



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O Modelo de Lotka-Volterra e Aplicações

Luís Carlos da Silva Lacerda

CAMPINA GRANDE - PB

Outubro de 2015

Luís Carlos da Silva Lacerda

O Modelo de Lotka-Volterra e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE-PB

Outubro de 2015

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

L131m Lacerda, Luís Carlos da Silva.

O Modelo de Lotka-Volterra e aplicações [manuscrito] / Luís Carlos da Silva Lacerda. - 2015.

50 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento
de Matemática".

1. Teorema de existência. 2. Modelo de Lotka-Volterra. 3.
Equações Diferenciais Ordinárias. I. Título.

21. ed. CDD 515.35

Luís Carlos da Silva Lacerda

O Modelo de Lotka-Volterra e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 24/ 10 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Centro de Ciências e Teconologia - Campus I/UEPB
Orientador

Luciana Roze de Freitas

Prof^ª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Centro de Ciências e Tecnologia - Campus I/UEPB
Examinadora

Thiciany M. Iwano

Prof^ª. Me. Thiciany Matsudo Iwano
Centro de Ciências e Tecnologia - Campus I/UEPB
Examinadora

“A Matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito”.

(Manoel Rodrigues Paiva)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar o teorema de existência e unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.Os). Ele nos garante que dada certa condição inicial a existência de pelo menos uma solução para um problema de valor inicial envolvendo uma aplicação contínua, e como também, em seguida, sua aplicação no modelo de Lotka-Volterra de interação entre espécies. Assim, após uma breve abordagem histórica, introduzimos nosso estudo e, em seguida, é feita uma listagem de conteúdos essenciais para a compreensão do nosso objeto de pesquisa. Logo depois, enunciamos e demonstramos o teorema de Picard e de Peano, que consistem nos teoremas principais, posteriormente analisamos o modelo de Lotka-Volterra e por último, apresentamos uma aplicação no controle biológico da broca cana-de-açúcar. Assim, concluindo o trabalho.

Palavras chave: Teorema de Existência em E.D.O.; Teorema de Picard e Peano; Modelo de Lotka-Volterra.

Abstract

This work aims to present the existence and uniqueness theorem of Ordinary Differential Equations (ODE), he guarantees us that given some initial condition the existence of at least one solution for an initial value problem involving the continuous application, and as well, then your application in model Lotka-Volterra interaction between species. So after a historical approach, we introduce our study, then, is made one essential contents listing for the understanding of our research object. Soon after, articulate and demonstrate the Picard and Peano theorem , what a consist of the main theorems, then we analyze the model of Lotka-Volterra and lastly, we present an application in biological control of sugar cane borer. Thus completing the work.

Key words: *Existence theorem in E.D.O.; Picard theorem and Peano; Lotka-Volterra model.*

Sumário

Introdução	10
1 Aspectos Históricos	11
2 Resultados Básicos	14
2.1 Espaços Métricos	14
2.2 Bolas e Conjuntos Limitados	16
2.3 Conjuntos Abertos	17
2.4 Conjuntos Fechados	18
2.5 Conjuntos Compactos	19
2.6 Conjuntos Conexos	19
2.7 Sequências em \mathbb{R}^n	20
2.8 Espaços Métricos Completos	21
2.9 Aplicações Contínuas em Espaços Métricos	22
2.10 Equicontinuidade	23
3 O Teorema de Existência e Unicidade em E.D.O.	25
3.1 Teorema de Picard	27
3.2 O Teorema de Peano	30
3.3 Soluções Máximas	31
4 Aplicações	34
4.1 O Modelo de Lotka-Volterra	34

4.2	Controle Biológico da Broca Cana-de-Açúcar	42
4.3	Modelo do Tipo Lotka-Volterra: Vespa x Broca	43
4.3.1	Análise do Modelo	47
5	Considerações Finais	49
	Referências Bibliográficas	50

Introdução

Em muitos problemas de aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias não é necessário a obtenção das soluções em sua forma algébrica, bastando saber algumas propriedades dessas soluções. Sabendo disto, o presente trabalho, tem como objetivo principal demonstrar e aplicar o teorema de existência e unicidade das Equações Diferenciais no controle biológico de pragas, através do modelo clássico de Lotka-Volterra. Tal teorema, na verdade são dois, o teorema de Picard que, nos diz que dado um problema de valor inicial e uma aplicação $f(t, x)$ contínua e Lipschitziana na segunda variável, existe uma única solução que satisfaz a condição inicial dada. Já o outro teorema, o de Peano, garante a existência de soluções para o problema de valor inicial desde que a aplicação seja contínua.

No primeiro capítulo, faremos um resumo histórico sobre o desenvolvimento das Equações Diferenciais, mencionando seus principais estudiosos. No segundo capítulo abordamos alguns resultados básicos que são indispensáveis para o teorema de existência e unicidade das E.D.Os. No terceiro capítulo, apresentaremos a demonstração do teorema de Picard e do teorema de Peano, em que consisti o teorema anteriormente mencionado. Ainda neste capítulo, examinaremos a extensão máxima de uma solução local de um problema de valor inicial, também conhecida como solução máxima. No quarto e último capítulo, analisaremos o modelo de interação entre espécies conhecido como modelo de Lotka-Volterra.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

No final do século XVII, Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) desenvolveram o cálculo para resolverem problemas em mecânica. Foi a partir do aprimoramento deste estudo que muitos problemas matemáticos puderam ser modelados levando assim a consolidação das Equações Diferenciais.

Embora tenha criado o cálculo, Newton atuou muito pouco na área das Equações Diferenciais propriamente ditas. Ele classificou as Equações Diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ e $dy/dx = f(x, y)$. Para esta última equação, na hipótese de $f(x, y)$ ser polinômio em x e y , ele criou um método para resolvê-la usando séries infinitas.

Já Leibniz teve uma maior participação no desenvolvimento das Equações Diferenciais possuía uma boa notação matemática e, com isso, criou o símbolo dy/dx para derivada e também o sinal de integral que conhecemos hoje. Em 1691, desenvolveu o método de separação de variáveis. Neste mesmo ano, Leibniz desenvolveu outro método, o de redução de equações e mais tarde criou o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem.

Depois desses dois grandes gênios, vieram outros matemáticos brilhantes que tiveram a participação significativa no ramo das Equações Diferenciais. Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), fizeram importantes contribuições para a matemática e, em especial, para as Equações Diferenciais. Ambos criaram diversos métodos de resolução dessas equações e expandiram o campo de aplicação. Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ em 1690. Enquanto Johann Bernoulli, em 1694, resolveu a equação $dy/dx = y/ax$. Os irmãos também solucionaram um famoso problema da história da ma-

temática, conhecido com o problema da Braquistócrona (encontrar a curva ao longo do qual uma partícula desliza, sem fricção, em tempo mínimo, de um ponto dado R para outro ponto S, este porém, estando mais baixo que o primeiro, mas não diretamente abaixo). Este problema também foi resolvido por Newton e Leibniz.

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, também contribuiu para as Equações Diferenciais e suas aplicações. Foi o primeiro a encontrar as funções que séculos depois foram chamadas de funções de Bessel. E em seu nome está associado uma famosa equação da mecânica dos fluídos, à equação de Bernoulli.

Leonhard Euler (1707-1783) era amigo de Daniel Bernoulli e aluno de Johann Bernoulli. É considerado o maior matemático do século XVIII, tinha interesse em todas as áreas da matemática e em vários campos de aplicação. Euler estudou as condições que tornam uma Equação Diferencial de primeira ordem exata, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes, achou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, usou séries de potências para resolver Equações Diferenciais Parciais e fez contribuições importantes para o cálculo das variações. Euler foi um matemático prolífico, suas obras completas preenchem mais de 70 volumes.

Em 1766, Joseph - Louis Lagrange conhecido pelo seu trabalho sobre mecânica Newtoniana. Porém, também teve contribuições suas para a teoria das Equações Diferenciais. Ele mostrou que a solução geral de uma Equação Diferencial Linear Homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes, desenvolveu por completo o método de variação dos parâmetros, e também trabalhou com Equações Diferenciais Parciais e cálculo de variações.

Outro estudioso que merece ser mencionado é Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827), este teve como trabalho mais importante, *Traité de mécanique céleste*, que foi publicado em cinco volumes. Laplace trabalhou com Equações Diferenciais, a transformada de Laplace que recebeu esse nome em sua homenagem, só foi reconhecida como um método de resolução de Equações Diferenciais mais tarde.

Assim, no final do século XVIII, já existiam inúmeros métodos elementares de resolução de Equações Diferenciais. Foi quando passou-se a investigar questões teóricas, devidos aos fundamentos e rigor da análise matemática. Ao invés de se procurar uma solução geral de uma dada Equação Diferencial, dava-se ênfase a existência e unicidade de soluções satisfazendo algumas condições iniciais. Aqui, encontramos a figura de A. L. Cauchy (1789 - 1857), que foi o responsável por demonstrar de forma rigorosa e usando três métodos diferentes, a existência

de soluções para inúmeras classes de Equações Diferenciais.

Enfim, muitas foram as teorias que surgiram dentro do campo das Equações Diferenciais, como exemplo temos a teoria qualitativa, que tem como representantes H. Poincaré (1854 - 1912) e A. M. Liapnov (1857 - 1918), temos também a teoria de aproximação numérica. Uma característica destes métodos é compreender de forma qualitativa o comportamento das soluções de uma visão geométrica, assim também analítica.

