UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA ÉLYDA DE LIMA SILVA

ÁLGEBRA RECREATIVA: RESOLVENDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS E EXPLORANDO A COMUNICAÇÃO NA SALA DE AULA

Campina Grande/PB
2012

ANA ÉLYDA DE LIMA SILVA

ÁLGEBRA RECREATIVA: RESOLVENDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS E EXPLORANDO A COMUNICAÇÃO NA SALA DE AULA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande/PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S381a Silva, Ana Elyda de Lima.

Álgebra recreativa [manuscrito]: resolvendo problemas matemáticos e explorando a comunicação na sala de aula / Ana Elyda de Lima Silva. – 2012.

74 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2012.

“Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Álgebra. 2. Álgebra Recreativa. 3. Resolução de Problemas Matemáticos. I. Título.

21. ed. CDD 512

ANA ÉLYDA DE LIMA SILVA

ÁLGEBRA RECREATIVA: RESOLVENDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS E EXPLORANDO A COMUNICAÇÃO NA SALA DE AULA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 06 de julho de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientadora

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.ª Msc Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Silvanio de Andrade

Prof.º Dr. Silvanio de Andrade
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

A todos aqueles que sempre estiveram ao meu lado e que, de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Palavras não são suficientes para agradecer, acima de tudo, a Deus por ter me preparado durante toda a vida até conquistar essa vitória. Sem Ele eu não chegaria onde estou.

Agradeço, por tudo, a minha maravilhosa Mãe, Helena. Obrigado pela educação, pelos conselhos, por tanto cuidado e paciência, por seu incentivo, por seu amor incondicional e por nunca me deixar desistir. Obrigado por cuidar, tão bem, de mim todos esses anos. Sem você eu não me tornaria quem sou hoje.

Ao meu irmão Enilson Júnior, por toda calma, paciência e compreensão.

Aos meus tios João e Rita, por estarem sempre presentes em todos os momentos da minha vida, me apoiando sempre e acreditando no meu potencial.

Ao meu noivo Filipe, por todo encorajamento, paciência e compreensão. Por sempre estar ao meu lado em todos os momentos, sejam eles fáceis ou difíceis.

A professora e orientadora Kátia Maria de Medeiros, pela excelente forma de me orientar durante todo este trabalho, pela sua dedicação, atenção, boa vontade, empenho e responsabilidade acima de tudo. Você foi mais do que uma orientadora, você foi uma verdadeira amiga.

Meus sinceros agradecimentos aos professores Silvânio e Conceição que compõem a banca examinadora. Suas leituras atenciosas e sugestões, com certeza resultarão em contribuições importantes e bastante enriquecedoras para este trabalho.

A todos os poucos, porém verdadeiros, amigos que contribuíram para a realização deste trabalho. Rafaella e Micaella, vocês duas são pessoas maravilhosas que quero levar sempre comigo. Aprendi muito com vocês!

A todos os professores do Centro de Ciências e Tecnologia que tive o prazer de ser aluna e aprender um pouco de tudo o que sei hoje.

Enfim, os meus agradecimentos se estendem para todos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram de várias formas para a realização deste trabalho.

A todos vocês o meu MUITO OBRIGADO!

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, pelos seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais numa idade susceptível poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

(George Polya)

RESUMO

Quando o ensino da Álgebra é introduzido, no Ensino Fundamental, os alunos apresentam diversas dificuldades. É visível a dificuldade encontrada em conseguir resolver problemas que envolvam as expressões algébricas e equações de 1º grau. Quando relacionamos seu ensino-aprendizagem à utilização de uma metodologia inovadora, podemos obter uma melhor compreensão. O objetivo geral de nossa pesquisa foi utilizar a resolução de problemas com álgebra recreativa para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e a comunicação das expressões algébricas e equações de 1º grau. Essa pesquisa tem como objetivos específicos desenvolver e utilizar a resolução de problemas matemáticos, especificamente com as expressões algébricas; desenvolver e utilizar a resolução de problemas matemáticos, especificamente com as equações de 1º grau; estimular a interação entre os alunos nos grupos e entre os grupos durante a resolução dos problemas matemáticos e propiciar o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, especificamente através da exploração das explicações e do questionamento. A Metodologia foi desenvolvida levando em consideração a resolução de problemas matemáticos e foi composta por três fases: o levantamento sobre os conhecimentos adquiridos, antes da aplicação do Painel Integrado, o Painel Integrado e o levantamento sobre os conhecimentos adquiridos após o Painel Integrado. A pesquisa foi realizada entre abril e maio de 2012, numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Raul Córdula, em Campina Grande-PB. Os resultados evidenciam um significativo melhoramento que mostra com clareza a eficácia da Álgebra Recreativa em conjunto com a Resolução de problemas na compreensão das expressões algébricas e equações de 1º grau aliados à utilização do Painel Integrado que contribuiu para romper o padrão da comunicação e das interações na sala de aula de Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Recreativa. Resolução de Problemas Matemáticos. Comunicação. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

When the teaching of algebra is introduced in elementary school, students have many difficulties. It is apparent the difficulty in achieving problem solving involving algebraic expressions and equations of a degree. When we relate their teaching and learning the use of an innovative methodology, we can obtain a better understanding. The overall goal of our research was to use problem solving with algebra recreation to enrich the teaching-learning process and communication of algebraic expressions and equations of a degree. This research has the following objectives to develop and use mathematical problem solving, specifically with algebraic expressions, develop and use mathematical problem solving, specifically with the equations of a degree; encourage interaction between students in groups and between groups during the resolution of mathematical problems and encourage the development of oral and written communication, specifically by exploiting the explanations and questioning. The methodology was developed taking into account the mathematical problem solving and consisted of three phases: a survey on knowledge, before application of the Integrated Panel, the Panel and Integrated survey on the knowledge acquired after the Integrated Panel. The survey was conducted between April and May 2012, a class of 9º year elementary school of the State School of Elementary and Secondary Education Professor Raul Cordula in Campina Grande - PB. The results show a significant improvement that clearly shows the effectiveness of Algebra Recreation in conjunction with the resolution of problems in the understanding of algebraic expressions and equations of first degree combined with the use of the Panel Integrated which helped to break the pattern of communication and interactions on mathematics classroom.

Key Words: Algebra Recreational. Mathematical Problem Solving. Communication, Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Álgebra Recreativa em conjunto com a Resolução de Problemas pode ser um importante recurso na aprendizagem da Matemática. No entanto, esse recurso ainda não está sendo bem trabalhado na realidade da escola tradicional, tendo em vista que os professores optam por aulas tradicionais, centradas no formalismo onde, raramente, ocorre comunicação matemática na sala de aula.

Propomos neste trabalho fazer uso da Álgebra Recreativa como instrumento para resolver problemas matemáticos. E mostrando que, através da Resolução de Problemas, o aluno tem a oportunidade de aprender e se envolver com a Matemática de modo prazeroso e o professor de tornar as aulas mais interessantes, dinâmicas e desafiadoras.

Dessa forma, nesta pesquisa, foi problematizado o conteúdo das expressões algébricas e equações de 1º grau visando facilitar a compreensão destes conteúdos algébricos por intermédio de uma metodologia dinâmica. A nossa pesquisa é de caráter quali-quantitativa e é embasada na resolução de problemas matemáticos.

Iniciamos o trabalho explicitando os objetivos, logo depois fazemos uma revisão de literatura mostrando os aspectos históricos da Álgebra e da Resolução de Problemas matemáticos, bem como a Resolução de Problemas e o estudo da Álgebra em sala de aula e as possibilidades de haver uma maior comunicação, explorando assim, as interações entre alunos e professor nas aulas de Matemática. Em seguida, explicitamos a metodologia; posteriormente, temos a análise (pré-teste, Painel Integrado e pós-teste); e, finalmente, apresentamos a conclusão e a biografia de Yakov Perelman, pioneiro na ideia de trabalhar conteúdos de forma recreativa.

2. OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Utilizar a Resolução de Problemas com Álgebra Recreativa para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e a comunicação das expressões algébricas e equações de 1º grau.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver e utilizar a Resolução de Problemas matemáticos, especificamente com as expressões algébricas;
- Desenvolver e utilizar a Resolução de Problemas matemáticos, especificamente com as equações de 1º grau;
- Estimular a interação entre os alunos nos grupos e entre os grupos durante a resolução dos problemas matemáticos;
- Propiciar o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, especificamente através da exploração das explicações e do questionamento.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. ELEMENTOS DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

3.1. 1. Algumas Perspectivas Históricas sobre a Álgebra

Segundo Baumgart (1992) a palavra Álgebra não se submete a uma etimologia clara como, por exemplo, a palavra "aritmética", que deriva do grego *arithmos*, que quer dizer "número". A álgebra é uma versão latina da palavra árabe *al-jabr* usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm). Este livro de Álgebra também é citado, abreviadamente, como *Al-jabr*.

Ainda para o autor a Álgebra hoje possui um significado muito mais extenso, e uma definição aceitável que requer um enfoque em duas fases:

- Álgebra antiga (elementar) que é o estudo das equações e os métodos de resolver estas mesmas equações estudadas e;
- Álgebra moderna (abstrata) que é o estudo das estruturas matemáticas como, por exemplo, os grupos, anéis, corpos e etc.

A principal característica da fase antiga (elementar), que compreende o período de 1700 a.C. a 1700 d.C, foi a invenção contínua da linguagem simbólica e o estudo de vários métodos que se utilizavam de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potência inteira e radiciação) com os coeficientes numéricos das equações para a obtenção de suas raízes. Segundo Baumgart (1992), nesse período o desenvolvimento da linguagem algébrica evoluiu passando por três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (abreviações de palavras) e o simbólico que passou por várias transformações até se tornar estável. O estilo retórico é caracterizado pela descrição de procedimentos, em que instruções verbais fornecidas eram aplicadas a uma sequência de casos específicos. A Álgebra babilônica, a Álgebra egípcia e a Álgebra geométrica grega apresentavam o estilo retórico.

Álgebra babilônica

A Álgebra babilônica ocorreu no período entre 2000 a.C e 1600 a.C. Foi nesse período que a matemática babilônica atingiu um nível muito elevado, especificamente na habilidade de fazer contas, conseguindo assim generalizar as operações. Os babilônios desenvolveram técnicas e métodos para medição e contagem, impulsionados pela necessidade de resolver problemas do dia a dia, como por exemplo, agrimensura e comércio. Entre os papiros babilônicos que foram encontrados podemos observar exemplos de problemas que envolvem as raízes quadradas e cúbicas, e exercícios com soluções de problemas puramente algébricos, que são equivalentes a exercícios que envolvem equações quadráticas.

Uma análise cuidadosa dos papiros mostra claramente que os cálculos não só tentavam resolver problemas do “mundo real” como também problemas de pura abstração, que eram utilizados para desenvolver e exercitar as técnicas de resolução.

Para Eves (2004) os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em Álgebra do que em geometria. É impressionante a profundidade e a diversidade dos problemas considerados por eles.

A plimpton 322 é umas das tabulas matemáticas babilônicas mais impressionantes. Ela pertence à coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, e foi catalogada sob o número 322 e foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.). Os primeiros a descreverem o seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945.

A tabula contém três colunas praticamente completas de caracteres (Figura 1). Há uma quarta mais incompleta, coluna de caracteres ao longo do lado quebrado.

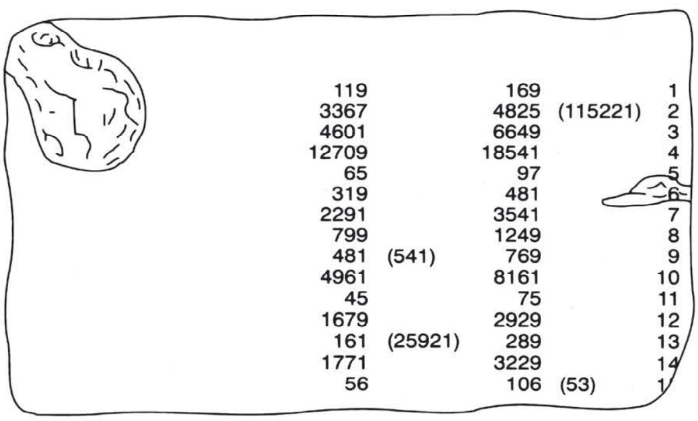


Figura 1. Tabula Plimpton

O conteúdo principal do Plimpton 322 é uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal babilônica. A quarta coluna é apenas uma linha de números em ordem de 1 a 15. A segunda e terceira colunas são totalmente visíveis na tabula. Porém, a ponta da primeira coluna foi quebrada, dessa forma várias indagações sobre o que poderia ser a falta dígitos.

Álgebra no Egito

A Álgebra surgiu quase que simultaneamente no Egito e na Babilônia, porém faltava a Álgebra egípcia os métodos sofisticados que eram utilizados pelos babilônicos, um exemplo seria o sistema de numeração que é bastante primitivo quando comprado ao babilônico, como também faltava à quantidade e diversidade de equações resolvidas, a não ser pelos documentos egípcios: Papiro Moscou (1850 a.C) e o Papiro Rhind (1650 a.C).

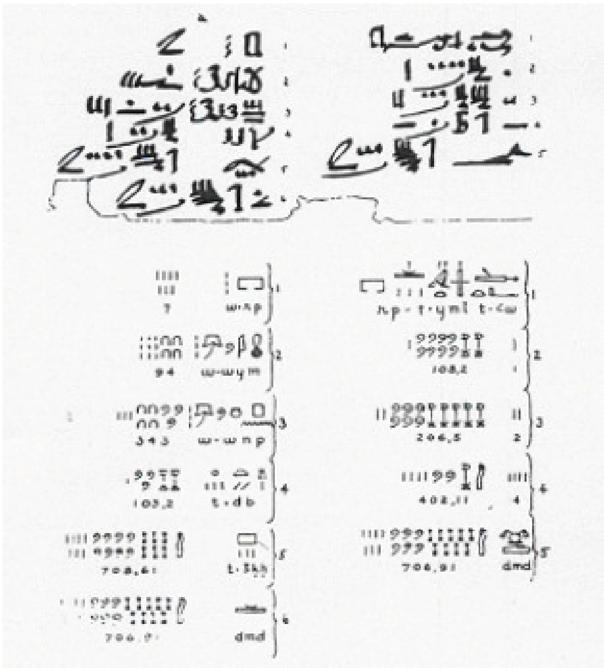


Figura 2. Um problema com progressões geométricas do Papiro de Ahmes (apud Satnic e Kilpatrick, 1989)

Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução exigia uma equação linear simples. Segundo Baumgart (1992), para equações lineares, os egípcios usavam um método de resolução consistindo em uma estimativa inicial seguida de uma correção final - um método ao quais os europeus posteriormente deram o nome um tanto abstruso de "regra da falsa posição".

Para Eves (2004) há certo simbolismo na Álgebra egípcia. Por exemplo, no papiro Rhind encontram-se símbolos para mais e menos. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário à escrita egípcia. Utilizavam-se também símbolos, ou ideogramas, para igual e para a incógnita.

Álgebra Geométrica Grega

A Álgebra grega é bastante diferente da Álgebra babilônica e egípcia, pois os gregos não se preocupavam propriamente com as suas aplicações práticas. De uma forma geral, a matemática grega se diferencia das anteriores porque leva em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade.

A coleção Palatine ou Antologia grega contém 46 problemas numéricos algébricos. Segundo Eves (2004) ela foi reunida por volta de 500 d.C. pelo gramático Metrôdoro. Embora alguns dos problemas possam ser da lavra do autor, há fortes razões para se acreditar que muitos deles são consideravelmente mais antigos.

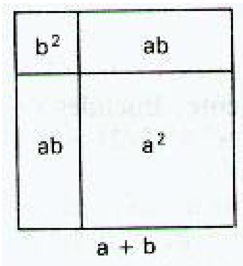


Figura 3. Retirada de Baumgart p.7 (1992).

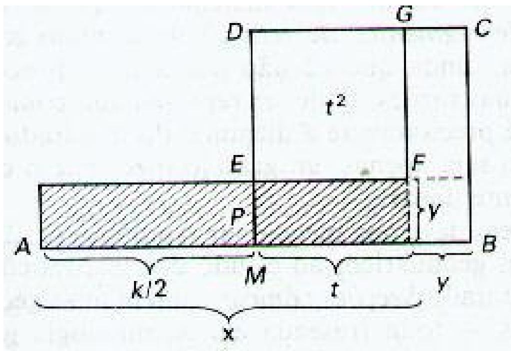


Figura 4. Retirada de Baumgart p.7 (1992).

Para Baumgart (1992) a Álgebra grega conforme foi formulada pelos pitagóricos e por Euclides era geométrica. Por exemplo, o que nós escrevemos como: (a+b)2 = a^2+ 2ab + b^2 era concebido pelos gregos em termos do diagrama apresentado na Figura 3.

