UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES

TAYRONE ARAÚJO DANTAS

CAMPINA GRANDE

Fevereiro de 2015

TAYRONE ARAÚJO DANTAS

TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

Fevereiro de 2015

D192t Dantas, Tayrone Araújo.
Transformada de Laplace e Aplicações [manuscrito] / Tayrone Araújo Dantas. - 2015.
34 p. : il. nao

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Transformada de Laplace. 2. Equações Diferenciais. 3. Equações Integrais. I. Título.

21. ed. CDD 515.35

TAYRONE ARAÚJO DANTAS

TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento das exigências legais para obtencão do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 25/02/2015

BANCA EXAMINADORA:

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Orientadora

Castor da Paz Filho

Prof. Ms. Castor da Paz Filho

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Examinador

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Examinador

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai, João Dantas da Sílva , à minha mãe, Maria da Conçeição Araujo Dantas e a minha irmã Mariana Araujo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, por ter me dado bençãos nos momentos bons e difíceis durante minha trajetória para que eu pudesse chegar ate aqui.

A toda minha família, em especial a minha irmã Mariana Araujo pelos conselhos dados, sempre torcendo por mim ao meu pai João Dantas e a minha mãe Maria da Conçeição por toda educação que me deram sempre me mostrando o caminho correto, aos demais familiares e amigos que torceram por mim e me deram palavras de incentivo para eu poder concluir mais esta etapa na minha vida.

A minha Orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas pela atenção, compreensão e paciência para que eu pudesse ter concluído o trabalho com êxito. Por todos os momentos que quando precisei ela estava sempre a disposição para ajudar e tirar minhas dúvidas, e pela ótima professora e Coordenadora que foi para todos os alunos do curso de matemática como também pelo seu grande conhecimento matemático a mim transmitido.

Aos professores Davis Matias de Oliveira e Castor da Paz Filho por terem aceitado fazer parte da minha banca, e principalmente por ter me passado seus conhecimentos matemáticos durante a graduação.

Aos meus colegas de graduação: Weiller Felipe, Janailson Marinho, Flavia Shirley, Francisco Diniz, Janaina Aparecida, João Antônio , Ellen Marques , João Eudes entre outros, que aqui eu não pude citar mas de uma forma ou de outra sempre torceram por mim para que eu chegasse ate aqui.

Aos professores da graduação Manoel Milla Miranda, Katia Suzana, Joselma Soares, Vandenberg Lopes Vieira, Fernando Luiz, Leoupoudo Maurício, José Elias entre outros que aqui eu não pude citar.

"O conhecimento que temos das coisas é pequeno, na verdade, quando comparado com a imensidão daquilo em que ainda somos ignorantes."

(Pierre Simon de Laplace)

Resumo

No presente trabalho estudamos a Transformada de Laplace e suas principais propriedades afim de aplicar na resolução de equações diferenciais com valor inicial, na resolução de equações integrais (Volterra) e na resolução de um problema com circuitos elétricos.

Palavras-chave: Transformada de Laplace, Equações Diferenciais, Equações Integrais.

Abstract

In this paper we study the Laplace transform and its main properties in order to apply in Differential Equations resolution with initial value in solving Integral Equations (Volterra) and in solving a problem with electrical circuits.

Keywords: Laplace Transform, Differential Equations, Integral Equations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos estudar a Transformada de Laplace e suas principais propriedades. A Transformada de Laplace pode ser utilizada para transformar equações diferenciais com problema de valor inicial (PVI), em uma equação algébrica.

A Transformada de Laplace é utilizada também em engenharia, onde possui varias aplicações. Uma de suas aplicações é na mecânica ou elétrica, pois ela pode agir muito bem em forças que atuam em um curto intervalo de tempo onde essas forças podem ser descritas, por exemplo, como uma voltagem impressa em um circuito, e em muitas dessas situações se utilizam da função escada para se resolver este tipo de problema.

A Transformada de Laplace é muito usada em diversas situações, porém , aqui trataremos de suas aplicações na resolução de Equações Diferenciais Ordinarias Lineares, Equações Integrais, e em Circuitos Elétricos.

Desta forma, o trabalho está organzado da seguinte maneira:

No Capítulo 1, estudamos alguns resultados básicos sobre Transformada de Laplace, transformada de algumas funções básicas bem como a forma inversa da transformada de Laplace.