Nos últimos anos tem-se percebido um grande avanço das Equações Diferenciais. Sua união com o computador trouxe um novo movimento de estudos. E apesar de ser um assunto de alguns séculos passados e que se tem um bom domínio hoje, as Equações Diferenciais ainda é um campo fértil de problemas intrigantes que apresentam forte perspectivas de novos caminhos e métodos de estudos a serem descobertos.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Para iniciarmos nosso estudo, apresentaremos neste primeiro capítulo alguns resultados que servirão de base para o desenvolvimento do nosso trabalho. Resultados que serão de grande importância para o entendimento do Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias. Toda teoria que iremos expor neste capítulo inicial é relativamente extensa. Porém, daremos ênfase à algumas definições e resultados imprescindíveis para o desenvolvimento do conteúdo que iremos abordar.

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1. *Seja um conjunto M não-vazio. Uma aplicação de $M \times M$ nos reais positivos, ou seja, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada de métrica em M se são satisfeitas as seguintes propriedades:*

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in M$.

*Um conjunto M munido com a métrica d , que denotaremos por (M, d) , onde d é a tal métrica sobre M é chamado **espaço métrico**.*

Exemplo 2.1. *Seja $M = \mathbb{R}$ munido da métrica d , definida por*

$$d(x, y) = |x - y|$$

é um espaço métrico. Para todo $x, y \in M = \mathbb{R}$, temos:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2. Seja agora $M = \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ pontos quaisquer do \mathbb{R}^n , então,

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

é uma métrica sobre \mathbb{R}^n . Verifiquemos isso:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = |(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n)| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = 0 \end{aligned}$$

peelo fato, $|x_i - y_i| \geq 0$, com $1 \leq i \leq n$ e também $|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2 = 0^2 = 0$ resulta que, $|x_i - y_i|^2 = 0, \dots, |x_n - y_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y$.

- $d(x, y) = d(y, x)$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} \\ &= |(y_1 - x_1), \dots, (y_n - x_n)| = |y - x| = d(y, x) \end{aligned}$$

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \Rightarrow [d(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \end{aligned}$$

*Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado.

$$\begin{aligned}
&\leq^* \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right] + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 = [d(x, z) + d(z, y)]^2,
\end{aligned}$$

daí, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Com isso verificamos que o espaço \mathbb{R}^n é um espaço métrico.

A métrica d em \mathbb{R}^n do Exemplo 2.2 é chamada de **métrica Euclidiana**, e o \mathbb{R}^n com essa métrica é dito espaço métrico Euclidiano. Podemos ainda, definir outras métricas d_1 e d_2 sobre \mathbb{R}^n .

- $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ métrica da soma.
- $d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|\}$ métrica do máximo.

Mostra-se que:

- $d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_2(x, y)$ (ver [4], p. 41) quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Bolas e Conjuntos Limitados

Nesta seção faremos uma breve introdução de alguns conceitos de topologia no \mathbb{R}^n .

Definição 2.2. A bola aberta de centro num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto x é menor do que r . Usando a notação $B(x, r)$ para indicar esse conjunto. Assim:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; d(x, y) < r\}$$

Definição 2.3. A bola fechada de centro num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, é o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto x é menor do que ou igual a r . Usando a notação $B[x, r]$ para indicar esse conjunto. Assim:

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n; d(x, y) \leq r\}$$

Dado $M \subseteq \mathbb{R}^n$ e fixemos $x \in \mathbb{R}^n$. Se verificarmos

- $B(x, r) \subset M$, com $r > 0$. O ponto x é dito ponto interior a M ou $\text{int}(M)$.

* Usamos aqui a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver [9], p.5).

- $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n - M = M^c$, com $r > 0$. O ponto x é dito ponto exterior a M ou $\text{ext}(M)$.
- $\forall r > 0, B(x, r)$ contém pontos de M e M^c . O ponto x é dito ponto fronteira de M ou ∂M .

O fecho de um conjunto M é o conjunto $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Definição 2.4. Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é considerado limitado quando existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c, \forall x \in M$. Ou seja, M está contido em uma bola de centro na origem e raio c .

Exemplo 2.3. Mostre que $B[y, r] \subset B[0, c]$ é limitado para algum $c > 0$.

Veja que $d(x, y) = |x - y| \leq r$ e também $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \leq r + |y|$.

Considere $c = r + |y|$, temos $|x| \leq c$. Logo, $B[y, r] \subset B[0, c]$ pois, $x \in B[y, r] \Rightarrow x \in B[0, c]$.

Definição 2.5. Chamamos um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ de convexo, se dados dois pontos quaisquer x e $y \in M$, o segmento de reta que une esses dois pontos está inteiramente contido em M .

De maneira formal, M é convexo se $\forall x, y \in M, 0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow (1 - \theta)x + \theta y \in M$.

Exemplo 2.4. Toda bola aberta ou fechada é um conjunto convexo.

2.3 Conjuntos Abertos

Nesta seção veremos o conceito de conjunto aberto e alguns resultados relacionados.

Definição 2.6. Dizemos que $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto se tivermos $\text{int}(M) = M$, isto é, quando todos os seus pontos são interiores.

$\forall x \in M \subseteq \mathbb{R}^n, \exists r > 0$, tal que, $B(x, r) \subset M$. Assim, M é aberto $\Leftrightarrow \text{int}(M) = M$.

Exemplo 2.5. Toda bola aberta $B(x, r)$ é um conjunto aberto.

Proposição 2.1. Os conjuntos abertos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n gozam das seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n inteiro são abertos;
2. A interseção $A = A_1 \cap \dots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos A_1, \dots, A_k é um conjunto aberto;

3. A reunião $\bigcup_{k \in T} A_k$ de uma família qualquer $(A_k)_{k \in T}$ de conjuntos abertos A_k é um conjunto aberto.¹

Demonstração: (ver [9], p. 36) ■

Intervalos abertos (limitados ou não) são conjuntos abertos. A demonstração do item 1 da proposição acima é garantida apenas um número finitos de conjuntos abertos. Já o item 2 que trata da reunião de conjuntos abertos vale para um infinidade de conjuntos abertos.

2.4 Conjuntos Fechados

Definição 2.7. Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito fechado quando $M = \overline{M}$.

Observação 1. Note que: $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Definição 2.8. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, quanto $X = \overline{X}$.

Definição 2.9. Dizer que $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado significa, portanto, o seguinte: se $\lim x_k = a$, e $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $a \in X$.

Exemplo 2.6. Uma bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado do espaço \mathbb{R}^n .

De fato se $|x_k - a| \leq r$, para todo k e $\lim x_k = b$ então $|b - a| = \lim |x_k - a| \leq r$.

Proposição 2.2. O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.

Demonstração: (ver [10], pag. 172) ■

Teorema 2.1. Para conjuntos fechados do espaço euclidiano \mathbb{R}^n valem as propriedades seguintes:

1. O conjunto vazio e o próprio espaço \mathbb{R}^n são fechados.
2. A união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
3. A interseção $M \cap_{k \in T} M_k$ de uma família qualquer $(M_k)_{k \in T}$ de conjuntos fechados M_k é conjunto fechado.

¹Dado um conjunto X , uma família de elementos de X com índices em T é uma função $x : T \rightarrow X$, onde $x(k) = x_k$. A família x é representada pela notação $(x_k)_{k \in T}$.

Demonstração: (ver [9], p. 40). ■

A união de um número infinito de conjuntos fechados pode não ser fechado.

Exemplo 2.7. Para um conjunto $M \subset \mathbb{R}$ que não seja fechado. Tem-se $M = \bigcup_{x \in M} \{x\}$ como todo conjunto, M é reunião dos seus pontos; cada ponto $x \in M$ forma um conjunto fechado $\{x\}$ mas a reunião M não é fechado.

2.5 Conjuntos Compactos

Nesta seção apresentaremos o conceito de conjuntos compactos e algumas propriedades.

Definição 2.10. Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito compacto se for fechado e limitado.

Definição 2.11. Um espaço métrico (M, d) é compacto se o conjunto M é compacto.

Teorema 2.2. Se (M, d) é um espaço métrico e S um subconjunto de M , isto é, $S \subset M$. O conjunto S é compacto se, e somente se, uma sequência (x_n) de pontos de S , possui uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um ponto $x_0 \in S$.

Demonstração: Seja $S \subset M$ compacto, então S é limitado. Isso implica que, toda sequência de pontos $(x_n) \subset S$ é limitada. Pelo teorema de Bolzano-weierstrass (ver Apêndice) S possui uma subsequência que converge para um x_0 , e como S é fechado, tem-se que $x_0 \in S$. De forma recíproca, seja $(x_n) \in S$ uma sequência de pontos que possui uma subsequência convergindo para um $x_0 \in S$. Então, S é limitado.

Ora, se não fosse, teríamos $n \in \mathbb{N}$ com $(x_n) \in S$ tal que $|x_n| > n$. Dessa forma, (x_n) obtida, não possuiria subsequência limitada nem subsequência convergentes. Entretanto, S é fechado assim $x_0 = \lim x_n$ com $(x_n) \subset S, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, (x_n) possui uma subsequência convergindo para um ponto de S . Mas, toda subsequência de (x_n) converge para x_0 . Logo $x_0 \in S$, o que nos diz que S é compacto. ■

Exemplo 2.8. Intervalos do tipo $[a, b]$ de \mathbb{R} são compactos, pois são limitados e fechados. Já os do tipo $[0, +\infty)$ e $(-\infty, b]$ não são compactos.

2.6 Conjuntos Conexos

Nesta seção apresentaremos algumas definições de conjuntos conexos e alguns exemplos.

Definição 2.12. Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito conexo se os únicos subconjuntos de M os quais são abertos e fechados são \emptyset e o próprio M .

