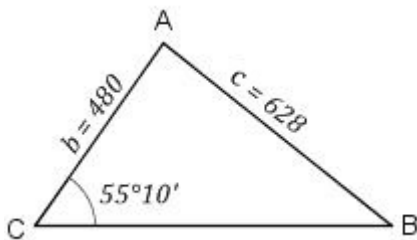
$$\begin{aligned} c &= a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A} = 15 \cos 68^\circ + 24 \cos 35^\circ \\ &= 15(0,3746) + 24(0,8102) = 25,3. \end{aligned}$$

Os elementos pedidos têm os seguintes valores:

$$a = 15; \quad b = 24 \quad \text{e} \quad \hat{C} = 77^\circ$$

2. Resolver o triângulo  $ABC$ , sendo dados  $c = 628$ ,  $b = 480$  e  $\hat{C} = 55^\circ 10'$ .

Sendo  $\hat{C}$  agudo e  $c < b$ , há somente uma solução.



Determinação de  $\hat{B}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{B} &= \frac{b \operatorname{sen} \hat{C}}{c} \\ &= \frac{480 \operatorname{sen} 55^\circ 10'}{628} = \frac{480 \times 0,8208}{628} \\ &= 0,6274 \quad \therefore \hat{B} = 38^\circ 50'. \end{aligned}$$

Determinação de  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 86^\circ 0'$$

Determinação de  $a$ :

$$a = \frac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{480 \operatorname{sen} 86^\circ 0'}{\operatorname{sen} 38^\circ 50'} = \frac{480 \times 0,9976}{0,6271} = 764.$$

Os elementos pedidos são:  $\hat{B} = 38^\circ 50'$ ,  $\hat{A} = 86^\circ 0'$  e  $a = 764$ .

3. Resolver o triângulo  $ABC$ , sendo dados  $a = 31,5$ ;  $b = 51,8$  e  $\hat{A} = 33^\circ 40'$ .

Sendo  $\hat{A}$  agudo e  $a < b$ , há a possibilidade de duas soluções:

Determinação de:

$$\hat{B}: \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{c} = \frac{51,8 \sin 33^\circ 40'}{31,5} = \frac{51,8 \times 0,5544}{31,5} = 0,9117.$$

Há duas soluções,  $\hat{B} = 65^\circ 40'$  e  $\hat{B}' = 180^\circ - 65^\circ 40' = 114^\circ 20'$ .

$$\hat{C}: \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 80^\circ 40'.$$

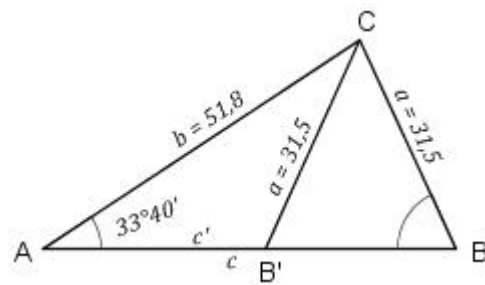
$$\hat{C}': \hat{C}' = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}') = 32^\circ 0'.$$

$$c: c = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{31,5 \sin 80^\circ 40'}{\sin 33^\circ 40'}$$

$$= \frac{31,5 \times 0,9868}{0,5544} = 56,1$$

$$c': c' = \frac{a \sin \hat{C}'}{\sin \hat{A}} = \frac{31,5 \sin 32^\circ 0'}{\sin 33^\circ 40'}$$

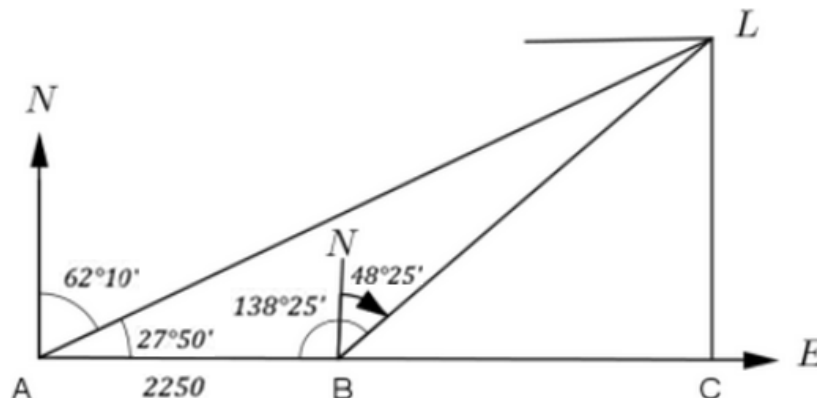
$$= \frac{31,5 \times 0,5299}{0,5544} = 30,1$$



Os elementos pedidos são: Para o triângulo  $ABC$ :  $\hat{B} = 65^\circ 40'$ ,  $\hat{C} = 80^\circ 40'$  e  $c = 56,1$

Para o triângulo  $ABC'$ :  $\hat{B}' = 114^\circ 20'$ ,  $\hat{C}' = 32^\circ 0'$  e  $c' = 30,1$ .