No Capítulo 2,será estudado,Ordem exponencial, Teorema da Existência, o conceito de Função Escada, Função Degrau Unitário, Primeiro Teorema da Translação e o Segundo Teorema da Translação. O principal Teorema do trabalho é o Teorema da Transformada de uma derivada bem como um resultado envolvendo convolução.

No Capítulo 3, iremos fazer as aplicações do Teorema da Transformada de uma derivada, bem como a forma inversa do Segundo Teorema da Translação e a convolução afim de resolver Equações Diferenciais Lineares, Equações Integrais (Volterra), e Circuitos Elétricos.

Um Pouco de História

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) foi matemático, astrônomo e físico francês nasceu em Beaumonte-en-age, cidadezinha da Normandia, no dia 23 de Março de 1749 e foi levado por seu tio, padre, para estudar na Abadia Beneditina.

Laplace tinha um amplo conhecimento de todas as ciências e dominava todas as discussões na Académie. De forma razoavelmente única para um prodígio do seu nível, Laplace via os matemáticos apenas como uma ferramenta para ser utilizada na investigação de uma averiguação prática ou científica.

Seguro das suas competências, Laplace dedicou-se, então, a pesquisas originais e, nos dezessete anos seguintes, entre 1771 e 1787, produziu uma boa parte dos seus trabalhos originais em astronomia.

A Transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática - campo em que teve um papel principal na formação. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome. A vida de Laplace como cientista pode ser dividida em quatro períodos, todos eles apresentando novas descobertas e evoluções.

No primeiro período (1768-1778), Laplace desenvolveu a solução de problemas de cálculo integral, matemática astronômica, cosmologia e teoria de chances de jogos. Durante este período formativo, ele estabeleceu seu estilo, reputação, posição filosófica, certas técnicas matemáticas e um programa de pesquisa em duas áreas: Probabilidade e Mecânica Celestial, nas quais, a partir de então, trabalhou para o resto de sua vida.

No segundo período (1778-1789), ele iniciou a pesquisa na sua terceira área de maior interesse: a Física. Sua colaboração foi, juntamente com Lavoisier, relativa à teoria do calor.

O terceiro e revolucionário período (1789-1805), centralizou-se na preparação do Sistema Métrico. Mais importante, na década de 1795 a 1805, sua influência foi fundamental para as ciências exatas no mais novo instituto fundado da França: a Escola Politécnica foi o local onde a primeira geração de físicos matemáticos foi treinada.

O trabalho do quarto período (1805-1827) exibe elementos de culminação e declínio. Laplace, em companhia de Berthollet, fundou uma escola, circundando ele mesmo com disciplinas na informal Société d'Arcueil. O centro de seu interesse foi em Física: ação capilar, a teoria do calor, óptica corpuscular e a velocidade do som.

No começo de 1810, Laplace voltou novamente sua atenção para a probabilidade, tomando como tópico fundamental a teoria dos erros. Também foi abordado o problema dos quadrados mínimos.

É neste período que Laplace desenvolve um método de solução integral para equações diferenciais: a Transformada de Laplace, cuja teoria, aliás, o consagrou na área de cálculo devido à praticidade oferecida na resolução de Equações Diferenciais.

Capítulo 1

A Transformada de Laplace

Neste capítulo vamos introduzir resultados básicos sobre a Transformada de Laplace, que será útil no decorrer do texto.

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é uma transformada integral, da forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)dt, \tag{1.1}$$

onde a função $K(s,t)$ é chamada de núcleo da transformada e a função $F(s)$ é chamada transformada de $f(t)$. No nosso caso, $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$, ou seja

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} K(s,t)f(t)dt. \tag{1.2}$$

Antes de definir transformada de Laplace introduziremos a noção de integral imprópia.

Definição 1.1. ***(Integral Imprópia)***. *Se f é uma função integrável em $[a,\infty)$, então:*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{1.3}$$

Se na definição anterior o limite (1.3) existe, a integral é dita convergente caso contrário é dita divergente.

Observação: Adotaremos a notação $\Big|_{0}^{\infty}$ como abreviação de $\lim\limits_{b\to\infty}()\Big|_{0}^{b}$.

Exemplo 1.1. *Considere a seguinte integral imprópia abaixo e verifique se é convergente ou divergente.*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx.$$

Solução: A integral é convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-x}\right)\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-1\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Definição 1.2. ***(Transformada de Laplace).*** *Seja $f(t)$ uma função real definida para $t \geq 0$. Então a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é definida por*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad \textit{onde } s \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

desde que a integral convirja.