Definição 2.13. Dizemos que um espaço métrico (M, d) é conexo, se não existe conjuntos abertos F e G de forma que: $F \cap M \neq \emptyset, G \cap M \neq \emptyset, F \cap G = \emptyset$ e $F \cup G \subseteq M$.

Definição 2.14. Um espaço métrico (M, d) é dito desconexo se contém $F \neq \emptyset$ e $G \neq \emptyset$, ambos abertos de modo que $F \cap G = \emptyset, F \cap M \neq \emptyset, G \cap M \neq \emptyset$ e $F \cup G \subseteq M. \forall F, G \subseteq M$.

Observe que essa definição é contrária a anterior para a interseção. Assim, podemos dizer que um espaço métrico (M, d) é conexo se não é desconexo.

Exemplo 2.9. A reta é um espaço conexo, pois \mathbb{R} e \emptyset são os únicos subconjuntos de \mathbb{R} , ambos abertos e fechados.

2.7 Sequências em \mathbb{R}^n

Nesta seção apresentaremos o conceito de sequências no \mathbb{R}^n e exemplos.

Definição 2.15. Uma sequência em $M = \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow M$, definida no conjunto dos números naturais \mathbb{N} , denotada por $(x_n), (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n) .

Definição 2.16. Dizemos que uma subsequência de (x_n) é a restrição da sequência a um conjunto infinito $\mathbb{N}^* = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$. Denotamos geralmente uma subsequência por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$.

Exemplo 2.10. Seja a sequência $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ de elementos de \mathbb{R} , então $(1, 1, 1, \dots)$ é uma subsequência da sequência dada.

De fato, temos $(1, 1, 1, \dots) = (x_1, x_4, x_7, \dots)$ de modo que tenhamos $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$.

Definição 2.17. Dizemos que um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$, quando $\forall \epsilon > 0$, dado arbitrariamente, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|x_n - c| < \epsilon$, com $n > n_0$. Note que, $|x_n - c| < \epsilon$ significa $c - \epsilon < x_n < c + \epsilon$, ou seja, $x_n \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$, que contém c .

Uma sequência (x_n) é dita convergente se seu limite existe, ou seja, $\lim x_n = c$. Neste caso, dizemos também que (x_n) converge para c ou tende para c ou simplesmente $x_n \rightarrow c$. Caso contrário dizemos que (x_n) é divergente.

Teorema 2.3. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja então $c = \lim x_n$. Tomando $\epsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$. Ou seja, $x_n \in (c - 1, c + 1)$. Considere o seguinte conjunto finito:

$$P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, c - 1, c + 1\}$$

contendo a o menor e b o maior elemento. Então, todos os termos da sequência estão contidos no intervalo $[a, b]$. Logo, a sequência é limitada. ■

Observe que a recíproca não é verdadeira. Um exemplo é a sequência $(0, 1, 0, 1, \dots)$ que é limitada mas, não é convergente, pois possui as subsequências $(0, 0, 0, \dots)$ e $(1, 1, 1, \dots)$ que converge para limites diferentes. E portanto, não é convergente.

2.8 Espaços Métricos Completos

Nesta seção veremos o conceito de espaços métricos completos e alguns resultados relacionados.

Definição 2.18. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é dita sequência de Cauchy em M , se $\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq r \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Definição 2.19. *Um espaço métrico M , no qual toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M é chamado de espaço métrico completo.*

Proposição 2.3. *Seja M um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy de M . Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $c \in M$, então $\lim x_n = c$.*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ uma subsequência de x_n . Dado $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_i \geq n_1 \Rightarrow d(x_i, c) = |x_{n_i} - c| < \frac{\epsilon}{2}, \forall i \in \mathbb{N}$, note que, $k \geq n_k$. Existe também para a sequência (x_n) de Cauchy, um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_2 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, para $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}, n > n_0 \Rightarrow |x_n - c| \leq |x_m - x_{n_i}| + |x_{n_i} - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo, $\lim x_n = c$. ■

Proposição 2.4. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração: Dada uma sequência (x_n) de Cauchy de um espaço métrico (M, d) . E como M é compacto por hipótese, isto resulta que existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para um ponto $c \in M$. Pela proposição anterior, se uma subsequência de uma sequência de

Cauchy converge para um ponto $c \in M$, então a sequência converge para esse mesmo ponto. Isto é, $\lim x_n = c$. Provando assim que M é completo. ■

Corolário 2.1. *O espaço \mathbb{R}^n é completo.*

Demonstração: (ver [8], p. 167) ■

2.9 Aplicações Contínuas em Espaços Métricos

Nesta seção apresentaremos o conceito de funções contínuas definidas em um espaço métrico.

Definição 2.20. *Seja $f : M_1 \rightarrow M_2$, dizemos que f é uma aplicação contínua se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$, para cada sequência convergente (x_n) de pontos de M_1 .*

Definição 2.21. *Sejam os espaços métricos (M_1, d_1) e (M_2, d_2) , uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$ é dita uniformemente contínua se, para qualquer $\epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall x, y \in M_1$.*

Proposição 2.5. *Seja uma aplicação contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num compacto $M \subset \mathbb{R}^m$, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: (ver [5], p. 337) ■

Definição 2.22. *Seja uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$, dizemos que f é Lipschitziana quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f), tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in M_1.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{k}$, as aplicações Lipschitzianas de espaços métricos são sempre uniformemente contínuas. De fato, dado $\epsilon > 0$ então

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Definição 2.23. *Uma aplicação $T : M \rightarrow M$ de um espaço métrico M nele mesmo é dita uma contração se T é Lipschitziana com $k < 1$. A constante de Lipschitz k é o fator de contração.*

Definição 2.24. *Dizemos que uma aplicação é localmente Lipschitziana, quando cada ponto é o centro de uma bola, cuja aplicação é Lipschitziana.*

Proposição 2.6. *Toda aplicação localmente Lipschitziana é Lipschitziana em compactos.*

Demonstração: (ver [5], p.338) ■

Definição 2.25. *Seja um espaço métrico (M, d) e uma aplicação $T : M \rightarrow M$ nele mesmo, dizemos que T é uma aplicação de iteradas se tivermos as funções compostas $T^1 = T, T^2 = T(T^1) = T \circ T, T^3 = T(T^2) = T \circ T^2$, indutivamente definidos por $T^0 = id : M \rightarrow M$. $T^{n+1} = T \circ T^n$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.26. *Uma sequência $x_0 = x = T^0(x), x_1 = T(x) = T^1(x), x_2 = T(T(x)) = T^2(x)$, definida indutivamente por $x_0 = x$ e $x_{n+1} = T(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.27. *Seja uma aplicação $T : M \rightarrow M$ de um espaço métrico (M, d) nele mesmo, um ponto $P \in M$ é dito **ponto fixo** se tivermos $T(P) = P$.*

Se a aplicação $T : M \rightarrow M$ é contínua e uma sequência (x_n) de iteradas de $x \in M$ convirja para um ponto $P \in M$. Então, $T(P) = T(\lim x_n) = \lim T(x_n) = \lim x_{n+1} = P$. Portanto, P é ponto fixo de T .

Definição 2.28. *Dados $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ quaisquer, e $B(X, Y)$ a coleção de todas as funções de X em Y que são contínuas e limitadas. Definimos em $B(X, Y)$ a métrica do supremo ou também chamada de métrica uniforme, por $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, para todas as funções limitadas f e g de X em Y .*

Corolário 2.2. *Se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ é completo então, dado qualquer $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, o espaço métrico $B(X, Y)$ é completo com a métrica uniforme.*

Demonstração: (ver [5], p. 345) ■

2.10 Equicontinuidade

Nesta seção apresentaremos o conceito de equicontinuidade e enunciaremos o teorema de Ascoli-Arzelá.

Definição 2.29. *Sejam M, N espaços métricos e K um conjunto de aplicações $f : M \rightarrow N$. Dizemos que o conjunto K é equicontínuo no ponto $x_0 \in M$ quando, dado qualquer $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d(x_1, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_0)) < \epsilon, \forall f \in K, \forall x_1, x_0 \in M$.*

Definição 2.30. Dizemos que uma sequência f_n é equicontínua no ponto $x_0 \in M$, quando o conjunto $K = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$ também for equicontínuo nesse ponto.

Definição 2.31. O conjunto K de aplicações $f : M \rightarrow N$ é dito uniformemente equicontínuo quando, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $d(x_2, x_1) < \delta \Rightarrow d(f(x_2), f(x_1)) < \epsilon, \forall f \in K, \forall x_2, x_1 \in M$.

Proposição 2.7. Se $K \subset M$ é compacto, todo conjunto equicontínuo de aplicações $f : K \rightarrow N$ é uniformemente contínuo.

Demonstração: (ver [8], p. 243) ■

Definição 2.32. Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se relativamente compacto quando seu pedido \bar{X} é compacto. Isto significa que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M (podendo ocorrer que o limite dessa subsequência não pertença a X).

Teorema 2.4. [Teorema de Ascoli-Arzelá] Seja E um conjunto de aplicações contínuas $F : K \rightarrow N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset C(K, N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:

1. E seja equicontínuo;
2. Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja compacto em N .

Demonstração: (ver [8], p. 244) ■

Capítulo 3

O Teorema de Existência e Unicidade em E.D.O.

Neste capítulo enunciamos e demonstramos o teorema de existência e unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias. Na verdade, trata-se de dois teoremas, que nos garantem a existência e unicidade de soluções de EDOs. Dada uma condição inicial.

O teorema de Picard que é um dos teoremas mencionado acima, nos garante que, dado uma Equação Diferencial Ordinária e um problema de valor inicial, existe uma única solução da equação dada. Já o teorema de Peano, que é o outro resultado que iremos demonstrar, nos dá garantias apenas de existência de soluções para uma certa condição inicial.

