



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E SUAS TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ELIDAYANE SANTOS BARROS

ORIGAMI E GEOMETRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OS ALUNOS
DO 8º E 9º ANO

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA

2014

ELIDAYANE SANTOS BARROS

ORIGAMI E GEOMETRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OS ALUNOS
DO 8º E 9º ANO

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação da professora Kátia Suzana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA

2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

B277o Barros, Elidayane Santos.
Origami e geometria [manuscrito] : uma proposta metodológica para os alunos do 8º e 9º ano / Elidayane Santos Barros. - 2014.
42 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Origami. 2. Ensino de geometria. 3. Ensino e aprendizagem. I. Título.

21. ed. CDD 516

ELIDAYANE SANTOS BARROS

ORIGAMI E GEOMETRIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA OS ALUNOS
DO 8º E 9º ANO

Trabalho de conclusão de curso apresentada
ao Departamento de Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba, como
requisito para a obtenção do título de
Licenciatura Plena em Matemática.

APROVADA EM: 23 / 07 / 2014

Kátia Suzana medeiros graciano
Msa. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Castor da Paz Filho
Ms. Castor da Paz Filho

Maria Isabelle Silva
Dra. Maria Isabelle Silva

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao meu Deus por tudo que tem feito em minha vida, por todas as vitórias ao longo da caminhada.

Presto meus agradecimentos à professora Kátia Suzana M. Graciano, pela orientação e apoio neste trabalho. Agradeço também a todos os professores da Universidade Estadual da Paraíba com que eu tive o prazer de estudar.

À minha família, pelo incentivo e apoio em toda minha vida acadêmica. Obrigado por sempre acreditar nos meus sonhos e fazer parte deles.

Ao meu noivo, pela dedicação e companheirismo, por todo auxílio que prestou para a conclusão deste trabalho.

“Educar é semear com sabedoria e colher com paciência.”

(Augusto Cury)

RESUMO

Com o intuito de contribuir para melhorar o ensino aprendizagem da Geometria, o presente trabalho apresenta uma proposta metodológica para trabalhar a Geometria utilizando o Origami, uma sugestão para os alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental. Podemos facilmente verificar que o estudo e prática da dobradura apresentam vários tópicos de relevo da matemática, comprovaremos no desenvolvimento das construções dos triângulos que a arte de dobrar papel é mais que uma atividade recreativa, ela permite explorar vários conceitos relacionados á Geometria, servindo como um importante material de apoio nas aulas de matemática, que auxilia no desenvolvimento cognitivo e intelectual dos alunos. Inicialmente mostraremos a História do Origami e sua relação com a matemática, como esta arte surgiu, os principais contribuintes para a evolução das dobraduras, como se deu seu desenvolvimento ao longo do tempo, e suas contribuições para o processo de construção e compreensão da Geometria. Em seguida, teremos a explanação de algumas propriedades importantes no estudo dos triângulos. Depois partimos para as construções dos triângulos Retângulo, Isósceles e Equilátero desenvolvidas em três oficinas. Espera-se que o conhecimento obtido neste trabalho ajude nas estratégias de ensino a fim de tornar a Geometria mais presente nas aulas de matemática.

Palavras-chave: Origami. Ensino e Aprendizagem. Geometria. Oficinas.

ABSTRACT

In order to contribute to improving the teaching and learning of geometry, this paper presents a methodology for working geometry using Origami, a suggestion for the students of 8th and 9th grade in elementary school. We can easily verify that the study and practice of folding feature various topics relief of mathematics, will check in the development of constructions of triangles that the art of paper folding is more than a recreational activity, it allows you to explore various concepts related to geometry, serving as a important support material for teaching mathematics, which aids in mental and intellectual development of students. Initially show the history of origami and its relationship with mathematics, this art has emerged as the major contributor to the evolution of folds, how was their development over time, and their contributions to the construction process and understanding of geometry. Then we have the explanation of some important properties in the study of triangles. Then we went to the buildings Rectangle Triangles, Isosceles and Equilateral developed in three workshops. It is hoped that the knowledge gained in this work will help in teaching strategies in order to make this more geometry in math classes.

Keywords: Origami, Teaching and Learning, Geometry, Workshops.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Portal dos Leões	14
Figura 2 – Pirâmides de Gizé	14
Figura 3 – Galeria Nacional de Artes	15

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Foto 1 – Construindo a reta r	17
Foto 2 – Incidindo D e C em r	17
Foto 3 – Construindo a reta s	18
Foto 4 – Triângulo IJL	18
Foto 5 – Reta que contém M e N	19
Foto 6 – Segmento LM_1	20
Foto 7 – Segmento JM_2	21
Foto 8 – Segmento LM_3	20
Foto 9 – Dividindo os segmentos ID , JD e LD ao meio	20
Foto 10 – Baricentro D	22
Foto 11 – Coincidindo I e J	23
Foto 12 – Coincidindo I , L e L , J	23
Foto 13 – Mediatrizes do triângulo isósceles	23
Foto 14 – Altura IH	24
Foto 15 – Bissetrizes do triângulo retângulo	25
Foto 16 – Construção do triângulo equilátero	28
Foto 17 – Segmento EF	29
Foto 18 – Formando os segmentos HG e GI	29
Foto 19 – Reta que contém os pontos G , I	29
Foto 20 – Dobra que contém os pontos G , H	30
Foto 21 – Refazendo os passos 3 e 5	30
Foto 22 – Sobrepondo B e G	30
Foto 23 – Triângulo equilátero	31
Foto 24 – Construção do segmento AC	32
Foto 25 – Construção do segmento DB	33
Foto 26 – Sobrepondo todos os vértices ao ponto F	33
Foto 27 – Segmentos paralelos à AB e DC	34
Foto 28 – Segmentos paralelos à AD e BC	34
Foto 29 – Dobradura com os vértices B , C e D	34

Foto 30 - Dobradura com os vértices B, D e A	35
Foto 31 – Sobrepondo os vértices G, H, I e J ao ponto F	35
Foto 32 – Encaixe do vértice inferior esquerdo	36
Foto 33 – Dobrando o quadrado ao meio	37
Foto 34 – Marcando o ponto F	38
Foto 35 – Sobrepondo D, A e F	38
Foto 36 – Reta que contém F	38
Foto 37 – Desdobrando 3 e 4 e refazendo o passo 4	39
Foto 38 – Dobrando sobre a linha pontilhada	39
Foto 39 – Virando o origami à esquerda	39
Foto 40 – Formando um paralelogramo	40
Foto 41 – Encaixe com o vértice D	40
Foto 42 – Triângulo retângulo	40

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. CAPÍTULO II – UM POUCO DA HISTÓRIA.....	12
2.1 <i>História do origami.....</i>	<i>12</i>
2.2 <i>Origami e a matemática.....</i>	<i>13</i>
2.3 <i>História dos triângulos: retângulos, isósceles e equiláteros.....</i>	<i>13</i>
3. CAPÍTULO III – ALGUNS TEOREMAS E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS PARA O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS.....	16
3.1 <i>Descrições.....</i>	<i>16</i>
3.2 <i>Explicações dos teoremas e propriedades.....</i>	<i>17</i>
3.2.1 <i>Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.....</i>	<i>17</i>
3.2.2 <i>Semelhança de triângulos.....</i>	<i>19</i>
3.2.3 <i>Pontos notáveis dos triângulos: equilátero, isósceles e retângulo.....</i>	<i>20</i>
4. CAPÍTULO IV – OFICINAS	27
4.1 <i>Oficina 1 – Triângulo Equilátero.....</i>	<i>27</i>
4.2 <i>Oficina 2 – Triângulo Isósceles.....</i>	<i>31</i>
4.3 <i>Oficina 3 – Triângulo Retângulo.....</i>	<i>36</i>
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	41
6. REFERÊNCIAS.....	42

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é resultado de vários estudos desenvolvidos ao longo do tempo, seu ensino tem passado por diversas transformações no decorrer de muitas décadas. E ainda hoje, esta ciência continua em constante evolução. No decorrer do tempo, surgiram muitas propostas e metodologias de ensino. Cada proposta pedagógica apresenta alternativas de como ensinar matemática, auxiliando os professores, e contribuindo para o processo de construção e compreensão da aprendizagem.

Com relação à importância do ensino de Geometria, pesquisas revelam que apesar de sua importância, os alunos apresentam certo grau de dificuldade para relacionar figuras geométricas com os conceitos matemáticos, apresentando pouco raciocínio visual.

Sabe-se que a geometria faz parte do mundo físico dos alunos, diversas formas geométricas estão presente no ambiente em que eles vivem, mas sua capacidade de visualização e percepção do mundo tridimensional é pouco estimulada na escola. A capacidade de visualizar formas geométricas, tanto planas como espaciais, deve ser incentivado nos alunos.

Este projeto é estruturado da seguinte maneira. No capítulo 2 descrevemos a história do origami, sua origem e desenvolvimento no decorrer do tempo. Teremos ainda a descrição da relação existente entre a geometria e a técnica do origami, que por sua vez tem favorecido a compreensão de diversos conceitos matemáticos. Neste capítulo também foram relatadas um pouco da história dos triângulos equilátero, isósceles e retângulo.

No capítulo 3, apresentamos os principais teoremas e propriedades importantes para o estudo dos triângulos. Entre estas propriedades, ilustraremos por meio de dobras, a propriedade fundamental de proporcionalidade, e a propriedade das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Também apresentaremos os pontos notáveis (baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro) dos triângulos acutângulos e retângulos.