Quando a integral (1.4) converge, o resultado é uma função de s.

Exemplo 1.2. *Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = 1$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}1dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-sb}}{s}+\frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.

Exemplo 1.3. *Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = e^{ct},\ t \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{ct}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-c)t}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-c)t}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-e^{-(s-c)b}}{s-c}+\frac{1}{s-c}\right) \\
&= \frac{1}{s-c}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}\{e^{ct}\} = F(s) = \frac{1}{s-c},\ s > c$.

Proposição 1.1. ***(Lineraridade).*** *Se α e β são constantes quaisquer enquanto $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções com transformadas de Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$, respectivamente, então*

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s).$$

Demonstração:

Aplicando a Definiçao 1.2 temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right) dt \\ &= \alpha\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + \beta\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt \\ &= \alpha\mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta\mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= \alpha F_1(s) + \beta F_2(s).\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.4. *Calcule a Transformada de Laplace da função $f(t) = (1 + e^{2t})$.*

Solução: Usando a linearidade e os Exemplos 1.2 e 1.3,

$$\mathcal{L}\{1 + e^{2t}\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}.$$

A seguir veremos exemplos de funções e suas respectivas transformadas de Laplace que nos serão utíl no decorrer do texto.

Exemplo 1.5. ***Transformada de algumas funções básicas:***

1) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

2) $\mathcal{L}\{coskt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

3) $\mathcal{L}\{senkt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$

4) $\mathcal{L}\{senhkt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$

5)$\mathcal{L}\{coshkt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

Solução:

1) Para justificar 1) vamos usar indução finita; sabemos que, para $n = 0$

$$\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}.$$

Vamos supor que seja verdadeira para $n = k$, isto é,

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Agora vamos verificar para $n = k + 1$. Para isto, note que

$$\mathcal{L}\{t^{k+1}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{k+1} dt.$$

Integrando por partes vem que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-st} t^{k+1} dt &= \left(\frac{-e^{-st}}{s} t^{k+1} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-e^{-st}}{s} (k+1) t^k dt \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-e^{-st}}{s} t^{k+1} \right) \Big|_0^{b} + \frac{k+1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^k dt \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{b^{k+1}}{-se^{sb}} \right) + \frac{k+1}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} t^k dt}_{\mathcal{L}\{t^k\}}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$, por hipotese de indução, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{k+1} dt &= \lim_{b \longrightarrow \infty} \left(\frac{b^{k+1}}{-se^{sb}} \right) + \frac{k+1}{s} \frac{k!}{s^{k+1}} \\
&= 0 + \frac{(k+1)!}{s^{(k+1)+1}} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}$$

2) Antes de justificarmos que $\mathcal{L}\{coskt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$, observe que pela identidade de Euler,

$$e^{ikt} = coskt + isenkt \quad e \quad e^{-ikt} = cos(-kt) + isen(-kt),$$

somando as duas equações acima e considerando $sen(-kt) = -isenkt$ temos

$$e^{ikt} + e^{-ikt} = 2coskt$$

ou seja,

$$coskt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}.$$

Logo usando a linearidade e o resultado do Exemplo 1.2 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{coskt\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \right\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{ikt}}{2} \right\} + \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{-ikt}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ik} + \frac{1}{s + ik} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{s + ik + (s - ik)}{(s - ik)(s + ik)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2 + k^2} \right) \\
&= \frac{s}{s^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

3) Segue com raciocínio análogo ao item 2).

4) Como sabemos o seno hiperbólico, $senht$, é definido da seguinte forma

$$senht = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Usando a Linearidade e o resultado do Exemplo 1.3, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt}}{2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-kt}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s+k-(s-k)}{(s-k)(s+k)}\right] \\
&= \frac{2k}{2(s^2-k^2)} \\
&= \frac{k}{s^2-k^2}, \ \ s > |k|.
\end{aligned}$$

5) Segue com raciocínio análogo ao item 4).

1.1 Transformada Inversa de Laplace

Anteriormente estávamos trabalhando com o problema de encontrar a transformada de uma função, isto é, transformar uma função $f(t)$ em outra função $F(s)$. Agora faremos o inverso, ou seja, dada uma uma função F(s), tentaremos encontrar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Dizemos então que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Exemplo 1.6. ***Algumas transformadas Inversas de Laplace:***

1) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\} = t^n$

2) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\} = senkt$

3) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\} = coskt$

4) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2-k^2}\} = senhkt$

5)$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\} = coshkt$

Solução: Segue imediatamente do exemplo 1.5.

