UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DAYSE DE MEDEIROS TEIXEIRA

O TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
Julho/2012

DAYSE DE MEDEIROS TEIXEIRA

O TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande/PB

Julho/2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

T235t Teixeira, Dayse de Medeiros.

O teorema de hahn-banach e aplicações [manuscrito] / Dayse de Medeiros Teixeira. – 2012.

22 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2012.

“Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Análise funcional. 2. Teorema de Hahn-Banach. 3. Lema de Zorn. I. Título.

21. ed. CDD 515.7

DAYSE DE MEDEIROS TEIXEIRA

O TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Luciana R Freitas

Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS
Departamento de Matemática e Estatística
Orientadora

Maria Isabelle Silva

Profa. Dra. MARIA ISABELLE SILVA
Departamento de Matemática e Estatística
Examinador

Profa. Ms. THICIANY MATSUDO IWANO
Departamento de Matemática e Estatística
Examinador

Campina Grande, 03 de julho de 2012

Agradecimentos

A Deus por iluminar meus caminhos e me dar forças para seguir em frente, só Ele é minha rocha e fortaleza.

Aos meus pais, José Monteiro e Adalgisa Medeiros, por todo amor, todo apoio, toda dedicação e, acima de tudo, por me fazer acreditar que nada é impossível quando se tem força de vontade. São Pessoas que são testemunhas de todo meu esforço, estão sempre me ajudando a superar os desafios, me mostram o caminho certo e me ajudam a seguir sempre em frente. Enfim, não tenho palavras para expressar o amor que sinto por vocês e o quanto vocês são importante na minha vida, tenho muito orgulho de vocês serem meus pais. Meu muito obrigada.

A minha vó, Hilda Monteiro (*in memoriam*), por todas as orações, pedindo à Deus que sempre estivesse comigo, ela que sempre esteve ao meu lado, sendo minha fortaleza nos meus momentos de aflição e me dando todo apoio para que eu pudesse estudar sempre e nunca desistir dos meus sonhos, mostrando qual verdadeiro caminho a ser seguido, sempre confiando em Deus. Saudades e meus eternos agradecimentos, vó.

Aos meus irmãos que amo muito, Dirceu e Marília, por toda força e carinho, por estarem sempre ao meu lado em todos os momentos da minha vida, me apoiando e me fazendo acreditar que tudo na vida só da certo se persistir e aprender a confiar.

Ao meu noivo, Alanklésio, pela paciência, compreensão, apoio, carinho, amor, dedicação e por ter acreditado na minha capacidade não me deixando desistir, por estar ao meu lado nos momentos que precisava de uma palavra para continuar.

A minha amiga e companheira, Mayara Arruda e sua família, por está em todos os momentos em que mais precisei, me apoiando, me ajudando a superar os desafios e me aconselhando nas horas de angustia. Nunca esquecerei do apoio de vocês, muito obrigada.

Aos meus colegas de graduação, em especial Cláudio, Klemyr, Tiago e Eliane, por toda força, dedicação e confiança. A eles, meu muito obrigada por estar comigo nos momentos em que eu achava que não conseguiria, o apoio e dedicação ao nosso grupo de estudos, me fez acreditar e continuar em frente.

Em especial, a professora Dra. Luciana, minha orientadora. Obrigada pela paciência, dedicação, por todo esforço que fez para me ajudar, mesmo estando de licença e, acima de tudo, obrigada por ter um coração tão imenso. Deus abençõe sempre você e sua família.

Aos professores da UEPB que me ensinaram a buscar novos caminhos. Meus sinceros agradecimentos.

E a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização de mais uma etapa da minha vida.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as versões analíticas do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais e complexos. Para isto, apresentamos resultados importantes para a compreenção de todo o texto, dentre os quais está o Lema de Zorn. Em seguida, apresentamos algumas aplicações do teorema.

Palavras chaves: Análise Funcional, Teorema de Hahn-Banach, Lema de Zorn.