E há uma versão simplificada em Baugamrt (1992) da proposição 28, Do livro VI dos Elementos: “Dada uma linha reta AB [isto é, x+y=k], construir ao longo dessa linha um retângulo com uma dada área [xy = P], admitindo que o retângulo "fique aquém" em AB por uma quantidade "preenchida" por outro retângulo [o quadrado BF na Figura 4], semelhante a um dado retângulo [que aqui nós admitimos ser qualquer quadrado]”.

As várias tentativas dos gregos de resolverem problemas numéricos fizeram com que encontrassem o método axiomático-dedutivo, que consiste em aceitar como verdadeiras certas proposições e a partir delas, por meio de uma sucessão lógica chegar a proposições mais gerais.

Talvez, as dificuldades com que os gregos se depararam aos estudar os problemas relativos aos processos infinitos seja o maior motivo que os desviaram da álgebra e os fizeram ir em direção à geometria.

3.1.2. Algumas Perspectivas Históricas sobre a Resolução de Problemas

Os problemas matemáticos sempre ocuparam um lugar central nos currículos, mas a resolução deles não. Nos últimos anos é que os educadores vêm aceitando a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de Resolução de Problemas merece uma atenção especial.

Um documento do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980) chamado *Agenda para a Ação*, propõe que a “Resolução de Problemas deve ser o foco da Matemática escolar” (apud Stanic e Kilpatrick, 1989 p. 01). Na Agenda, a Resolução de Problemas é caracterizada como uma das dez “áreas de habilidades básicas”. Esse documento afirma que há uma relação direta entre a Resolução de Problemas matemáticos e a Resolução de Problemas envolvidos em outras partes da nossa vida.

Para Stanic e Kilpatrick (1989) três temas gerais caracterizam o papel da Resolução de Problemas nos currículos de Matemática das escolas: *Resolução de Problemas como Contexto*, *Resolução de Problemas como Capacidade* e *Resolução de Problemas como Arte.*

A Resolução de Problemas como Contexto

A Resolução de Problemas como contexto está fundamentada na ideia de que os problemas e a resolução deles são meios para conquistar objetivos importantes. Esse tema tem, no mínimo, cinco subtemas. São eles: Resolução de problemas como justificação, Resolução de problemas como motivação, Resolução de problemas como atividade lúdica, Resolução de problemas veículo e Resolução de problemas como prática.

Ao passar do tempo, a Resolução de Problemas foi inserida no currículo de Matemática, porque os problemas fornecem uma justificação para ensinar Matemática. Alguns problemas relacionados de algum modo com experiências do mundo real foram inseridos no currículo para atrair os alunos e professores da importância da Matemática.

O subtema da motivação, segundo os autores, está relacionado com o da justificação, em que os problemas justificavam a Matemática que se ensinava. Entretanto, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica, onde o principal objetivo é de atrair o interesse dos alunos.

A Resolução de Problemas como atividade lúdica está relacionada com o da motivação, pois, neste caso, o que está envolvido é o interesse dos alunos. Na atividade lúdica os problemas são fornecidos não só para motivar os alunos a aprender, mas também para lhes permitir ter alguma diversão com a Matemática que eles já aprenderam. Esse subtema também se diferencia dos dois primeiros, segundo os autores, na medida em que problemas sem qualquer ligação ao mundo do real são perfeitamente adequados.

Os problemas que são explorados na sala de aula, nem sempre, são simplesmente para motivar os alunos a se interessarem pela Matemática, mas também são como um veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os processos de descoberta refletem a idéia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. E quando o currículo da Matemática consiste exclusivamente em problemas, estes servem de veículo.

A Resolução de Problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de Matemática. Neste subtema, os problemas não determinam justificação, motivação, atividade lúdica ou veículo tanto como a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente.

Apesar de a Resolução de Problemas como contexto continuar sendo um tema forte e persistente, o tema Resolução de Problemas como capacidade tornou-se dominante para aqueles que vêem a Resolução de Problemas como uma valiosa finalidade curricular, merecendo atenção especial, em vez de ser simplesmente um meio para atingir outros objetivos.

A Resolução de Problemas como Capacidade

Para Stanic e Kilpatrick (1989) o tema capacidade está relacionado com as mudanças que tiveram lugar perto da virada do século XIX para o século XX.

Colocar a Resolução de Problemas na classificação das capacidades a adquirir pelos alunos nos leva a certas consequências para o papel da Resolução de Problemas no currículo. Uma consequência é que, dentro das capacidades gerais da Resolução de Problemas, fazem-se distinções hierárquicas entre resolver problemas convencionais e problemas não convencionais. A Resolução de Problemas não convencionais é caracterizada como uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de Resolução de Problemas convencionais.

A Resolução de Problemas como Arte

Segundo os autores, um olhar mais profundo e mais compreensivo da Resolução de Problemas nos currículos escolares de Matemática – a visão da Resolução de Problemas como arte – surgiu do trabalho de George Polya, que renasceu no nosso tempo a idéia da heurística (a arte da descoberta).

Na perspectiva de Polya, a Resolução de Problemas é uma arte prática, "como nadar ou tocar piano". Aprendem-se tais artes por imitação e por prática. Polya assumia que nem a Resolução de Problemas por si só, sem uma orientação, conduz a um melhor comportamento, nem o estudo da Matemática pela sua natureza própria, nos eleva o nível geral de inteligência. Em vez disso, reconhecia que as técnicas de Resolução de Problemas precisam ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada.

Para ele, o professor é a chave. Só um professor sensível pode estabelecer o tipo correto de problemas para uma dada aula e promover a quantidade de ajuda apropriada. Porque ensinar também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da

Resolução de Problemas; ela permanece uma atividade humana que requer experiência, gosto e julgamento.

3.2. RESOLVENDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS E ESTUDANDO ÁLGEBRA NA SALA DE AULA

Segundo Polya (1995), uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, para toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. Para resolver problemas, o autor, sugere uma heurística que se resume em quatro etapas. A compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto.

A primeira etapa consiste em compreender o problema. Para isso, devemos analisar os dados que podem estar apresentados explicitamente e/ou implicitamente no problema. A segunda etapa baseia-se na elaboração do plano, pois através da elaboração podemos encontrar conexões entre dados e incógnitas. A terceira etapa seria a execução do plano que foi elaborado, verificando cada passo. Através dessa verificação é possível observar claramente se os passos estão corretos. E por fim, segue o retrospecto, onde a solução obtida é analisada.

Vale salientar que estes passos não devem ser seguidos de modo algorítmico, sem reflexão, pois não foi o que o autor propôs. Os passos são um "roteiro" e podem estar inseridos numa aula interativa e reflexiva.

Um estudo interessante a ser feito é de utilizar a heurística sugerida por Polya envolvendo a Álgebra. Tendo em vista que o ensino da Álgebra é introduzido de forma extremamente tradicional no 7º ano do Ensino Fundamental e é apresentado de forma fracionada, enfatizando vários aspectos em momentos diferentes, sem haver preocupação com a articulação e acontextualização, nestes momentos. Desse modo, desconsidera-se a formação da ideia básica do que seria a Álgebra.

3.2.1. Resolução de Problemas e perspectivas sobre a Álgebra na aula de Matemática

Durante os últimos 25 anos, segundo Romberg (1994), os pesquisadores da Educação Matemática tem se esforçado para redefinir a Matemática escolar e adaptar as características de um currículo que possa refletir as, verdadeiras e atuais, necessidades da sociedade.

Os problemas matemáticos são essenciais no desenvolvimento da Matemática, no entanto, na sala de aula, esses problemas são trabalhados como exercícios repetitivos, resolvidos por meio de cálculos mecânicos.

Segundo Medeiros (2001) quando falamos em Resolução de Problemas, podemos constatar que a divisão de problemas em abertos e fechados, auxilia para sua resolução. Os problemas fechados também são denominados problemas convencionais. De certa forma, quando trabalhamos com problemas fechados, utilizamos conhecimentos prévios ou assuntos pré-estudados e, para resolvê-lo basta saber todos os dados e deduzir qual operação usar, chegando a uma solução, que quase sempre é única. Já os problemas abertos, merecem uma atenção maior, pois nele o aluno lê o problema e senti o entusiasmo que o problema oferece em querer resolve-lo, e a partir daí constrói suas próprias estratégias para chegar à solução, ou soluções do problema.

Esse modo de trabalhar com problemas matemáticos não contribui para um melhor aproveitamento da atividade, que é importante para o desenvolvimento da Matemática, na sala de aula. Sendo assim, é necessário criar um contrato didático. Esse contrato é um conjunto de expectativas relacionadas entre o professor, o aluno e o conhecimento específico que está sendo trabalhado. Onde a cada novo conhecimento, o contrato é renovado e, consequentemente, renegociado.

Ao trabalhar com os problemas matemáticos em atividades diferentes das usuais, novas regras de contrato didático podem ser estabelecidas. Nessa nova situação, os problemas serão preparados pelo professor e apresentados aos alunos de outra forma. Os problemas abertos, que podem ser apresentados nessa nova atividade podem ser uma alternativa para provocar um rompimento no contrato didático.

Uma pesquisa realizada por Medeiros (2001), em uma turma do 6º ano de uma escola pública, nos ajuda a entender de como se estabelece esse contrato didático na sala de aula. A pesquisa consistiu em 12 sessões, onde em cada sessão foi trabalhado um problema. Da 1ª a 6ª sessão problemas fechados, e da 7ª a 12ª sessão problemas abertos. Nas seis primeiras sessões, foram problemas fechados, já da sétima à décima segunda sessão, as atividades eram problemas abertos. Os problemas foram abordados em grupos.

No final da pesquisa foi verificado que o fato dos alunos estarem em grupo, não pareceu alterar muito a interação entre eles. Não ocorreram conflitos sócio cognitivos em nenhuma das sessões dessa fase. Também foi observado que durante a realização dos problemas abertos houve uma mudança na relação professor/aluno e professor com o conhecimento, e houve uma maior diferença para os alunos, por que eles precisaram encontrar novas estratégias de resolução e adquirir um novo posicionamento diante dos problemas.

Nos Estados Unidos, salienta Romberg (1994), existe uma Comissão de normas para a Matemática escolar do Conselho Nacional de professores de Matemática (NCTM), que é responsável pela elaboração de objetivos tanto voltados para a sociedade quanto para os alunos. O seu relatório de Currículo, Avaliação e Normas para a Matemática Escolar lista nove objetivos: *quatro objetivos voltados para a sociedade* e *cinco voltados para os alunos*.

Os quatro objetivos gerais sociais para a educação na área de Matemática são:

- *Trabalhadores Matematicamente Alfabetizados*. O local de trabalho de hoje e do futuro exigirá compreensão matemática e a capacidade de formular e resolver problemas complexos. “As empresas já não procuram trabalhadores com costas fortes, mas com mãos inteligentes, e ‘comerciantes’ com habilidades aritméticas”. (p. 3);

- *Aprendizagem ao Longo da Vida*. A maioria dos trabalhadores vai mudar de emprego com freqüência e por isso necessitam de flexibilidade e capacidade de resolver problemas que lhes permitam "explorar, criar, adaptar às novas condições e, ativamente, criar novos conhecimentos ao longo de suas vidas" (p. 4);

- *Oportunidades para Todos*. Porque a matemática se tornou "um filtro crítico para o emprego e a participação plena na nossa sociedade" (p.4), deve ser acessível a todos os estudantes, não apenas homens brancos, o grupo que atualmente estuda a Matemática mais avançada;

- *Um Eleitorado Iinformado*. Devido à natureza cada vez mais técnica e complexa de questões atuais, a participação dos cidadãos requer conhecimentos técnicos e compreensão, especialmente habilidades em leitura e interpretação de informações complexas.

Esses objetivos sociais salienta o autor, exigem que os alunos se tornem "matematicamente poderosos". Segundo o NCTM (1989, p.5) (APUD ROMBERG 1994) esse poder matemático "denota as habilidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como a habilidade de usar uma variedade de métodos matemáticos de forma eficaz para resolver problemas não rotineiros". Os autores dos Padrões passam a ressaltar que a alfabetização Matemática inclui muito mais do que intimidade com números e aritmética. "Para lidar com confiança com as demandas da sociedade de hoje, deve ser capaz de compreender a implicação de muitos conceitos matemáticos - por exemplo, o acaso, a lógica, e gráficos -. Que permeiam notícias e decisões diárias de rotina (p.5)".

Para articular a noção de alfabetização matemática, os autores dos Padrões propõem esses cinco objetivos gerais voltados aos alunos:

- *Aprender a importância da Matemática*: Compreender sua evolução e seu papel na sociedade e nas ciências;

- *Tornar-se Confiante na Própria Capacidade*: Pensar com confiança na própria Matemática, e ter a capacidade de dar sentido a situações e resolver problemas.

- *Tornar-se um Solucionador de Problemas Matemáticos*: Essencial para se tornar um cidadão produtivo, que exige experiência na resolução de uma variedade de problemas estendida e não rotineiras;

- *Aprender a Comunicar Matematicamente*: Aprender os sinais, símbolos e termos de Matemática;

- *Aprender a raciocinar Matematicamente:* Fazendo conjecturas, obtenção (recolha) de provas, e construir argumentos matemáticos.

Esses objetivos, afirma Romberg (1994), sugerem que os alunos devem ser expostos a várias experiências matemáticas, que eles sejam capazes de desenvolver hábitos matemáticos e que sejam encorajados a ler, escrever, discutir matematicamente, para que possam ganhar confiança na própria capacidade de resolver problemas.

> A oportunidade para todos os alunos a experimentar estes componentes da formação matemática é o coração da nossa visão de um programa de Matemática de qualidade. O currículo deve ser permeado com esses objetivos e experiências de forma que eles tornaram-se comuns na vida dos estudantes. (p. 5)

As habilidades tradicionais, os conceitos e as aplicações são contemplados nos objetivos mais gerais para a Resolução de Problemas e comunicação. Em todo o documento Padrões (APUD ROMBERG, 1994 P.5) os autores minimizam a opinião que o conhecimento consiste em partes distintas que devem ser tratados separadamente. Em vez disso, eles enfatizam proporcionar aos alunos experiências através das quais podem construir conexões ricas entre os vários tipos de conhecimento.

Por outro lado, de forma tradicional, segundo Souza e Diniz (2003) o ensino da Álgebra é introduzido, no Brasil, no 7º ano do Ensino Fundamental, é quando surgem às letras nos lugares dos números e as operações já estão aparentemente resolvidas, uma vez que temos um número depois do sinal da igualdade. Surge assim, uma “nova” linguagem matemática que tenta transcrever em símbolos matemáticos concepções da forma: $2x$ (o dobro de um número), $x - 5$ (a idade que eu tinha a 5 anos), $x + y = 14$ (a soma de dois números é igual a 14) e, assim, iniciar o conceito de variável como sendo uma incógnita para a resolução de equações e de sistemas que, infelizmente, são sempre aplicados em problemas convencionais.

No 7º ano, a Álgebra é voltada às equações, neste sentido as letras são entendidas pelos alunos como um valor numérico que é uma incógnita, que deve ser determinado após alguns cálculos. Apenas se trabalha com equações e sistemas que sempre possuem solução e uma única solução. No final do 7º ano, são apresentadas as inequações, onde os alunos apenas se preocupam com os sinais $<$ (menor) e (maior) $>$ e, geralmente, cometem o erro de tratar as inequações como se fossem equações.

No 8º ano o ensino da Matemática muda totalmente de foco, o principal objetivo é ensinar as regras que permitem a manipulação dos símbolos algébricos. No 9º ano é retomado o trabalho com incógnitas, nessa série são abordadas as equações do 2º grau e, só no final é apresentada a idéia de função. Só neste último momento a variável é apresentada com ênfase, é nesse nível que ela aparece como substituta de vários possíveis valores, de uma grandeza relacionada com outra. Por outro lado, é onde os alunos sentem uma grande dificuldade em aceitar expressões da forma $y = 2x$ ou $y = 4x + 6$, pois esse tipo de equação aparenta ser uma equação literal.

Segundo Souza e Diniz (2003) se analisarmos as séries do Ensino Fundamental, onde a Álgebra é estudada, podemos perceber que ela é apresentada de forma fracionada, enfatizando vários aspectos em momentos diferentes, sem haver preocupação com a ligação entre eles e com a sua contextualização, desconsiderando a formação da ideia básica do que seria Álgebra, que é o conceito de variável, nas suas diversas formas.

Ainda para as autoras, a Álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. E, como toda linguagem, ela possui suas regras e seus símbolos. As regras são as mesmas da aritmética que permitem a manipulação dos símbolos e os símbolos são as letras e os sinais da aritmética. No entanto, a Álgebra e a aritmética possuem linguagens distintas.

A aritmética trata dos números, das operações e suas propriedades, tendo como finalidade a Resolução de Problemas e casos que exijam uma resposta numérica. A Álgebra, por sua vez, procura expor o que é universal, tanto afirmar para inúmeros valores numéricos, independentes de quais sejam.

Para Sousa e Diniz (2003), a Álgebra possui quatro funções distintas: A Álgebra como generalizadora da aritmética, a Álgebra como estudo de processos para resolução de problemas, a Álgebra como expressão da variação de grandezas e a Álgebra como estudo de estruturas matemáticas.