Proposição 1.2. ***(Linearidade da Transformada Inversa).*** *A tranformada de Laplace é uma transformada linear, isto é, para constantes α e β e funções F e G tem-se funções inversas*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Demonstração: Pela proposição 1.1

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} \\
&= \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\
&= \alpha f(t) + \beta g(t).
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Principais resultados envolvendo a Transformada de Laplace

Neste capítulo iremos introduzir os conceitos de função de ordem exponencial, Teorema da Existência, função escada e função degrau unitário, apresentar o Primeiro Teorema da Translação, o Segundo Teorema da Translação o Teorema da transformada de Derivadas, e o Teorema da Convolução utilizando os resultados do capítulo anterior.

2.1 Ordem exponencial

Definição 2.1. ***(Ordem Exponencial)****. Dizemos que uma função f é de ordem exponencial se existem números reais $c, M, T > 0$, tais que $|f(t)| < Me^{ct}$, para $t > T$.*

Exemplo 2.1. *As funções abaixo são todas de ordem exponencial para $t > 0$.*

1) $f(t) = e^{-t}$

2) $f(t) = 2cost$

3) $f(t) = t$

De fato, basta observar que valem as seguintes desigualdades

$$|t| < e^t, \quad |e^{-t}| < e^t, \quad |2cost| < 2t.$$

A seguir apresentamos um resultado que garante a existência da Transformada de Laplace sob certas condições.

Definição 2.2. ***(Função Contínua Por Partes).*** *Uma função é dita contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ de modo que*

1. f seja contínua em todo subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$

2. f tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior do intervalo.

Teorema 2.1. ***(Condições Suficientes de Existência).*** *Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$. Então sua transformada de Laplace existe para todo $s > c$.*

Demonstração:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt = I_1 + I_2.$$

A integral I_1, existe porque pode ser escrita como uma soma de integrais em intervalos nos quais $e^{-st}f(t)$ é contínua. Agora,

$$\begin{aligned} I_2 &< \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|dt < M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt \\ &= M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = \left. \frac{-Me^{-(s-c)t}}{s-c} \right|_T^\infty \\ &= \frac{Me^{-(s-c)T}}{s-c}. \end{aligned}$$

■

A função escada é uma função que descreve muito bem a ação de forças externas agindo em um determinado sistema seja ele mecânico ou eletrico. A seguir daremos a definição da função escada.

Definição 2.3. ***(Função escada).*** *Dado $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se existem $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tais que $\varphi|_{(a_{i-1}, a_i)}$ é constante $(= c_i)$ para cada $i = 1, 2, ..., n$, φ chama-se função escada.*

Definição 2.4. ***(Função degrau unitário).*** *A função degrau $u_c(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

A transformada da função degrau, aplicando a Definição 1.2, é dada da seguinte forma

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt = \frac{e^{-sc}}{s}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^c e^{-st}0dt + \int_c^\infty e^{-st}1dt \\
&= \int_c^\infty e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_c^b \\
&= \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s}\right) \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}.
\end{aligned}$$

O gráfico da função degrau é o seguinte

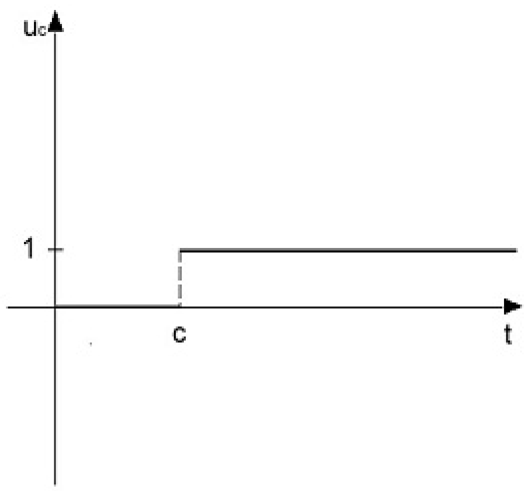

Figura 2.1: O gráfico da função degrau unitário.