Abstract

In this work, we studied the analytical versions of the Hahn-Banach Theorem for real and complex vector spaces. For this, we present important results for understanding the entire text, among them is Zorn's Lemma. We then present some applications of the theorem.

Key Words: Functional Analysis, Hahn-Banach Theorem, Zorn's Lemma.

Sumário

Introdução

O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados de Análise Funcional. Trata-se de um resultado sobre extensões, que garante que funcionais lineares definidos em subespaços vetoriais podem ser estendidos a todo espaço vetorial e, além disso, algumas propriedades serão preservadas. Neste trabalho serão apresentadas duas versões do Teorema de Hahn-Banach, uma para espaços vetoriais reais e outra para espaços vetoriais complexos.

O resultado no caso real foi obtido por Hahn em 1929 e, de uma forma mais geral, devida a Banach em 1929; embora uma primeira versão tenha aparecido num trabalho do matemático Helley em 1922 que junto com o matemático Riesz, em 1911, conseguiram obter os primeiros teoremas de extensão de funcionais em alguns espaços de funções. Aproximadamente uma década após surgiu a versão complexa do teorema, que foi publicada no trabalho de H. F.Bohnenblust e A. Sobczyk.

No primeiro capítulo deste trabalho, iremos apresentar algumas definições e alguns resultados importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos, assim como o Lema de Zorn que será uma ferramenta fundamental para a demonstração do Teorema de Hanh-Banach. No segundo capítulo serão apresentadas as demonstrações do teorema nos dois casos (real e complexo) e em seguida, no terceiro capítulo, mostraremos algumas de suas aplicações.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Daremos início ao nosso trabalho apresentando alguns resultados e definições que serão necessários para os demais capítulos.

1.1 Espaço Vetorial

Definição 1.1. *É chamado de* ***Espaço Vetorial*** *sobre um corpo $\mathbb{K}$, um conjunto não vazio X onde define-se operações de adição e multiplicação por escalar que determinam:*

- *para cada $x, y \in X$, uma soma $x + y \in X$;*
- *para cada $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, o produto $\lambda x \in X$.*

Tais que:

i) $x + y = y + x$, *para cada* $x, y \in X$;

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, *para cada* $x, y, z \in X$;

iii) há um elemento $0 \in X$, *chamado vetor nulo, tal que, para cada* $x \in X$, *temos*

$$0 + x = x + 0 = x;$$

iv) para qualquer $x \in X$, *há um elemento* $-x \in X$, *tal que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

v) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, *para quaisquer escalares* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e para qualquer* $x \in X$*;*

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, *para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e para cada* $x, y \in X$*;*

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, *para cada* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e para cada* $x \in X$*;*

viii) $1x = x$, *para qualquer* $x \in X$*.*

Exemplo 1.1. *Os espaços* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$ *são espaços vetoriais com as operações usuais, ou seja, com adição de vetores e multiplicação por escalar definidos da seguinte forma:*

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n),$$

onde,

$$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n (ou\, \mathbb{C}^n)\, e\, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definição 1.2. *(Subespaço Vetorial) Seja* X *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e seja* M *um subconjunto de* X*. Dizemos que* M *é um* ***subespaço vetorial*** *de* X *se* M *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *com relação às operações de adição de vetores e multiplicação por escalar no espaço* X*.*

Exemplo 1.2. *Seja* X *qualquer espaço vetorial. Então, um conjunto constituído somente do vetor nulo ou todo o espaço* X*, são subespaços de* X*.*

Exemplo 1.3. *Seja* X *o espaço de todas as funções reais definidas em um conjunto* E*, não-vazio, com as operações de adição de funções e multiplicação por escalar. Então, o conjunto* W *constituído por todas as funções limitadas em* X *é um subespaço de* X *(uma função* $f \in X$ *é limitada se existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leq K, \forall\, x \in X$*).*

Definição 1.3. *(Combinação Linear) Seja* X *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e sejam* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$*. Então, qualquer vetor em* X *da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n,$$

com $a_i \in \mathbb{K}$ *é chamado* ***combinação linear*** *de* $x_1, x_2, ..., x_n$*.*

Teorema 1.1. *Seja S um subconjunto não-vazio de X. O conjunto $L(S)$ de todas as combinações lineares de vetores em S, é um subespaço de X contendo S. além disso, se W é qualquer outro subespaço de X contendo S, então $L(S) \subset W$.*

Demonstração. Ver [6].