Definição 3.1. *Seja uma aplicação contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um aberto, definimos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem por*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

ou

$$x' = f(t, x). \tag{3.1}$$

Definição 3.2. *Dizemos que uma **solução** da Equação (3.1) é uma função diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, tal que*

1. $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$
2. $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in I$. Se t for um extremo do intervalo, $\frac{dx}{dt}(t)$ será a derivada lateral respectiva.

Definição 3.3. Dado um ponto $(t_0, x_0) \in I \times U$, o problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

é chamado de problema de Cauchy ou problema de valor inicial.

Integrando (3.2) em I , obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \forall t \in I \quad (3.3)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, as afirmações (3.2) e (3.3) são equivalentes.

Teorema 3.1. [Bolzano-Weierstrass] Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.

Demonstração: (ver [9], p.17) ■

Lema 3.1. Seja (M, d) um espaço métrico completo, a sequência de iterações de um ponto desse espaço por uma contração, é uma sequência de Cauchy.

Demonstração: Sejam $F : M \rightarrow M$ uma aplicação Lipschitziana de M , sendo $K > 0$ sua constante de Lipschitz e considere $x_0 \in M$ qualquer. Considere também a sequência $x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2), \dots, x_{n+1} = F(x_n)$ das iterações de x_0 . Mostraremos que (x_n) é de Cauchy. Como F de Lipschitziana, vale $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$ e considere os pontos da sequência de iterações de x_0 ao invés de x e y , teremos

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$$

$$= kd(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leq k^2d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

⋮

$$= k^{n-1}d(F(x_1), F(x_0)) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Com $n \in \mathbb{N}$. Como F é uma contração, então, $k < 1$, prova-se por indução sobre n que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Daí concluímos que (x_n) é de Cauchy, pois $k^n \rightarrow 0$, visto que $0 < k < 1$. ■

Definição 3.4. Dizemos que uma aplicação $F : M \rightarrow M$ de um espaço métrico (M, d) nele mesmo é uma **contração** se F é Lipschitziana de constante $\lambda < 1$; dizemos neste caso que a constante de Lipschitz é um **fator de contração** de F .

Definição 3.5. Dizemos que um ponto $a \in M$ é um **ponto fixo** de uma aplicação $F : M \rightarrow M$ de um espaço métrico M nele mesmo se $F(a) = a$.

Teorema 3.2. Seja M um espaço métrico completo e seja $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F admite um único ponto fixo, ponto esse que pode ser obtido como limite da sequência $(x, F(x_0), F(F(x_0)), \dots)$, para qualquer ponto $x_0 \in M$.

Demonstração: Considerando a aplicação $F : M \rightarrow M$ do espaço métrico completo (M, d) uma contração, e seja k sua constante de contração $0 < k < 1$. Vamos considerar $x_{n+1} = F(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Como sabemos pelo lema 3.1, que a sequência (x_n) é de Cauchy.

Como toda sequência de Cauchy é limitada (ver [10], p. 126), assim existe um ponto $P \in M$, tal que $\lim x_n = P$. E como F é contínua, então $F(P) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = P$. Ou seja, P é ponto fixo de F . Se tivermos ainda outro ponto, digamos $F(P_1) = P_1$, com $P_1 \in M$. Então teremos,

$$d(P, P_1) = d(F(P), F(P_1)) \leq kd(P, P_1) \Rightarrow$$

$$d(P, P_1) - kd(P, P_1) \leq 0 \Rightarrow (1 - k)d(P, P_1) \leq 0.$$

Como $(1 - k) > 0$, resulta $d(P, P_1) = 0$, e isso só acontece se $P = P_1$. Portanto, o ponto fixo de F é único. ■

Teorema 3.3. [Teorema de Aproximação de Weierstress] Dada uma função contínua $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômio P_n tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f$ uniformemente em $[a, b]$.

Demonstração: (ver [8], p. 250) ■

3.1 Teorema de Picard

Nesta seção enuciaremos e demonstraremos o importante Teorema de Picard.

Teorema 3.4. [Teorema de Picard] Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, (t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a > 0, b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$. Se $f(t, x)$

é lipschitziana no retângulo $R_{a,b}$ então existe uma única solução do problema de valor inicial (3.2) definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha > 0$ é dado por $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, com $M > 0$ uma cota superior qualquer de $|f(t, x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.

Demonstração: Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação lipschitziana num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ qualquer, seja também qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, e constantes $a, b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U, \quad (3.4)$$

sendo $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ bolas fechadas com centros em t_0 e x_0 de raios a e b em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , respectivamente. Vamos considerar o conjunto $F = C(I_a, B_b)$ das aplicações contínuas de I_a em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ que é completo com métrica uniforme. Defina a aplicação $\Psi : F \rightarrow F$ do espaço métrico F nele mesmo e escolhendo qualquer $M > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in R_{a,b}. \quad (3.5)$$

Note que essa limitação é possível, pois f é uma aplicação contínua no retângulo $R_{a,b}$. E seja uma função contínua $\varphi : I_a \rightarrow \mathbb{R}^n \in F$, definindo $\Psi(\varphi) : I_a \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo um função derivável e mais φ é um ponto fixo de Ψ , ou seja, $\varphi = \Psi(\varphi)$, não necessariamente teremos $\Psi(\varphi) \in F$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(\Psi(\varphi)(t), x_0) &= |\Psi(\varphi)(t) - x_0| = |x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x_0| = \\ & \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0|. \end{aligned}$$

Onde $\Psi(\varphi)(t) \in B_b$ só está definida para t suficiente próximo de t_0 . Precisamos garantir para todo t em I_a , ou seja $M|t - t_0| \leq b$. Assim, definimos

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (3.6)$$

com α dependendo de a e b , que dependem apenas da posição relativa de (t_0, x_0) em U e de M que depende de a, b e f . Definindo o novo intervalo, temos

$$I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I_a. \quad (3.7)$$

Considere agora o espaço $F = C(I_\alpha, B_b)$ das funções contínuas de I_α em $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ que é completo com a métrica uniforme. Então, para cada função contínua $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ temos $\Psi(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \in F, \forall \varphi \in F$. Ou seja, a aplicação $\Psi : F \rightarrow F$ agora está bem definida.

Agora, dadas duas funções $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in F$ e $\forall t \in I_\alpha$, pela métrica do supremo vale

$$|\Psi^n(\varphi_1)(t) - \Psi^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} |t - t_0|^n d(\varphi_1, \varphi_2), n \geq 0, \forall t \in I_\alpha \quad (3.8)$$

A desigualdade acima fica evidentemente para $n = 0$. Seja agora $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} |\Psi(\varphi_1)(t) - \Psi(\varphi_2)(t)| &= \left| \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s)) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \leq K \left| \int_{t_0}^t d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \leq K d(\varphi_1, \varphi_2) |t - t_0|, \end{aligned}$$

onde $K > 0$ é uma constante de Lipschitz. Verificamos que a desigualdade é válida para $n = 1$.

Agora seja $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} |\Psi(\Psi(\varphi_1)(t)) - \Psi(\Psi(\varphi_2)(t))| &= \left| \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(\varphi_1)(t)) ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(\varphi_2)(t)) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \Psi(\varphi_1)(s)) - f(s, \Psi(\varphi_2)(s)) ds \right| \leq K \left| \int_{t_0}^t |\Psi(\varphi_1)(s) - \Psi(\varphi_2)(s)| ds \right| \\ &\leq K.K.d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| \leq K^2 d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

o que torna a desigualdade verdadeira. Suponha agora que a desigualdade vale para $n = k$, então mostraremos que ela vale para $n = k + 1$. Verifiquemos isso,

$$\begin{aligned} |\Psi^{k+1}(\varphi_1)(t) - \Psi^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |\Psi(\Psi^k(\varphi_1))(t) - \Psi(\Psi^k(\varphi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t [f(s, \Psi^k(\varphi_1))(s) - f(s, \Psi^k(\varphi_2))(s)] ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\Psi^k(\varphi_1)(s) - \Psi^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \\ &\leq K.K^k d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \left| \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^k}{k!} ds \right| \\ &\leq K^{k+1} d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{(t - t_0)^{k+1}}{k + 1!}. \end{aligned}$$

Assim provamos que a desigualdade vale para $n = k + 1$, e portanto, fazendo $(t - t_0) = \lambda$, temos

$$|\Psi^n(\varphi_1)(t) - \Psi^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n \cdot \lambda^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como o crescimento fatorial é maior que o exponencial, isso implica que para n suficientemente grande $\frac{(K\lambda)^n}{n!} < 1$. Portanto, Ψ^n é uma contração de $F = C(I_\alpha, \mathbb{R}^n)$. E pelo Teorema do Ponto Fixo, existe portanto uma única solução $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\Psi(\varphi) = \varphi$.

■

3.2 O Teorema de Peano

Nesta seção enuciaremos e demonstraremos o teorema de Peano.