A propriedade que nos permite calcular a transformada de Laplace de qualquer função escada é que funções escada podem ser escritas como combinações lineares de funções degrau unitário. De fato, se ,

$$f(t) = \begin{cases} a_1, \;\; para \;\; t \;\; em \;\; [0, c_1) \\ a_2, \;\; para \;\; t \;\; em \;\; [c_1, c_2) \\ a_3, \;\; para \;\; t \;\; em \;\; [c_2, c_3) \\ \vdots \\ a_n \; para \; t \; em \; [c_{n-1}, c_n) \end{cases}$$

é uma função escada, então

$$f(t) = a_1 + (a_2 - a_1)u_{c_1}(t) + (a_3 - a_2)u_{c_2}(t) + ... + (a_n - a_{n-1})u_{c_n}(t). \tag{2.1}$$

Exemplo 2.2. *Calcule a transformada da função.*

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2\pi \\ 9, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

Solução: A função $f(t)$ pode ser escrita como combinação linear de funções degrau unitário pela equação (2.1) então,

$$f(t) = 4 - 2u_1(t) + 7u_{2\pi}(t).$$

Calculando a transformada da função $f(t)$ e aplicando o resultado da Definição 2.1 em $f(t)$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{4\} - 2\mathcal{L}\{u_1(t)\} + 7\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\} \\ &= \frac{4}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{7e^{-2\pi s}}{s}. \end{aligned}$$

A seguir iremos falar sobre Translação.

2.2 Translação

Teorema 2.2. ***(Primeiro Teorema da Translação)****. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e c for um número real qualquer, então.*

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s - c).$$

Demonstração: A prova é imediata pois aplicando a Definição 1.2 temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st+ct}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt \\ &= F(s - c). \end{aligned}$$

■

Para enfatizar, é as vezes proveitoso usar o simbolismo

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{s\to s-c}$$

onde $s \to s - c$ significa que, na transformada de Laplace de $F(s)$ de $f(t)$, substituimos s por $s - c$.

Para entendermos melhor o Primeiro Teorema da Translação veremos a seguir um exemplo.

Exemplo 2.3. *Calcule* $\mathcal{L}\{e^{2t}sen2t\}$.

Solução:

Como $c = 2$ e usando o Primeiro Teorema da Translação temos que

$$\mathcal{L}\{e^{2t}sen2t\} = \mathcal{L}\{sen2t\}\Bigg|_{s\to s-2}$$

então,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{2t}sen2t\} &= \mathcal{L}\{sen2t\}\Bigg|_{s\to s-2}\\ &= \frac{2}{s^2+4}\Bigg|_{s\to s-2}\\ &= \frac{2}{(s-2)^2+4}.\end{aligned}$$

A seguir introduziremos o Segundo Teorema da Translação.

Teorema 2.3. ***(Segundo Teorema da Translação)***. *Se c for uma constante positiva, então*

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s), \tag{2.2}$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Demonstração: Aplicando a Definição 1.2 temos que

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt. \tag{2.3}$$

Podemos reescrever a integral (2.3) como

$$\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c) = \int_0^c e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt + \int_c^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$

Agora, fazendo uma mudança de variavel, seja

$$v = t - c, \quad dv = dt$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-s(v+c)}f(v)dv \\
&= \int_0^\infty e^{-sc}e^{-sv}f(v)dv \\
&= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv \\
&= e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= e^{-cs}F(s).
\end{aligned}$$

■

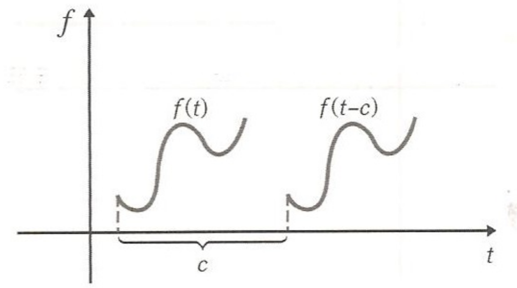

Figura 2.2: O deslocamento da função f para direita.

Usaremos a notação, $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$ para o cálculo deste tipo de transformada.

Exemplo 2.4. *Calcule a transformada de Laplace da função* $f(t) = u_1(t)(t-1)$

Solução: Como $c = 1$ e $f(t) = t - 1$, então, $f(t+1) = t$, logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_1(t)(t-1)\} &= \mathcal{L}\{u_1(t)f(t+1)\} \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{t\} \\
&= \frac{e^{-s}}{s^2}.
\end{aligned}$$

Observação: A forma inversa do Teorema 2.1 é a seguinte:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c).$$

Exemplo 2.5. *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}\right\}$.