1. *A Álgebra como Generalizadora da Aritmética***.** Nesta função as variáveis surgem para generalizar os padrões numéricos que foram construídos na aritmética. O principal objetivo é de fazer com que o aluno observe um padrão e consiga-o generalizar;

2. *A Álgebra como Estudo de Processos para Resolução de Problemas.* Nesta função, as variáveis são incógnitas, ou seja, são valores numéricos que são descobertos através da resolução de um problema ou de um sistema de equações. O principal objetivo é que o aluno descreva através de símbolos, uma equação que

envolva a incógnita de um problema e, posteriormente, simplifique a equações e a resolva;

3. *A Álgebra como Expressão da Variação de Grandezas.* Nesta perspectiva, as variáveis realmente variam. O principal objetivo é fazer com que os alunos relacionem quantidades e faça gráficos.

4. *A Álgebra como Estudo de Estruturas Matemáticas***.** Nesta função, a principal característica é a manipulação das variáveis como símbolos facultativos que não possua nenhuma relação com o problema, ou qualquer que seja o padrão a ser generalizado. O principal objetivo é fazer com que o aluno manipule expressões e consiga justificar o que fez, assimilando as regras da Álgebra.

3.2.2. Simbolismo e Pensamento Algébrico

Na Álgebra fazemos o uso dos símbolos, sinais e letras do alfabeto, pois a sua aplicação é central neste campo da Matemática. Para Ponte, Branco e Matos (2008) os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada e são muito úteis para a Resolução de Problemas. Porém, os símbolos apresentam vários significados, variando de acordo com o contexto, e grande parte das dificuldades apresentadas pelos alunos é por não saber fazer a interpretação correta. Para obtermos um raciocínio algébrico necessitamos compreender, de fato, a linguagem algébrica, só assim conseguiremos compreender a natureza e a origem das dificuldades dos alunos.

Ainda para os autores, a linguagem algébrica concebe a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a Resolução de Problemas. Porém, a um ponto negativo nesse simbolismo. E isso acontece quando utilizamos a simbologia de modo totalmente abstrato, sem significado, onde domina a prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, equações de 1º grau ou qualquer outro conteúdo matemático.

A partir dos anos 80, vários estudos foram realizados sobre as diferentes visões da Álgebra. Diversos desses estudos procuraram delimitar o que deve ser inserido, ou não, na Álgebra que é ensinada nas escolas de ensino básico. O americano James Kaput foi o autor que mais escreveu sobre essa ideia. Para James Kaput (APUD PONTE, BRANCO E MATOS 2008) o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais.

Kaput (APUD PONTE, BRANCO E MATOS 2008) identifica cinco particularidades do pensamento algébrico, que estão relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenômenos.

Esta perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico apoia a ideia de que este tema não se resumi ao simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações.

3.2.3..A Àlgebra Recreativa

A Matemática recreativa é um tema pouco encontrado em pesquisas que exploram o aspecto didático deste tema. Nesta pesquisa este tema está relacionado à Resolução de Problemas matemáticos envolvendo a Álgebra. A resolução de problemas, envolvendo a Álgebra Recreativa, pode se constituir em um tema de forte interesse para os pesquisadores da Educação Matemática.

A Matemática Recreativa pode tomar vários aspectos: um quebra-cabeça a ser resolvido, um jogo de competição, uma mágica, um paradoxo, uma falácia ou simplesmente Matemática com um toque qualquer de curiosidade ou diversão, todos esses exemplos são atividades que envolvem a Matemática recreativa (GARDNER, 1967).

Perelman (2008) em seu livro intitulado Álgebra Recreativa, afirma que para tornar mais atraente o tema e elevar o interesse por ele, recorre a métodos diversos: problemas baseados em temas originais que despertam curiosidade, excursões divertidas pela História da Matemática, aplicações inesperadas da álgebra a questões da vida pratica, etc.

O livro Álgebra Recreativa do autor acima referido, é composto de nove capítulos, onde cada um deles explora o aspecto lúdico, todos os capítulos são compostos por curiosidades matemáticas e problemas. Para o autor, o livro tem por finalidade relembrar e reforçar os conhecimentos dispersos e inconsistentes da Álgebra, mas, em primeiro lugar, visa despertar no leitor o interesse por exercícios e desejo de cobrir com ajuda de manuais eventuais lacunas.

O primeiro capítulo tem como título A QUINTA OPERAÇÃO MATEMÁTICA, onde a quinta operação matemática é a potenciação.

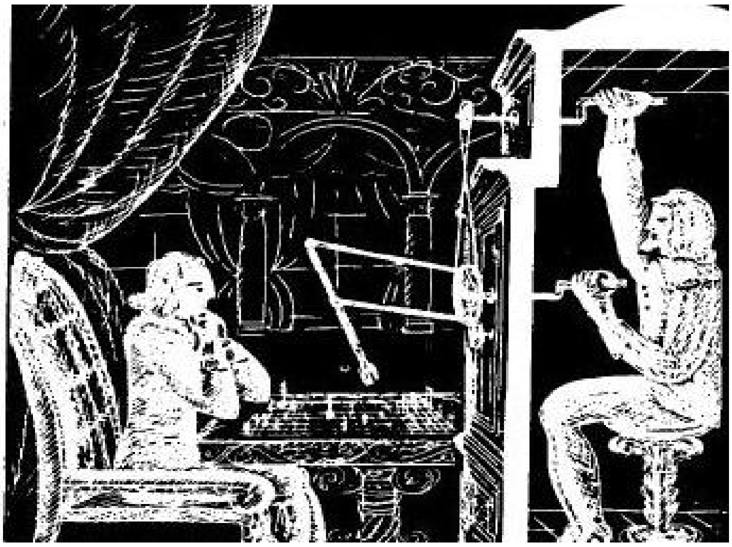


Figura 5. Máquina automática utilizada para jogar xadrez, sec. XVIII e XIV

O segundo capítulo tem como título A LINGUAGEM DA ÁLGEBRA, esse capítulo é todo composto por problemas matemáticos e envolvem as expressões algébricas e equações de 1º grau.

O terceiro capítulo é denominado EM AJUDA DA ARITMÉTICA, nesse capítulo, o autor faz uso da Álgebra para mostrar a veracidade de algumas demonstrações da aritmética.

O quarto capítulo é intitulado AS EQUAÇÕES DE DIOFANTO, esse capítulo é todo composto por problemas matemáticos envolvendo as Equações de Diofanto.

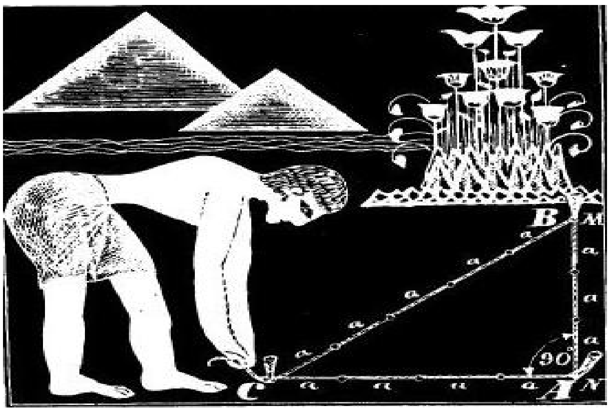


Figura 6. Agrimensor usando método simples para traçar linhas perpendiculares em um terreno.

O quinto capítulo é intitulado de A SEXTA OPERAÇÃO MATEMÁTICA, todo o capítulo é formado por resolução de problemas envolvendo as raízes quadradas.

O sexto capítulo tem como título EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU, ele também é todo composto por problemas matemáticos que envolvem as equações de 2º grau.

O sétimo capítulo é intitulado O MENOR E O MAIOR VALOR, onde é todo formado por problemas matemáticos onde se propõem determinar o maior e o menor valor entre duas grandezas.

O oitavo capítulo tem o título de PROGRESSÕES, ele é todos formado por problemas evolvendo as progressões aritméticas e geométricas.

E, por fim, o novo capítulo é intitulado A SÉTIMA OPERAÇÃO MATEMÁTICA, que são os logaritmos, esse capítulo é composto por curiosidades e problemas matemáticos.

Os problemas matemáticos escolhidos para a realização desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foram todos retirados, e alguns adaptados, do segundo capítulo, A linguagem da Álgebra. Todos os problemas matemáticos escolhidos têm um aspecto lúdico e, consequentemente, se incluem dentro da perspectiva da Matemática Recreativa.

3.2.4. Dificuldades dos Alunos na Compreensão de Expressões Algébricas e Equações do 1.º Grau

Vários alunos apresentam dificuldades ao resolverem equações. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2008) o grande motivo que causa essas dificuldades são os erros que os alunos cometem ao trabalhar com as expressões algébricas Muitas vezes, eles não compreendem o significado das expressões ou as condições da sua equivalência. Para Ponte, Branco e Matos (2008), isso acontece porque os alunos continuam a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal “menos” que o precede.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2008) as dificuldades mais comuns são:

- Adição incorreta de termos semelhantes: Este fato acontece, principalmente, quando tratamos de equações de 1° grau. Uma das situações que mais acontecem refere-se ao fato de muitos alunos adicionarem incorretamente os coeficientes de dois termos, afirmando, por exemplo, que $-2x + 5x = 8$ é equivalente a $-7x = 8$;

- Adição incorreta de termos não semelhantes e interpretação incorreta do sinal "=": Diante de expressões do tipo $2x + 3 = 4x - 1$, alunos exprimem surpresa pelo fato de $4x$ ser um termo do segundo membro da equação, quando esperavam que a soma de $2x$ com 3 tivesse dado origem a $5x$. Alguns alunos consideram o binômio $2x + 3$ como uma expressão que não está terminada e que pode, ainda, ser alvo de simplificação. Deste modo, não interpreta o sinal "=" como exprimindo uma relação de equivalência;

- Interpretação incorreta de monômios do 1.º grau: Neste caso, alguns alunos mostram dificuldades na compreensão de monômios do tipo $a.x$, com a diferente de zero. Na equação $2x + 3 = 15$, alguns entendem a letra x como representante do algarismo das unidades de um número com duas dezenas;

- Separação entre parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica: Neste caso, alguns alunos mostram dificuldade em simplificar a expressão algébrica $P = A + (A + 3) + (A \times 2)$ por considerar que deve separar totalmente a parte literal e a parte numérica;

- Resolução incorreta de uma equação do tipo a.x = b: Quando os alunos resolvem equações deste tipo surgem varias dificuldades acerca dos valores de a e b.
Por exemplo, alguns alunos pensam que sempre que após o sinal "–" deve estar um número positivo. Pensando deste modo, não compreendem como – x pode ser igual a 4;

A origem das dificuldades apresentadas pelos alunos está relacionada com o desenvolvimento cognitivo. Deste modo, qualquer atitude do professor para minimizar estas dificuldades será em vão. Por outro lado, as autoras Mollie MacGregor e Kaye Stacey (apud Ponte, Branco e Matos, 2008) afirmam que as interpretações dos alunos podem ter outra origem, destacando os seguintes pontos:

- Uso de pressupostos intuitivos e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar: Alguns alunos, não familiarizados com a linguagem algébrica, recorrerem a estratégias que lhes permitem responder a determinadas questões, do modo que lhes parece mais adequado;
- Estabelecimento de analogias com sistemas simbólicos usados no quotidiano, em outras áreas da Matemática ou em outras disciplinas: Alguns alunos, por exemplo, atribuem valores às letras de acordo com a ordem em que estas surgem no alfabeto: a = 1, b = 2, e assim sucessivamente;

- Interferência de outras aprendizagens em Matemática: Alguns alunos consideram que, em qualquer monômio com coeficiente igual a um, a letra envolvida representa o valor;
- Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptados: Por exemplo, os alunos podem manifestar dificuldades na interpretação das letras utilizadas, especificamente, quando estas são usadas como abreviações de palavras ou como designações de objetos.

Para Pinto (1997) a significação é um processo cultural, singular e situado histórico socialmente. A autora entende por processos de significação os modos de circulação (re)elaboração/produção de significação, tomado este termo como um conceito que engloba tanto os significados já instituídos quanto os possíveis sentidos que as coisas (palavras, eventos, ações, etc.) podem ter para as pessoas e que emergem nas relações interativas, em particular as discursivas. Segundo o autor toda significação é uma produção social.

No processo de significação é bastante viável fazer a distinção entre sentido e significado das palavras. Vygotsky (1995) ressalta que:

> O sentido de uma palavra é a soma de todos os eventos psicológicos que a palavra desperta em nossa consciência. É um todo complexo, fluido e dinâmico, que tem várias zonas de estabilidade desigual. O significado é apenas uma das zonas de sentido, a mais estável e precisa. (apud PINTO & FIORENTINI, 1997 p. 5).

O professor, afirma a autora, nas tentativas de comunicação durante as aulas, busca produzir significados para os conteúdos historicamente produzidos, visando compartilhar com os alunos. Como indispensável desta busca, há, também, o caráter coletivo da produção de sentidos, e estes sentidos são a singulares e os múltiplos.

A Álgebra, devido às simbologias e ao vocabulário, julgado difícil e abstrato por muitos, geralmente recebe o título de vilã do ensino da Matemática, provocando o desprazer da aprendizagem da mesma.

O ensino da Álgebra, afirma Moura e Sousa (2008), vem sendo um problema para os que trabalham com o seu ensino, na mesma intensidade com que a aprendizagem da Álgebra se revela como um problema para o aluno. Podemos considerar essa dificuldade natural, uma vez que entendemos que o nível de abstração da Álgebra é de difícil compreensão no Ensino Fundamental da Matemática. É fácil perceber essa abstração, pois operamos números abstratos sem nos preocuparmos sobre como relacioná-los a objetos concretos.

Ainda segundo os autores, muitas pesquisas sobre o ensino da Álgebra, dão ênfase à dificuldade do aluno para interpretar a variável seja ela em equações, nos parâmetros em equações ou em funções. E, por outro lado, vários pesquisadores estudam abordagens didáticas diferenciadas do ensino de Álgebra, com o objetivo de estudar o caráter formalista desse ensino. No entanto, todas essas pesquisas que estudam a dificuldade do aluno na aprendizagem da Álgebra chamam a atenção para a ênfase dada à abordagem formalista, nas práticas de sala de aula, como um dos possíveis fatores que dificultam ao aluno a elaboração dos significados algébricos Para Moura e Souza (2008), essa abordagem formalista, de modo geral, traduz-se pela manipulação simbólica dos conceitos algébricos: exercitar regras de mudança de membro e de troca de sinais na resolução de equações, resolver listas de exercícios de operações com polinômios, calcular diferentes funções, etc.

Neste trabalho, procuramos excluir a abordagem formalista e apresentar uma abordagem didática, com o uso da resolução de problemas, a fim de fazer com que os alunos consigam interpretar as variáveis.

3.3. COMUNICAÇÃO E INTERAÇÕES NA AULA DE MATEMÁTICA

A palavra comunicação esteve durante muito tempo afastada do vocabulário da Matemática. No entanto, ultimamente, há um grande interesse pela comunicação nas aulas de Matemática, pois pesquisas recentes afirmam que, em todos os níveis, os alunos devem aprender a comunicar matematicamente e que os professores devem estimular o espírito de questionamento e levar seus alunos a pensarem e comunicarem idéias.

Para Cândido (2001) os cálculos mecânicos, o realce em procedimentos repetitivos e a linguagem que é utilizada na sala de aula, são alguns, dos diversos fatores que fazem com que o silêncio predomine na sala. Porém, nas aulas de Matemática, a comunicação tem um papel de extrema importância para ajudar os alunos a construírem uma ligação entre conceitos informais e intuitivos e entre a linguagem abstrata e simbólica da Matemática.

Ele afirma que aprender e ensinar Matemática exige comunicação, pois através dela os alunos e os professores terão a oportunidade de explorar, organizar e conectar as idéias, os pensamentos, os novos e os "velhos" conhecimentos e os diferentes pontos de vista sobre determinado assunto. Sendo assim, cabe aos professores estimular, incorporar, facilitar e levar os seus alunos a pensarem e comunicarem criando, assim, um vínculo entre os pensamentos. Ainda segundo o autor, para a aprendizagem ocorrer ela deve ser significativa e relevante, e tem que ser vista com compreensão de significados, experiências pessoais e outros conhecimentos, dando espaço para a formulação de problemas que incentivem/instiguem o aluno a aprender mais. Quando falamos em aprendizagem significativa temos que assumir o fato de que aprender possui um caráter dinâmico, onde temos que fazer ações de ensino direcionadas para que os alunos aprofundem e ampliem os significados que são elaborados durante a participação no ensino e aprendizagem.

Candido (2001) afirma que uma proposta de trabalho que tenha como objetivo a aprendizagem significativa da Matemática deve explorar diversas idéias, fazendo com que os alunos adquiram diversas formas de perceber a realidade. Trabalhando nessa perspectiva de ensino e aprendizagem, devemos promover a comunicação em sala de aula dando uma nova possibilidade de organizar, explorar e esclarecer os pensamentos. Dessa forma, a compreensão seria intensificada pela comunicação, da mesma forma que a comunicação seria intensificada pela compreensão.