Teorema 3.5. [Teorema de Peano] *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ como no Teorema de Picard. Se $|f(t, x)| < M$ em U , então existe uma solução do problema de valor inicial 3.2 em I_α onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência f_n de funções contínuas, cujas componentes são polinômios, que converge para f , uniformemente em U . E para n grande, f_n satisfaz as hipóteses do Teorema de Picard. Seja f lipschitziana em $U : I_a \times B_b$, onde $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \bar{B}(X_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$; se $|f| \leq M$ em U , existe uma única solução de em I_α , onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Denotemos por φ_n a solução do problema,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

em I_α , que têm a existência e unicidade garantida pelo Teorema de Picard. Seja t e $\hat{t} \in I_\alpha$, $\delta = M = \left(\frac{\epsilon}{|t - \hat{t}|} \right) > 0, \forall \epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_n(\hat{t})| &= \left| x_0 \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds - x_0 \int_{\hat{t}}^t f(s, \varphi_n(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{\hat{t}}^t f(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq \int_{\hat{t}}^t |f(s, \varphi_n(s))| ds \\ &\leq M|t - \hat{t}| = \frac{\epsilon}{|t - \hat{t}|} \cdot |t - \hat{t}| = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova a equicontinuidade da família $\{\varphi_n\}$. Agora,

$$|\varphi_n - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_n(s))| ds \leq M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

para n suficientemente grande. Logo, isso implica equilimitação. Portanto, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (ver Cap. 3) existe uma subsequência φ_{n_i} uniformemente convergente a uma certa $\Psi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow B(x_0, b)$. Para simplificar a notação, chamaremos φ_{n_i} simplesmente de φ_j , f_{n_i} de f_j . Mostraremos que tal Ψ é solução local do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds - \varphi_j(t) \right| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f_j(s, \varphi_j(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t f_j(s, \varphi_j(s)) - f(s, \Psi(s)) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) - f(s, \varphi_j(s)) ds + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) - f(s, \Psi(s)) ds. \end{aligned}$$

A expressão acima vai a zero uniformemente quando fazemos j tende à $+\infty$, a primeira parcela porque f_j converge uniformemente a f e a segunda porque φ_j converge uniformemente a Ψ e f é uniformemente contínua. Em ambas as parcelas, usamos ainda o fato de que o intervalo de integração é limitado. Logo, a sequência φ_j que converge a Ψ também converge a $x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds$, o que pela unicidade do limite acaba por implicar que $\Psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds$ e por conseguinte, Ψ é solução do problema de valor inicial em I_α . ■

3.3 Soluções Máximas

Nesta seção veremos o conceito de soluções máximas e alguns resultados relacionados.

Substituindo a condição de Lipschitz pela condição de derivada parcial espacial contínua limitada, pois essa garante uma condição de Lipschitz (ver [5], p.363). Com isso, se a aplicação derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ é contínua então f é Lipschitziana na variável espacial, pelo menos em retângulos compactos (ver [5], p.389).

Portanto, podemos substituir a condição de Lipschitz na hipótese do Teorema de Picard pela continuidade da derivada parcial espacial, obtendo o seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Seja $f(t, x)$ e sua derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ contínuas num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então para qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$ dado, existe uma única solução do problema de*

valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0 , para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Esse teorema garante que existe uma única solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

num intervalo aberto $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.

E tal solução pode ser estendida para intervalos maiores do que I , até um intervalo máximo o qual é aberto, pelo menos enquanto o gráfico da solução não alcançar a fronteira de $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

E esta solução é dita **solução máxima**. Um resultado importante é o lema a seguir:

Lema 3.2. *Sejam $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ soluções do problema do valor inicial, definidas respectivamente, em intervalos abertos I_1 e I_2 . Então, $\varphi_1 = \varphi_2$ para cada $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração: *Seja $I = I_1 \cap I_2$ e considere $J = \{t \in I \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. Perceba que $J \subseteq I$ é fechado, pois é a imagem inversa $(\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}(\{0\})$ do fechado $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ pela função contínua $\varphi_1 - \varphi_2$ em I . Agora, considere $t \in J$ dado. A unicidade das soluções do problema de valor inicial garante $\varphi(t) = \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, então existe uma vizinhança aberta de t em I onde φ_1 e φ_2 coincidem, o que mostra que J é aberto em I . Como I é conexo e J é não-vazio, pois $t_0 \in J$, resulta que $J = I$. ■*

Definição 3.6. *Dizemos que $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **solução máxima** do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

*Se dada outra solução $\bar{\varphi} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ definida em $J \subseteq \mathbb{R}^n$, com $J \subseteq I$ e para cada $t \in J, \bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$. Neste caso, chamamos $\bar{\varphi}$ de **restrição de φ** e φ **extensão de $\bar{\varphi}$** . Em outras palavras, φ é dita **solução máxima** se não admite nenhuma extensão que também é solução do problema de valor inicial.*

Teorema 3.7. *Nas mesmas condições do Teorema 3.6. Toda solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

pode ser estendida a um intervalo máximo o qual é aberto.

Demonstração: Seja $I = \bigcup_{i \in T} I_i$ onde T é o conjunto de índices e $t_0 \in I$.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.15)$$

definidas em intervalos abertos I_i contendo t_0 . Definindo a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte forma: dado $t \in I$, assim $t \in I_i$ para algum i então, pelo Lema 3.2, obtemos $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$. Além do mais, φ é solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

pois $\bar{\varphi}$ também é, e I é aberto. Pois a união da coleção de todos os intervalos abertos I_i é um conjunto aberto. Logo, I é aberto.

Denotemos $I = (u_-, u_+)$ e afirmamos que I é máximo, ou seja, não existe nenhum intervalo contendo I onde o problema de valor inicial tenha solução $\hat{\varphi}$. Ora, suponha que haja tal intervalo, neste caso, ele contém uma das extremidades, digamos u_+ . Assim, pelo Teorema 3.6 a solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(u_+) = \tilde{\varphi}(u_+), \end{cases} \quad (3.17)$$

Existe num intervalo $(u_+ - a, u_+ + a)$. Note que se $\hat{\varphi}$ está definida em u_+ , logo o ponto $(u_+, \varphi(u_+))$ pertence ao aberto U . Aplicando o Teorema 3.6, concluir-se então que uma função $\tilde{\varphi}$ definida no intervalo $\hat{I} = (u_-, u_+ + a)$ por

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \forall t \in (u_-, u_+), \\ \tilde{\varphi}(t), & \forall t \in [u_+, u_+ + a); \end{cases} \quad (3.18)$$

é solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (3.19)$$

mas isso é porém uma contradição, pois I foi a união de todos os intervalos abertos contendo t_0 , onde o problema de valor inicial têm solução, e \hat{I} contém I propriamente. Logo, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução máxima. ■

Capítulo 4

Aplicações

4.1 O Modelo de Lotka-Volterra

Para aplicações usaremos as referências [1] e [2].

Existem hoje vários modelos de interação entre espécies, dentre esses modelos temos o modelo matemático de competição e predação conhecido como o modelo de Lotka-Volterra. Também chamado de modelo presa/predador.

Trata-se da interação entre duas espécies onde uma delas (presa) tem abundância de alimentos, já a segunda espécie (predador) tem como único alimento a população de presas. Considerando também que durante o processo, num intervalo de tempo Δt , não ocorra nenhuma mudança no meio que venha favorecer uma das espécies e que qualquer adaptação genética seja muito lenta.

Denotemos por $x(t)$ a população de presas e por $y(t)$ a dos predadores. Note que x e y são funções do tempo. Admita que os crescimentos das duas espécies dependam das suas respectivas taxas de natalidade e mortalidade.

E considerando ainda, as hipóteses de que o encontro de elementos de x e y seja ao acaso proporcionalmente ao número de elementos das duas espécies. Seja o ataque de um predador a principal causa de mortalidade de cada presa, assim, essa taxa será proporcional ao produto xy . Seja agora a taxa de natalidade da espécie predadora $y(t)$ proporcional ao seu tamanho de população e que a quantidade de sobreviventes desta espécie dependam da quantidade de alimento disponível x , com isso a taxa de natalidade dos predadores será proporcional a xy . Se ainda considerarmos as hipóteses de que as presas cresçam sem limites na ausência dos

predadores e que os predadores morram na ausência das presas.

Temos as seguintes variações:

(variações do número de presas) = (aumento natural) - (destruição pelos predadores)
 (variações do número de predadores) = (mortes na ausência de presas) + (aumento causado pela alimentação) que nos dá o sistema presa-predador simplificado,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde a , b , α , β , são constantes positivas, sendo a a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e α e β as medidas de interação entre as duas espécies. Queremos saber o que ocorrerá no futuro com as populações das presas e dos predadores, uma vez conhecidos seus tamanhos de populações iniciais.

Se $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$ é uma solução do sistema (4.1) e $x(t) = \frac{b}{\beta}$ e $y(t) = \frac{a}{\alpha}$ é outra solução. E tais soluções são as únicas que passam pelos pontos $(0,0)$ e $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ respectivamente, então esses pontos são chamados de pontos de equilíbrio ou pontos críticos e a órbita dessas soluções são os próprios pontos críticos, nesta posição dizemos que a partícula que descreve a trajetória está em equilíbrio ou em repouso. Para maiores explicações (ver[1], p. 322).

Um sistema está em equilíbrio quando sua variação é nula, ou seja, quando $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$.

Para o sistema presa-predador (4.1), temos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \iff ax - \alpha xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{\alpha} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \iff -by + \beta xy = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{b}{\beta} \end{cases} \quad (4.2)$$

Para estudarmos a estabilidade dos pontos $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$, temos que linearizar o sistema (4.1). Assim temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax, \\ \frac{dy}{dt} = -by. \end{cases} \quad (4.3)$$

Em torno do ponto $P_0 = (0, 0)$ podemos achar a solução geral de (4.3),

$$\frac{dx}{dt} = ax \Rightarrow \frac{dx}{x} = a dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a dt + c \Rightarrow \ln |x| = at + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln|x|} = e^{at} \cdot e^c \Rightarrow x(t) = c_1 e^{at},$$

onde c_1 é uma constante.

$$\frac{dy}{dt} = -by \Rightarrow \frac{dy}{y} = -b dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -b dt + c \Rightarrow \ln |y| = -bt + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln(y)} = e^{-bt} \cdot e^c \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-bt},$$

onde c_2 é uma constante.