Solução: como $c = \pi$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = sen2t$

$$f(t-\pi) = sen2(t-\pi)$$

logo pela forma Inversa do Segundo Teorema da Translação

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}\right\} = u_\pi(t)f(t-\pi) = u_\pi sen2(t-\pi).$$

Logo em seguida veremos o Teorema da transformada de derivadas que é essencial para resolver equações diferenciais.

Teorema 2.4. *Se $f, f', ..., f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0,\infty)$ então*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \tag{2.4}$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Demonstração: Para demonstrar este Teorema usaremos indução finita.

Note que para $n = 1$ temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt.$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt &= \left(e^{-st}f(t)\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(e^{-st}f(t)\right)\Big|_0^b + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(e^{-sb}f(b) - e^{-s(0)}f(0)\right) + sF(s)\\ &= sF(s) - f(0).\end{aligned}$$

Agora suponhamos que para $n = k$ é verdade ou seja,

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^{(k)}F(s) - s^{(k-1)}f(0) - s^{(k-2)}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$$

e mostremos que é verdade para

$$n = k+1.$$

De fato, aplicando a Definição 1.2 temos,

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f^{(k+1)}(t)dt.$$

Agora integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt &= \left(e^{-st} f^{(k)}(t)\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f^{(k)}(t)dt \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} \left(e^{-st} f^{(k)}(t)\right)\Big|_0^b + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}(t)dt \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} \left(e^{-sb} f^{(k)}(b) - f^{(k)}(0)\right) + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}(t)dt \\
&= -f^{(k)}(0) + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)} dt}_{\mathcal{L}\{f^{(k)}\}}.
\end{aligned}$$

Como por hipotese de indução

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}\} = s^{(k)}F(s) - s^{(k-1)}f(0) - s^{(k-2)}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0),$$

então

$$\int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t) = s^{k+1}F(s) - s^{(k)}f(0) - s^{(k-1)}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0).$$

■

Exemplo 2.6. *Qual a solução geral da EDO.*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = k_1 \quad e \quad y'(0) = k_2. \end{cases}$$

Solução: Usando o Teorema 2.2, obtemos que

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) \quad e \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) + y(t)\} &= \mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = 0 \\
\mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) + y(t)\} &= (s^2 - 2s + 1)Y(s) - sk_1 + 2k_1 - k_2 = 0 \\
Y(s) &= \frac{(s+2)k_1 + k_2}{s^2 - 2s + 1},
\end{aligned}$$

como

$$\frac{(s-2)k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{(s-1)k_1 - k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{k_1}{s-1} + \frac{-k_1 + k_2}{(s-1)^2},$$

sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = te^t.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{(s+2)k_1 + k_2}{(s-1)^2}\right\} \\
&= k_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + (k_2 - k_1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\
&= k_1 e^t + (k_2 - k_1)te^t \\
&= k_3 e^t + k_4 te^t.
\end{aligned}
$$

Definição 2.5. *Se as funções f e g forem contínuas por partes em um intervalo $[0, \infty)$, então um produto especial, denotado por $f * g$ é definido pela integral*

$$
f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{2.5}
$$

*e é chamado **Convolução** de f e g.*

Exemplo 2.7. *Determine $1 * e^t$.*

Solução: Pela Definição 2.4,

$$
1 * e^t = \int_0^t 1e^{(t-\tau)}d\tau
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
1 * e^t &= \int_0^t 1e^{(t-\tau)}d\tau \\
&= \int_0^t e^t e^{-\tau}d\tau \\
&= e^t\int_0^t e^{-\tau}d\tau \\
&= e^t\left(-e^{-\tau}\right)\Big|_0^t \\
&= e^t\left(-e^{-t} + 1\right) \\
&= -1 + e^t.
\end{aligned}
$$

Usando a definição acima vamos provar o Teorema da Convolução a seguir

Teorema 2.5. ***(Teorema da Convolução).*** *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial; então,*

$$
\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s). \tag{2.6}
$$

Demonstração: Seja

$$
F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau \;\; e \;\; G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta}g(\beta)d\beta.
$$

Fazendo a multiplicação de F(s) por G(s) temos

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta}g(\beta)d\beta\right)\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta\\
&= \int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}g(\beta)d\beta.
\end{aligned}$$