O espaço $L(S)$ é o menor subespaço de X contendo S e é denominado *subespaço gerado* por S.

Definição 1.4. *(Norma e Espaço Normado) Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **norma** se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $||x|| \geq 0$, *para todo* $x \in X$*;*

ii) $||x|| = 0$ *se, e só se* $x = 0$*;*

ii) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$, *para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $x \in X$*;*

iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, *para todo* $x, y \in X$.

*Um espaço vetorial X, junto com uma norma $||\cdot||$ em X, que denotamos por $(X, ||\cdot||)$, é chamado de **Espaço Normado**.*

Exemplo 1.4. *Em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$ o valor absoluto $|\cdot|$ é uma norma, ou seja, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ são espaços normados.*

1.2 Funcionais Lineares e Sublineares

Definição 1.5. *(Transformação Linear) Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $T : X \longrightarrow Y$ é uma **transformação linear (ou aplicação linear)** se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) Para qualquer x, $y \in X$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$*;*

ii) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ *e qualquer* $x \in X$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Observação: No caso em que $X = Y$, a transfomação linear $T : X \longrightarrow X$ é chamada também de operador linear.

Exemplo 1.5. *A transformação identidade $I : X \longrightarrow X$ definida por $I(x) = x, \forall\, x \in X$ é uma transformação linear, pois*

i) $I(x + y) = x + y = I(x) + I(y)$;

ii) $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$

I também é chamado de operador idêntico de X.

Definição 1.6. *(Funcional Linear) Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um* ***funcional linear*** *f é uma transformação linear com a imagem em $\mathbb{K}$. Assim,*

$$f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K},$$

onde o domínio de f, que simbolizamos por $D(f)$, é um subespaço vetorial de X.

Definição 1.7. *(Funcional Linear Limitado) Seja $(X, ||.||)$ um espaço normado. Um funcional linear f é dito ser limitado se existe um número real $c \geq 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq c||x||, \quad \forall\, x \in D(f).$$

Além disso, a norma de f é dada por

$$||f|| = \sup_{x \in D(f)\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||}, \tag{1.1}$$

ou equivalentemente (ver [1]),

$$||f|| = \sup_{x \in D(f), ||x||=1} |f(x)|.$$

Observe que por (1.1), temos

$$|f(x)| \leq ||f||\,||x||, \quad \forall\, x \in D(f).$$

Definição 1.8. *(Funcional Sublinear) Seja X um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um* ***funcional sublinear*** *se satisfaz:*

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall\, x, y \in X;$

ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall\, \lambda \geq 0, \forall\, x \in X.$

Exemplo 1.6. *Uma norma sobre um espaço vetorial é um funcional sublinear.*

Definição 1.9. *Dois funcionais f_1 e f_2 são iguais, escrito $f_1 = f_2$, se eles têm o mesmo domínio e se*

$$f_1(x) = f_2(x), \ \forall\, x \in D(f_1) = D(f_2).$$

A restrição de um funcional $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ a um subconjunto $B \subset D(f)$ é denotado por $f|_B : B \longrightarrow \mathbb{K}$ e é um funcional definido por

$$f|_B(x) = f(x), \forall\, x \in B.$$

Uma extensão de f a um conjunto $M \supset D(f)$ é um funcional $\tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{K}$, de tal modo que $\tilde{f}|_{D(f)} = f$, isto é,