Já no capítulo 4 apresentamos três oficinas de origami para as construções dos triângulos. Inicialmente, os alunos terão conhecimento da história desta arte, e sua relação com a matemática, após este momento, o professor deverá distribuir o material aos alunos e orientá-los a seguir o passo a passo das construções. Ao realizar as dobraduras, será possível abordar diversos conceitos geométricos e verificar as propriedades dos triângulos.

CAPÍTULO II

UM POUCO DA HISTÓRIA

2.1 HISTÓRIA DO ORIGAMI

De uma forma simples, origami é a arte de dobrar papel. A palavra *Origami* é composta de dois caracteres de origem japonesa, Oru (dobrar) e Kami (papel), que ao juntarmos essas palavras resulta na pronúncia “origami”, que consiste na arte de produzir figuras a partir de folhas de papel. Para Genova (2008), o Origami é uma forma de expressão. Quem manipula o papel abre uma porta de comunicação com o outro. Dobrar papéis valoriza os movimentos das mãos, estimula as articulações e estimula o cérebro.

A origem exata do origami é incerta. Apesar de ser considerada tradição cultural japonesa, introduzida no Japão por volta do século IV através da influência chinesa; acredita-se que o origami tenha se originado na China, por ser considerada o “berço do papel”. De início, a dobradura de papel se integrou à religião daquela época, os japoneses a usava como representação simbólica nos rituais das cerimônias *xintoístas*, nome dado à espiritualidade tradicional do Japão e era exibido em grandes santuários como objeto de veneração, representando a simplicidade e a pureza espiritual.

Com o passar do tempo, foram sendo desenvolvidas técnicas mais simples de fabricar o papel, a partir daí com a redução de custo; o papel foi se tornando mais acessível, e o Origami, cada vez mais uma arte conhecida. Mesmo sem saber quem tenha criado, alguns origamis vêm sendo transmitidos de geração em geração até os dias de hoje.

Deixando de estar apenas restrito ao Japão, os mouros também praticavam essa arte para criar figuras geométricas, esses povos eram proibidos de produzir figuras de animais, pois é contra os princípios de sua religião, o Islamismo, consentindo apenas o uso das dobras de papel para conhecimentos matemáticos e astronômicos. Através dos mouros o origami chegou à Espanha, no século VIII. A partir daí o origami se expandiu pela América do Sul, Europa e mais tarde nos Estados Unidos, tomando diversas formas figurativas cada vez mais complexas e ligada também ao estudo da matemática das várias dobras ao longo do tempo.

2.2 ORIGAMI E A MATEMÁTICA

No final do século XX, os matemáticos foram atraídos pelas técnicas do origami, ou seja, pela relação que esta arte apresenta com a matemática. A dobragem de papel tem contribuído para o estudo de diversos temas dentro da matemática, cada vinco formado com a dobradura, formamos ângulos, figuras geométricas, retas, simetrias, entre outros.

Segundo Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2004, p.18):

“O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que os cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte”.

Como recurso metodológico, ele proporciona a exploração de conceitos geométricos, oferecendo aos alunos a oportunidade de observação e análises das propriedades geométricas, estimula a criatividade, desenvolve a percepção e investigação das noções de tamanho, forma e medida, incentivando a escrita matemática e motivando - os para a disciplina.

2.3 HISTÓRIA DOS TRIÂNGULOS: RETÂNGULOS, ISÓSCELES E EQUILÁTEROS

Este trabalho tem por finalidade dar a oportunidade ao docente para desenvolver atividades na sala de aula com o propósito de ajudar os alunos a compreender vários conceitos e propriedades geométricas, desenvolvendo sua capacidade de comparar, relacionar, classificar e estimular seu raciocínio lógico. Neste trabalho, daremos ênfase ao estudo dos triângulos. Veremos a seguir como se deu a origem dos triângulos e seu desenvolvimento ao longo do tempo.

Considerado uma das figuras geométricas mais importantes no estudo da Geometria, o triângulo não possui registro preciso de como e quando surgiu, mas acredita-se que ao passar do tempo, o homem da Grécia Antiga, descobriu esse importante elemento indispensável nas técnicas de construções seguras, que precisavam de estabilidade. Um exemplo de utilização dessa estrutura encontra-se no Portal dos Leões, na cidadela de Micenas (Grécia) erguido aproximadamente em 1250 a.C. A forma triangular serve como suporte na distribuição de pesos da muralha sobre o dintel.



Figura 1: Portal dos Leões
Fonte: Wikipédia

No mundo antigo, o triângulo já era utilizado também em atividades como astronomia e medições de terras. Durante as enchentes do rio Nilo, as águas inundavam anualmente as terras férteis egípcias que desmarcavam os limites fixados do ano anterior, sendo assim os funcionários, conhecidos como agrimensores, eram responsáveis em limitar novamente as terras para a agricultura. Estes terrenos, por sua vez, eram distribuídos entre os indivíduos, em formatos geométricos, sendo eles retangulares ou triangulares.

Ainda nos dias atuais, o triângulo continua sendo uma ferramenta que exerce um papel muito importante, por exemplo, na arquitetura. Sua aplicação nos projetos de construções e materiais fornece às estruturas, força e estabilidade, devido à forma de como a energia é distribuída nos mesmos, caracterizando-os como triângulos de descarga.

Os dois tipos de triângulos mais usados na arquitetura são equilátero e isósceles. O mais explorado destes é o equilátero, cujos três lados são de mesma medida, e ângulos internos que medem 60 graus cada, podemos observá-lo nas faces das Grandes pirâmides de Gizé, no Egito.



Figura 2: Pirâmides de Gizé
Fonte: Wikipédia

Já o triângulo isósceles, que por sua vez possui dois de seus lados iguais, pode ser facilmente encontrado nas construções por várias partes do mundo. Por exemplo, em Washington D.C, Estados Unidos, como mostra a figura abaixo.



Figura 3: Galeria Nacional de Arte

Fonte: Wikipédia

Um dos mais consideráveis triângulos, o retângulo, apresenta como principal característica um de seus ângulos de medida 90 graus, que o torna imprescindível nos projetos de engenharia civil, por exemplo, para o conhecimento de alturas e distâncias. Algumas das aplicações da trigonometria são obtidas através do triângulo retângulo, onde podemos determinar a altura de uma edificação, a medição da largura de um rio para a obra de uma ponte, o cálculo da distância da Lua e da Terra, entre outras.

Outra característica do triângulo retângulo é o seu famoso teorema de Pitágoras. Apesar de pesquisas históricas afirmarem que os egípcios e babilônios já sabiam sobre o Teorema muitos antes de Pitágoras. O tablete de Yale confirma que os babilônios já haviam feito alguma descoberta sobre a relação entre os lados do triângulo retângulo e sua hipotenusa, porém a descoberta foi atribuída ao grande matemático, filósofo Pitágoras (c.569 a 480 a.C.), considerado um dos mais importantes matemáticos da história. Seu Teorema afirma que num Triângulo Retângulo *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

O saber geométrico e a ciência da natureza que conhecemos atualmente são graças ao estudo de muitos sábios ao longo do tempo.

CAPÍTULO III

ALGUNS TEOREMAS E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS PARA O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS

3.1 DESCRIÇÕES

O trabalho manual de dobradura é utilizado nas oficinas como uma arte enriquecedora de conhecimento que auxilia o professor nas aulas de geometria tornando-a mais atrativa e divertida.

Neste capítulo, vamos conhecer teoremas e propriedades importantes no estudo dos triângulos, que serão investigados por meio de dobraduras.

I) Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

II) Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta os outros dois lados, em pontos distintos, forma com esses um triângulo semelhante ao primeiro.

III) Em qualquer triângulo as medianas são concorrentes, e se intersectam num ponto chamado baricentro.

IV) As mediatrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de circuncentro.

V) As alturas de um triângulo são concorrentes (o ponto de encontro das alturas e chamado de ortocentro).

VI) Todo triângulo possui três bissetrizes, que se encontram em um único ponto denominado incentro.

Pré-requisitos: alguns conceitos sobre triângulos: vértices, lados, ângulos, mediana, altura, bissetriz, mediatriz.

3.2 EXPLANAÇÕES DOS TEOREMAS E PROPRIEDADES

3.2.1 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

I) Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180° .

Utilizando um recorte de um quadrado ABCD, vamos demonstrar a propriedade acima:

- dobre o quadrado ao meio horizontalmente, e chame a reta formada com a dobra de reta r;

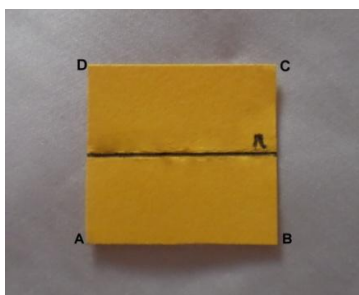


Foto 1: Construindo a reta r

Fonte: Elidayane Santos, 2014

- agora realize uma dobragem, incidindo o vértice D em r, de modo que se obtenha $1/3$ do ângulo reto $D\hat{A}B$, desdobre; faça o mesmo procedimento com o vértice C.