Agora fixando τ e fazendo $t=\tau+\beta,\ dt=d\beta$ temos que

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^t e^{-st}g(t-\tau)dt.$$

No plano $t\tau$, estamos integrando sobre a região sombreada da Figura 2.4. Como f e g são contínuas por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, podemos inverter a ordem de integração

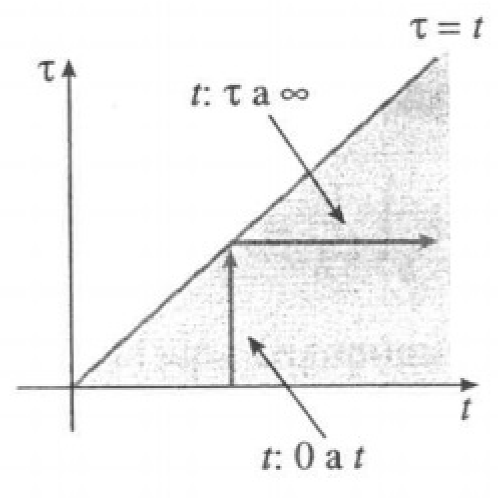

Figura. 2.3.

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\\
&= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt\\
&= \mathcal{L}\{f*g\}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.8. *Pelo Teorema da Convolução verifique a transformada de Laplace abaixo.*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau\right\}.$$

Como $f(t) = e^t$ e $g(t) = sent$, o Teorema da Convolução diz que a transformada de Laplace da Convolução de $f(t)$ e $g(t)$ é o produto de suas transformadas. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau} sen(t-\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{e^t\}\mathcal{L}\{sent\} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2-1)}.\end{aligned}$$

Observação: A forma inversa do Teorema da convolução é algumas vezes útil no cálculo da transformada inversa de Laplace de um produto de duas transformadas. Pelo teorema 2.3, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g.$$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo faremos aplicações da teoria abordada ate aqui, como em Equações Diferenciais sujeita a condições de valor inicial, em Equações Integrais e em Circuitos Elétricos.

3.1 Um Problema de Valor Inicial

Vamos a seguir resolver um problema de valor inicial com condições iniciais dadas usando alguns tópicos abordados nos capítulos anteriores.

Problema: Considere a seguinte equação

$$y''(t) + y(t) = f(t) \quad e \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad em \quad que \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & 1 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Solução:

Podemos escrever $f(t)$ como combinações linear de funções degrau unitário ou seja,

$$f(t) = 1[u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)]$$

sabemos que pelo Teorema 2.2

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$$

Logo aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação $f(t)$ temos,

$$\mathcal{L}\{y''(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{u_\pi(t) - u_2\pi(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \\
s^2Y(s) - 0 - 1 + Y(s) &= \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \\
Y(s)\left(s^2+1\right) &= 1 + \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)s} + \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)s}.
\end{aligned}$$

Agora calculando a inversa de $Y(s)$ temos

$$Y(s) = sent + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^{2+1})s}\right\},$$

pela forma inversa do segundo Teorema da translação

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)s}\right\} = u_\pi(t)f(t-\pi) \;\; e \;\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)s}\right\} = u_{2\pi}(t)f(t-2\pi).$$

Calculando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 * sent,$$

desenvolvendo a convlução acima temos

$$\begin{aligned}
1 * sent &= \int_0^t 1.sent(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t sentcos\tau d\tau - \int_0^t costsen\tau d\tau \\
&= sent\int_0^t cos\tau d\tau - cost\int_0^t sen\tau d\tau \\
&= sent(sen\tau)\Big|_0^t - cost(-cos\tau)|_0^t \\
&= sen^2t + cos^2t - cost \\
&= 1 - cost.
\end{aligned}$$

Logo a solução geral da EDO é

$$y(t) = sent + u_\pi(t)\left(1 - cos(t-\pi)\right) + u_\pi(t)\left(1 - cos(t-2\pi)\right).$$

3.2 Equação Integral de Volterra

A equação de Volterra é um tipo de equação que aparece sob um sinal de integração e ela é definida do seguinte modo

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau. \tag{3.1}$$

A seguir veremos uma equação integral de volterra e com condições iniciais e veremos qual sua solução geral

Problema: Considere a seguinte equação integral de Volterra.

$$y'(t) = 1 - sent - \int_0^t y(\tau)d\tau \quad y(0) = 0. \tag{3.2}$$

Resolva e de sua solução geral usando a teoria estudada ate aqui.