4. Um navio navega no rumo E (leste) quando uma luz é observada na marcação  $62^\circ 10'$  NE. Após navegar 2250 metros a luz passa a ser vista aos  $48^\circ 25'$  NE. Se o rumo for mantido, qual a menor distância que o navio passará da luz?



No triângulo obliquângulo  $ABL$ ,

$$AB = 2250; \hat{BAL} = 27^\circ 50' \text{ e } \hat{ABL} = 138^\circ 25'.$$

$$= \hat{ALB} = 180^\circ - (\hat{BAL} + \hat{ABL}) = 13^\circ 45'.$$

$$BL = \frac{AB \operatorname{sen} \hat{A} L}{\operatorname{sen} \hat{A} \hat{L} B} = \frac{2250 \operatorname{sen} 27^\circ 50'}{\operatorname{sen} 13^\circ 45'} = \frac{2250 \times 0,4669}{0,2377} = 4420.$$

No triângulo retângulo  $BLC$ ,

$$BL = 4420 \text{ e } \hat{C} \hat{B} L = 90^\circ - 48^\circ 25' = 11^\circ 35'$$

$$\begin{aligned} CL &= BL \operatorname{sen} \hat{C} \hat{B} L = 4420 \operatorname{sen} 11^\circ 35' \\ &= 4420 \times 0,2007 = 887 \text{ metros.} \end{aligned}$$

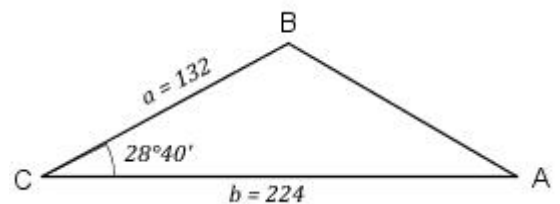
A mesma solução pode-se obter achando-se  $AL$  no triângulo  $ABL$  e depois  $CL$  no triângulo  $ALC$ .

5. Resolver o triângulo  $ABC$ , sendo dados  $a = 132$ ,  $b = 224$  e  $\hat{C} = 28^\circ 40'$ .

Determinação de

$$\begin{aligned} c: c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224) \cos 28^\circ 40' \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)(0,8774) \\ &= 15714 \therefore c = 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}: \operatorname{sen} \hat{A} &= \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{c} \\ &= \frac{132 \operatorname{sen} 28^\circ 40'}{125} \\ &= \frac{132 \times 0,4797}{125} = 0,5066. \end{aligned}$$



Portanto,  $\hat{A} = 30^\circ 30'$ .

$$\begin{aligned} \hat{B}: \operatorname{sen} \hat{B} &= \frac{b \operatorname{sen} \hat{C}}{c} = \frac{224 \operatorname{sen} 28^\circ 40'}{125} = \frac{224 \times 0,4797}{125} \\ &= 0,8596. \end{aligned}$$

Portanto,  $\hat{B} = 120^\circ 40'$ .

Sendo  $b > a$ ,  $\hat{A}$  é agudo; se,  $\hat{A} + \hat{C} < 90^\circ$ ,  $\hat{B} > 90^\circ$ .

Verificação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 179^\circ 50'.$$

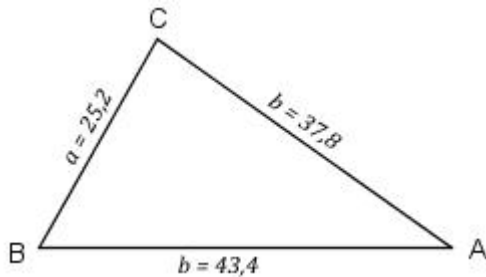
Os elementos pedidos são:

$$\hat{A} = 30^\circ 30', \hat{B} = 120^\circ 40', c = 125.$$

6. Resolver o triângulo  $ABC$ , sendo dados,  $a = 25,2$ ;  $b = 37,8$  e  $c = 43,4$ .

Determinação de:

$$\hat{A}: \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37,8)^2 + (43,4)^2 - (25,2)^2}{2(37,8)(43,4)} = 0,8160 \therefore \hat{A} = 35^\circ 20'$$