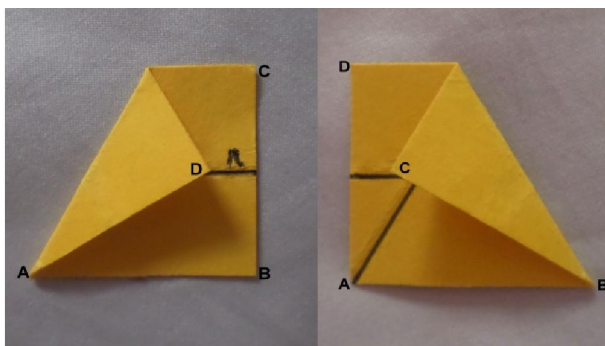
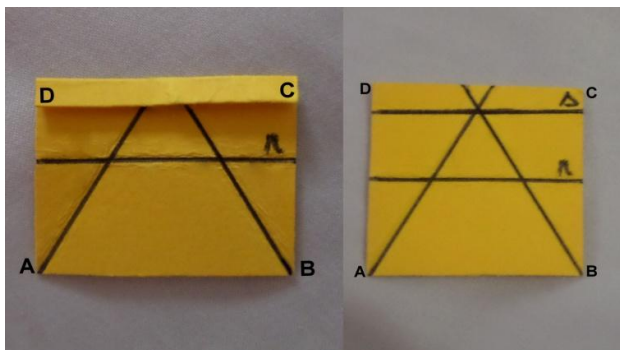


Foto 2: Incidindo D e C em r

Fonte: Elidayane Santos, 2014

- por último, faça uma dobragem passando pelo ponto de encontro das retas criadas nos passos anteriores, de modo que a reta s, vamos assim chamá-la, seja paralela a r, desdobre;

Foto 3: Construindo a reta s

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Considere o $\triangle IJL$ e seus respectivos ângulos internos α , β e γ , como mostra a imagem abaixo:

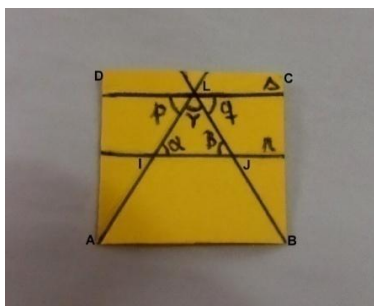


Foto 4: Triângulo IJL

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que,

- a reta r é paralela à reta s ($r // s$) e contém os pontos I e J ;
- a reta s paralela a r , forma com os lados LI e JL , dois ângulos cujas medidas indicaremos por p e q , respectivamente.
- pela propriedade das relações entre duas retas paralelas e uma transversal, temos que $r // s$, então

$$p = \alpha \text{ (ângulos alternos internos).}$$

$$e \ q = \beta \text{ (ângulos alternos internos).}$$

Sabemos que, $p + \gamma + q = 180^\circ$, como $p = \alpha$ e $q = \beta$, então

$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ.$$

Podemos concluir que:

Em qualquer triângulo soma das medidas dos ângulos internos é 180° .

3.2.2 Semelhança de Triângulos

II) Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo que intersecta os outros dois lados, em pontos distintos, forma com esses um triângulo semelhante ao primeiro.

Propriedade fundamental da semelhança no triângulo retângulo:

- Faça uma dobra, sobrepondo os vértices L e I, desdobre.

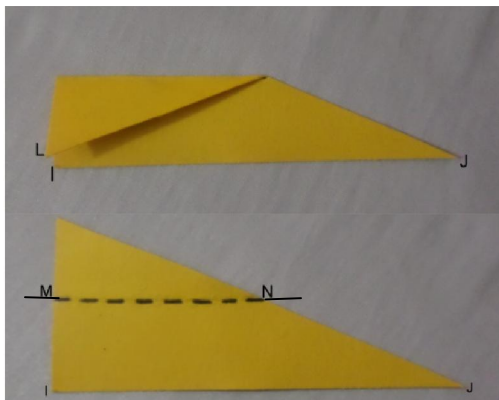


Foto 5: Construindo a reta que contém M e N

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que formamos um segmento de reta paralelo ao lado IJ, que intercepta LI em M e LJ em N. A partir daí, pelo teorema fundamental da semelhança, podemos verificar se $\triangle IJL$ e $\triangle LMN$ são semelhantes.

Como MN é paralelo a IJ ($\overline{MN} \parallel \overline{IJ}$), a partir deste paralelismo tem-se:

- LMN é congruente a LIJ (ângulos correspondentes);

De modo que, $\frac{\overline{LM}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{IJ}}$, onde \overline{LM} proporcional a \overline{LI} ;

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{LJ}} \text{ proporcional a } \overline{LJ}; \text{ e}$$

\overline{MN} proporcional a \overline{IJ} .

Logo, o $\triangle IJL$ e $\triangle LMN$ são semelhantes.

No cotidiano, algumas medidas não são possíveis de determinar diretamente, por exemplo, nas medições das alturas de postes, prédios, árvores e distâncias, entre as margens de um rio, etc. Não há instrumento que proporcione a medida desses objetos de grandes dimensões, daí o cálculo da altura e distância pode ser determinado através da semelhança de triângulos de forma indireta, ou seja, na comparação de outros elementos com os objetos de grandes extensões.

3.2.3 Pontos Notáveis dos Triângulos: equilátero, isósceles e retângulo.

Baricentro no Triângulo Equilátero

III) Em qualquer triângulo as medianas são concorrentes, e se intersectam num ponto chamado baricentro.

Por meio de um recorte de triângulo equilátero, vamos determinar o segmento de reta que une cada vértice ao seu lado oposto dividindo esse lado em duas partes iguais. Através da dobradura vamos realizar o seguinte procedimento:

- Sobreponha os vértices I e J, desdobre;

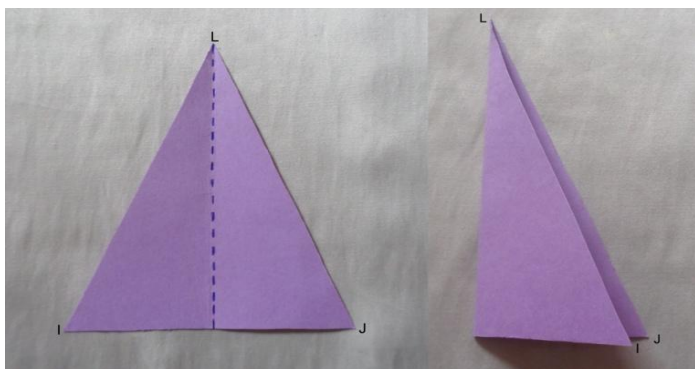


Foto 6: Segmento LM_1

Fonte: Elidayane Santos, 2014

- Em seguida, sobrepor os vértices I e L, desfaça a dobra;

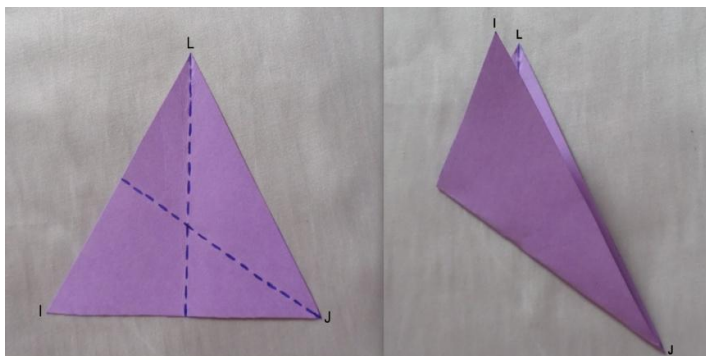


Foto 7: Segmento JM_2

Fonte: Elidayane Santos, 2014

- Por último vamos sobrepor os vértices L e J.

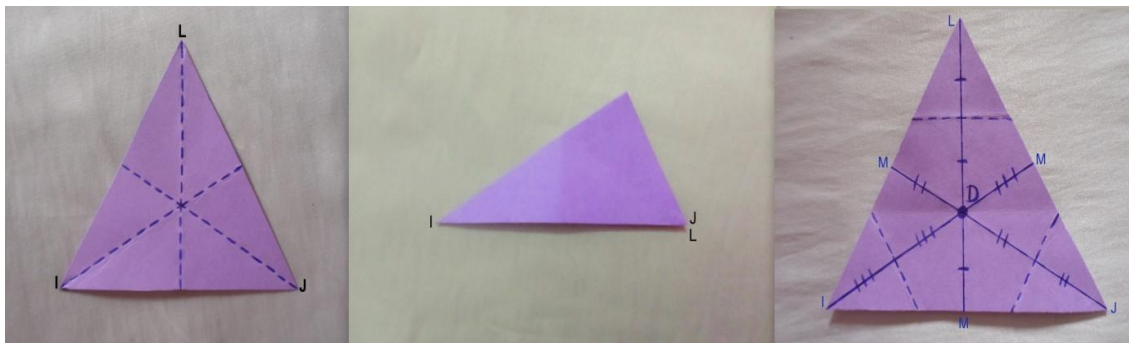


Foto 8: Segmento LM_3

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que cada dobra que realizamos determina a mediana do triângulo equilátero que se interceptam em um único ponto, chamaremos de ponto D.

Temos que,

- LM_1 – mediana relativa ao lado IJ;
- JM_2 – mediana relativa ao lado IL;
- IM_3 – mediana relativa ao lado JL.

As medianas se encontram num mesmo ponto (chamado baricentro) que divide cada mediana em duas partes, sendo que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Vamos facilmente visualizar esta relação da seguinte forma:

- Dobre, levando o vértice L a coincidir com o baricentro D. Faça o mesmo procedimento com os demais vértices, desdobre-os.