Segundo Smole (2001), para que a comunicação possa acontecer nas aulas de Matemática da forma mais abrangente possível, é necessário possuir um cenário de representações composto por três recursos de comunicação: *a oralidade*, *as representações pictóricas* e a *escrita.*

A oralidade é o recurso de comunicação mais acessível, que todos os alunos podem utilizar, seja em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento. Ela é um recurso simples, ágil e direto que permite revisões praticamente instantâneas, podendo ser truncada e reiniciada assim que se percebe uma falha ou inadequação. Independente da idade e da série escolar, a oralidade é o único recurso quando a escrita e as representações gráficas ainda não soam dominadas ou não permitem demonstrar toda a complexidade do que foi pensado. A comunicação oral favorece a percepção das diferenças, a convivência dos alunos entre si e o exercício de escutar um ao outro em uma aprendizagem coletiva, possibilitando aos alunos terem mais confianças em si mesmos, sentirem-se mais acolhidos e sem medo de se expor publicamente.

As representações pictóricas, por sua vez, auxiliam na compreensão de alguns conceitos e operações. A proposta central deste recurso é ampliar a relação entre o matemático e o pictórico através do desenho como uma forma de comunicação. Usada para exprimir o que se pensa, a representação pictórica possibilita aos alunos a construção de uma significação para as novas idéias e conceitos que estudará, podendo ser introduzida pelo professor nas aulas de Matemática de diversas formas, como desenho, para resolver um problema, representarem uma atividade feita ou ilustrar um texto, sem esquecer que se deve também inserir representações com gráficos, tabelas, esquemas e figuras geométricas.

A escrita, segundo a autora, é o enquadramento da realidade. Ela junta-se ao oral e ao desenho e passa a ser usada como mais um recurso de representação das idéias dos alunos. A escrita possui duas características: auxilia no resgate da memória, uma vez que muitas das discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registro em forma de texto. Além disso, possui a possibilidade da comunicação à distância no espaço e no tempo e, assim de troca de informações e descobertas com pessoas que, muitas vezes, nem conhecemos.

Smole (2001) também ressalta a importância do ambiente da sala de aula, pois é nesse espaço que acontecem todos os encontros, as trocas de experiências, discussões e interações entre os alunos e o professor, e também é onde o professor pode observar os alunos, as conquistas que conseguiram e as dificuldades que enfrentaram.

Uma forma de favorecer essas interações entre aluno/professor, professor/aluno, aluno/aluno é o trabalho em grupo. Em situações como estas, os alunos estão todo o tempo em constante interação com os colegas e, sendo assim, a comunicação em sala de aula será de forma mais natural. Além da possibilidade de descobrir preferências, rever/negociar as soluções e discutir sobre as dificuldades.

O trabalho em grupo, a roda e os painéis contribuem para o ambiente ser caracterizado pela investigação e exploração das diferentes idéias por parte dos alunos mediados pelo professor. O ambiente da sala de aula e o uso de métodos que promovem a interação dos componentes da turma possibilitam o desenvolvimento dos recursos de comunicação. No entanto, cabe ao professor organizar o seu ambiente de sala de aula, elaborar suas normas sociais/sociomatemáticas e selecionar esses recursos de comunicação, para favorecer o processo de ensino e aprendizagem e, por sua vez, a Resolução de Problemas.

Neste ambiente interativo, segundo Yackel e Cobb (1996) as normas sociais são normas da sala de aula que se aplicam a qualquer matéria e não são específicas da Matemática. As normas sociomatemáticas, por sua vez, são específicas dos aspectos matemáticos da atividade dos alunos. Para estes autores, o que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objetivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes na aula.

Estes objetivos e compreensões implícitas são influenciadas pelo que é considerado como atividade matemática aceitável. É neste sentido que os autores afirmam que as normas sociomatemáticas, os objetivos e as crenças acerca da atividade matemática e da aprendizagem estão relacionados.

Ainda para os autores, a compreensão normativa do que é considerado *matematicamente diferente, matematicamente sofisticado*, *matematicamente eficaz* e *matematicamente elegante* numa sala de aula são normas sociomatemáticas. Analogamente, o que é considerado como uma *explicação e justificação matemática aceitável* é uma norma sociomatemática.

A negociação de normas sociomatemáticas, salientam os autores, permite que tanto os professores quanto os alunos aumentem as oportunidades de aprendizagem. Estas oportunidades de aprendizagem para os professores são diretamente influenciadas pelas normas sociomatemáticas negociadas nas salas de aula. Para os alunos, por sua vez, as oportunidades de aprendizagem apresentam-se numa variedade de explicações quando, por exemplo, são ressaltadas diferentes soluções.

3.3.1. IMPOR OU NEGOCIAR SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS

Na sala de aula de Matemática a negociação de significados pode decorrer da comparação de um conjunto de práticas relativas à cultura da sala de aula. Para Bishop e Goffree (1986), a construção do conhecimento matemático na sala de aula baseia-se na negociação de significados, num processo em que todos têm similares possibilidades de emitir ideias criticas sobre as questões colocadas e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com os outros indivíduos.

Sendo assim, os conceitos, as representações e os processos matemáticos emergem e são partilhados no contexto de práticas culturais especificas da sala de aula, através de significados intrinsecamente associados às circunstancias e formas de interação social nas práticas de ensino (MEIRA, 1998).

Um estudo realizado por Guerreiro (2011) num contexto de trabalho colaborativo, no âmbito de uma investigação matemática, consegue exemplificar aspectos da negociação de conceitos e processos matemáticos e da negociação de normas sociais e sociomatmáticas. São os seguintes:

i. *Negociação de conceitos matemáticos* – A negociação dos conceitos matemáticos decorre da comparação de um conjunto de práticas culturais, comparando o significado social e matemático de uma linguagem, expressão, símbolo ou de um mesmo termo. Para Guerreiro (2011) as dificuldades de aprendizagem Matemática de alguns procedimentos menos usuais podem estar diretamente relacionadas com a incompreensão de conceitos e representações matemáticas e a ausência de negociação dos significados matemáticos destes mesmos conceitos e representações. A percepção do professor sobre a necessidade de negociar o significado dos conceitos e ideias matemáticas pode facilitar a aprendizagem dos alunos, através de uma distribuição de significados matemáticos entre todos e do esclarecimento das representações matemáticas de conceitos sociais;

ii. *Negociação de processos matemáticos* – Segundo Meira (1998) a negociação de processos matemáticos emerge de forma relacionada com as estruturas de ação, comportamento e comunicação na sala de aula. Para Guerreiro (2011) o contexto escolar específico parece determinante no reconhecimento dos processos matemáticos aceitos e negociáveis, originando a existência de situações não escolares e escolares, subdividindo estas últimas, de acordo com as áreas de conhecimento;

iii. *Negociação de normas sociais e sociomatematicas* **–** Para Meira (1998) o estudo da negociação de significados na sala de aula de Matemática também envolve a análise das rotinas diárias e das ações resultantes das interações sociais. Nesta perspectiva, as representações acerca da Matemática e da atividade matemática escolar são influenciadas pela definição do papel do professor e dos alunos, dando origem às normas sociais e as sociomatematicas. Segundo Guerreiro (2011), a negociação de significados matemáticos parece incidir nas normas sociais e sociomatematicas numa dimensão de negociação formativa e disciplinadora, regulando a aprendizagem matemática e o comportamento escolar dos alunos;

iv. *Negociar significados em vez de impor conhecimento* **–** Impor conceitos e processos matemáticos na sala de aula dá origem a uma pratica rotineira de procedimentos matemáticos na resolução de tarefas. Para Guerreiro (2011) a subordinação dos conceitos e processos aos procedimentos matemáticos pode originar uma valorização, por parte dos alunos (e do professor), do papel do professor como único detentor do conhecimento matemático, ampliando a desvalorização dos conhecimentos específicos, pessoais e culturais dos alunos. Deste modo, a negociação de significados pode promover a divisão de informações, promovendo uma cultura de sala de aula regulada pela singularidade ao invés da semelhança de atitudes e de comportamentos.

Questões referentes ao ensino-aprendizagem de vários conceitos são, muitas vezes, investigadas com base em exemplos formalistas[1]. Para Meira (1998) esse exemplo formalista defende que os processos cognitivos têm por base estruturas mentais caracterizadas por abstrações desvinculadas do “ambiente”, que é por sua vez, tomado como um conjunto de fatores ou variáveis apenas tangencialmente relacionadas ao processo cognitivo. Por outro lado, teorias a respeito da natureza social o conhecimento asseguram que o estudo da cognição deve refletir sobre papel dos contextos socioculturais e do desenvolvimento sócio-histórico na formação e evolução dos processos cognitivos. Conforme este ponto de vista Meira (1998) afirma que os conceitos e as representações matemáticas emergem e são comunicados no contexto de práticas culturais especificas, e seus significados estão intrinsecamente associados às circunstâncias materiais e formas de interação social específicas destas práticas.

Quando se fala em Educação Matemática, salienta o autor, esta abordagem levanta questões importantes sobre os princípios psicológicos e didáticos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

[1] A formalização, segundo Davis e Hersh (1995), é o processo de adaptar a Matemática ao processamento mecânico. Um programa de computador, por exemplo, é um texto formalizado. O professor adepto da conceçpção formalista centra o seu ensino em regras e procedimentos.

Com o objetivo de melhor diferenciar os processos envolvidos na negociação de significados na sala de aula de Matemática, Meira (1998) discute sobre três temas que podem facilitar essa diferenciação:

1. *Participação dos indivíduos em múltiplas práticas:* Este tema é usado quando, por exemplo, utilizamos uma história como um contexto para o ensino de termos relacionais, onde esses termos estão fortemente relacionados. Ao transformarmos uma história qualquer em "outra história", desenvolvemos uma interpretação inesperada da narrativa, resultado de uma participação em múltiplas práticas, cada qual em constante transformação;

2. *Premissas comunicativas:* Uma pesquisa feita por Säljö e Wyndhamn (1993 apud MEIRA, 1998) discute o mecanismo sobre quais certas expectativas desenvolvidas na sala de aula dão origem a premissas comunicativas que suportam e impõem limites a atividades de professores e alunos. A pesquisa foi realizada da seguinte forma: Os autores apresentaram uma tabela de serviços postais aos alunos da 8º série e 1º ano do 2º grau[2] e solicitaram que se calculasse o custo de postagem de uma carta pesando certa unidade. Duas estratégias de resolução deste problema foram identificadas, em duas situações distintas. Os autores discutiram estes resultados em termos de "premissas comunicativas", ou expectativas construídas pelos alunos com base no que foi discutido e de forma aberta no espaço institucional da escola: o contexto da aula de Matemática parece requerer o engajamento em procedimentos matemáticos;

3. *Rotinas de ação e condições para negociação:* Para Meira (1998) o estudo da negociação de significados também envolve a análise da "microcultura" de salas de aula específicas, suas rotinas diárias e as condições nas quais a produção de significados ocorre. Segundo Voigt (1993 apud Meira 1998) a microcultura de uma sala de aula fornece a

---

[2] Tais séries correspondem, atualmente, no Brasil, ao 9º ano do Ensino fundamental e 3º ano do Ensino Médio.

> base para a compreensão do significado de interações específicas, ao mesmo tempo em que tal microcultura é um produto destas interações.

O nosso objetivo de pesquisa neste trabalho é de utilizar a resolução de problemas matemáticos com Álgebra Recreativa para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e a comunicação das expressões algébricas e equações de 1º grau, explorando as interações matemáticas e a comunicação oral e escrita com relação aos conceitos de Álgebra, tentando assim amenizar algumas dificuldades que os alunos encontram quando estudam as incógnitas e variáveis.

3.3.1. Explicações e questionamento na aula de Matemática

Segundo Yackel e Cobb (1996) a explicação, vista como um ato comunicativo tem como objetivo esclarecer aspectos do pensamento matemático de uma pessoa que pode não ser perceptível a outras. Consequentemente, o que é apresentado como uma explicação é relativo, e vai variar de pessoa para pessoa.

A princípio, as explicações dos alunos têm um fundamento social em vez de Matemático. Na medida em que a participação dos alunos aumenta nas aulas de matemática eles começam a diferenciar os diversos tipos de raciocínio matemático. E posteriormente, alguns alunos desenvolvem as explicações e passam a tê-las como objetos de reflexão.

Para Yakel e Cobb (1996) existem três aspectos da compreensão dos alunos acerca da explicação.

i. ***Uma base Matemática para as explicações.*** Para os autores, o primeiro passo para os alunos desenvolverem o conceito de explicação matemática aceitável, é entender que a base para as suas ações devem ser matemáticas ao invés de sociais. Desenvolver esta compreensão não é fácil, pois as crianças são socializadas frequentemente na escola para acreditar em sugestões sociais. As crianças são habituadas a confiar na autoridade do professor para apresentar razões. Desta forma, tanto o professor quantos os alunos devem contribuír para estabelecer uma tradição de inquirição matemática gerando os seus próprios modos pessoalmente significativos de resolver problemas em vez de seguir explicações procedimentais,

ii. ***Explicações como descrições de ações sobre objetos matemáticos experiencialmente reais.*** Nesse aspecto temos que verificar quais os tipos de justificações matemáticas que podem ser aceitáveis. Temos que questionar o que constitui uma justificação matemática aceitável por alunos e professores em atividade na sala de aula. Aqui a reflexividade é uma noção fundamental que orienta a tentativa do professor para dar sentido ao que se passa na sala de aula

iii. ***Explicações como objetos de reflexão***. De acordo com o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre o que é uma explicação aceitável, eles começam a se apropriar das explicações como sendo objetos de reflexão. Para que isto ocorra, eles devem dar sentido a uma explicação própria fazendo julgamentos acerca de como outras pessoas poderiam dar sentido a essa mesma explicação.

A noção de normas sociomatemáticas é importante, segundo Yakel e Cobb (1996), porque nos da à oportunidade de conhecer um modo de analisar e falar sobre os aspectos matemáticos da atividade de professores e alunos na aula de Matemática. A noção de normas sociomatemáticas também é importante para esclarecer o papel do professor como representante da comunidade matemática.

A análise de normas sociomatemáticas indica que o professor desempenha um papel central na sala de aula com qualidade matemática e no estabelecimento de normas para aspectos matemáticos da atividade dos alunos. Isto destaca o significado das próprias crenças e valores matemáticos pessoais do professor e do seu próprio conhecimento e compreensão matemática. Sendo assim, é de extrema importância o papel crítico e central do professor como representante comunidade matemática.

A classificação das explicações tem sido feita de maneiras diferentes ao passar dos anos. A necessidade de classificar as explicações surgiu a partir da falta de um termo que conseguisse expressar as explicações que se baseiam exclusivamente em noções matemáticas, mas que não são, necessariamente, formais e rigorosas.

Explicações Matematicamente Baseadas (MB) são apropriadas para alunos do Ensino Fundamental. As explicações Praticamente Baseadas (PB) são apropriadas para qualquer explicação que não dependa exclusivamente de noções matemáticas. Fazem parte das explicações (PB) aquelas que usam recursos manipulativos e elementos do cotidiano, explicações baseadas em contextos da vida real e explicações informais (LEVENSON et al., 2009).

As explicações que os alunos utilizam podem ser um reflexo das normas sociomatemáticas que são estabelecidas na sala de aula. Para Yackel e Cobb (1996), o professor que atua como um representante da comunidade matemática tem o papel de liderança na formulação de comportamento normativo em sala de aula. Deste modo, o tipo de explicação que o professor pratica em sala de aula é como se fosse um exemplo para os alunos, que servem como um guia nas suas explicações.

Uma pesquisa realizada por Levenson (2007), realizada com 61 professores experientes, investigou as preferências dos professores em relação a estes tipos de explicações. Ou autores usaram o contexto de números pares, e queriam analisar especificamente:

1) Os tipos de explicações, dentre elas as explicações matematicamente baseadas (MB), as explicações praticamente baseadas (PB) e outras; que os professores oferecem espontaneamente;
2) Os tipos de explicações que eles preferem para si e para seus alunos, depois de terem sido expostos a várias explicações diferentes;
3) A base para essas preferências.

Foi entregue aos professores um questionário que era composto de duas partes. A primeira parte investigou os tipos de explicações que os professores oferecem espontaneamente, quando são solicitados a explicar o porque de o número 4 ser um número par. A segunda parte investigou as preferências dos professores pelas explicação (MB) e (PB).

O questionário foi avaliado tanto qualitativamente quanto quantitativamente. As explicações espontâneas dos professores foram categorizadas em: explicações, que consistiam em termos exclusivamente matemáticos; em explicações (MB) e em explicações (PB). Algumas explicações foram consideradas ambíguas, sendo assim foram categorizadas como “outro”.