Solução:

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação (3.2) obtemos o seguinte

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{sent\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\}$$

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\}.$$

Como pelo Teorema da Convolução,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\},$$

em que $f(t) = y(\tau)$, e $g(t) = g(t-\tau) = 1$ logo

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{y(t)\}\mathcal{L}\{1\} = \frac{Y(s)}{s}.$$

Portanto,

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{Y(s)}{s}$$

fazendo

$$sY(s) + \frac{Y(s)}{s} - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

Então

$$Y(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s(s^2+1)} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Agora calculando a inversa de $Y(s)$ obtemos a solução geral

$$y(t) = sent - \frac{1}{2}tsent.$$

3.3 Circuitos Eletricos

Nesta seção vamos usar transformada de Laplace para resolver um circuito em série L-R-C para determinar sua corrente, em um circuito que satizfaz a seginte equação integro-diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t). \tag{3.3}$$

Problema: Determine a corrente $i(t)$ em um circuito L-R-C quando $L = 0,1$henry, $R = 20ohms$, $C = 10$farad, $i(0) = 0$ e a voltagem impresa $E(t)$ é dada na no gráfico abaixo.

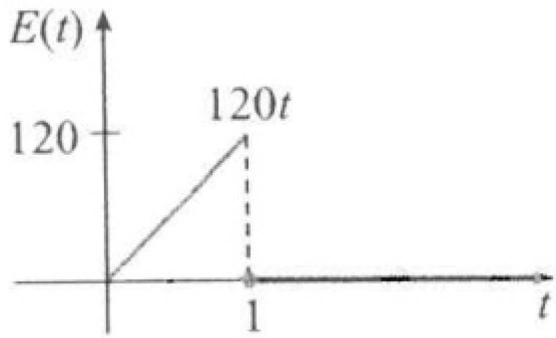

Figura 3.1: Gráfico da Voltagem.

Solução:

$$E(t) = \begin{cases} 120t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Como a voltagem esta desligada para $t > 1$ podemos escrever $E(t)$ como

$$E(t) = 120t - 120tu_1(t), \tag{3.4}$$

mas, para aplicarmos o segundo Teorema da Translação, devemos escrever $E(t)$ como

$$E(t) = 120t - 120(t-1)u_1(t) - 120u_1(t),$$

logo a equação (3.3) passa a ser

$$0,1\frac{di}{dt} + 20i + 10^3\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t - 120(t-1)u_1(t) - 120u_1(t), \tag{3.5}$$

sabemos que pelos Teorema 2.3

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s},$$

aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação 3.5

$$0,1\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} + 20\mathcal{L}\{i\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{120t\} - \mathcal{L}\{120(t-1)u_1(t)\},$$

$$0,1\left(sI(s) - i(0)\right) + 20I(s) + 10\frac{I(s)}{s} = 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right],$$

multiplicando por $10s$

$$1s^2I(s) + 200sI(s) + 100I(s) = 1200\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - e^{-s}\right],$$

$$(s+100)^2I(s) = 1200\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - e^{-s}\right],$$

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{s(s+100)^2} - \frac{1}{s(s+100)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}\right].$$

Desenvolvendo frações parciais temos

$$I(s) = 1200\left[\frac{1/10.000}{s} - \frac{1/10.000}{s+1} - \frac{1/100}{(s+100)^2}e^{-s} + \frac{1/10.000}{s+100}e^{-s} + \frac{1/100}{(s+100)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}\right].$$

Pela forma inversa do segundo teorema da translação, obtemos

$$i(t) = \frac{3}{25}\left[1 - u_1(t) - \frac{3}{25}\right]\left[e^{-100t} - e^{100(t-1)}u_1(t)\right] - 12e^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)}u_1(t).$$

Referências Bibliográficas

[1] DIACU, Florin. *Introdução a Equações Diferenciais Teoria e Aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 2004.

[2] ZILL, Dennis G. CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais*, São Paulo: Pearson, 2001.

[3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2009.

[4] BRANNAN, James, R. BOYCE, Williiam E. *Equações Diferenciais.* Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[5] C.DIPRIMA, Richard, BOYCE, Williiam E. *Equaçoes Diferenciais Elementares.* Rio de Janeiro: LTC, 2010.