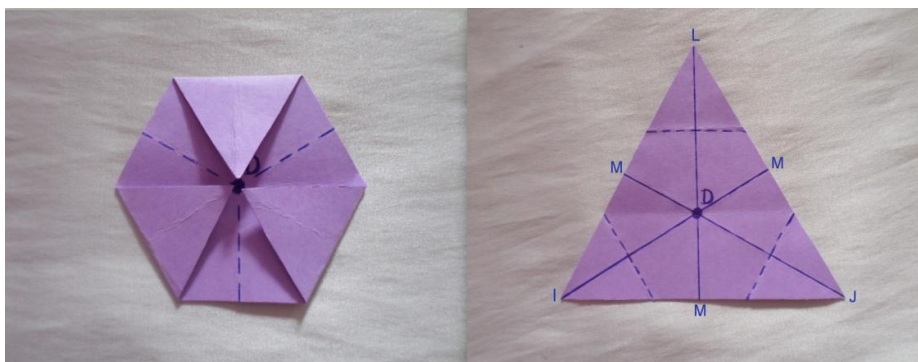


Foto 9: Dividindo os segmentos ID, JD e LD ao meio

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Verificamos que, ao dividirmos o segmento LD em duas partes iguais, cada parte formada possui a mesma medida que o segmento DM_1 . Assim como o segmento ID, ao ser dividido em duas partes iguais, cada parte possui igual medida que o segmento DM_2 , e o segmento JD, dividido ao meio, de modo que as duas partes que contém o vértice I são congruentes ao segmento DM_3 . Portanto, concluímos que o ponto D (baricentro) divide cada mediana em duas partes, sendo que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

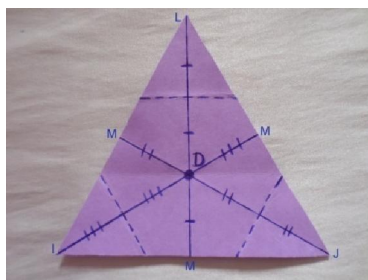


Foto 10: Baricentro D

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observações:

- No triângulo equilátero, seus pontos notáveis (baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro) coincidem.
- No triângulo isósceles, a mediana e a altura relativas à base são coincidentes.
- No triângulo equilátero, a mediatriz, a altura, a mediana, e a bissetriz são coincidentes.

Circuncentro no Triângulo Isósceles

IV) As mediatrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de circuncentro.

Vamos ilustrar como as mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam num único ponto, escolhamos o triângulo isósceles, já recortado, para observarmos esta propriedade:

- Primeiramente, é necessário realizar uma dobra de modo que coincidam os pontos I e J, desdobre;

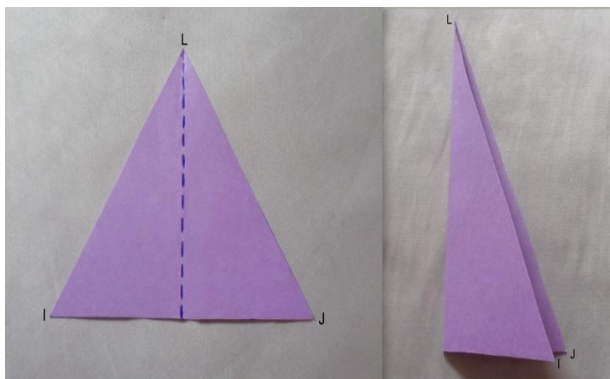


Foto 11: Coincidindo I e J

Fonte: Elidayane Santos, 2014

- Faça o mesmo procedimento com os vértices I e L, L e J. Desdobre-os.

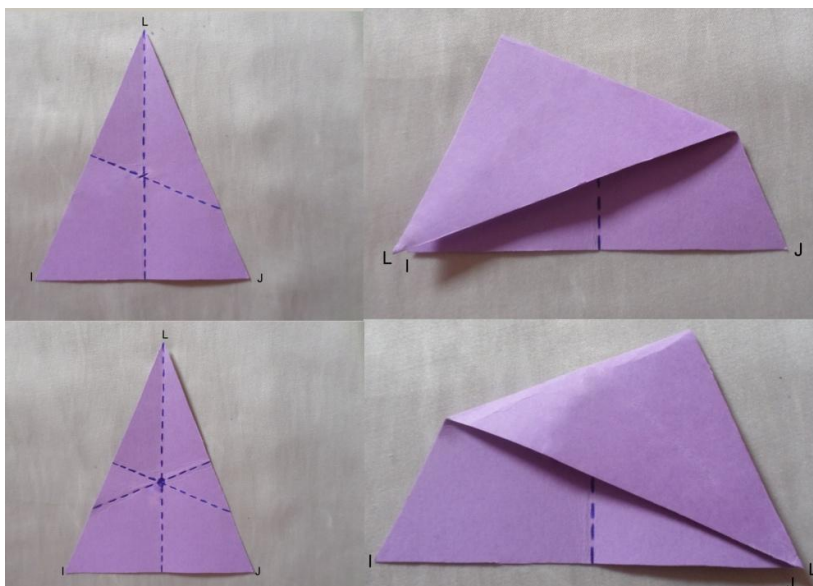


Foto 12: Coincidindo I, L e L, J

Fonte: Elidayane Santos, 2014

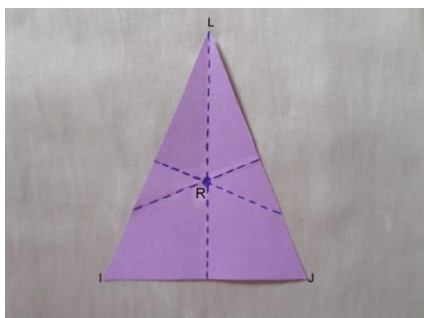


Foto 13: Mediatrizes do Triângulo Isósceles

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que as três dobras realizadas são as mediatrizes do triângulo isósceles e o encontro dessas mediatrizes determina o ponto R(circuncentro), ponto interior do triângulo, que por sua vez é o centro da circunferência circunscrita que passa pelos seus três vértices.

Observações:

- No triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice (oposto a base), a mediana, mediatriz e a altura relativa à base coincidem.
- Caso o triângulo seja retângulo o circuncentro será ponto médio da hipotenusa do triângulo.
- O circuncentro de um triângulo obtusângulo é um ponto da região exterior do triângulo.

Ortocentro no Triângulo Retângulo

V) As alturas de um triângulo são concorrentes (o ponto de encontro das alturas é chamado de ortocentro).

As retas suportes das alturas de um triângulo se interceptam num ponto chamado ortocentro.

Vamos determinar a altura do triângulo retângulo (pode ser qualquer outro triângulo).

Neste caso, como o triângulo é retângulo, pela definição de altura, tem a altura LI relativa ao lado IJ, e IJ relativa ao lado LI. Vamos determinar agora, a altura do triângulo retângulo relativa à sua hipotenusa LJ.

- Faça uma dobra que passe pelo ponto I e que seja perpendicular à hipotenusa do triângulo IJL, desde que o segmento LH formado pela dobra se coincida com o segmento HJ, desdobre. Construimos a altura IH relativa ao lado LJ.

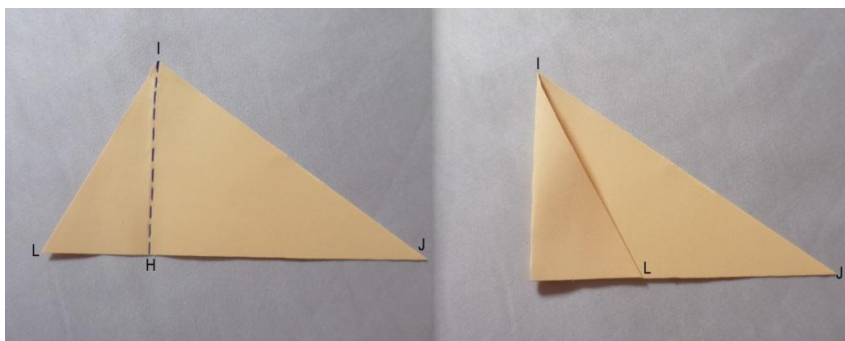


Foto 14: Altura IH

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que as três alturas partem do ângulo reto I. Portanto o ortocentro do triângulo retângulo coincide com o vértice I.

Observações:

- O ortocentro de um triângulo acutângulo é um ponto na região interior do triângulo.
- O ortocentro de um triângulo obtusângulo é um ponto na região exterior ao triângulo.

Incentro no Triângulo Retângulo

VI) Todo triângulo possui três bissetrizes, que se encontram em um único ponto denominado incentro.

Vamos demonstrar essa propriedade utilizando um recorte de um triângulo retângulo, determinando as três bissetrizes internas, de modo que os seus ângulos sejam divididos em dois ângulos congruentes e adjacentes.

- Faça uma dobra com o ângulo formado pelos lados LI e JL, de modo que estes lados coincidam, desdobre;
- Faça uma dobra com o ângulo formado pelos lados IJ e LI, de modo que estes lados também coincidam, desdobre;
- Por último, dobre o ângulo formado pelos lados IJ e LJ, de modo que estes lados coincidam.