Os professores foram familiarizados com uma variedade, relativamente ampla, de explicações (MB) para o conceito de números pares. Por outro lado, quando dado uma escolha, houve um aumento na utilização de explicações PB. Os resultados mostraram que, embora os professores conheçam muito bem as explicações (MB), a maioria ainda opta por usar, principalmente, a explicação (PB) nas aulas. Ainda para os autores, ao aumentar a conscientização dos professores de diferentes tipos de explicações, podemos incentivar a sua utilização tanto em explicações (PB) quanto em explicações (MB) em sala de aula do ensino fundamental.

Polya (1995), no livro *A Arte de Resolver Problemas*, apresenta uma visão sobre a resolução de problemas na sala de aula, onde o papel do questionamento do professor é de extrema importância. Para ele, é através da pergunta que o professor auxilia os alunos, desbloqueando impasses e colocando questões que poderiam ter surgido aos mesmos. Ele ressalta ainda que: "Ao procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos" (p.17).

As questões que são expostas em sala de aula têm, basicamente, duas finalidades: Fazer com que os alunos pensem e testem os conhecimentos prévios e os adquiridos. As questões também criam uma discussão em sala de aula, favorecendo, assim, a comunicação que contribui para o desenvolvimento da capacidade de pensar e enriquecer a aprendizagem dos alunos.

As questões que os professores estabelecem e as respostas dos alunos são atividades importantes na sala de aula. O questionamento é um poderoso recurso para promover a compreensão e entusiasmar a investigação de novas ideias. Além disso, as respostas dos alunos fornecem ao professor a informação que permite avaliar o trabalho individual e em grupo.

Para Bishop e Goffree (1986) quando o professor questiona os alunos, ele mostra o que é importante no explicar e, assim, as conexões vão se tornar expostas, não necessariamente que seja o professor a expor, pela "exposição". O aluno não é um participante passivo que absorve exposições, antes é um participante ativo no processo de partilha, e, por isso questões subtis do professor podem focar esta atividade em conexões e no processo de conectar.

Ainda para os autores, o professor deve criar oportunidades para explicações e questionamentos, encorajando a reflexão após uma atividade. É provável em qualquer caso que o envolvimento numa atividade matemática estimulará conexões com outras ideias, apesar de algumas atividades os alunos fazerem melhor do que outras.

4. METODOLOGIA

Para alcançarmos os objetivos propostos, utilizamos uma técnica de trabalho em grupo chamada Painel Integrado, numa sala de 30 alunos de um 9º ano do Ensino Fundamental, com faixa etária entre 13 e 16 anos, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Raul Córdula, Campina Grande – PB, no período de abril a maio de 2012.

Os problemas matemáticos foram aplicados na sala de aula com uso do Painel Integrado, vivenciado em três momentos, sendo que antes da aplicação foi feito um levantamento sobre os conhecimentos que os alunos possuíam sobre as expressões algébricas e as equações de 1º grau. Depois da aplicação desta técnica de trabalho em grupo foi feito outro levantamento sobre os conhecimentos adquiridos, para verificar se os alunos compreenderam os conceitos abordados nos problemas e para consolidar a superação das dificuldades apresentadas pelos alunos diante dos Problemas Matemáticos.

1º Momento:

- Organização dos grupos (5 grupos de 6 pessoas);
- Conhecendo os problemas matemáticos;
- Formulando estratégias para resolvê-los.

2º Momento:

- Organização dos novos grupos (6 grupos de 5 pessoas);
- Apresentações das possíveis estratégias para os novos grupos;
- Criando novas estratégias de resolução.

3º Momento:

- Discussão dos resultados.

No levantamento sobre os conhecimentos prévios, tínhamos como objetivo ter acesso aos conhecimentos que os alunos possuíam sobre os conteúdos abordados nos problemas matemáticos.

No 1º momento o objetivo foi identificar quais os métodos utilizados pelos alunos para resolver os problemas matemáticos.

No 2º momento o propósito foi estimular os alunos a se comunicarem matematicamente, apresentando uns aos outros os métodos que usaram, e a partir da comunicação, criarem novas possibilidades de resolução.

No 3º momento, o principal objetivo foi de fazer um debate em um único grupo para discutir os acontecimentos mais relevantes do encontro, consolidando a socialização entre todos os componentes, inclusive o professor, e ratificar os objetivos desta pesquisa.

A relação entre os problemas matemáticos e o conteúdo são as expressões algébricas e equações de 1º grau, todos envolvendo a Álgebra Recreativa. Os problemas propostos são os seguintes:

PROBLEMA 1 : A Idade de Diofanto

> A história conservou poucos dados biográficos de Diofanto. Tudo o que se conhece a seu respeito encontra-se num epigrama que figura no seu túmulo e que está escrito sob a forma de um enigma Matemático. Ele aqui está tal como o encontramos formulado na "Álgebra Recreativa", de Y. I. Perelman, 2008. RBA Coleccionáveis SA.

Na língua vernácula	**Na linguagem da álgebra**
Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida,	
Cuja sexta parte foi a sua bela infância.	
Tinha decorrido mais uma duo-décima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos.	
E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril.	
Passou mais um qüinqüênio (5 anos) e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito,	
cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai,	

Que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.	
Diga quantos anos tinha Diofanto quando morreu?	

Tabela 1. Problema: A idade de Diofanto

Preencha a tabela acima, e responda às seguintes questões:

a) Quantos anos ele viveu?
b) Com quantos anos se casou?
c) Quantos anos ele tinha quando perdeu o filho?

PROBLEMA 2: A Arte de Adivinhar Números

Invente uma adivinhação da forma “Pense em um número...” e proponha como desafio aos colegas do seu grupo. Escolham uma adivinhação do grupo e desafiem o resto da turma.

PROBLEMA 3: Os Quatro Irmãos[3]

Quatro irmãos têm 45 reais. Se o dinheiro do primeiro fosse aumentado em 2 reais, o do segundo diminuído em 2 reais, se o do terceiro duplicasse e o do quarto reduzi-se a metade, todos os irmãos teriam a mesma importância. Quanto dinheiro tinha cada um deles?

Na língua vernácula	**Na linguagem da Álgebra**
Os quatro irmãos tem 45,00 Reais;	
Se dinheiro do primeiro fosse aumentado em 2,00 Reais;	
O do segundo reduzido em 2,00 Reais;	
E se a quantia do terceiro	

[3] Problema adaptado de Perelman (2008).

duplicasse;	
E o do quarto se reduzisse a metade;	
Todos os irmãos teriam a mesma importância.	

Tabela 2. Problema: Os quatro irmãos

PROBLEMA 4: O Cavalo e o Mulo

Um cavalo e um mulo Caminhavam juntos levando no lombo dois sacos pesados. O cavalo lamentou-se quando o mulo lhe disse: De que se queixas? Se eu lavasse um de seus sacos, minha carga seria o dobro da sua. E se lhe desse um saco, sua carga seria igual a minha!

E agora me respondam: Quantos sacos levava o cavalo e quantos sacos levava o mulo?

Na língua vernácula	**Na linguagem da Álgebra**
Se eu levasse um de seus sacos;	
Minha carga;	
Seria o dobro da sua.	
Se eu lhe desse um saco,	
A sua carga,	
Seria igual a minha.	

Tabela 3. Problema: O cavalo e o Mulo

PROBLEMA 5: A Festa

Em uma festa estavam 20 pessoas. Maria dançou com sete rapazes, Olga com oito, Vera com nove e assim sucessivamente até Nina que dançou com todos os rapazes. Quantos rapazes estavam na festa?

5. ANÁLISE DO PAINEL INTEGRADO

5.1. ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

O primeiro encontro foi realizado em uma terça-feira, 25 de maio de 2012, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Raul Córdula que fica situada na cidade de Campina Grande/PB. A turma, objeto de estudo, foi o 9º Ano do Ensino Fundamental, composta por 32 alunos. Neste momento foi feito um levantamento sobre os conhecimentos prévios dos alunos que, posteriormente, seriam utilizados durante o Painel Integrado.

A princípio, explicamos como deveriam ser respondidas as questões, esclarecendo que os alunos deveriam fazer individualmente, sem consultar livros, materiais tecnológicos, ou qualquer outro material didático. O teste consistia de 10 questões, que abordavam dois conteúdos: as expressões algébricas e as equações de 1º grau. Os alunos tinham duas aulas, de 45 minutos cada, para resolver o teste, com início às 16h20min e término às 17h50min.

A 1ª questão referia-se a igualdade entre as expressões; a 2º questão era referente ao uso dos parênteses e a ordem das operações numa expressão; a 3º era sobre o uso das operações inversas para reverter às operações; a 4º, 5º e 6º questões eram referentes a própria linguagem simbólica da Álgebra; a 7º, 8º, 9º e 10º questões exigiam do aluno a construção e a manipulação de expressões e equações a partir de problemas.

Nas duas primeiras questões podemos observar que os alunos não tiveram dificuldade em igualar as expressões, fazer o uso dos parênteses e em reverter operações, já que foram respondidas corretamente por 100% da turma. Embora, eles tenham usado apenas os números Inteiros e as quatro operações.

A 3º questão foi respondida corretamente por 59% da turma. Desta forma, podemos observar que os alunos apresentam certa dificuldade em trabalhar com operações inversas, principalmente quando têm que “desfazer” a operação para voltar ao seu valor inicial.

A 4º, 5º e 6º questões foram respondidas por 100% dos alunos. No entanto apenas 37%, 28% e 53%, respectivamente, responderam de maneira correta. Alguns alunos não conseguiram operar com as incógnitas. Podemos perceber que eles se sentem inseguros ao trabalhar com letras misturadas aos números, o que é característica principal da Álgebra.

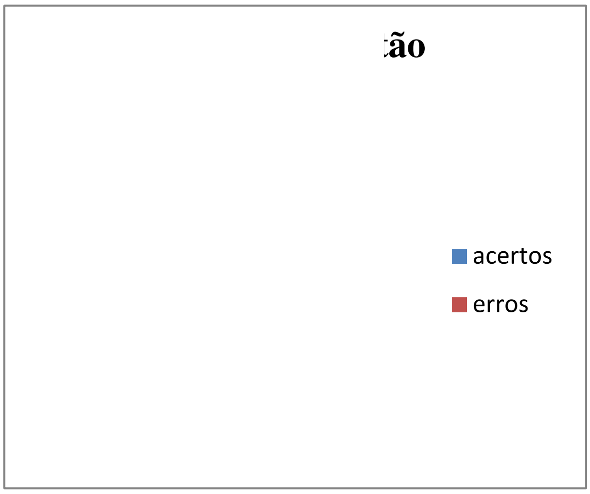
A 7º questão teve 59% de acertos. Porém, ao invés dos alunos reponderem através da manipulação de equações, eles responderam por tentativa e erro, já que era um número fácil de ser encontrado. Apesar de ser bem semelhante, o mesmo não aconteceu na 8º questão, apenas 50% dos alunos respondeu de maneira correta. Isso aconteceu pelo fato de, além dos alunos terem que fazer a manipulação das equações, eles tinha que operar com uso de parênteses e com as ordens de operações nas expressões. Nenhum dos alunos conseguiu construir a expressão que correspondesse às instruções da adivinhação, o que também era pedido na questão.

A 9º questão não foi respondida por nenhum aluno. Muitos conseguiram fazer o que o problema exigia, usando os números de 1 a 10. No entanto, ninguém conseguiu explicar. Os alunos possuem uma dificuldade muito grande quando tentam passar da linguagem matemática, ou algébrica, para a nossa própria linguagem.

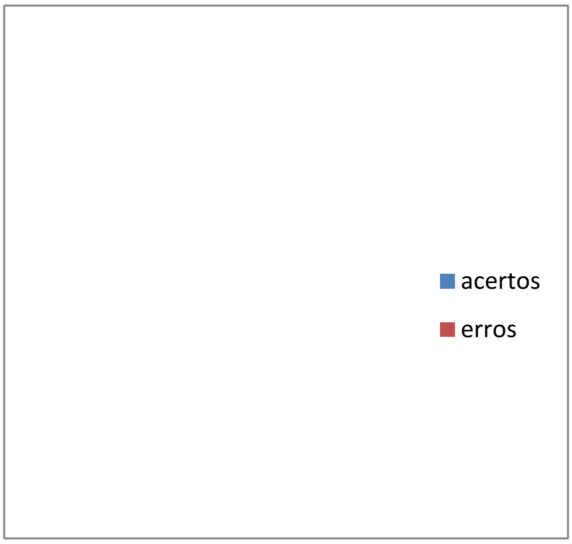
A 10º questão obteve 69% de acertos. Para resolver os problemas os alunos tinha a opção de fazer por operações inversas, no entanto a maioria optou por fazer por tentativa e erro. Os alunos que optaram por fazer pelas operações inversas demonstraram ter maior domínio do conteúdo, além de conseguirem terminar primeiro.

De modo geral, 90% dos alunos responderam todas as questões, e a margem de acerto foi de 51%, sendo as questões 1º, 2º e 10º mais respondidas corretamente e as questões 4º, 5º e 9º mais respondidas erradas. O tempo foi um fator que não contribuiu positivamente para a realização do teste, pois o mesmo foi aplicado nas duas últimas aulas, onde a última, nas escolas Estaduais, tem um tempo menor que o de 45 min.

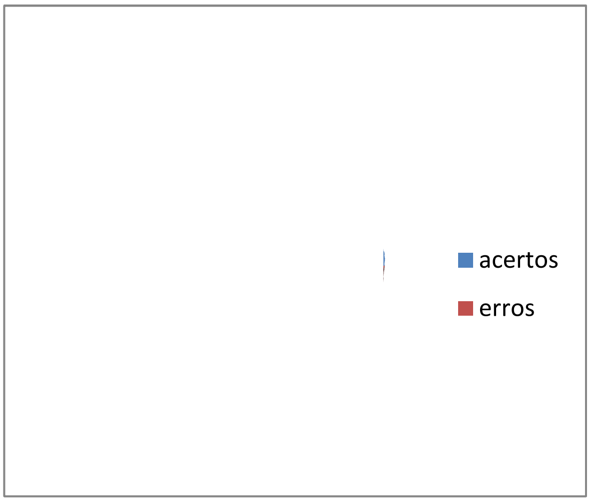
Este pré-teste foi aplicado com o objetivo de analisarmos como os alunos se comportam diante das expressões algébricas e equações de 1º grau, antes que fosse aplicado o Painel Integrado.