$$\tilde{f}(x) = f(x), \forall\, x \in D(f).$$

1.3 Lema de Zorn

Definição 1.10. *Um conjunto M é dito **Parcialmente Ordenado** se existe uma relação binária, que denotamos por $\leq$, satisfazendo as seguintes propriedades*

i) $a \leq a$ *para cada* $a \in M$ *(reflexiva);*

ii) se $a \leq b$ *e* $b \leq a$*, então* $a = b$*, para cada* $a, b \in M$ *(simétrica);*

iii) se $a \leq b$ *e* $b \leq c$*, então* $a \leq c$ *(transitiva).*

Exemplo 1.7. *Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. Define-se em $P(X)$ a seguinte relação*

$$A \leq B, \text{ se e somente se}, A \subseteq B,$$

onde $A, B \in P(X)$. Com esta relação de ordem, $P(X)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo 1.8. *Em* $\mathbb{R}^n$ *podemos obter, para cada par de elementos de* $\mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *a seguinte relação de ordem parcial:*

$$x \leq y, \, se\, e\, somente\, se, \, x_i \leq y_i, i = 1, ..., n.$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$*, com esta relação é um conjunto parcialmente ordenado.*

Definição 1.11. *Um conjunto **Totalmente Ordenado** M, ou **Cadeia**, é um conjunto parcialmente ordenado no qual para quaisquer dois elementos $a, b \in M$ temos $a \leq b$, ou $b \leq a$.*

Definição 1.12. *Um **Limite Superior** de um conjunto W contido em um conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $\mu \in M$ tal que*

$$x \leq \mu, \, \forall \, x \in W.$$

Definição 1.13. *Seja M um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $m \in M$ é um **elemento maximal** em M se para todo $m' \in M$ com $m \leq m'$, segue que $m' = m$.*

Lema 1.1. *(**Lema de Zorn**) Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia $C \subseteq M$ possui um limite superior. Então, M tem pelo menos um elemento maximal.*

Capítulo 2

O Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um resultado sobre extensões, de funcionais definidos em subespaços, a todo espaço vetorial, garantindo que todo espaço vetorial normado é ricamente preenchido de funcionais lineares. A demonstração desse teorema segue [1].

Teorema 2.1. *Sejam X um espaço vetorial real, Z um subespaço próprio de X, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear, tais que:*

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{para cada } x \in Z. \tag{2.1}$$

Então, f pode ser estendido à X através de um funcional linear $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\tilde{f}(x) = f(x), \text{ para cada } x \in Z$$

e

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema será dividida em três etapas:

1ª etapa: Vamos verificar que existe uma extensão linear $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \longrightarrow \mathbb{R}$ do funcional f satisfazendo $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(\tilde{f})$.

Seja E o conjunto de todas as extensões lineares de f que satisfazem (2.1). Dessa forma, cada elemento $g \in E$ satisfaz

i) $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, onde $D(g)$ denota o domínio de g;

ii) $Z \subseteq D(g)$;

iii) $g|_Z = f$, isto é, $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in Z$;

iv) $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(g)$.

Note que E não é vazio, pois $f \in E$. Em E podemos definir a seguinte *ordem parcial*:

$$g \leq h, \ \ (g, h \in E),$$

se e somente se, h é uma extensão de g, ou seja, $D(g) \subseteq D(h)$ e $h(x) = g(x)$, $\forall\, x \in D(g)$. Dessa forma, temos uma relação de ordem parcial em E.