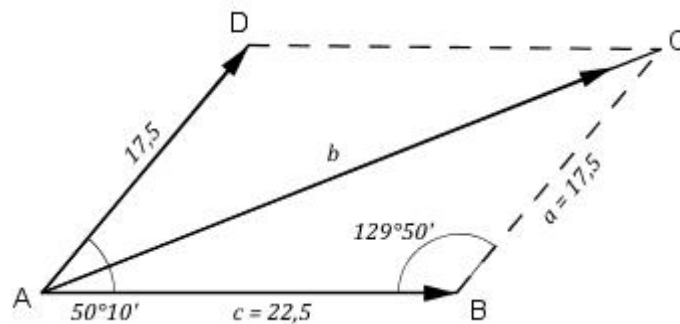
$$\hat{B}: \cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(43,4)^2 + (25,2)^2 - (37,8)^2}{2(43,4)(25,2)} = 0,4982 \therefore \hat{B} = 60^\circ 10'$$

$$\hat{C}: \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(25,2)^2 + (37,8)^2 - (43,4)^2}{2(25,2)(37,8)} = 0,0947 \therefore \hat{C} = 84^\circ 30'$$

Verificação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 35^\circ 20' + 60^\circ 10' + 84^\circ 30' = 180^\circ$$

7. Duas forças de 17,5 kg e 22,5 kg atuam sobre um corpo. Se suas direções fazem entre si um ângulo de  $50^\circ 10'$ , achar a intensidade de sua resultante e o ângulo que esta forma com a força maior.



No paralelogramo  $ABCD$ ,

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \text{ e } \hat{B} = 180^\circ - 50^\circ 10' = 129^\circ 50'$$

No triângulo  $ABC$ ,  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$

$$[\cos 129^\circ 50' = -\cos(180^\circ - 129^\circ 50') = -\cos 50^\circ 10']$$

$$b^2 = (22,5)^2 + (17,5)^2 - 2(22,5)(17,5)(-0,6406) = 1317 \therefore b = 36,3$$

$$\sin \hat{A} = \frac{a \sin \hat{B}}{b} = \frac{17,5 \sin 129^\circ 50'}{36,3} = \frac{17,5 (0,7679)}{36,3} = 0,3702 \therefore \hat{A} = 21^\circ 40'$$

A resultante é uma força de 36,3kg e o ângulo pedido é de  $21^\circ 40'$ .

8. Partindo de  $A$  um piloto voa 125 milhas no rumo  $38^\circ 20'$  NW e então volta ao ponto de partida. Como houve erro de cálculo ele voou 125 milhas no rumo  $51^\circ 40'$  SE, rota que faz certo ângulo com a de ida.

A que distância se encontra do ponto de partida e qual a direção que deve tomar para atingir  $A$ ?

No triângulo  $ABC$ ,

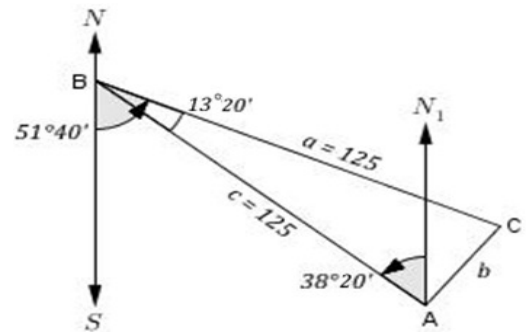
$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B} \\ &= (125)^2 + (125)^2 - 2(125)(125) \cos 13^\circ 20' \\ &= 2(125)^2(1 - 0,9730) = 843,7 \end{aligned}$$

Portanto:  $b = 29,0$

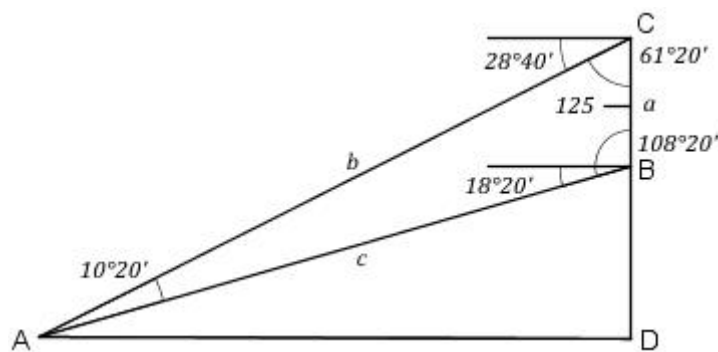
$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a \text{ sen } \hat{B}}{b} = \frac{125 \text{ sen } 13^\circ 20'}{29,0} = 0,9940$$

Portanto:  $\hat{A} = 83^\circ 40'$ .