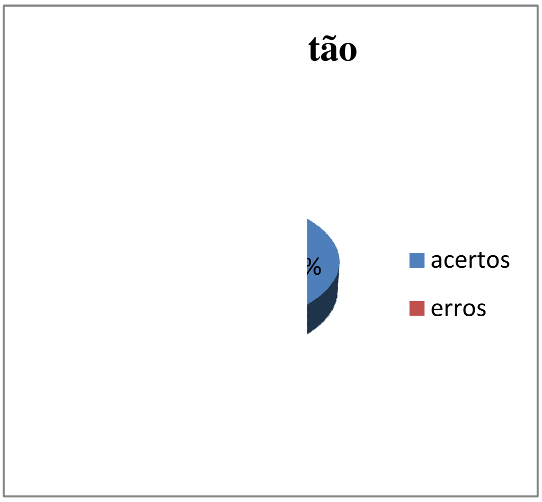

tão
acertos
erros

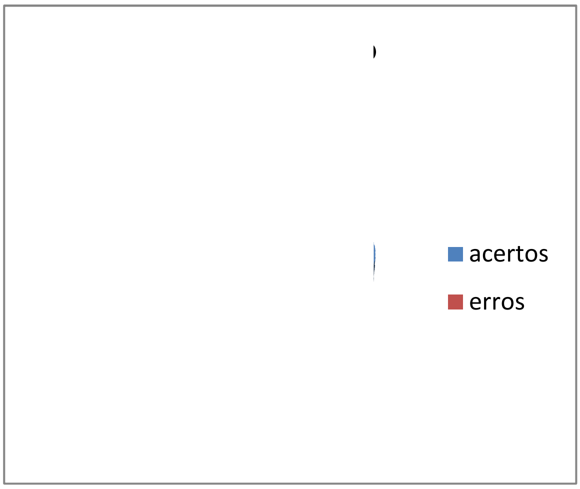

tão
acertos
erros

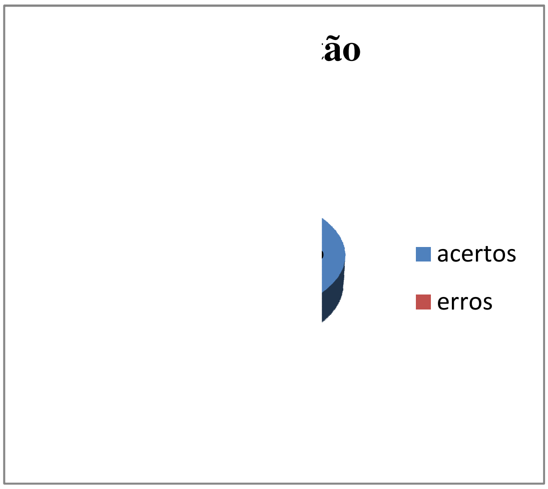

acertos
erros

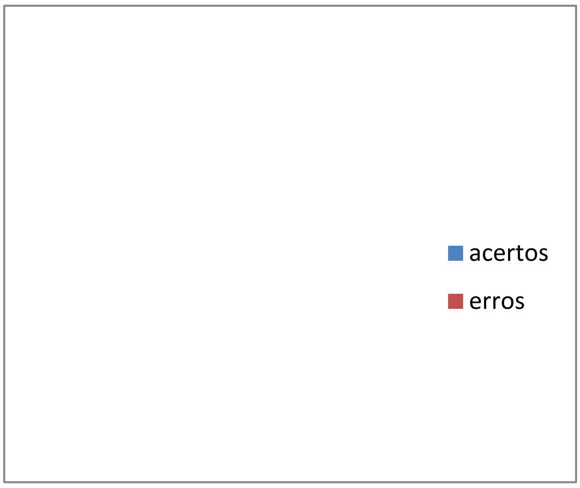

tão
acertos
erros

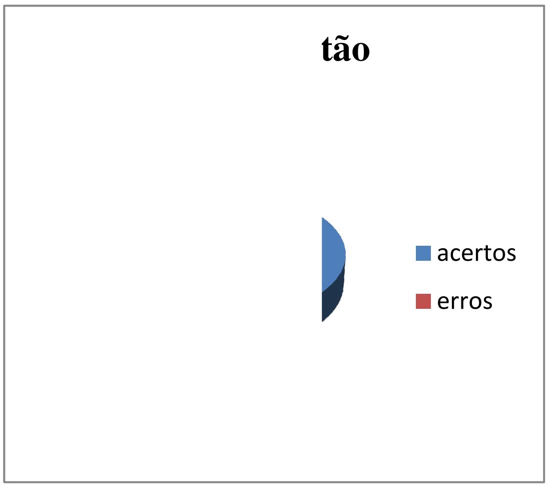

acertos
erros


tão
acertos
erros









5.2. ANÁLISE DO PAINEL INTEGRADO

No dia 07 de maio de 2012, foi realizado o Painel Integrado, com inicio às 13h10min horas e término às 14h40min. Nesse segundo encontro, foram realizadas as atividades referentes à resolução de problemas, nas quais a comunicação foi um recurso bastante explorado. Os problemas propostos foram: *A Idade de Diofanto, A Arte de Adivinhar Números, Os Quatro Irmãos, O Cavalo e o Mulo e A Festa*. O Painel Integrado foi realizado com 30 alunos e divido em três momentos. Cada momento teve o tempo de 30 minutos.

No 1º Momento os alunos se dividiram e formaram 5 grupos de 6 pessoas. Os grupos foram chamados de grupo 1, grupo 2, grupo 3, grupo 4 e grupo 5 e cada grupo ficou com um problema, deste modo: o grupo 1 com A *Idade de Diofanto*, o grupo 2 com *A Arte de Adivinhar Números*, o grupo 3 com *Os Quatro Irmãos* e o grupo 5 com *A Festa.* Durante o processo de análise escolhemos, para ser inserida no texto deste trabalho, uma resolução de cada problema para exemplificar como os alunos resolveram os problemas matemáticos. O criterio de escolha foi a resolução dos problemas mais claras e legíveis.

Posteriormente, depois que todos os grupos se organizaram, propomos que os alunos lessem os problemas e identificassem o que o mesmo exigia como solução. Anotando sempre todos os dados que o problema oferecia e o que era preciso para chegar a uma conclusão. Feito isso, cada integrante do grupo tentou resolver o problema de uma maneira diferente e, posteriormente, compararam os resultados e entraram em um consenso, argumentando por que o seu estaria de maneira correta.

Depois de resolverem os problemas propostos passamos para o 2º Momento. Assim, os grupos foram desfeitos para serem formados novos grupos, onde cada novo grupo era formado por um componente de cada grupo anterior, ou seja, um componente do grupo 1, um do grupo 2, um do grupo 3, um do grupo 4 e um do grupo 5, formam a grupo A, e assim foram formados os demais grupos, de modo que antes havia 5 grupos de 6 pessoas e, a partir de então, obtemos 6 grupos de 5 pessoas. Ainda neste momento, cada componente dos novos grupos explicaram (DINIZ, 2003; YACKEL & COBB, 1996; BISHOP & GOFREE, 1986; LEVENSON et al, 2009) para os outros o problema que participaram quando eram grupos, mostrando os meios de resolução e tentando obter novos meios para resolver o mesmo problema, fazendo, assim, um exercício de reflexão crítica, efetivando o pensamento de Diniz (2003):

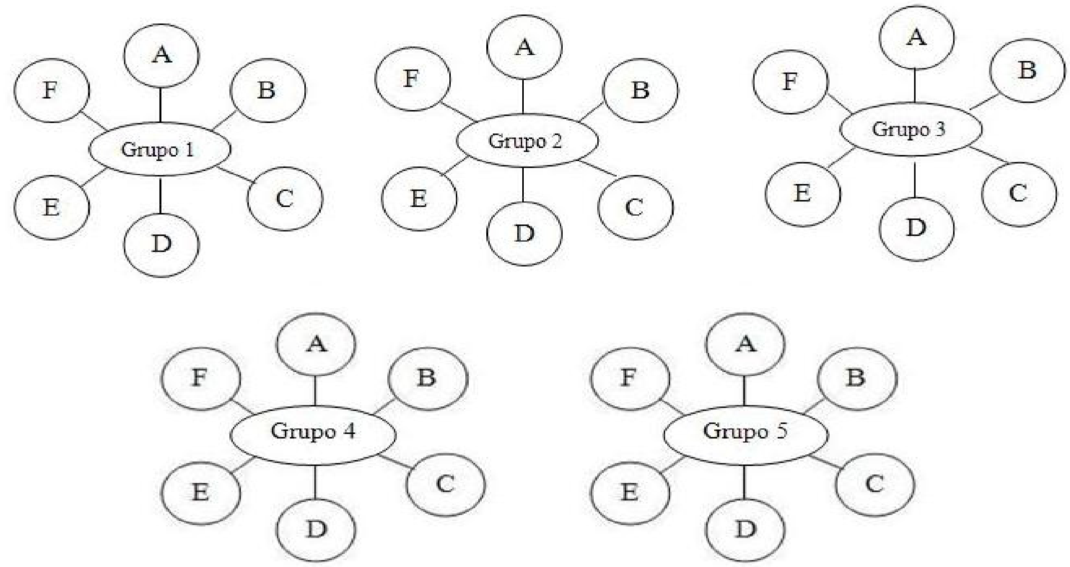
> O exercício da postura crítica exige a reflexão sobre cada parte do problema e sobre ele como um todo, sendo que todo o conhecimento do aluno precisa ser combinado, obrigando-o a analisar cuidadosamente seus erros e o pensamento de outras pessoas que podem divergir ou complementar seu raciocínio. (DINIZ, 2003, p. 13).

O 3º momento foi o encerramento do Painel Integrado. Os grupos foram desfeitos, formando um só grupo, onde ocorreram discussões sobre tudo o que foi realizado durante todo o Painel Integrado, rompendo a rotina da sala de aula, onde a fala do professor é, quase sempre, monopolizada e quase não há colocações orais dos alunos.

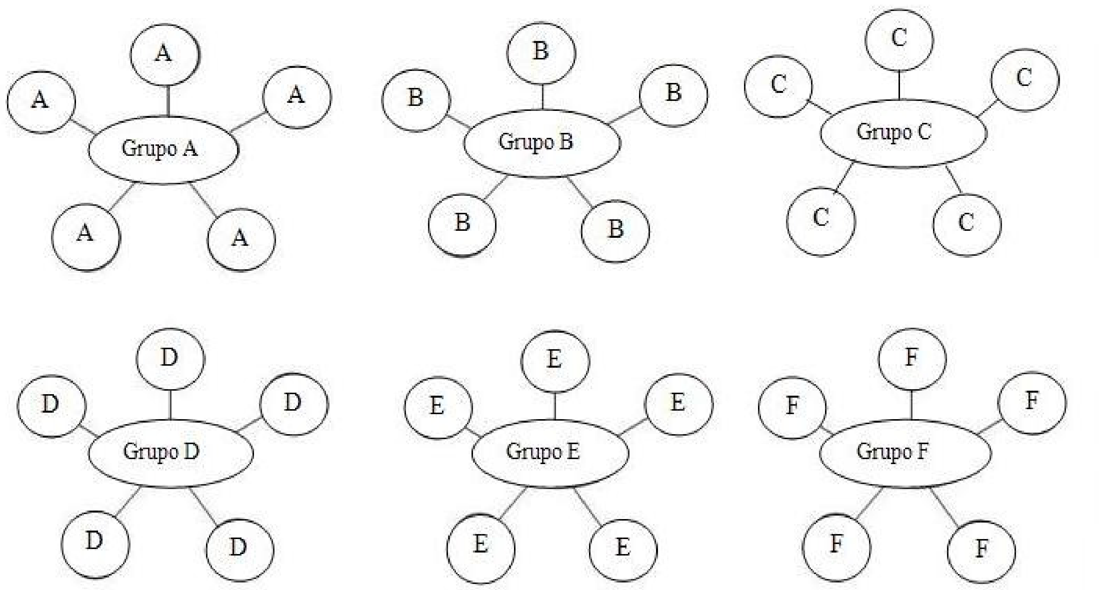
A técnica de ensino em grupo, o Painel Integrado, resultou em uma socialização entre os alunos e entre os alunos e o professor trazendo, de certa forma, uma ruptura no contrato didático, ressaltando ainda mais o pensamento de Medeiros (2001). No 1º Momento, a comunicação foi mais acentuada pela escrita e pela oralidade (DINIZ, 2003; SMOLE & DINIZ, 2001) . No 2º Momento houve mais oralidade, de modo que, os questionamentos e a explicações surgiram naturalmente. Já no 3º Momento, a oralidade foi o principal e único recurso de comunicação utilizado, sendo explorados o questionamento e a explicação.

Organização da sala com 30 alunos.

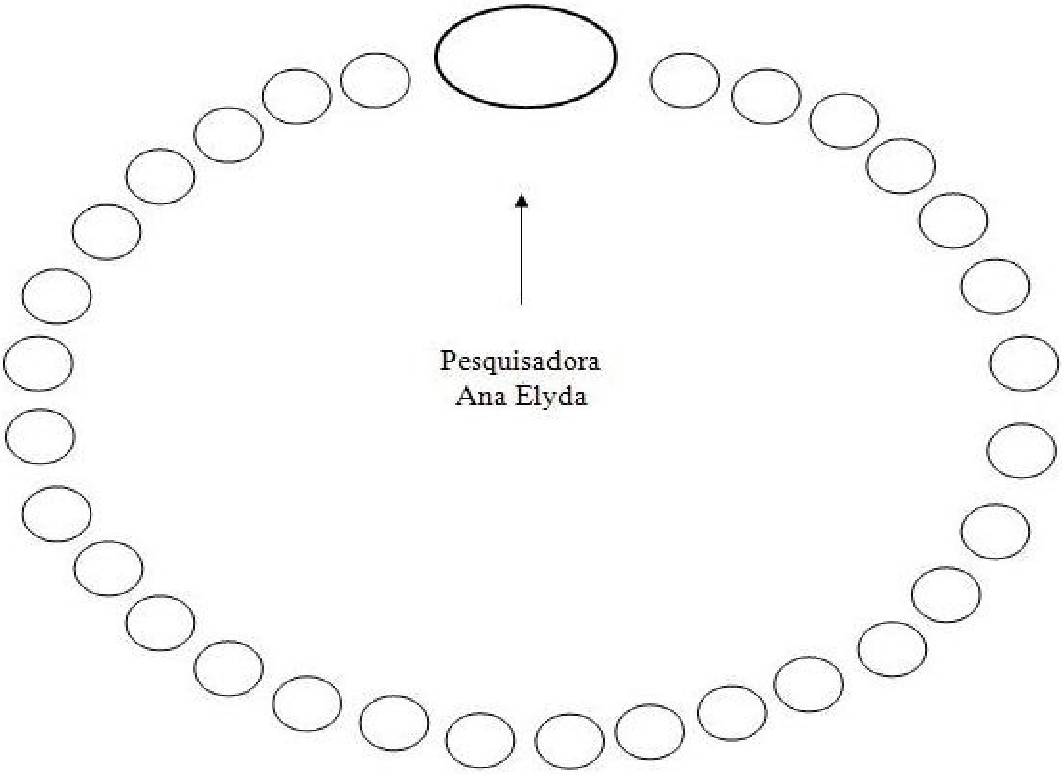
1º Momento: 5 Grupos de 6 Alunos.



2º Momento: 6 Equipes de 5 alunos.



Momento: 1 Grupo de 31 pessoas.



A Resolução dos Problemas Matemáticos

Problema 1: A Idade de Diofanto

Na resolução do problema da Idade de Diofanto, os alunos que participaram, apresentaram grande empenho em tentar resolvê-lo. A cada questionamento eles se sentiam mais motivados a tentar descobrir a solução. O episódio seguinte[4] clarifica e ilustra como o professor e os alunos iniciaram os questionamentos e as explicações em sala de aula:

Professor: Já leram o problema e identificaram o que ele precisa para ser solucionado?
Alunos do grupo: Sim!
Professor: E o que o problema pediu como solução?
Aluno 1: É... Pra gente achar a idade de Diofanto!
Professor: E para vocês descobrirem a idade dele, vocês precisaram do que?

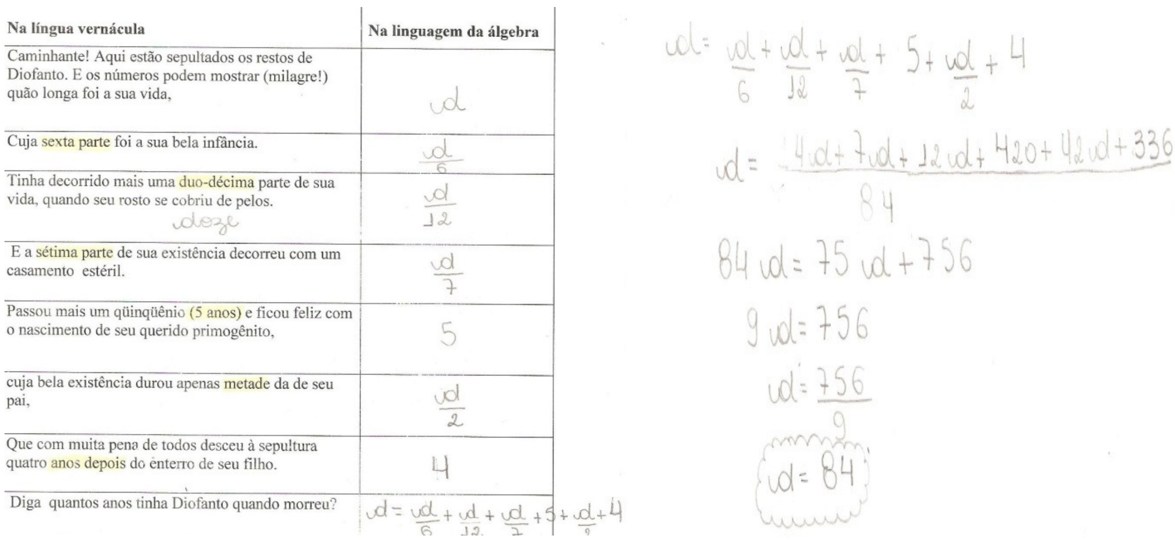
[4] Nota de campo.

Aluno 2: A gente colocou um x no quadradinho que era da idade dele. Daí, assim... a partir do primeiro quadradinho a gente foi fazendo o que os próximos quadradinhos pediam. E no final a gente igualou um monte de expressão dos quadradinhos de antes e conseguiu achar o d, que era a idade dele.

Professor: A idade dele?

Aluno 2: Sim. Não! A idade que ele morreu.

Nesse problema os questionamentos feitos pelo professor, serviram para os alunos explicarem como haviam resolvido o problema. E depois que os alunos conseguiram resolver, foram formalizadas as ideias de incógnitas e variáveis. Pois os alunos sentiam dificuldades em direfenciá-las.



Na língua vernácula	Na linguagem da álgebra
Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida,	d
Cuja sexta parte foi a sua bela infância.	$\frac{d}{6}$
Tinha decorrido mais uma duo-décima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. doze	$\frac{d}{12}$
E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril.	$\frac{d}{7}$
Passou mais um qüinqüênio (5 anos) e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito,	5
cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai,	$\frac{d}{2}$
Que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.	4
Diga quantos anos tinha Diofanto quando morreu?	$d=\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5+\frac{d}{2}+4$

$$d=\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5+\frac{d}{2}+4$$

$$d=\frac{14d+7d+12d+420+42d+336}{84}$$

$$84d=75d+756$$

$$9d=756$$

$$d=\frac{756}{9}$$

$$d=84$$

Problema 2: A Arte de Adivinhar Números

Durante todo o processo de resolução deste problema podemos perceber que os alunos conseguiram desenvolver certa autonomia na aplicação das variáveis. Nessa atividade, os alunos foram capazes de construir equações e fazer as suas manipulações, fazendo uso de diversas propriedades como, por exemplo, a propriedade distributiva e a propriedade da fatoração.