Vamos provar que E satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. Para isto, considere um subconjunto totalmente ordenado $C \subset E$ e defina o funcional linear $\hat{g}$ da seguinte forma

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g)$$

e

$$\hat{g}(x) = g(x), \ \ se\ x \in D(g), \ \ (g \in C)\,.$$

Neste caso, observe que $\hat{g}$ está bem definido, pois se $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ para $g_1, g_2 \in C$ temos que $g_1(x) = g_2(x)$, pois $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$ já que C é totalmente ordenado. Se por exemplo, $g_1 \leq g_2$, então $g_2|_{D(g_1)} = g_1$. Como $x \in D(g_1)$ então

$$g_2(x) = g_1(x).$$

Além disso, por definição de $\hat{g}$, tem-se que $\hat{g} \in E$ e que $g \leq \hat{g}$ para todo $g \in C$, isto é, $\hat{g}$ é um limite superior de C. Logo, todo conjunto de elementos de E totalmente ordenado é majorado. O ***Lema de Zorn*** garante a existência de um elemento maximal $\tilde{f} \in E$. Pela definição de E, $\tilde{f}$ é uma extensão linear de f, que satisfaz:

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \ \ para\ cada\ x \in D(\tilde{f}).$$

2ª etapa: Nesta etapa veremos que $D(\tilde{f}) = X$.

Suponha por contradição que $D(\tilde{f}) \neq X$, então podemos escolher $y_1 \in X \setminus D(\tilde{f})$, ou seja, $y_1 \in X$ e $y_1 \notin D(\tilde{f})$. Considere o seguinte subespaço

$$Y_1 = \left\{ y + \alpha y_1,\, y \in D(\tilde{f}) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Note que $y_1 \neq 0$, pois $0 \in D(\tilde{f})$ (Já que $0 \in Z \subset D(\tilde{f})$). Além disso, qualquer elemento $x \in Y_1$ pode ser escrito de maneira única por

$$x = y + \alpha y_1, \text{ com } y \in D(\tilde{f}) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

De fato, suponha que

$$x = y + \alpha y_1 \quad \text{e} \quad x = \tilde{y} + \tilde{\alpha} y_1, \quad (y, \tilde{y} \in D(\tilde{f}) \text{ e } \alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}),$$

ou seja,

$$y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \tilde{\alpha} y_1.$$

Dessa forma, obtemos

$$y - \tilde{y} = \tilde{\alpha} y_1 - \alpha y_1,$$

o que implica que,

$$y - \tilde{y} = (\tilde{\alpha} - \alpha) y_1.$$

Como $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ e $y_1 \notin D(\tilde{f})$, segue que $y - \tilde{y} = 0$ e $\tilde{\alpha} - \alpha = 0$, o que mostra a unicidade da representação.

Considere um funcional $g_1 : Y_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c,$$

onde c é uma constante real arbitrária que será escolhida adequadamente. Vamos mostrar que $g_1 \in E$ e $g_1 \geq \tilde{f}$, mas isto contradiz o fato de $\tilde{f}$ ser elemento maximal de E.

Observe que:

i) g_1 é linear;

De fato, sejam $x, \tilde{x} \in Y_1$. Digamos $x = y + \alpha y_1$ e $\tilde{x} = \tilde{y} + \tilde{\alpha} y_1$.

$$
\begin{aligned}
g_1(kx) &= g_1(k(y+\alpha y_1)) \\
&= g_1(ky + k\alpha y_1) \\
&= \tilde{f}(ky) + k\alpha c \\
&= k(\tilde{f}(y) + \alpha c) \\
&= kg_1(x).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g_1(x+\tilde{x}) &= g_1(y+\alpha y_1 + \tilde{y} + \tilde{\alpha} y_1) \\
&= g_1(y + \tilde{y} + \alpha y_1 + \tilde{\alpha} y_1) \\
&= g_1(y + \tilde{y} + (\alpha + \tilde{\alpha}) y_1) \\
&= \tilde{f}(y+\tilde{y}) + c(\alpha + \tilde{\alpha}) \\
&= \tilde{f}(y) + \tilde{f}(\tilde{y}) + c\alpha + c\tilde{\alpha} \\
&= \tilde{f}(y) + c\alpha + \tilde{f}(\tilde{y}) + c\tilde{\alpha} \\
&= g_1(x) + g_1(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