Uma vez que  $\hat{C}\hat{A}N_1 = \hat{A} - N_1\hat{A}B = 83^\circ 40' - 38^\circ 20' = 45^\circ 20'$  o piloto deve voar no rumo  $45^\circ 20'$  SW e percorrer 29,0 milhas que é a distância  $CA$ .



9. Uma torre de 125 metros de altura está situada num penhasco na margem de um rio. Do topo da torre o ângulo de depressão de um ponto na margem oposta é de  $28^\circ 40'$  e de sua base o ângulo de depressão do mesmo ponto é  $18^\circ 20'$ .



Achar a largura do rio e altura do penhasco.

Na figura,  $BC$  representa a torre e  $DB$  o penhasco;  $A$  é o ponto da margem na margem oposta.

No triângulo  $ABC$ :

$$\hat{C} = 90^\circ - 28^\circ 40' = 61^\circ 20'$$

$$\hat{B} = 90^\circ + 18^\circ 20' = 108^\circ 20'$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 10^\circ 20'$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{125 \operatorname{sen} 61^\circ 20'}{\operatorname{sen} 10^\circ 20'} = \frac{125 \times 0,8774}{0,1794} = 611$$

No triângulo retângulo  $ABD$ ,

$$DB = c \operatorname{sen} 18^\circ 20' = 611 \times 0,3145 = 192m$$

$$AD = c \cos 18^\circ 20' = 611 \times 0,9492 = 580m$$

O rio tem 580m de largura e o penhasco 192m de altura.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras é tido como um dos mais importantes teoremas da Geometria Plana. Desde a Antiguidade, muitos estudiosos têm dele se ocupado, desenvolvendo relações voltadas a atividades diárias ligadas a agrimensura, arquitetura, edificações, urbanização, física, dentre outras áreas, inclusive a própria matemática.

Durante a estruturação deste trabalho, fomos estimulados a caminhar através de textos didáticos, que nos propiciaram ampliação de conhecimentos, bem como compreender o que está subentendido nas entrelinhas.

A ideia, que não é original, tomou forma, diante da curiosidade em estudar outras formas de abordagens do referido teorema, dentre inúmeras existentes, e posteriormente, divulgar algumas dessas demonstrações. Até os dias de hoje, para grande parte dos alunos, o Teorema de Pitágoras, em princípio, deixa a impressão, quase certeza, de que a sua obtenção se dá segundo a sua demonstração tradicional. Esse fato também é verdade para grande parte dos professores que ensinam esse assunto. Nesse sentido, o professor deve ser perseverante e, em suas abordagens, reservar espaços para atividades que envolvam aspectos dedutivos, demonstrativos, se possível relacionando tais conteúdos com a sua evolução através dos tempos.

Aproveitamos então a oportunidade, e realizamos um relato do ponto de vista histórico, sobre datas significativas, fatos relevantes, personagens importantes, relacionados ao tema em tela. Com isso, além da matemática correspondente, um pouco de história, devidamente relacionada e narrada, acompanhada de algumas notas biográficas informativas complementares, dá ao trabalho um perfil seguramente valorizado pelas correntes da educação matemática.

Procuramos conduzir esse trabalho, na perspectiva de contribuir com a melhoria do ensino de matemática, na expectativa de que o mesmo sirva como fonte de consulta para atividades educacionais, novas investigações e sugerimos sua leitura a professores de Matemática, de Ensino e acreditamos fortemente que pode servir propostas de atividades a serem refletidas e conduzidas nos Laboratórios/Oficinas de Matemática, no ensino do Desenho Geométrico e porque não, nas atividades de Educação Artística.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAJORI, Florian. Uma História da Matemática. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CINTRA, Caitano de Oliveira, CINTRA, Renato José de Sobral. O Teorema de Pitágoras. – Editoração Eletrônica – Recife - Ano 2003.

IEZZI, Gelson et all. **Matemática 2ª série**, 2º grau. 8ª ed. Revisada São Paulo: Atual, 1990.

IEZZI, Gelson e HAZZAN Samuel, Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 3 – 4ª ed. Atual Editora.

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo>

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>