Aluno 1 – Adivinhação: Pense em um número: Pense em um número, some pelo dobro do número pensado, multiplique por 6 e iguale a 18. O resultado deu 1.

Expressão: (x + 2x) . 6 = 18

6x + 12x = 18

18x = 18

$x = \frac{18}{18}$

x = 1

Aluno 2 – Adivinhação: Pense em um número: Pense em um número, diminua 8, multiplique pelo dobro, divida por 2, some 4 , iguale a 6. O resultado deu 10.

Expressão: $\frac{(y-8).2}{2} + 4 = 6$

$\frac{(2y-16)}{2} + 4 = 6$

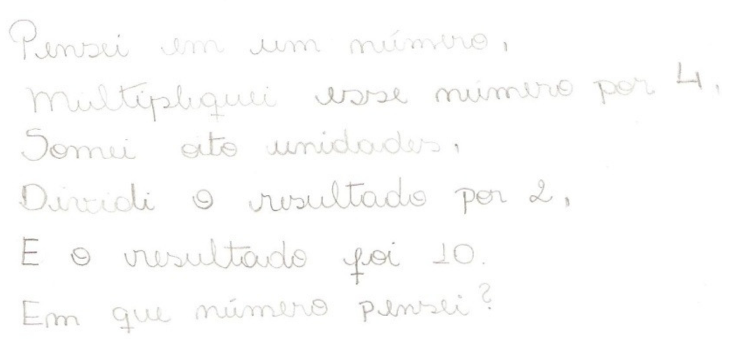
y – 8 + 4 = 6

y – 4 = 6

y = 6 + 4

y = 10

Foram realizadas 10 adivinhações, e as mesmas foram trocadas entre os grupos na forma de desafio, o que motivou bastante interesse e empenho, facilitando assim a exploração da comunicação matemática.



Problema 3: Os Quatro Irmãos

Durante a resolução desse problema percebemos que alunos também conseguiram desenvolver certa autonomia na aplicação das variáveis. Tendo em vista, que este problema também esta relacionado ao cotidiano deles. Nessa atividade, os alunos construíram as Equações e fizeram as manipulações, fazendo uso das propriedades como, por exemplo, a propriedade distributiva e a simplificação de fração.

Depois que os alunos conseguiram resolver o problema também foram questionados a repeito da resolução.

O episódio seguinte clarifica como esse processo ocorreu[5]:

Professor: Vocês ficaram com o problema dos quatro irmãos, né? Para solucionar esse problema vocês fizeram como?

Aluno 4: Então.... O problema já diz que os irmãos têm juntos 45 reais. Como a gente não sabe os nomes deles a gente chamou de A, B, C e D. Aí ficou assim, A + B + C + D = 45.

Professor: E depois? O problema quer saber quanto tem cada um, né? Seria quanto tem o irmão a, b, c e d, separados.

Aluno 4: É... A gente foi resolvendo as dicas quês estavam no quadro do problema. Tem aqui... se o dinheiro do primeiro fosse aumentando em 2,00 reais. Então, o primeiro não é A, então vai ficar A + 2. Daí a gente seguiu essas dicas e completou todo o quadro. E, no final resolvemos a equação.

Diante da exemplificação acima, podemos notar que os alunos não tiveram dificuldade em resolver o problema e em explicar como fizeram. E depois de terem resolvido o problema foram fazer a verificação, por substituição, para terem certeza de que a solução estava correta.

Os quatro irmãos tem 45 reais	$A+B+C+D=45$
Se o dinheiro do primeiro fosse aumentado em 2 reais;	$A+2$
O do segundo reduzido em 2 reais;	$B-2$
O do terceiro duplicasse;	$2\cdot C$
E o do quarto se reduzisse a metade;	$\frac{D}{4}$
Todos os irmãos teriam o mesmo valor	$A+2=B-2=2\cdot C=\frac{D}{4}$

$A+2=B-2$
$A+2+2=B$
$A+4=B$
$B=A+4$

$A+2=2\cdot C$
$2\cdot C=A+2$
$C=\frac{A+2}{2}$

$A+2=\frac{D}{2}$
$D=2A+4$

$$A+A+4+\frac{(A+2)}{2}+2A+4=45$$
$$\frac{2A+2A+8+A+2+4A+8}{2}=\frac{90}{2}$$
$$9A=90-18$$
$$9A=72$$
$$A=\frac{72}{9}=8$$

Substituindo:
$B=A+4=8+4=12$
$C=\frac{A+2}{2}=\frac{8+2}{2}=5$
$D=2\cdot A+4=2\cdot 8+4=16+4=20$

Total $=8+12+5+20=45$

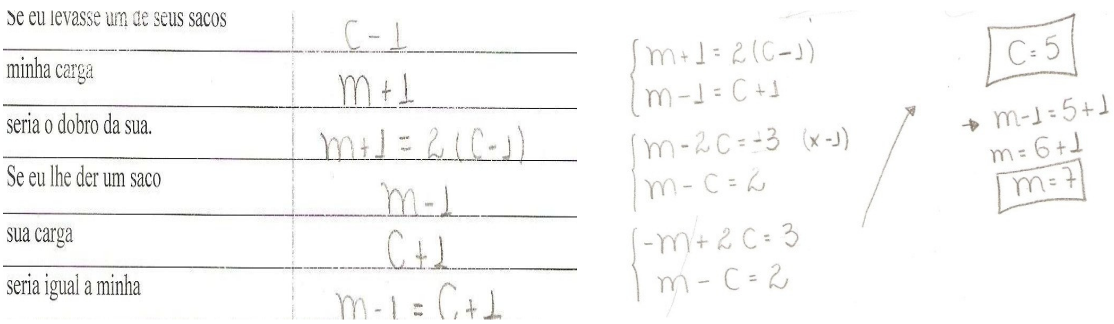
[5] Nota de campo.

Problema 4: O Cavalo e o Mulo

Durante a resolução desse problema os alunos tiveram um pouco de dúvida, pois estava confundindo as incógnitas que usaram Houve implícita negociação de significados durante a sua resolução[6]. Veja:

Professor: O problema do cavalo e do mulo pede o quê?
Aluno 1: Ele quer saber quantos sacos leva o cavalo e quantos sacos leva o mulo.
Professor: Certo. E pra vocês saberem, é necessário fazer o quê?
Aluno 2: A gente vai ter que chamar de qualquer letra, é?
Professor: Chamar de qualquer letra e o quê?
Aluno 2: Não sei.
Professor: O problema não quer saber quantos sacos leva o cavalo e o mulo, não é?
Aluno 2: Ah, é! Então o que o Cavalo leva a gente pode chamar de C e o que o Mulo leva a gente pode chamar de M, né? Pra não ter que ficar repetindo a palavra toda, né? O C vai ser quantos sacos leva o cavalo e o M quantos sacos leva o mulo.
Professor: Isso, mas vocês sabiam o que representa esse C e M?
Alunos: Não!
Professor: O C e o M são incógnitas. Que é um valor desconhecido, que será descoberto por meio de uma equação que, nesse caso, será uma equação de 1º grau.
Aluno 4: Ah, só é usar as frases do quadro, né professora?
Professor: Sim! Isso mesmo.

Diante do diálogo acima, fica claro que os alunos não conseguiam explicar o conceito de incógnita. Após isso, conseguiram desenvolver a resolução do problema de forma satisfatória. Resolvendo um sistema de equações, ao seu final.



Se eu levasse um de seus sacos	$C-1$
minha carga	$m+1$
seria o dobro da sua.	$m+1=2(C-1)$
Se eu lhe der um saco	$m-1$
sua carga	$C+1$
seria igual a minha	$m-1=C+1$

$$\begin{cases} m+1=2(C-1) \\ m-1=C+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} m-2C=-3 \quad (x-1) \\ m-C=2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -m+2C=3 \\ m-C=2 \end{cases}$$
$$\boxed{C=5}$$
$$m-1=5+1$$
$$m=6+1$$
$$\boxed{m=7}$$

---
[6] Nota de campo.

Problema 5: A Festa

Esse problema foi resolvido de forma simples, fácil e direta. Os alunos, durante a explicação, disseram que trouxeram o problema para o dia a dia. Colocaram-se dentro do problema.

Inicialmente, resolveram o problema partindo do concreto, imaginando como se fosse uma situação real. E depois, partiram para a abstração chegando a Equação de 1º grau.

mulheres x

1: 6+1
2: 6+2
3: 6+3
x: 6+x

$$x + 6 + x = 20$$
$$2x = 20 - 6$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Rapazes =
$20 - x =$
$20 - 7 =$
13

5.3 ANÁLISE DO PÓS-TESTE

O terceiro, e último encontro, foi realizado no dia 21 de Maio de 2012, em uma segunda-feira, onde foi aplicado o levantamento sobre os conhecimentos adquiridos após a Metodologia. Esse teste consistia de 10 questões, sendo todas de caráter operatório, abordando as expressões algébricas e equações de 1 º grau, envolvendo a Álgebra Recreativa, a Resolução de Problemas e a Explicação. Os alunos tinham duas aulas, de 45 minutos cada, para resolver o teste, com início às 13h10min e término às 14h40min. Todos responderam o teste e pareciam estar mais confiantes e seguros do que no teste aplicado antes da Metodologia.

A 1º e 2º questões tiveram um índice de acerto de 85%. Diferentemente do pré-teste, a maioria dos alunos consegui fazer uso da explicação. Deste modo, podemos perceber uma significante superação da dificuldade referente à escrita na matemática.

A 3º questão era bem teórica e abordava a parte escrita. 100% dos alunos responderam de maneira correta, tendo em vista, que já tinha feito atividades inversas a esta durante o Pré-teste e Painel Integrado.

A 4º questão abordava as equações de 1º grau, onde se fazia uso da Álgebra Recreativa e Resolução de Problemas. 90% dos alunos conseguiram responder de maneira correta, por outro lado foi verificado que alguns alunos ainda tinham certa dificuldades em resolver equações de 1º grau.

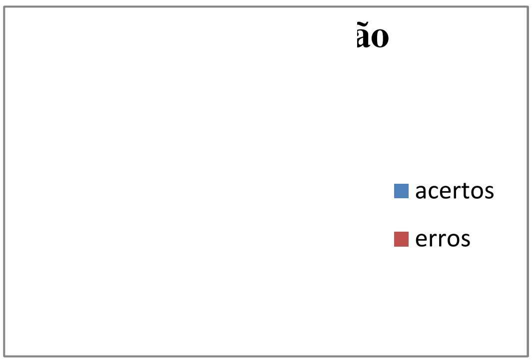
A 5º e 6º eram referente a expressões algébricas e equações de 1º grau. Os alunos tinha que adivinhar o número através da manipulação de equações. Os índices de acertos foram de 80% em ambas as questões. Desta vez, os alunos optaram por fazer através de equações ao invés de tentativa e erro. Podemos observar que houve uma melhora significativa na parte de manipular equações, fazer uso de parênteses e usar as propriedades de ordens nas operações das expressões.

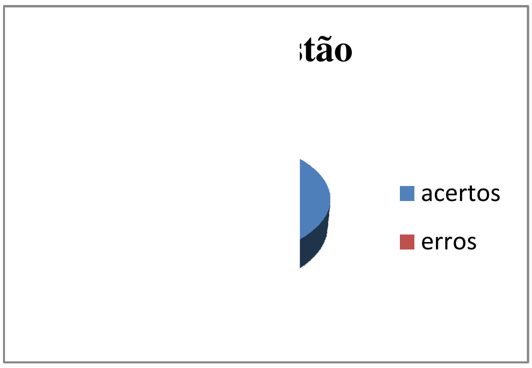
A 7º, 8º e 9º questões eram Problemas Matemáticos onde eram abordadas as equações de 1º grau. Tiveram um índice de acertos de 80%, 90% e 50%, respectivamente. O que dificultou a resolução da 9º questão foi o fato de o problema ser um pouco mais complexo, tendo em vista que o enunciado não era tão claro quanto os outros.

A 10º questão tratava de igualdade entre equações. Ela obteve um índice de 90% de acertos. Podemos perceber que os alunos conseguiram entender o que o problema exigia, e desse modo conseguiram, positivamente, manipular as equações.

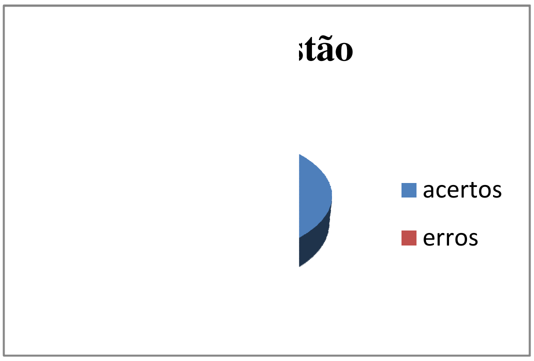
De um modo geral, 90% dos alunos responderam todas as questões, e a margem de acertos foram de 82%, sendo as 3º, 4º e 8º questões mais respondidas corretamente.

Sendo assim, podemos observar que os alunos desenvolveram uma grande autonomia em lidar com variáveis. E, além disso, foram capazes de construir as expressões algébricas e equações de 1º grau manipulando-as com as suas devidas propriedades.

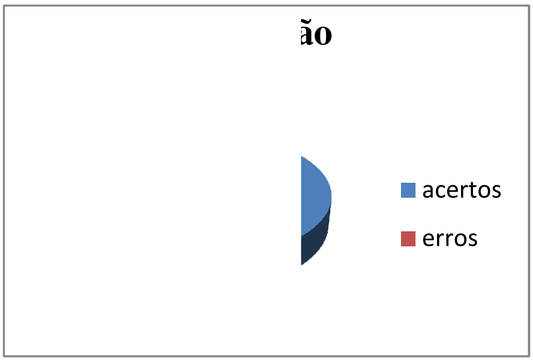




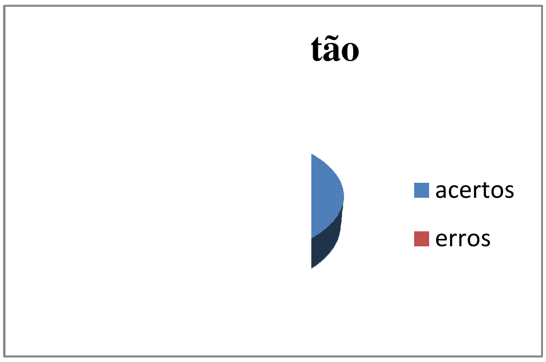

acertos
erros

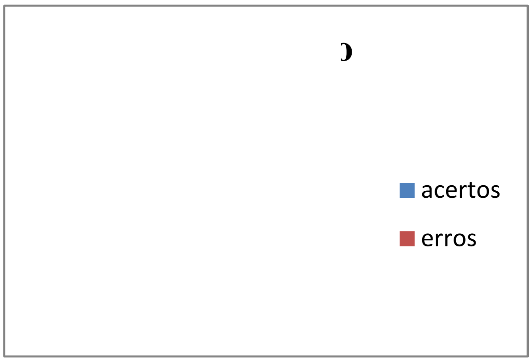

acertos
erros

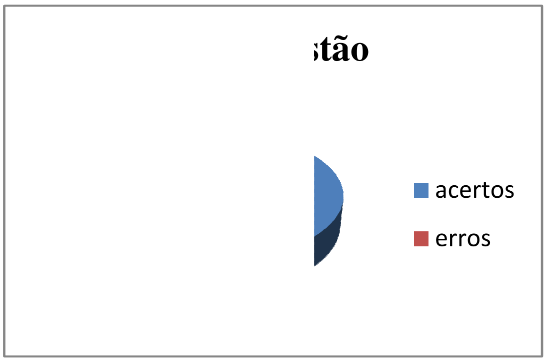

acertos
erros


acertos
erros


acertos
erros


acertos
erros


acertos
erros


acertos
erros

6. CONCLUSÃO

A partir do estudo realizado neste trabalho, podemos concluir que, desde o início das atividades matemáticas a Resolução de Problemas já mostrava as suas contribuições para o estudo destas.

Podemos perceber que o estudo realizado proporcionou aos alunos enriquecer seu o processo de ensino-aprendizagem das expressões algébricas e equações de 1º grau, através da comunicação matemática, e, com isso, conseguimos atingir o nosso objetivo. Deixando claro que, os resultados obtidos dependeram de todo um conjunto, que foi formado pelos Problemas Matemáticos, o trabalho em grupo e a comunicação matemática que foi utilizada durante todo o Painel Integrado.