ii) g_1 é uma extensão de $\tilde{f}$. De fato, se $y \in D(\tilde{f})$, então a representação de y em Y_1 é $y + 0.y_1$. Logo,

$$g_1(y) = g_1(y + 0 \cdot y_1) = \tilde{f}(y) + 0.c = \tilde{f}(y).$$

Se provarmos que $g_1(x) \leq p(x)$, para todo $x \in Y_1 = D(g_1)$, teremos $g_1 \in E$ e $g_1 \geq \tilde{f}$, que é uma contradição, já que $\tilde{f}$ é um elemento maximal de X. Logo, devemos ter que $D(\tilde{f}) = X$.

3ª etapa: Provaremos de fato que $g_1(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Y_1$.

Sejam y, $z \in D(\tilde{f})$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) &= \tilde{f}(y-z) \leq p(y-z) \\
&= p(y + y_1 - y_1 - z) \leq p(y+y_1) + p(-y_1 - z).
\end{aligned}
$$

Daí temos que

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),\ \forall\, y,\, z \in D(\tilde{f}). \tag{2.2}$$

Definindo

$$A := \sup_{z \in D(\tilde{f})} \left(-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \right),$$

obtemos

$$A \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),\ \forall\, y \in D(\tilde{f}),$$

e definindo

$$B := \inf_{y \in D(\tilde{f})} p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$$

deduzimos que

$$A \leq B.$$

Seja c tal que $A \leq c \leq B$. Assim,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c,\ \forall\, z \in D(\tilde{f}), \tag{2.3}$$

e

$$c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),\ \forall\, y \in D(\tilde{f}). \tag{2.4}$$

Consideremos os seguintes casos:

1º caso: Vamos considerar um elemento $x \in Y_1$ representado de maneira unica por $x = y + \alpha y_1$, com $\alpha < 0$. Trocando z por $\alpha^{-1} y$ em (2.3) temos:

$$-p(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y) - \tilde{f}(\frac{1}{\alpha} y) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ temos:

$$\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Usando $x = y + \alpha y_1$, segue que

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Dessa forma,

$$g_1(x) \leq p(x),\ \forall\, x = y + \alpha y_1 \in Y_1,\ \alpha < 0.$$

2º caso: Considere $x = y + \alpha y_1 \in Y_1$, com $\alpha = 0$.

Neste caso, segue que

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + 0 \cdot y_1 \leq p(y) = p(x),$$

o que implica que

$$g_1(x) \leq p(x),\ \forall\, x = y + \alpha y_1 \in Y_1,\ \alpha = 0.$$

3º caso: Seja $x \in Y_1$ tal que $x = y + \alpha y_1$, $\alpha > 0$. Por (2.4), trocando y por $\alpha^{-1}y$, temos

$$c \leq p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - \tilde{f}(\frac{1}{\alpha}y).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$

$$\alpha c \leq \alpha p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y),$$

dessa forma, obtemos

$$\tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

Logo,

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x),$$

ou seja,

$$g_1(x) \leq p(x),\ \forall x = y + \alpha y_1 \in Y_1,\ \alpha > 0,$$

finalizando a demonstração do Teorema. ■

O Teorema de Hahn-Banach (Generalizado)

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial real ou complexo. Um funcional sublinear $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **semi-norma** se*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

e

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$

para todo $x, y \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2. *Sejam* X *um espaço vetorial,* Z *um subespaço de* X, p *uma semi-norma em* X *e* $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ *um funcional linear com*

$$|f(x)| \leq p(x), \text{ para todo } x \in Z. \tag{2.5}$$

Então, existe uma extensão linear $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *de* f *tal que*

$$\tilde{f}(x) = f(x), \text{ para cada } x \in Z;$$

e

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Demonstração.