Obs: Note que o sistema (4.3) pode ser reduzido a um P.V.I. o qual possui única solução.

Seja agora $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ como sendo a matriz dos coeficientes do sistema (4.3) então o polinômio característico associado é

$$p(\gamma) = \det \left[\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det \begin{pmatrix} \gamma - a & 0 \\ 0 & \gamma + b \end{pmatrix} = (\gamma - a) \cdot (\gamma + b)$$

Assim, $(\gamma - a) \cdot (\gamma + b) = 0 \Rightarrow \gamma - a = 0 \Rightarrow \gamma_1 = a > 0$ ou $\gamma_2 + b = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -b < 0$.

Logo, γ_1 e γ_2 são as raízes do polinômio característico associado.

Analisando agora o ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ fazendo a mudança de variáveis em (4.1), pondo $x = \frac{b}{\beta} + u$ e $y = \frac{a}{\alpha} + v$, obtemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha b}{\beta} v - \alpha u v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{a \beta}{\alpha} u + \beta u v, \end{cases} \quad (4.4)$$

que tem como sistema linearizado,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha b}{\beta}v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha}u, \end{cases} \quad (4.5)$$

Para acharmos o polinômio característico associado, faremos de forma análoga a anterior.

A matriz do sistema (4.5) é tal que,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\alpha}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

e o seu polinômio característico é dado por

$$p(\gamma) = \det \left[\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\alpha}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \right] = \gamma^2 + ab.$$

Assim, $\gamma^2 + ab = 0 \Rightarrow \gamma^2 = -ab \Rightarrow \gamma = \pm i\sqrt{ab}$.

E usando a regra da cadeia em (4.6) podemos escrever:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \Rightarrow \frac{a\beta}{\alpha} \mu \cdot \frac{1}{-\frac{\alpha b}{\beta}v} = \frac{dv}{du} \Rightarrow \frac{a\beta}{\alpha} \mu \cdot d\mu = -\frac{\alpha b}{\beta} v dv.$$

Integrando, temos,

$$\int \frac{a\beta}{\alpha} \mu \cdot d\mu = \int -\frac{\alpha b}{\beta} v dv + c \Rightarrow \frac{a\beta}{\alpha} \cdot \frac{u^2}{2} = -\frac{\alpha b}{\beta} \frac{v^2}{2} + c$$

multiplicando toda a equação acima por 2, vem

$$\left(\frac{a\beta}{\alpha} \frac{u^2}{2} \right) 2 = \left(-\frac{\alpha b}{\beta} \frac{v^2}{2} \right) 2 + 2c$$

sendo $k = 2c$, obtemos,

$$\frac{a\beta}{\alpha}\mu^2 + \frac{\alpha b}{\beta}v^2 = k \quad (4.6)$$

Agora, dividindo toda a equação por k fica,

$$\frac{a\beta}{\alpha k}\mu^2 + \frac{\alpha b}{\beta k}v^2 = 1, \quad (4.7)$$

onde k é uma constante arbitrária. Então, isso nos diz que as curvas-soluções (4.8) no plano uv de fase, são na verdade elipses concêntricas para $k > 0$.

Como γ_1 e γ_2 são complexos conjugados puros, a natureza para o sistema não linear é indeterminada, pois pode ser um centro ou uma espiral. Para resolvermos isso usamos a regra da cadeia para obtermos a seguinte equação:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - \alpha y)}{y(-b + \beta x)} \quad (4.8)$$

que é separável. Resolvendo a equação (4.8), temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{(a - \alpha y)}{y} dy &= \int \frac{(-b + \beta x)}{x} dx + c \Rightarrow \int \left(\frac{a}{y} - \alpha \right) dy = \\ &\int \left(\frac{-b}{x} + \beta \right) dx + c \Rightarrow a \ln y - \alpha y = -b \ln x + \beta x + k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Onde $k > 0$ é uma variável constante de integração.

As órbitas da equação (4.9) podem ser traçadas pelo método gráfico de volterra:

Considerando a variável auxiliar z como função de x e y , temos, $z = a \ln y - \alpha y$ e $z = -b \ln x + \beta x + c$.

Podemos traçar seus gráficos nos quadrantes (y, z) e (x, z) da figura 4.1 com o

$$\frac{dz}{dy} = (a \ln y - \alpha y)' = a \frac{1}{y} - \alpha = \frac{a}{y} - \alpha$$

Logo, vemos que a função é crescente para $y < \frac{a}{\alpha}$ e decrescente para $y > \frac{a}{\alpha}$. Ainda,

$\frac{d^2 z}{dy^2} = \left(\frac{a}{y} - \alpha \right)' = -\frac{a}{y^2}$. Portanto, z atinge seu valor máximo em $y = \frac{a}{\alpha}$. Logo,

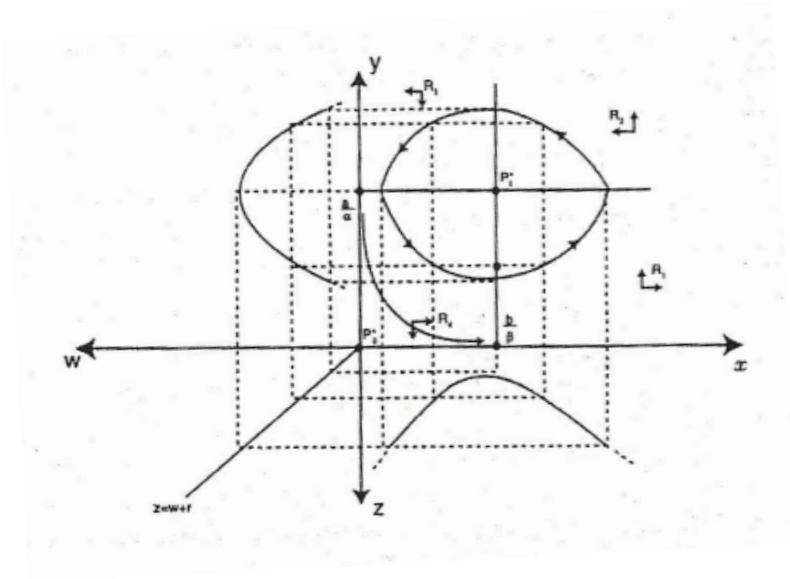


Figura 4.1: Construção da trajetória no plano de fase.

$$z_M = a \left(\ln \frac{a}{\alpha} - 1 \right).$$

Da mesma forma,

$$\frac{dz}{dx} = (-b \ln x + bx)' = -b \cdot \frac{1}{x} + \beta = -\frac{b}{x} + \beta,$$

Assim, a função é crescente para $x > \frac{b}{\beta}$, e decrescente para $x < \frac{b}{\beta}$. Ainda,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{-b}{x} + \beta \right)' = \frac{b}{x^2}.$$

Desta forma, z atinge seu valor mínimo em $x = \frac{b}{\beta}$,

$$z_m = \left(-b \ln \frac{b}{\beta} + b \right) = b \left(1 - \ln \frac{b}{\beta} \right).$$

Observação 2. 1. $\frac{dz}{dy} = 0$ se, somente se, $y = \frac{a}{\alpha}$,

2. $\frac{dz}{dx} = 0$ se, somente se, $x = \frac{b}{\beta}$.

Dessa forma, a população de x varia entre um valor mínimo x_1 e um máximo x_2 .

O método gráfico de *Volterra* consiste em esboçar as partes positivas das funções auxiliares z , separadamente em cada quadrante de um plano, e suas interrelações fornecem os pontos da trajetória do primeiro quadrante xy . Assim, como visto na Figura 4.1 a curva obtida é

fechada no plano $xy(x > 0$ e $y > 0)$. Nota-se que as soluções do sistema (4.1) são periódicas. A solução analítica do sistema (4.1) são elipses na forma paramétrica e t é o parâmetro. Vamos derivar os dois membros da primeira equação do sistema (4.5) em relação a t . Temos

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{b\alpha}{\beta} \cdot \frac{dv}{dt}. \text{ Como } \frac{dv}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha}u, \text{ substituindo na equação acima temos,}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{b\alpha}{\beta} \cdot \frac{a\beta}{\alpha}u = -b \cdot a \cdot u$$

ou

$$u'' + abu = 0 \quad (4.10)$$

e de forma análoga, obtemos

$$v'' + abv = 0 \quad (4.11)$$

Resolvendo as equações (4.10) e (4.11) obtemos as seguintes soluções

$$\begin{cases} u(t) = k \frac{b}{\beta} \cos(\sqrt{abt} + \theta), \\ v(t) = k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \text{sen}(\sqrt{abt} + \theta), \end{cases} \quad (4.12)$$

k e θ são constantes arbitrárias a serem determinadas com as condições iniciais. E voltando à mudança de variáveis feita, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{b}{\beta} + k \frac{b}{\beta} \cos(\sqrt{abt} + \theta), \\ y(t) = \frac{a}{\alpha} + k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \text{sen}(\sqrt{abt} + \theta). \end{cases} \quad (4.13)$$

Dessa forma, como $\cos(\sqrt{abt} + \theta)$ é uma função periódica de \sqrt{abt} de período 2π , vemos que o período de oscilação é $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$, independente das condições iniciais.

O tamanho das populações de presas e predadores variam periodicamente.

Voltando a analisar o sistema (4.1) temos que

- $\frac{dx}{dt} > 0$, quando $y < \frac{a}{\alpha}$

(significa que com o nível baixo de predadores o número de presas aumenta).