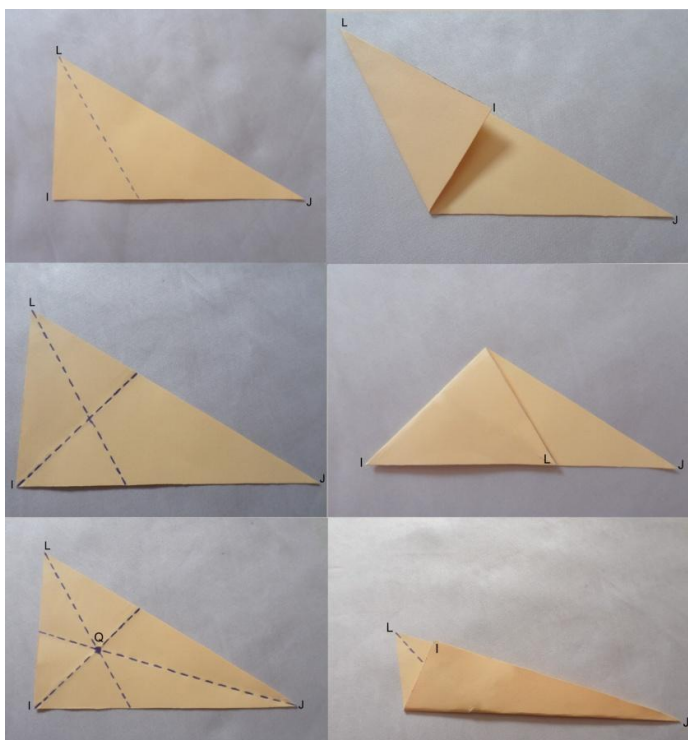


Foto 15: Bissetrizes do Triângulo Retângulo

Fonte: Elidayane Santos, 2014

Observe que as dobras formadas são as bissetrizes internas do triângulo retângulo e se interceptam num ponto Q, chamado de incentro, que eqüidista dos lados do triângulo.

Observações:

- O incentro é, por sua vez, o centro da circunferência inscrita num triângulo qualquer.

CAPÍTULO IV

OFICINAS

OFICINA I - TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Considerado como polígono regular, em razão de apresentar seus três lados de mesma medida, e seus ângulos internos congruentes.

Recursos necessários para a construção

O material utilizado para o trabalho com dobraduras será apenas folhas guache ou ofício coloridas em forma de Quadrado (15 cm x 15 cm), não pode ser usado cola ou tesoura para as construções geométricas.

Público Alvo: Alunos do 8º e 9º Ano.

Tempo da Aula: 3 aulas de 50 minutos cada.

Considerações Iniciais

1. Interação dos alunos com a história do surgimento do origami;
2. Entrega dos materiais didáticos: folhas de papel guache ou ofício colorido;
3. O professor deverá orientá-los a observar nas ilustrações as linhas pontilhadas que indicam onde a dobra será feita;
4. O orientador deverá interagir com os alunos procurando mostrar os principais elementos e propriedades do triângulo equilátero durante as etapas das dobraduras;
5. Após as construções proponha aos alunos que escrevam uma série de dúvidas que eles tiverem a respeito do assunto abordado, para que seja respondidas e solucionadas com a orientação do professor.

Colocando em Questão

Os questionamentos aplicados a partir da visualização e manipulação dos triângulos é um meio estratégico de ensino muito proveitoso para o desenvolvimento das habilidades e competências geométricas dos alunos.

I. Considere o $\triangle ABC$, sabemos que este por sua vez possui três eixos de simetria. Encontre cada um deles através da dobradura.

II. Em todo triângulo equilátero os ângulos internos são congruentes? Como podemos demonstrar?

Dica: encontre as medianas do triângulo e compare os novos triângulos formados.

III. Pelo Teorema de proporcionalidade podemos afirmar que $\triangle ABH \sim \triangle FBJ$? Justifique.

IV. Considere o losango $HJIG$, formado no passo 5. Supondo que a medida do segmento \overline{GJ} é 12 cm e a medida do segmento \overline{HI} é 16 cm. Determine a medida do segmento \overline{GI} .

V. Observe a primeira figura do passo 6, prove que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo GHB é 180° .

VI. Observe as linhas pontilhadas na 2ª imagem do 5º passo, e encontre, se existir, outros casos de semelhança de triângulos.

VII. O perímetro de um triângulo equilátero é 15 cm. Calcule a medida da altura do triângulo.

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

1. Em cada vértice do quadrado marque os pontos A, B, C e D, onde formaremos os seguintes segmentos: AB, BC, CD, AD;

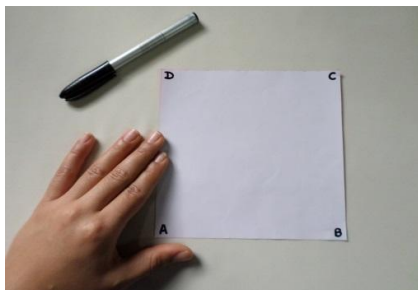


Foto 16: Construção do triângulo equilátero

Fonte: Elidayane Santos, 2014

2. Em seguida, dobre a folha ao meio fazendo coincidir o vértice A e B, como também o vértice D e C. Desdobre e marque os pontos E, F do novo segmento encontrado;

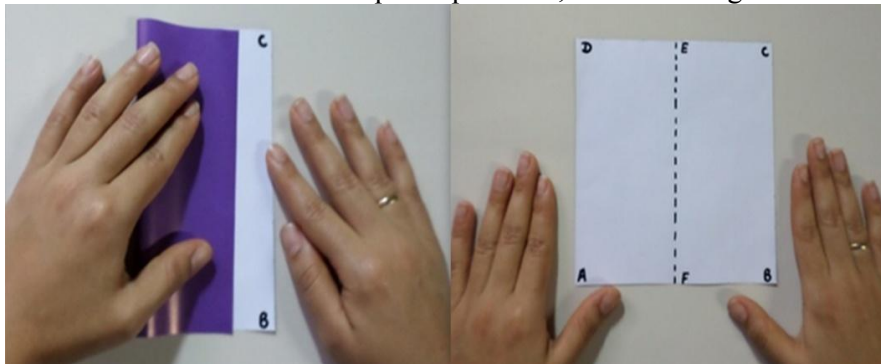


Foto 17: Segmento EF

Fonte: Elidayane Santos, 2014

3. Fixando o vértice B leve A até o segmento EF e marque o ponto G; considerando assim o segmento GH. Agora, sobreponha B e G; considerando também o segmento GI.