1º caso: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Se X é um espaço vetorial real, de (2.5) segue que

$$f(x) \leq |f(x)| \leq p(x),$$

isto é, $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in Z$. Assim, pela versão real do Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de f tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Além disso,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Logo,

$$-p(x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x),$$

e portanto

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \text{ para cada } x \in X,$$

o que demonstra o teorema no caso real.

2º CASO: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Neste caso, temos $f : Z \longrightarrow \mathbb{C}$. Assim, f pode ser representado por

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \ \forall x \in Z,$$

onde $f_1, f_2 : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares e temos

$$Re\, f(x) = f_1(x) \ e \ Im\, f(x) = f_2(x).$$

Note que

$$\begin{aligned} f_1(ix) &= Re\, f(ix) \\ &= Re[f_1(ix) + if_2(ix)] \\ &= Re[if_1(x) - f_2(x)] \\ &= -f_2(x), \end{aligned}$$

o que implica

$$f_2(x) = -f_1(ix).$$

Assim, colocando em função da parte real f_1, obtemos

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \ \forall x \in Z.$$

Olhando X e Z como espaços vetoriais reais e sendo f_1 um funcional linear real, temos

$$|f_1(x)| = |Ref(x)| \leq |f(x)| \leq p(x), \ \forall x \in Z.$$

Logo, pelo 1º caso, existe uma extensão $\tilde{f}_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de f_1 tal que

$$|\tilde{f}_1(x)| \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Defina

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(xi). \tag{2.6}$$

Então, $\tilde{f}$ é uma extensão de f de Z à X. Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(ix) &= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(i^2x) \\ &= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(-x) \\ &= \tilde{f}_1(ix) + if_1(x) \\ &= i(-i\tilde{f}_1(ix) + \tilde{f}_1(x)) \\ &= i\tilde{f}(x), \end{aligned}$$

ou seja, f é complexa-linear. Precisamos apenas mostrar que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \ para \ cada \ x \in X.$$

Recordemos que todo número complexo na forma trigonométrica pode ser escrito na forma

$$z = a + bi = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

e

$$|z| = r = e^{-i\theta}z, \ \theta = argz.$$

Seja $\theta = arg(\tilde{f}(x))$, então $\tilde{f}(x) = e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$. Logo,

$$|\tilde{f}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^{-i\theta}x),$$

isto é, $\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$ é real e portanto é igual a sua parte real, e temos por (2.6)

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x),$$

pois $|e^{-i\theta}| = 1$. ■

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo apresentamos alguns resultados importantes onde se aplica o Teorema de Hahn-Banach.

No que segue, considere X um espaço vetorial normado sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Corolário 3.1. *Seja $x_0 \in X$, com $x_0 \neq 0$. Então, existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X tal que*

$$||\tilde{f}|| = 1$$

e

$$\tilde{f}(x_0) = ||x_0||.$$

Demonstração. Consideremos Z um subespaço de X definido da seguinte forma

$$Z = \{\alpha x_0,\ \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Em Z definimos o funcional $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$f(x) = f(\alpha x_0) = |\alpha|||x_0||.$$

Considerando o funcional sublinear em X dado por $p(x) = ||x||$, obtemos

$$f(x) = f(\alpha x_0) = |\alpha|||x_0|| = ||\alpha x_0|| = ||x|| = p(x),\ \forall x \in Z.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, f tem uma extensão $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Note que,

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = ||x_0||.$$

Além disso, o teorema garante que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = ||x||, \, \forall \, x \in X,$$

ou seja,

$$\frac{|\tilde{f}(x)|}{||x||} \leq 1, \, \forall \, x \in X \setminus \{0\},$$

o que implica

$$||\tilde{f}|| \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\tilde{f}(x)|}{||x||} \leq 1.$$