Um fator que contribuiu, positivamente, para o êxito da nossa pesquisa foi a metodologia que utilizamos. Durante o Painel Integrado os alunos demonstraram grande curiosidade e empenho, contribuindo, assim, para uma boa interpretação dos problemas matemáticos utilizados e, consequentemente, facilitando a comunicação matemática na sala de aula. Conseguimos também, através do Painel Integrado, amenizar algumas dificuldades que foram encontradas no Pré-teste: problemas envolvendo generalizações, operações inversas e explicações.

Fazendo uma comparação entre as análises realizadas no Pré-Teste e no Pós-Teste podemos fazer alguns comentários conclusivos a respeito de nossa pesquisa. A título de exemplo, podemos citar a 9º questão que, durante o pré-teste, não foi resolvida por nenhum aluno. Com relação a essa mesma questão, no entanto, considerando agora o pós-teste, 50% dos alunos conseguiram responder de forma satisfatória. Confirmando, assim, um de nossos objetivos que foi propiciar o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, especificamente através da exploração das explicações e do questionamento. Outra dificuldade apresentada pelos alunos refere-se à manipulação de equações. No Pré-Teste (ver 7º questão) apenas 59% dos alunos responderam corretamente e, a maioria (90 %), só conseguiu responder por tentativa e erro. Por sua vez, no Pós-Teste (ver 5º e 6º questões) 80% dos alunos responderam corretamente, fazendo uso da manipulação de equações.

Analisando, de um modo geral, os comentários dos alunos durante a resolução dos problemas matemáticos, podemos observar que eles nos passam uma visão superficial do que foi exposto, de modo que as expressões algébricas e equações de 1º grau era um assunto que eles já haviam estudado. No entanto, o que mais nos surpreendeu foi o fato deles se expressarem tão bem durante todo o Painel Integrado, tendo em vista que os alunos veem de uma metodologia tradicional, centrada no formalismo, com apenas aulas expositivas e onde só o professor tem domínio e voz na sala de aula.

O Objetivo principal desse Trabalho de Conclusão de Curso foi utilizar a resolução de problemas com Álgebra recreativa para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e a comunicação das expressões algébricas e equações de 1º grau. Fica claro, portanto, que uma metodologia diferenciada proporciona aos alunos uma melhor compreensão. Nesta metodologia, também, os alunos que participaram da pesquisa demonstraram um grande interesse, o que é de fundamental importância para a compreensão de conteúdos matemáticos. E, através dessa proposta de trabalho, podemos também observar que ela nos permitiu desenvolver vários significados para a Álgebra e, principalmente, para os conceitos de incógnita e variável.

Vale ainda salientar que, o tempo que estivemos em contato com os alunos foi muito pouco, nos impedindo de ir mais além ao que se refere no desenvolvimento, pelos alunos, de habilidades como analisar, refletir, supor, discutir, testar e provar, para que, se apoiando no professor, quando necessário, o aluno aprenda a construir o seu próprio conhecimento.

Diante do exposto, fica claro que, fazendo uso de uma metodologia inovadora, conseguimos, além de esclarecer algumas ideias, podemos facilitar a compreensão de conteúdos matemáticos. Deste modo, podemos afirmar que conseguimos alcançar todos os nossos objetivos e concluímos que a nossa pesquisa foi bastante produtiva.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUMGART, J.K. *Tópicos pra a História da Matemática para uso em sala de aula*; tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo, SP: Editora Atual, 1992.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. *Classroom organization and dynamics*. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel, (Traduzido em português de Portugal) 1986.

BRANCO, N.; MATOS, A.; PONTE. J.P. *O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos*. Al-Khwarizmi (780–850). APM, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* – Brasília: MEC /SEF, 1998.

CÂNDIDO, P.T. *Comunicação em matemática*. In: SMOLE, K.S. & DINIZ, M.I. (Org.) *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. 1ª Ed. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva,1995.

DINIZ, M. I. V. S. *Resolução de Problemas e Comunicação.* In: SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. (Org.) *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* 1ª Ed. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática* / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GARDNER, M. *Divertimentos Matemáticos*. IBRASA – Instituição Brasileira de Difusão Cultural S.A. São Paulo, 1967.

GUERREIRO. A. M. C. *Imposição ou negociação de significados matemáticos*. In Educação e Matemática, (Volume 115, pp.73-75), 2011.

LEVENSON, E.; TIROSH, D.; TSAMIR, P. *Elementary school teachers' preference for mathematically-based and practically-based explanations*. In J. Novotna and H. Morava (Eds.), Proceedings of the 28 rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 241-248). Bergen, Norway: PME, 2004.

LEVENSON, E.; TIROSH, D.; TSAMIR, P. *Mathematically-based and practically-based explanation: which do students preffer?* In Tzekaki, M. Kaldrimidou, M. & Sakonids, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for

Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 305-312. Thessaloniki, Greece: PME, 2009.

MEDEIROS, K.M. *O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula*. In: Educação Matemática em Revista, SBEM, nº9/10, 2001.

MEDEIROS, K.M.; SANTOS, A.J.B. *Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos*. In: Zetetiké, Volume 15, n° 28, 2007.

MEIRA. L. L. Aprendizagem*, Ensino e Negociação de Significados na Sala de aula*. in: Mira, M.; Brito, M. (Org) Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica (Vol. 5, pp. 95-112). Rio de Janeiro: ANPEPP, 1996.

MOURA. A. R. L.; SOUSA. M. C. Dando movimento ao pensamento algébrico. In: ZETETIKÉ – Cempem – FE /Unicamp – Volume 16, nº 30 – jul./dez. - 2008.

PERELMAN, Yakov. *Álgebra Recreativa* – 2008. RBA Coleccionáveis SA.

PERELMAN, Yakov. *Experiências e Problemas Recreativos* (I) – 2008. RBA Coleccionáveis SA.

PINTO. R. A.; FIORENTINI. D. *Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para "a coisa"*. In: Zetetiké – UNICAMP - FE/CEMPEM, Volume 5, nº8, 1997.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROMBERG, T. A. *Thinking and problem solving: connections between theory and practice*. In: SCHOENFELD, A. Mathematical Thinking and Problem Solving, 1994.

SOUZA, E.R.; DINIZ, M.I.S.V. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. IME – USP, São Paulo, 4º Edição – 2003.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, (Traduzido em português de Portugal) 1989.

YACKEL, E.; COBB, P. *Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458-477, (Traduzido em português de Portugal), 1996.

SITE PESQUISADO: http://pt.scribd.com/doc/94500756/Revista-de-divulgacion-cientifica-Mefisto-No-04 (Acesso em 4 de junho de 2012).

ANEXOS

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Raul Córdula

Pesquisadora: Ana Élyda

Aluno: ____

PRÉ-TESTE

1) Podemos escrever o número 6 como resultado de diversas operações. Por exemplo:

$$6 = 2 . 3$$
$$6 = 2 + 4$$
$$6 = 2 . 2 . 2$$

Encontre outras maneiras:

6 = ______________

6 = ______________

6 = ______________

2) Usando os símbolos matemáticos, +, -, ., ÷, ( ) e algarismos, torne verdadeiras as igualdades abaixo:

a) 8 = 24 – 4 + 2 . ___

b) 4 ___ 4___ 4 ___ 4 = 3

c) 4___ 4 ___ 4___ 4 = 32

3) Podemos obter o número 18 da seguinte forma: 18 = 2 . (3 + 6).
A partir dessa expressão e usando os mesmos números como podemos obter o número 6?
Como você faria para obter o número 3? E o número 2?

4) Escreva o resultado de cada expressão de acordo com os valores das letras.

a) 5x, para x = 9

b) $\frac{x}{8}$, para x = 32

c) 24 + bc, para b = 39 e c = 16

d) 12 (52 – p), para p = 47

e) $\frac{5a}{b+4}$, para a = 9 e b = 1

f) (18+7)ab, para a = 2 e b = 5

5) Nos exercícios abaixo encontre o valor de x resolvendo as equações:

a) $2\,x = 6$

b) $2 + x = 6$

c) $2 + 2x = 6$

d) $3.(3 - x) = 15$

e) $3.(x - 3) + 2 = 23$

f) $5x = 15$

g) $(x + 4).7 = 0$

h) $\frac{x}{5} - 8 = -20$

6) Ana, professora de matemática, calcula a media bimestral dos alunos assim:

$$\frac{2.T + 3.P}{5} = \text{média}$$

onde, T é a nota do trabalho e P é a nota da prova.

a) Filipe obteve 6,0 no trabalho e quer ter média bimestral 7,5, que nota ele deve obter na prova?
b) Matheus tirou 4,5 na prova e 9,0 no trabalho. Qual será a sua média bimestral?
c) Wagner tirou 7,0 na prova e quer ter média bimestral 8,0. Que nota deve tirar no trabalho?

7) Descubra o número: Pensei em um número, somei com o dobro dele e o resultado que obtive foi 9. Em que número pensei? Escreva a expressão que indique o número pensado.

8) Pensei em um número. Subtraí 3 unidades e multipliquei o resultado por 4. Somei uma unidade e o resultado foi 25. Em que número pensei?
Construa uma expressão que corresponda às instruções da adivinhação.

9) Siga as instruções:

Pense em um número de 1 a 10.
Some 1 unidade.
Multiplique o resultado por 2.
Subtraia o número pensado.
Diminua 2 unidades.

ATENÇÃO: Você obteve o número que você pensou!
Essa adivinhação sempre funciona. Explique!

10) Use operações inversas para encontrar o número que falta em cada um dos diagramas.

Comece com ______	→	Multiplique por 7	→	Some 14	→	O resultado é 28
Comece com 45	→	Adicione 3	→	Multiplique por ______	→	O resultado é 96
Comece com 21	→	Divida por 3	→	Subtraia ______	→	O resultado é 2
Comece com ______	→	Divida por 4	→	Subtraia 4	→	O resultado é 1

PÓS-TESTE

1) Pense em um número. Acrescente 2 unidades e multiplique o resultado por 3. Diminua o triplo do número pensado.
   ATENÇÃO: O resultado é 6!

   Pense em outro número e siga as mesma instruções.
   O resultado também é 6!
   Como você pode explicar isso?

2) Siga as instruções:
   Pense em um número de 1 a 10.
   Some 1 unidade.
   Multiplique o resultado por 2.
   Subtraia o número pensado.
   Diminua 2 unidades.

ATENÇÃO: Você obteve o número que você pensou!
Essa adivinhação sempre funciona. Explique!

3) Escreva uma frase que descreva cada equação abaixo:

a) $x + 9 = 23$ c) $32 - x = 29$

b) $7x = 84$ e) $\frac{225}{n} = 45$

4) Em um quadrado mágico a soma dos números que aparecem em cada linha, coluna ou diagonal é a mesma.
   Observe o quadrado mágico que segue e escreva as equações e escreva as equações necessárias para encontrar os valores de x, y e z.

X	2	14
12	9	Y
Z	16	7

5) Escolhi um número x. Somei 12 unidades a ele e multipliquei o resultado por – 9. Encontrei o resultado 900. Que número eu escolhi?

6) Escolhi um número y. Juntei a ele o oposto de 5. Depois dividi o resultado por 3 e encontrei um resultado 9. Qual o valor de y?

7) Um lápis custa x reais e uma lapiseiras custa 5 reais a mais que um lápis. Duas lapiseiras custam o mesmo que 7 lápis.

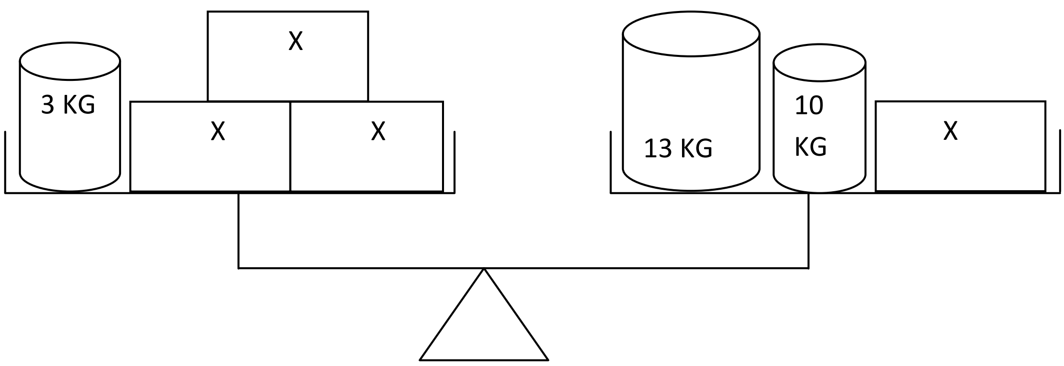
   a) Escreva uma equação para este problema

   b) Encontre o preço de cada lápis e de cada lapiseira.

8) Helena e sua mãe têm juntas 63 anos. A mãe tem o dobro da idade de Helena. Quantos anos têm cada uma delas?

9) Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo inteiro?

10) A balança abaixo está em equilíbrio. Escreva uma equação correspondente a esse equilíbrio e a resolva-a.



A Biografia de Yakov Perelman


Yakov Perelman (1882 – 1942)

Yakov Perelman Isídorovich nasceu na cidade de Grodno, Bialystok província do Império Russo (hoje parte da Polônia), no dia 04 de dezembro de 1882 e faleceu em Leningrado, Rússia no dia 16 de março de 1942.

Perelman foi um grande divulgador da ciência. Ao longo de sua vida publicou vários artigos de revistas e livros, principalmente em matemática, física e astronomia e mesmo agora, quase um século após sua morte as atualidades de suas obras se mantém de forma surpreendente.

A sua carreira de escritor começou em 23 de setembro de 1899. Foi quando publicou no jornal Diário Grodno Provincial, sob o pseudônimo de “YP” (suas iniciais), o teste Esperando a chuva de fogo, que foi a chuva de estrelas conhecidas como Leônidas. Com isso, a chuva de meteoros acima mencionado, radiante na constelação de Leo, se tornou um dos mais famosos em todo o Mundo.

Em agosto de 1901, ele se matriculou no Instituto Florestal de São Petersburgo. Quase desde o primeiro ano começou a trabalhar com a revista Natureza e Pessoas. Seu primeiro ensaio intitulado Um Século de asteroides foi publicado na revista 4, 1901.

Em 1908, Perelman apresentou a sua tese e no dia 22 de janeiro de 1909 recebeu um diploma do Instituto de Florestas, com o título "Técnico-Científico Nível I da floresta”. Porém, não teve chance de trabalhar em sua profissão após a graduação, então começou a trabalhar na revista de forma constante.

Em 1913 escreveu seu primeiro texto de sucesso, apresentado em julho daquele ano: Física Recreativa (Parte I). O livro foi um sucesso imediato, pois conseguia despertava o interesse dos leitores. Este interesse despertado até mesmo entre os físicos russos, como o professor de física na Universidade de São Petersburg, na época, Opest Xvolson Danilovich, que falou com Perelman e descobriu que o livro não foi escrito por um especialista em física. Pela qualidade do livro o professor o aconselhou a continuar a escrever textos semelhantes. Na verdade, Perelman seguiu este conselho escreveu muitos livros que expõem temas científicos de uma forma divertida.

Em 1914 escreveu e publicou um capítulo adicional no romance de Jules Verne, Da Terra à Lua, que efoi a sua primeira obra de ficção científica. Este artigo foi intitulado em um leve café da manhã cozinha e logo foi incorporada no segundo semestre de Recreação Física que estava em preparação no momento.

No período entre 1918 e 1923 ele trabalhou como inspetor do "Comitê Escolar União". Uma de suas tarefas foi o desenvolvimento de novos currículos em física, matemática e astronomia, enquanto o ensino dessas matérias nas diversas instituições de ensino. Por iniciativa própria criou a revista de ciência popular chamado primeiro Soviética na oficina da natureza, que foi publicado entre 1919 e 1929,

Em 1924 participou na "Seção comunicações interplanetárias" da União Soviética, cujos membros eram o revolucionário russo Feliks Dzerzhinsky , Konstantin Tsiolkovsky , Vladimir Petrovich Vetchinkin , Friedrich Zander Arturovich e Nikolai Alexsevitch Rynin , entre outros. Entre aquele ano e 1929 ele trabalhou no departamento de ciência da "Rede Oficial de Leningrado" e era um membro do conselho editorial das revistas "Ciência e Tecnologia" e "Ensinando a raciocinar".

Entre 1925 e 1932, também atuou no conselho editorial da cooperativa "Vremya" ("Time") e organizou a produção em massa de livros em sua série de lazer. Antes do final desse período e até ao final de 1933 era responsável pelo departamento de propaganda de Leningrado.

Depois de Física Recreativa e outros capítulos de livro, Perelman escreveu outras obras nas quais revelou ser um excelente divulgador científico. Podemos citar entre os seus mais famosos livros: Álgebra Recreativa, Aritmética Recreativa, Geometria Recreativa, Mecânica Recreativa, Astronomia Recreativa, Matemática Recreativa, Experiências e Problemas Recreativos, Física do Quotidiano, Truques e Passatempos, Sabe Física?, dentre outros. Onde ele expõe todos os temas de forma diferente, atraente e divertida.