- $\frac{dx}{dt} < 0$, quando $y > \frac{a}{\alpha}$

(o número de presas diminui quando há uma grande quantidade de predadores).

- $\frac{dy}{dt} > 0$, se $x > \frac{b}{\beta}$

(Se há uma grande quantidade de alimentos, o crescimento dos predadores é favorecido).

- $\frac{dy}{dt} < 0$, se $x < \frac{b}{\beta}$

(Com a escassez de alimento a quantidade de predadores diminui).

Podemos escrever o sistema (4.1) da seguinte forma,

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = a - \alpha y, \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -bt + \beta x. \end{cases} \quad (4.14)$$

Seja T o período da solução em questão e integrando as duas equações do sistema (4.14) de 0 a T , obtemos

$$\begin{cases} \int_0^T \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_0^T (a - \alpha y) dt \\ \int_0^T \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^T (-b - \beta x) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x(T) - \ln x(0) = \int_0^T (a - \alpha y) dt, \\ \ln y(T) - \ln y(0) = \int_0^T (-b + \beta x) dt. \end{cases} \quad (4.15)$$

Mas, $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$, uma vez que T é o período, assim

$$Ta - \alpha \int_0^T y dt = 0 \text{ ou } \frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{\alpha}$$

e

$$-bT + \beta \int_0^T x dt = 0 \text{ ou } \frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{b}{\beta}.$$

Então, os valores médios de $x(t)$ e $y(t)$ num intervalo $0 \leq t \leq T$ são,

$$\frac{1}{T} \int_0^T x dt \text{ e } \frac{1}{T} \int_0^T y dt,$$

respectivamente.

Com isso, observamos que os valores médios de $x(t)$ e $y(t)$ independem de seus estados iniciais e são exatamente iguais a seus pontos estáveis.

A conclusão deste modelo é que em um ecossistema, para diminuirmos a quantidade de presas não é aconselhável aumentarmos a quantidade de predadores, pois isso só aumentaria a magnitude da oscilação do ciclo.

4.2 Controle Biológico da Broca Cana-de-Açúcar

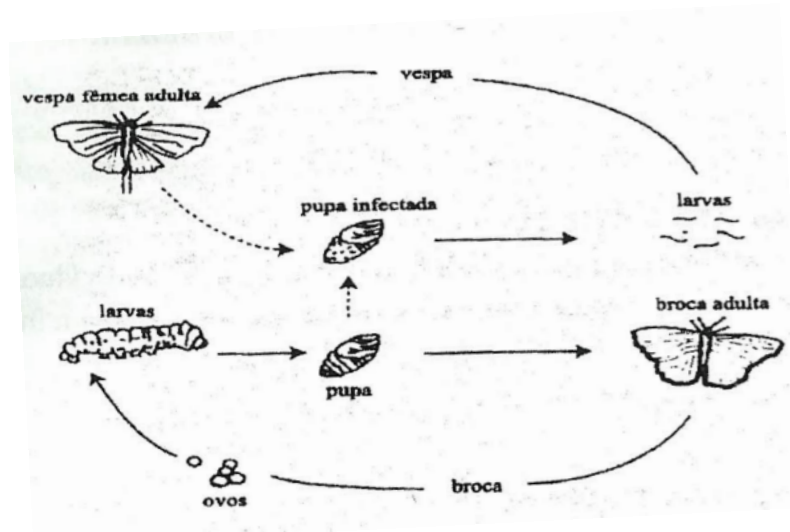


Figura 4.2: Esquema de uma interação hospedeiro-parasitóide.

A *Diatraea saccharalis*, conhecida como broca, é uma praga que ataca a cana-de-açúcar, e é considerada de difícil controle, pois passa a maior parte de sua vida no interior da cana (mais especificamente dentro do colmo), o que torna difícil seu combate por meio de agrotóxicos. O controle biológico tem se mostrado muito eficiente no combate à praga. Usa-se, propositalmente outras espécies de insetos predadores, que são espalhados no canavial e então o parasitismo se inicia por uma picada da vespa, ocasião em que um lote de ovos é depositado no corpo da lagarta (broca). Desses ovos eclodem as larvas que se desenvolvem às custas dos tecidos da lagarta hospedeira, pondo limite ao ciclo da broca.

Algumas informações importantes à saber

Após o acasalamento, a broca adulta faz as posturas na parte dorsal das folhas da cana-de-açúcar que dependendo de condições climáticas os ovos eclodem de 4 a 9 dias depois. Daí,

nascem as larvas que irão penetrar e danificar a planta. Depois de passar por metamorfose, saem do colmo da cana-de açúcar em forma de mariposas para completar seu ciclo de vida que tem duração de 53 a 63 dias. Em estados como o de São Paulo, podem ocorrer cerca de 4 ou 5 gerações por ano, dependendo das condições favoráveis do clima. Aqui no Brasil, estima-se uma perda de 4,1 % de sacarose que está associada à taxa de 22,2 % de infestação da broca. O controle biológico visa interromper o ciclo evolutivo, a médio e longo prazo, em qualquer fase da *Diatraea saccharalis* (broca). Existem vários predadores da broca. Sendo o himenóptero *Apanteles flavipes*, conhecido como “Vespa Indiana”, que tem origens no Paquistão o mais vantajoso por ter maior índice de multiplicação, por ter somente a *Diatraea* como hospedeira e por ser relativamente fácil sua produção em laboratório. Por estas vantagens, consideraremos a vespa Indiana, como o único predador da broca. O parasitismo se dá da seguinte forma: A fêmea da vespa adulta, penetra no colmo da cana-de-açúcar pelo orifício feito pela broca, onde encontra a lagarta oriúnda da lava da *Diatraea saccharalis* e através de uma picada deposita em torno de 50 ovos no interior do corpo da lagarta hospedeira, permanecendo e alimentando-se de seus tecidos de reserva por cerca de 10 a 12 dias. Ao final deste período as larvas do himenóptero *Apanteles flavipes*, saem do corpo da lagarta, que exaurida morre, e formam casulos (pupas), ficando neste estado de 3 a 5 dias quando tornam-se vespas adultas, completando então o seu ciclo vital. Uma observação, é que cada vespa dá origem a 50 outras, mantendo uma relação de 1 para 50.

Com estas simplificações faremos uma apresentação de um modelo mais didático que prático, que foi desenvolvido como dito antes pelos alunos do curso de especialização de professores de matemática na UNIMEP, onde a ênfase maior está na obtenção dos parâmetros e no estudo de sistemas de equações diferenciais e de diferenças.

4.3 Modelo do Tipo Lotka-Volterra: Vespa x Broca

Nesta seção descreveremos o modelo de Lotka-Volterra. Como feito em [1] e [2], sejam:

- $B = B(t)$: a população de brocas num instante t , numa determinada área limitada;
- $V = V(t)$ a população de vespas que convive com as brocas na mesma área do canavial num instante t ;

Hipóteses

1. A quantidade de alimentos (cana-de-açúcar) para a broca (presa) é muito grande, assim, não há uma auto-regulação de seu crescimento específico.
2. A vespa (predador) tem como alimentação básica a broca e na ausência desta a vespa morre.
3. A broca é predada pela vespa.

Mostra-se como feito em (Bassanesi, 2006) com essas informações o modelo presa-predador discreto:

$$\begin{cases} B_{t+1} - B_t = mB_t - nB_tV_t, \\ V_{t+1} - V_t = oB_tV_t - pV_t, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde m, n, o e p são constantes positivas.

Também mostra-se (ver [2], p. 376) que o modelo análogo contínuo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = aB - bBV, \\ \frac{dV}{dt} = \beta BV - \alpha V \end{cases} \quad (4.17)$$

com a, b, β, α sendo constantes positivas.

Vamos analisar o modelo contínuo.

A determinação dos coeficientes está condicionada à unidade de tempo (dias). Vamos considerar que o período para o plantio e colheita da cana seja de 1 ano.

Sabemos que o ciclo da broca varia entre 53 a 63 dias (desprezando a última geração, considerando apenas 4 gerações num ano) e o ciclo das vespas é de 13 a 17 dias.

Admitido que os crescimentos e as interações sejam funções contínuas do tempo.

1. Coeficiente de crescimento interespecífico da broca: \mathbf{a}

$$\text{Temos: } T_1 = \frac{53 + 63}{2} = 58 \text{ dias}$$

T_1 é o período médio de um ciclo de vida da broca.

Seja $R = \frac{5}{1} = 5$ (razão de crescimento. Cada adulto da origem a 5 indivíduos adultos).

Na ausência das vespas, a população de brocas aumenta sem inibição, assim:

$$\frac{dB}{dT_1} = aB \Rightarrow \int \frac{dB}{B} = \int a dT_1 + c \Rightarrow \ln |B| = aT_1 + c \quad (4.18)$$

Aplicando a exponencial, temos

$$e^{\ln |B|} = e^{aT_1} \cdot e^c \Rightarrow, \text{fazendo } e^c = C, \text{ temos } |B(T_1)| = Ce^{aT_1}$$

onde C é uma constante arbitrária não nula.

E para um dado instante inicial $T_1 = 0$.

$B = Ce^{a \cdot 0} \Rightarrow B = C$ (B_0 inicial) assim, $B(T_1) = B_0 C^{aT_1}$ daí, dado a razão de crescimento R e a quantidade inicial B_0 , teremos

$RB_0 = B_0 e^{aT_1} \Rightarrow e^{aT_1} = R$, aplicando o \ln temos,

$$\ln e^{aT_1} = \ln R \Rightarrow aT_1 \ln e = \ln R \Rightarrow a = \frac{\ln R}{T_1} \quad (4.19)$$

Portanto, $a = \frac{\ln 5}{58} = 0,02774893$.