Por outro lado, sendo

$$\frac{|\tilde{f}(\alpha x_0)|}{||\alpha x_0||} = 1,$$

podemos concluir que $||\tilde{f}|| = 1$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 3.2. *Sejam Z um subespaço de X e $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear limitado. Então, existe uma extensão $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ linear limitado, tal que:*

$$||f||_Z = ||\tilde{f}||_X,$$

onde (ver Definição 1.6),

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X, ||x||=1} |\tilde{f}(x)|$$

e

$$||f||_Z = \sup_{x \in Z, ||x||=1} |f(x)|.$$

Demonstração. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$ e a extensão é $\tilde{f} = 0$. Suponha que $Z \neq \{0\}$. Usando a definição de funcional linear limitado, temos

$$|f(x)| \leq ||f||_Z ||x||, \; \forall x \in Z.$$

Agora, defina $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com $p(x) = ||f||_Z ||x||$. Note que $p(x)$ é um funcional sublinear e $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in Z$. Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende f e

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = ||f||_Z ||x||, \; \forall x \in X.$$

Tomando o supremo para todo $x \in X$ de norma 1, obtemos a desigualdade

$$||\tilde{f}||_X = \sup_{||x||=1, x \in X} |\tilde{f}(x)| \leq ||f||_Z.$$

Por outro lado,

$$||f||_Z \leq ||\tilde{f}||_Z,$$

pois $\tilde{f}$ é extensão de f. Portanto,

$$||\tilde{f}||_X = ||f||_Z.$$

■

Corolário 3.3. *Para todo $x \in X$, temos*

$$||x|| = \sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{||f||}, \tag{3.1}$$

onde $X' = \{f : X \to \mathbb{K}; f$ é um funcional linear limitado$\}$. Em particular, se $f(x) = 0,\ \forall f \in X'$, tem-se $x = 0$.

Demonstração. Se $x = 0$, então $||x|| = 0$ e $f(x) = 0$, para todo $f \in X'$. Logo, a igualdade em (3.1) ocorre trivialmente.

Suponhamos que $x \neq 0$. Pelo Corolário 3.1, existe $\tilde{f} \in X'$ tal que

$$||\tilde{f}|| = 1$$

e

$$\tilde{f}(x) = ||x||.$$

Observe que

$$\sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{||\tilde{f}||} = \frac{||x||}{1} = ||x||.$$

Por outro lado temos

$$|f(x)| \leq ||f|| ||x||,\ \forall f \in X',$$

dessa forma obtemos,

$$\frac{|f(x)|}{||f||} \leq ||x||,\ \forall\, f \in X',\ f \neq 0.$$

Portanto,

$$\sup_{f \in x' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||f||} \leq ||x||.$$

Provando a igualdade (3.1). ■

Conclusão

Através do nosso estudo, vimos que o Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados de Análise Funcional e compreendemos que o mesmo permite a existência extensões de funcionais lineares definidos inicialmente em subespaços e estendidos sobre todo espaço vetorial, satisfazendo algumas propriedades.

Percebemos também que vários resultados são consequências desse teorema, como por exemplo, qualquer funcional linear limitado definido em subespaços admite uma extensão a todo espaço, preservando a norma (corolário 3.2), ou também pode-se observar que a norma de um elemento no espaço vetorial normado depende apenas dos funcionais definidos nesse espaço (corolário 3.3). Destacamos que além dessas aplicações, existe na literatura um vasto número de resultados decorrentes do Teorema de Hahn-Banach.

Referências Bibliográficas

[1] KREYSZIG, E. *Functional Analysis With Aplications*, John Wiley & Sons (1978).

[2] OLIVEIRA, C. R. *à Análise Funcional*, Publicações Matemáticas - IMPA (2008).

[3] BEIEZUNER, R. J. *Notas de Análise Funcional*, UFMG (2009).

[4] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L. & WETZLER, H. G. *Algebra Linear I*, Departamento de Matemática - UNICAMP (1986).

[5] BREZIS, H. *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial S. A., Madrid (1984).

[6] LIPSCHUTS S. *Algebra Linear*, Coleção Schaum, Editora Mcgraw-Hill do Brasil (1972).