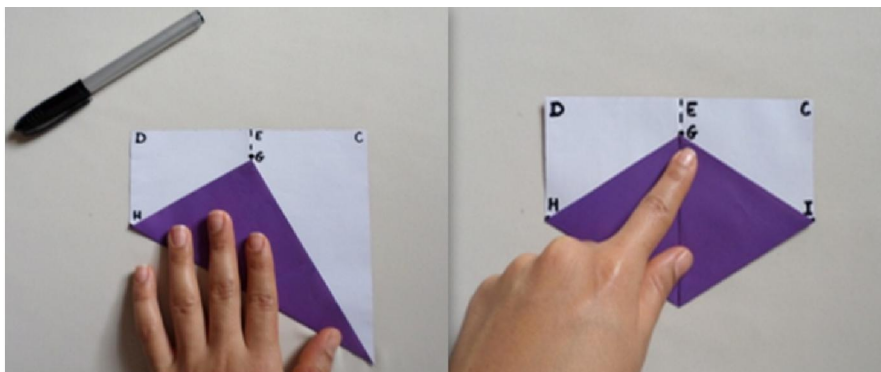


Foto 18: Formando os segmentos HG e GI

Fonte: Elidayane Santos, 2014

4. Faça uma dobradura levando o vértice C a formar uma reta que contém os pontos G e I;

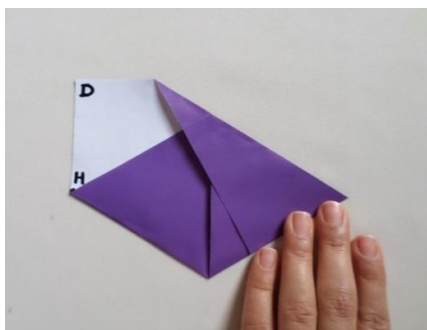


Foto 19: Reta que contém os pontos G, I

Fonte: Elidayane Santos, 2014

5. Prosseguindo da mesma forma com o vértice D vincando o segmento GH. Agora desdobre todos os passos anteriores;

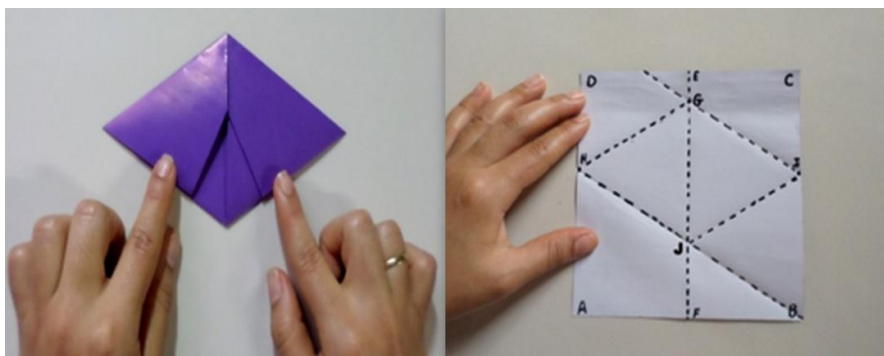


Foto 20: Dobradura que contém os pontos G,H

Fonte: Elidayane Santos, 2014

6. Repete o procedimento dos passos 3 e 5;

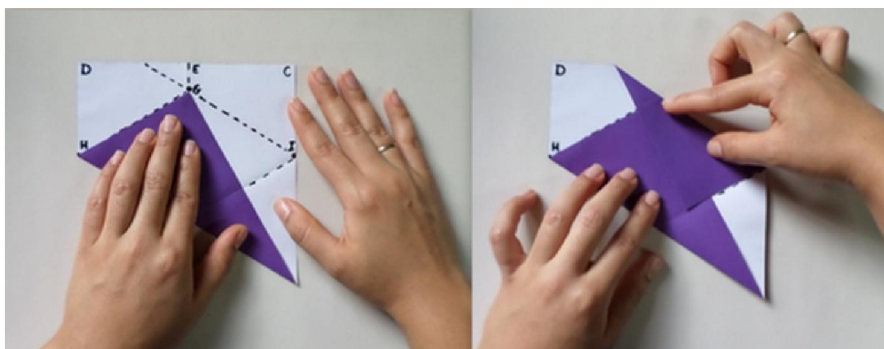


Foto 21: Refazendo os passos 3 e 5

Fonte: Elidayane Santos, 2014

7. Leve B até o ponto G;

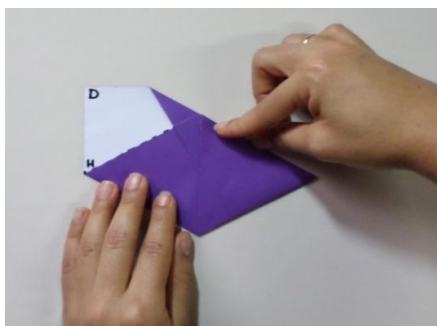


Foto 22: Sobrepondo B e G

Fonte: Elidayane Santos, 2014

8. Faça uma dobradura sobrepondo o ponto I e o ponto H. Por último encaixe o vértice D como mostra a figura para formar o triângulo equilátero.



Foto 23: Triângulo Equilátero

Fonte: Elidayane Santos, 2014

OFICINA II – TRIÂNGULO ISÓSCELES

O triângulo isósceles é caracterizado principalmente por conter pelo menos dois de seus lados congruentes e dois de seus ângulos iguais.

Recursos necessários para a Construção

Utilizaremos folhas de papel sulfite colorido ou papel de presente em formato quadrado (15x15 cm).

Público Alvo: Alunos do 8º e 9º Ano.

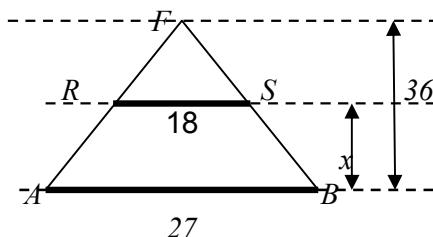
Tempo da Aula: 200 minutos (4 aulas).

Considerações Iniciais

1. Nas construções do triângulo deve-se evitar o uso de cola e tesoura;
2. Cada aluno terá a oportunidade de confeccionar seu próprio origami e partir para a análise dos elementos geométricos existentes em cada dobra;
3. Os alunos deverão ser orientados pelo professor a confeccionar o triângulo isósceles vincando cada dobra com precisão, lembrando que a dobradura bem elaborada é essencial para um estudo preciso, pois podemos visualizar uma enorme quantidade de conceitos a partir de cada vinco de papel;
4. Debate entre os alunos, a respeito do conteúdo.

Colocando em Questão

- I. Identifique os principais elementos do triângulo isósceles.
- II. Quantos triângulos você vê na imagem do passo 3?
- III. Nos passos 1 e 2, os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} são perpendiculares? Por quê?
- IV. Observe o triângulo ACD no passo 3. Como podemos mostrar que o segmento \overline{DF} relativa à base \overline{AC} é ao mesmo tempo, a mediana, mediatriz, e altura do triângulo ACD ?
- V. Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes? Prove.
- VI. Num triângulo isósceles, a altura relativa à base mede raiz de 11 e cada lado congruente mede 6 cm. Qual é o perímetro desse triângulo?
- VII. Como são chamados os segmentos AC e BD traçados nos passos 1 e 2? Podemos afirmar que os ângulos AFD e BFC são congruentes? Por quê?
- VIII. Considere o $\triangle ABF$, ao realizarmos a dobradura referente ao 5º passo, obtemos uma reta que corta o triângulo em dois lados paralelamente ao terceiro, formando assim outro triângulo semelhante ao primeiro. Com base nos dados abaixo, determine o valor de x :



CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

1. Dobre o quadrado de papel seguindo a linha pontilhada, fazendo assim coincidir os pontos B e D . Desdobre;



Foto 24: Construção do segmento AC

Fonte: Elidayane Santos, 2014

2. Da mesma forma dobre pela linha pontilhada sobrepondo os vértices A e C, vinca o segmento BD, desdobre e chame de F o ponto os segmentos se cruzam;

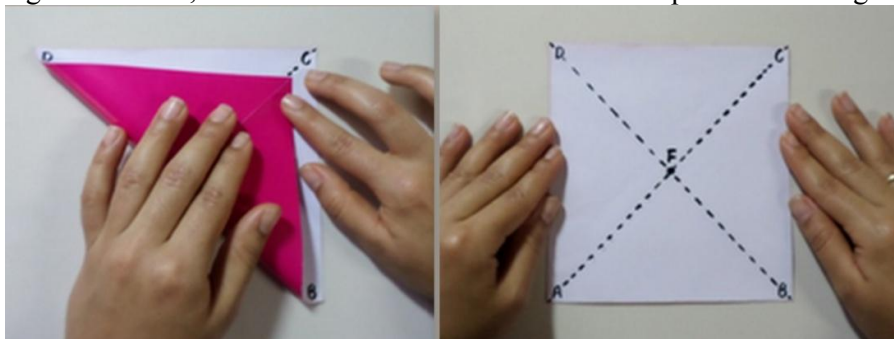


Foto 25: Construção do segmento DB

Fonte: Elidayane Santos, 2014

3. Leve todos os vértices do quadrado até ponto F, desdobre-os em seguida;

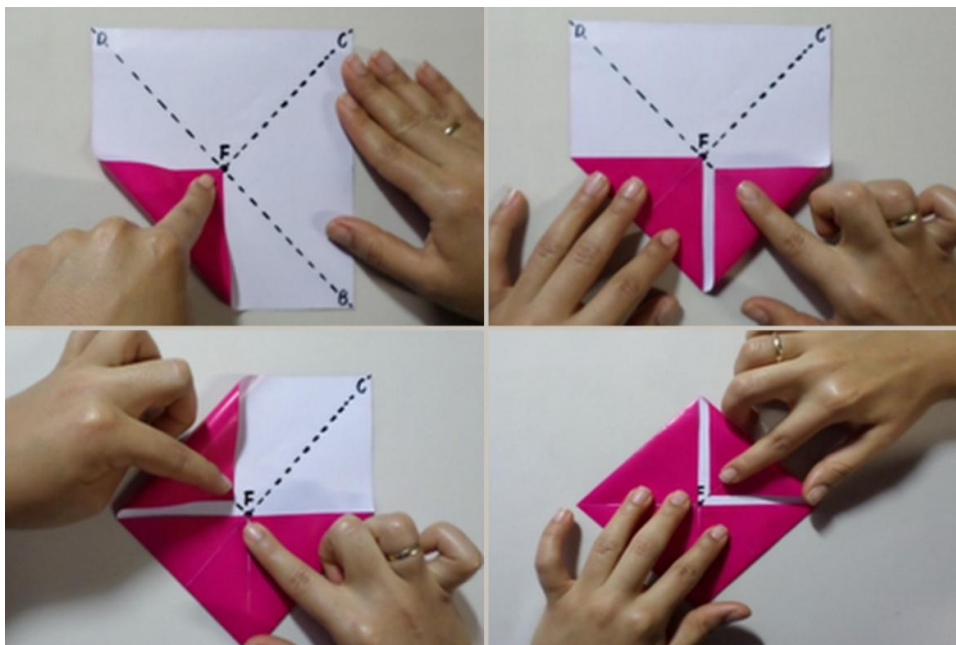


Foto 26: Sobrepondo todos os vértices ao ponto F

Fonte: Elidayane Santos, 2014

4. Dobre o segmento inferior AB até o ponto F, da mesma maneira com o segmento DC até o ponto F, vinca ambas as dobras e desdobre-os;

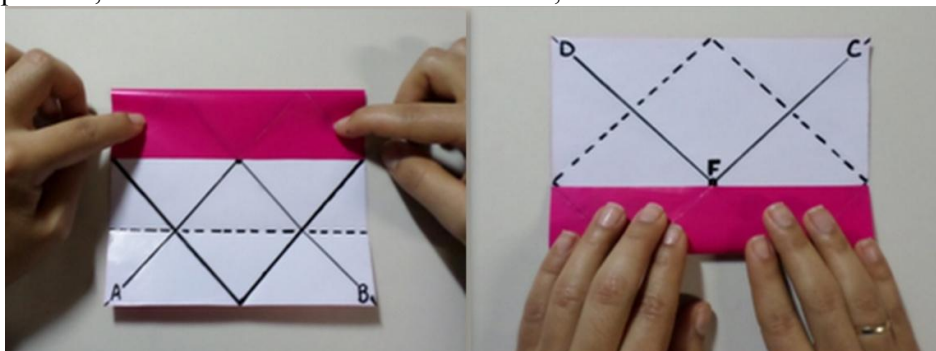


Foto 27: Segmentos paralelos à AB e DC

Fonte: Elidayane Santos, 2014

5. Agora na vertical dobre o segmento AD da esquerda para direita até o ponto F. Faça o mesmo com o segmento BC marque as dobras e desdobre-os;