2. Coeficiente de ataque: **b**

Esse coeficiente é calculado através da taxa de eficiência do controle da broca pela vespa.

Como só as fêmeas das vespas causam danos as brocas, consideramos assim uma taxa de controle de 50%, ou seja, $B(T_2) = 0,5B_0$, sendo $T_2 = 15$ dias o período médio do ciclo da vespa.

Recomenda-se quando forem encontradas 10 brocas (10 furos na cana), por uma pessoa em 1 hora, em 1 hectare a liberação de 500 vespas.

Da equação da vespas de (4.17), temos $\frac{dB}{dt} = aB - 5000bB = B(a - 5000b) \Rightarrow \frac{dB}{B} = (a - 5000b)dt$ Integrando, vem

$$\int \frac{dB}{B} = \int (a - 5000b)dt + C \Rightarrow \ln B = (a - 5000b)t + C \quad (4.20)$$

aplicando a exponencial, vem $e^{\ln B} = e^{(a-5000b)t+C} \Rightarrow B = e^{(a-5000b)t} \cdot e^C \Rightarrow B(t) = C_2 e^{(a-5000b)t}$, sabendo que para um certo $t_0 = 0$ temos $B_0 = C_2$. Assim, $B(t) = B_0 e^{(a-5000b)t}$, considerando $t = T_2$ e aplicando o \ln , temos

$$\ln\left(\frac{B(T_2)}{B_0}\right) = \ln e^{(a-5000b)T_2} \Rightarrow \ln\left(\frac{BT_2}{B_0}\right) = (a-5000b)T_2 \quad (4.21)$$

Mas $T_2 = 15$, $a = 0,02774893$ e $B(T_2) = 0,5B_0$.

Assim,

$$\ln\left(\frac{0,5B_0}{B_0}\right) = 15(a-5000b) \Rightarrow \ln 0,5 = 15 \cdot 0,02774893 - 15 \cdot 5000b \Rightarrow \ln 0,5 = 0,41623395 - 75000b \Rightarrow b = 0,00001479.$$

3. Coeficiente de mortalidade das vespas (na ausência de alimento): α

As vespas duram de 48 a 72 horas, após a postura dos ovos, então

$$T_3 = \frac{48 + 72}{2} = 60hs = 2,5 \text{ dias.}$$

Somente a fêmea da vespa busca a broca para efetuar a postura de ovos.

Das informações acima dada, consideramos que a população das vespas se reduza a 5% em cerca de 60 horas.

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \int -\alpha dt + C \Rightarrow \ln |V| = -\alpha t.$$

Aplicando a exponencial vem que

$$e^{\ln |V|} = e^{-\alpha t} \cdot e^C \Rightarrow V = Ce^{-\alpha t} \Rightarrow V = V_0 e^{-\alpha t},$$

como admitimos que a população das vespas se reduz a 5% em 2,5 dias, então $0,05V_0$, e seja $T_3 = t$, temos

$$0,05V_0 = V_0 e^{-2,5\alpha} \Rightarrow \frac{0,05V_0}{V_0} = e^{-2,5\alpha}.$$

Agora aplicando o ln, temos

$$\ln\left(\frac{0,05V_0}{V_0}\right) = \ln e^{-2,5\alpha} \Rightarrow \ln 0,05 = -2,5\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{\ln 0,05}{2,5} = 1,198293$$

4. Taxa de crescimento das vespas: β

Este coeficiente β é a taxa de natalidade das vespas que depende da quantidade de brocas durante a postura.

Onde $B_0 \simeq 2000$ brocas (é um valor inicial estimado sobre uma projeção estatística por hectare pesquisado).

E da equação das vespas do sistema (4.17), temos

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V + \beta B_0 V = -\alpha V + 2000\beta V \Rightarrow \frac{dV}{V} = (-\alpha + 2000\beta)dt$$

Integrando, temos

$$\int \frac{dV}{V} = \int (-\alpha + 2000\beta)dt + C \Rightarrow \ln |V| = -\alpha + 2000\beta t + C.$$

Agora aplicando a exponencial, vem

$$e^{\ln |V| = e^{(-\alpha + 2000\beta)t}} \cdot e^C \Rightarrow V(t) = V_0 e^{(-\alpha + 2000\beta)t}.$$

Como conhecemos os valores de $V_0 = 5000$, $\alpha = 1,198293$, $t = T_2 = 15$ e $V(T_2) = 15.5000$, obtemos

$$\ln \left(\frac{V(T_2)}{V_0} \right) = (-\alpha + 2000\beta)15 \Rightarrow 30000\beta = 17,97435 - \ln 15 \Rightarrow \beta = 0,0006894.$$

4.3.1 Análise do Modelo

As trajetórias no plano de fase-BV, ou seja, o trajeto ou o percurso da solução no plano-BV, do sistema presa-predador, satisfazem à relação

$$-\alpha \ln B + \beta B = a \ln V + k,$$

onde k é a constante de integração, que para acharmos substituimos os valores conhecidos. Dados inicialmente $B_0 = 2000$ e $V_0 = 5000$. Assim, obtemos um valor para $K = -7.89167$.

O ponto de equilíbrio $P_1 = (B_1, V_1)$, do sistema são:

$$B_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1.198293}{0.00006894} \simeq 1738 \text{ brocas,}$$

e

$$V_1 = \frac{a}{b} = \frac{0.02774893}{0.00001479} \simeq 1876 \text{ vespas.}$$

Vimos que, para o modelo de Lotka-Volterra, as trajetórias são curvas fechadas no plano-BV. Vimos também que $T > 0$ é o período em que as populações de presas e predadores variam, então $B(T) = B_0$ e $V(T) = V_0$, e escreveremos o sistema (4.1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = a - bV, \\ \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\alpha + \beta B, \end{cases} \quad (4.22)$$

integrando entre 0 e T , teremos

$$\begin{cases} \ln B(T) - \ln B(0) = \int_0^T (a - bV) dt \\ \ln V(T) - \ln V(0) = \int_0^T (-\alpha + \beta B) dt \end{cases} \quad (4.23)$$

Como $B(T) = B_0$ e $V(T) = V_0$, assim

$$\alpha T = b \int_0^T V dt \text{ e } \alpha T = \beta \int_0^T B dt$$

Portanto,

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt$$

(é o valor médio da população das vespas ao longo do período T);

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T B dt$$

(é o valor médio da população das brocas ao longo do período T);

Para este modelo, se queremos diminuir a quantidade de brocas não adianta aumentarmos a quantidade de vespas, isso só mudaria a magnitude da oscilação do ciclo.

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao término desse trabalho, pudemos concluir que o teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias é um conteúdo matemático importantíssimo para a obtenção e análise de muitas propriedades da teoria das E.D.Os. Uma vez que, muitos problemas que envolvem equações diferenciais apresentam complicações para a obtenção de soluções como funções básicas na sua forma explícita. Neste sentido, o estudo trata da importância de se estudar as propriedades geométricas (teoria qualitativa) das soluções.

Abordou-se o rigor matemático do teorema, que exige a utilização de muitos outros resultados, inicialmente expostos na seção de resultados preliminares. Além disso, a pesquisa apresenta linguagem simples, onde acreditamos que isso possa facilitar uma compreensão melhor por parte do leitor interessado.

Na aplicação, foi apresentado o modelo clássico de Lotka-Volterra como feito em (basanezi, 2006) em seguida expõe-se um estudo para descrever a dinâmica população da broca (presa) e da vespa (predador) através do modelo matemático de predação de Lotka - Volterra.

Este estudo abordou um pouco sobre a teoria qualitativa das Equações Diferenciais, dando-nos assim, condições para uma melhor compreensão de suas soluções, sobre aspectos qualitativos geométricos.

Portanto, nossa expectativa é de que este trabalho venha contribuir para um melhor entendimento e relevância de um teorema fundamental das equações diferenciais e de suas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] Bassanezi, R. C., Ferreira jr. W.C - **Equações Diferenciais com Aplicações**. Ed. Habra (São Paulo), 1988.
- [2] Bassanezi, R. C. **Ensino-Apredizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia**. Rodney Carlos Bassanezi. 3.ed. - São Paulo: Contexto, 2006.
- [3] Boyce, W. E. Diprima, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Livros Técnicos e Científicos. Editora S.A., Rio de Janeiro, 7ª edição. 2002.
- [4] Domingues, H. H., **1934 - Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. Higyno H.Domingues. - São Paulo:Atual, 1982.
- [5] Doering, C. I. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Claus Ivo Doering, Artur Oscar Lopes. 3. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Coleção Matemática Universitária)
- [6] Figueiredo, D. G. de. **Equações Diferenciais Aplicadas (3ª edição)**. Djairo Guedes de Figueiredo, Aloisio Freire neves. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária)
- [7] Lipschutz, Seymour. **Topologia Geral: Resumo da Teoria**, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos; São Paulo, Mc Grau-Hill do Brasil; Brasília, INL, 1973. (Coleção Schaum)
- [8] Lima, E. L. **Espaços Métricos. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada**, 2003, 299 pp. (Projeto Euclides)
- [9] Lima, E. L. **Curso de análise vol. 2**; 11. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [10] Lima, E. L. **Curso de Análise**; v.1. 13.ed. - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011. (Projeto Euclides)

- [11] Lima, E. L. **Análise Real Volume 1. Funções de Uma Variável**; 10. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. (coleção matemática universitária)
- [12] Sotomayor, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Coleção Projeto Euclides, CNPq; Rio de Janeiro, 1979.