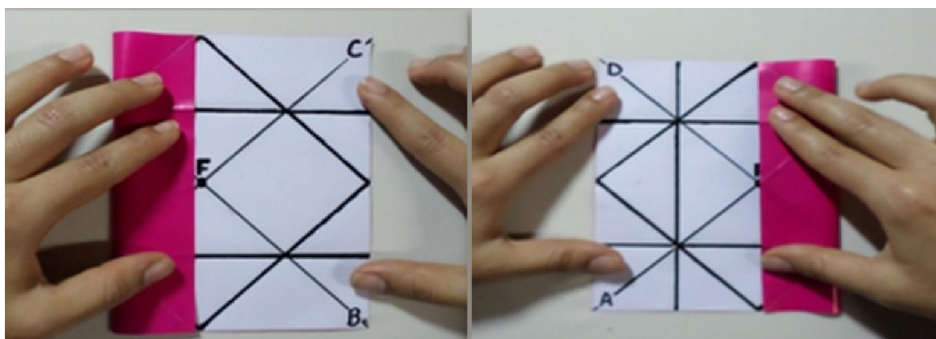


Foto 28: Segmentos paralelos à AD e BC

Fonte: Elidayane Santos, 2014

6. Fixando o vértice A, você fará a dobradura com os demais vértices como indica a figura;

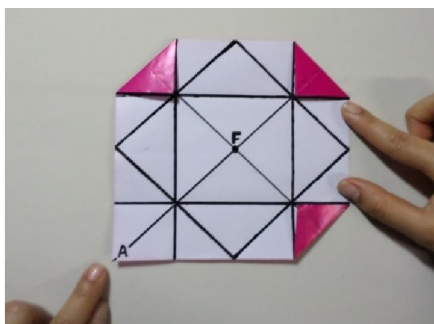


Foto 29: Dobradura os vértices B, C e D

Fonte: Elidayane Santos, 2014

7. Faça novamente uma dobradura apenas com os vértices B, D. Em seguida, leve o vértice A até o ponto F;

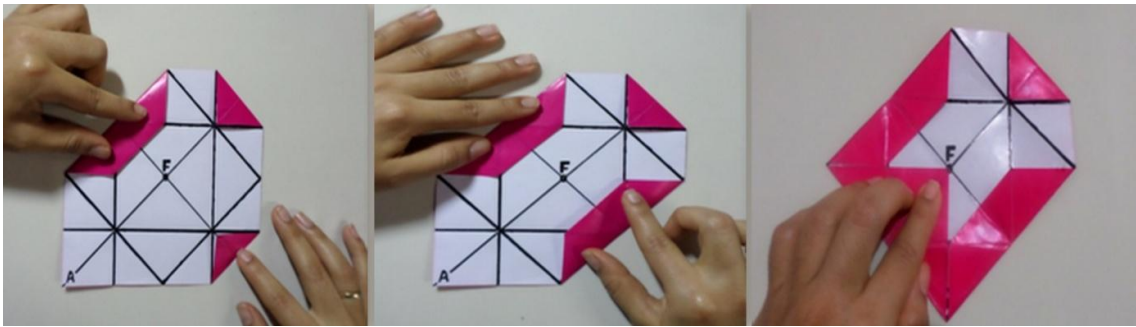


Foto 30: Dobradura com os vértices B, D e A

Fonte: Elidayane Santos, 2014

8. Esta é a parte que exige muita atenção, vamos considerar o losango formado pelos pontos G, H, I, J; leve os vértices do losango até o ponto F, e lembre-se de sempre vincar em cada dobra;

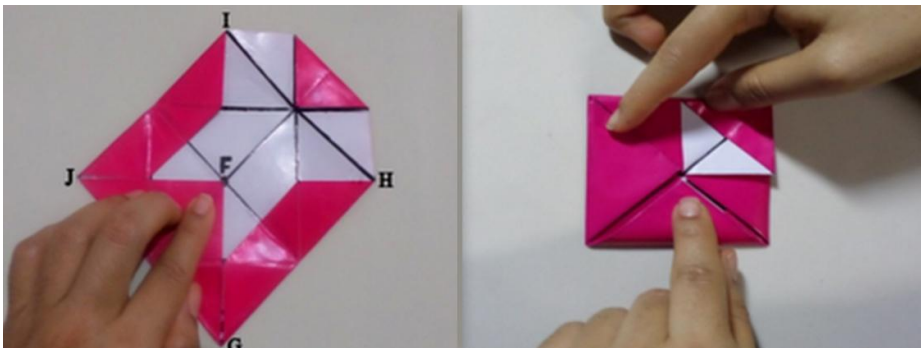


Foto 31: Sobrepondo os vértices G, H, I e J ao ponto F

Fonte: Elidayane Santos, 2014

9. Já está quase pronto, por ultimo faça o encaixe da parte inferior esquerdo na aba superior que formamos no passo anterior;



Foto 32: Encaixe do vértice inferior esquerdo

Fonte: Elidayane Santos, 2014

OFICINA III - TRIÂNGULO RETÂNGULO

Recursos necessários para a Construção

Recomendamos folhas de jornais, papel ofício ou papel espelho, em formato quadrado (15x15 cm).

Público Alvo: Alunos do 8º e 9º Ano.

Tempo da Aula: 150 minutos (3 aulas).

Considerações Iniciais

1. Cada aluno construirá individualmente suas dobraduras, o orientador deverá dar oportunidade aos alunos para que manipulem o próprio objeto de estudo que contribuirá para uma aprendizagem significativa e atrativa quando há investigação de formas geométricas que fazem parte da vida cotidiana dos mesmos;
2. Com o auxílio do professor, os alunos poderão visualizar diversos conceitos geométricos à medida que realizar as construções;
3. Durante cada etapa da confecção o educador deverá abrir espaço para questionamentos;
4. A segunda parte da oficina será composta de oito questões para debate em sala.

Colocando em Questão

Proponha que o aluno resolva as questões seguintes, e apresente suas dúvidas e questionamentos.

1. Considere um triângulo retângulo de perímetro p , a altura relativa à hipotenusa é h . Calcule o comprimento da hipotenusa em função dos elementos dados.

II. Considere o triângulo retângulo construído com vértices A, B e C , reto em A ; trace sua altura AH relativa ao lado BC de modo que obtenha os triângulos ABC , ABH e AHC .

Responda e justifique:

O $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle ABH$?

O $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle AHC$?

O $\triangle ABH$ é semelhante ao $\triangle AHC$?

III. Considere um triângulo retângulo qualquer ABC de lados $AB = x$, $BC = 6$ e $CA = 2\sqrt{13}$.

Calcule a área de ABC .

IV. Todo triângulo retângulo é isósceles? Justifique.

CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. Marque os pontos A, B, C e D vértices do quadrado e dobre - o ao meio, sobrepondo os pontos A, D e B, C ;

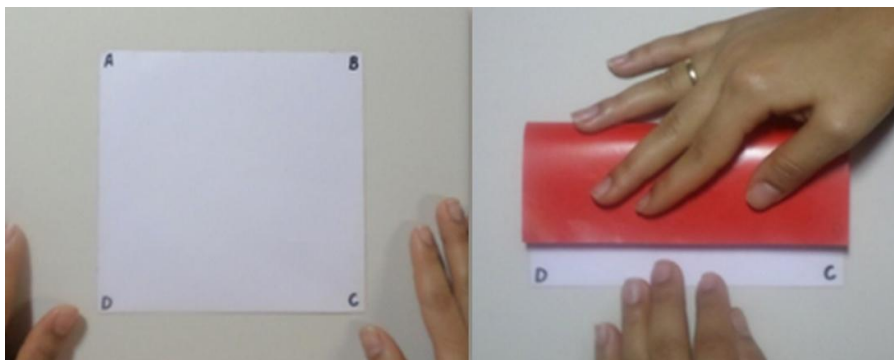


Foto 33: Dobrando o quadrado ao meio

Fonte: Elidayane Santos, 2014

2. Faça uma dobra no vértice D, levando o vértice A até o segmento formado no passo anterior, em seguida marque o ponto F que coincide com A;



Foto 34: Marcando o ponto F

Fonte: Elidayane Santos, 2014

3. Leve o vértice D até o ponto F;

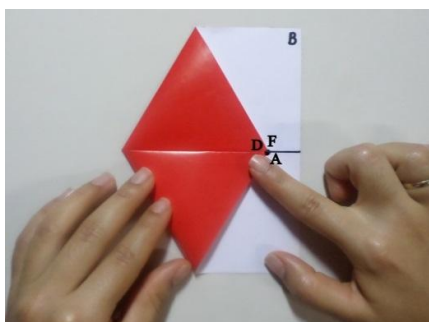


Foto 35: Sobrepondo D, A e F

Fonte: Elidayane Santos, 2014

4. Faça uma dobradura, de modo que forme uma reta que passe pelo ponto F seguindo a linha pontilhada como mostra a ilustração;

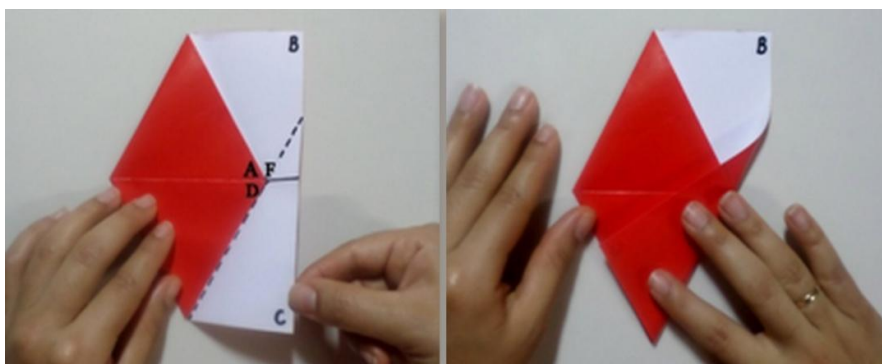


Foto 36: Reta que contém F

Fonte: Elidayane Santos, 2014

5. Desdobre os passos 3 e 4, e refaça o passo anterior;

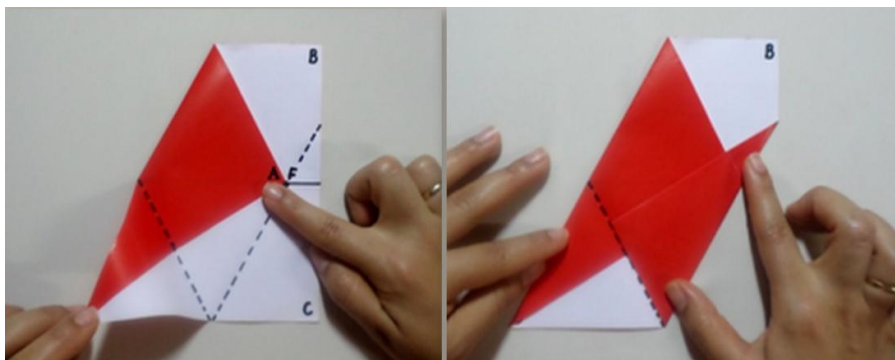


Foto 37: Desdobrando 3 e 4 e refazendo o passo 4

Fonte: Elidayane Santos, 2014

6. Dobre seguindo a linha pontilhada e vinque com precisão;

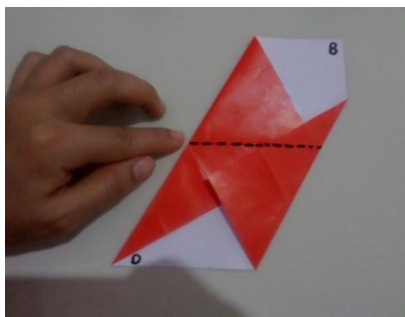


Foto 38: Dobradura sobre a linha pontilhada

Fonte: Elidayane Santos, 2014

7. Vire

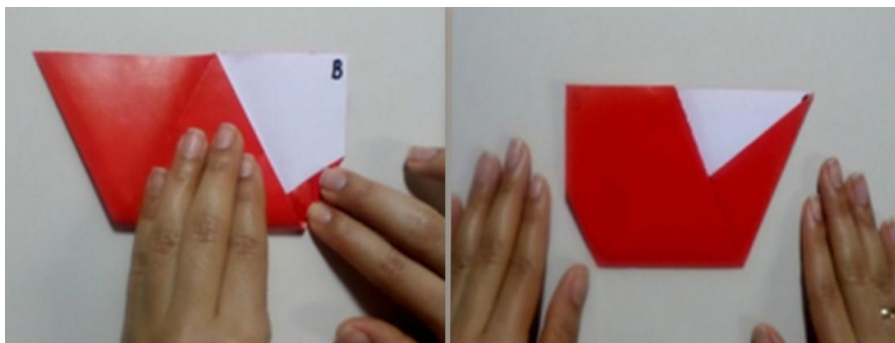


Foto 39: Virando o origami à esquerda

Fonte: Elidayane Santos, 2014

8. Em seguida faça uma dobradura com o vértice B formando assim um Paralelogramo;

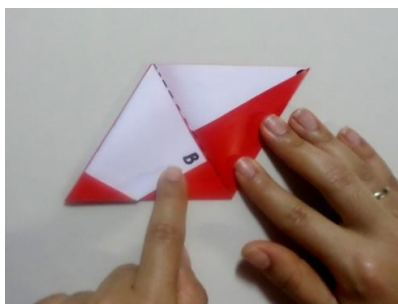


Foto 40: Formando um paralelogramo

Fonte: Elidayane Santos, 2014

9. Com o vértice D superior direito, realize o encaixe na aba inferior esquerda;



Foto 41: Encaixe com o vértice D

Fonte: Elidayane Santos, 2014

10. Dobre o triângulo ao meio; encaixando o vértice superior na aba indicada na foto, agora seu triângulo retângulo está pronto.

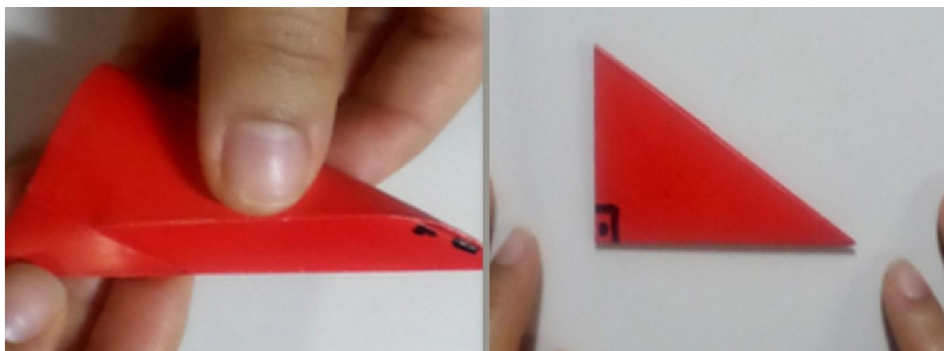


Foto 42: Triângulo Retângulo

Fonte: Elidayane Santos, 2014

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho foi possível verificar que o origami além de ser uma arte de dobrar papel é um excelente material de apoio para os professores nas aulas de Geometria. Esta área da matemática esta presente no dia a dia dos alunos, e desempenha um papel importante no desenvolvimento de capacidades intelectuais tais como; relacionar, investigar, resolver problemas, etc. Além disso, seu estudo ajuda na construção do pensamento lógico matemático dos alunos. Então porque não ensinar Geometria através do origami possibilitando assim, o desenvolvimento dessas habilidades?

Sabemos que os triângulos são uns dos mais importantes polígonos, por isso o objetivo principal deste trabalho é mostrar que o origami auxilia no estudo da Geometria de forma que incentive os alunos para a aprendizagem, mostrando que a dobradura é uma ferramenta eficaz e motivadora utilizada nas aulas de Matemática.

Por sua vez, as dobraduras desenvolvidas neste trabalho propõem uma metodologia muito proveitosa no ensino de Geometria, contribuindo assim para a prática docente. Cada dobra manipulada pelos próprios alunos oferece a oportunidade para a observação das características dos polígonos e o estudo de diversos conceitos geométricos deixando de ser uma geometria abstrata e distante da realidade do aluno. Pode-se também comprovar que o mesmo adquire conhecimento a partir da visualização do objeto de estudo, ideal para o estímulo da capacidade criativa e cognitiva. Desse modo, conclui-se que o origami e a matemática possuem certa familiaridade entre si a partir do momento que executamos uma dobradura.

A proposta desenvolvida despertará grande interesse nos participantes, em virtude de ser algo dinâmico, possibilitará o manuseio da montagem das peças e diferentes figuras geométricas com elas, podendo assim analisar a construção das proposições e teoremas. Podemos ainda afirmar, que as oficinas realizadas em sala de aula, facilitam a comunicação entre os professores e alunos, essa interação é de fundamental importância para a aprendizagem.

Nossa expectativa será proporcionar um maior entendimento da parte dos alunos e professores quanto à geometria, e que esta os permita construir figuras e, a partir daí chegarem as suas próprias conclusões quanto aos conceitos matemáticos envolvidos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

LIBÂNEO, J. C.. *Didática*. São Paulo: Cortez, 1994.

LORENZATO, S. (1995). *Por que não ensinar Geometria?* In: Educação Matemática em Revista – SBEM 4, p. 3-13.

LORENZATO, Sérgio. Para aprender Matemática. Autores associados, 2006.

PAVANELLO, R. M. - *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*. 1989.196 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. 1989.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; GAUDÊNCIO, S. J. – *A Geometria do Origami*. João Pessoa, Universitária/UFPB, 2003.

Sites Consultados:

D'AMBROSIO, Beatriz S.; *A formação de professores de Matemática para o século XXI: O grande desafio*. Disponível em:
<<http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-d%5C'ambrosiobs.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2013, 19:30:50.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. *Origami: História de uma Geometria Axiomática*. Disponível em:
<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_d_e_uma_Geometria_Axiomatica.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2013, 17:40:30.

LEROY, Luciana. *Aprendendo Geometria com o Origami*. Disponível em:
<<http://www.ime.usp.br/~iole/aprendendo%20geometria%20com%20origami.pdf>> Acesso em: 20 Nov. 2013, 10:15:00.