UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

THIAGO DOS SANTOS SILVA

CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM DOS ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES VOLTADAS PARA O ENSINO

Campina Grande – PB

Maio de 2016

THIAGO DOS SANTOS SILVA

CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM DOS ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES VOLTADAS PARA O ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em Cumprimento às exigências para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza

Campina Grande – PB

Maio de 2016

S586c Silva, Thiago dos Santos.
Conceito de função [manuscrito] : uma abordagem dos aspectos históricos e aplicações voltadas para o ensino / Thiago dos Santos Silva. - 2016.
40 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática".

1. Função. 2. Ensino de matemática. 3. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.5

THIAGO DOS SANTOS SILVA

CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ABORDAGEM DOS ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES VOLTADAS PARA O ENSINO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em Cumprimento às exigências para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 18/05/2016

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Vandenberg Lopes Vieira.

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Walber Santiago Colaço

Prof. Mr. Walber Santiago Colaço
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

DEDICATÓRIA

Ao meu Deus vivo, "porque dele, e por ele e para ele são todas as coisas" (Rm 11:36). À minha companheira, melhor amiga e meu grande amor, minha esposa, Patrícia. À minha heroína, rainha, e maior referência, minha mãe, Suenia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar ao meu Deus, por me permitir concluir esta que é uma das etapas mais importantes da minha vida.

Ao Professor, Doutor, Juarez Dantas de Souza, por toda orientação durante esse trabalho, pela paciência perante as minhas dificuldades e acima de tudo pela perseverança e disponibilidade em me ajudar. Muito obrigado, Professor!

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), pela oportunidade de realizar este curso.

Aos meus professores, que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação pessoal e intelectual. Meu eterno reconhecimento e gratidão!

À minha família, por me incentivar constantemente e acreditar sempre nos meus objetivos. Em especial as minhas tias Solange dos Santos Silva e Sônia Maria dos Santos Silva e os meus irmãos Adelma Silva Nascimento e Lucas dos Santos Batista.

À minha esposa, Patrícia Bezerra do Nascimento Silva, pelo apoio e pela disponibilidade constante em me ajudar durante toda a realização deste trabalho. Por me incentivar e estar junto a mim em todos os momentos. Por ser a grande responsável pelo meu sucesso. Muito obrigado, meu amor!

Àqueles que me deram a vida, que serão para sempre os meus maiores inspiradores e que com todo amor jamais mediram esforços para me transformar no homem que sou; Meus pais: Antonio Paulo da Silva *(in memoriam)* e Suenia dos Santos Silva. Eternamente grato a vocês... Meus heróis!

“Num dado momento, em determinado estado de avanço das ciências da Natureza, pode aprender-se a medir o que até aí era impossível.”
(Bento de Jesus Caraça)

RESUMO

O presente trabalho busca fazer uma análise do conceito de função, a partir do seu desenvolvimento ao longo da história, destacando a importância da sua compreensão como ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de outros assuntos em matemática. Para tanto, foi desenvolvida uma pesquisa bibliográfica em alguns livros e artigos referentes ao conceito de função. Nosso objetivo é oferecer um material didático que possibilite ao leitor uma reflexão sobre o processo pelo qual o conceito de função passou para ser formalizado, destacando suas aplicações e o seu aporte para outras áreas do conhecimento. O trabalho foi subdividido em cinco etapas: Contexto histórico (enfatizando sua origem nas ciências naturais e destacando as contribuições desde os povos da Antiguidade aos matemáticos do Período Moderno); Funções (trazendo definições; notações e conjuntos especiais); Representações (diagrama de flechas, tabular, analítica e gráfica); Ensino (tratando os desafios enfrentados pelos professores de matemática durante o ensino de função e trazendo sugestões para uma compreensão significativa que vão do ensino de outros conceitos a atividades); e Aplicações (abordando situações presentes no cotidiano do aluno). Esperamos que este trabalho favoreça a compreensão do conceito de função e suas interpretações: como relação entre quantidades variáveis, relação entre conjuntos e transformação.

Palavras-chave: Conceito; Função; Aplicações; Ensino.

ABSTRACT

This study aims to analyze the concept of "function" from this development throughout history, highlighting the importance of their understanding to facilitate tool for teaching and learning other subjects in mathematics. then, a literature was developed in some books and articles related to the concept of function. Our goal is to provide educational material that allows the reader to reflect on the process by which the concept of function must be formalized, especially their applications and their contribution to other areas of knowledge. The work was divided into five stages: Historical context (emphasizing its origin in the natural sciences and highlighting the contributions of ancient mathematics Modern Period); Functions (bringing definitions, notations and special sets); Representations (arrows diagram, table, graphic and analytical); Education (addressing the challenges faced by mathematics teachers in the function of teaching and bring suggestions for a meaningful understanding ranging from teach other concepts activities); and Applications (face situations present in the student's daily life). We hope that this work promotes understanding of the concept of function and their interpretations: as a relationship between variable quantities, the relationship between the series and transformation.

Keywords: Concept; Function; Applications; Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao estudar função durante o Ensino Fundamental e Médio, recordo que aprendi as condições necessárias para que determinados diagramas de flechas representassem uma função; a realizar algumas operações de modo que, dado um valor, fosse possível calcular o outro (seja x ou f(x)), e também algumas “regras” necessárias para a construção dos gráficos dessas funções. Foram esses os conhecimentos que eu havia adquirido sobre função.

Mais tarde, durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática, apresentei muitas dificuldades ao estudar disciplinas como os Cálculos (que são plenamente o estudo mais avançado de funções) e até mesmo Álgebra Linear, Estruturas Algébricas (e outras), que abordam conteúdos, tais como espaços lineares, transformações lineares, grupos, corpos, entre outros, cujos conceitos se assimilam ao conceito de função.

Posteriormente em todas as oportunidades que tive com o ensino de funções, eu trabalhava com os alunos a teoria presente nos livros didáticos, resolvia os exemplos e exercícios propostos, mas a frustração era inevitável quando sentia que faltava “algo a mais” com a certeza de que o conhecimento não havia sido consolidado por parte dos alunos que, na maioria das vezes, aprendiam a resolver questões mecanicamente sem compreender o conceito estudado, exatamente assim como a minha experiência no Ensino Básico.

Considerando a importância da compreensão do conceito de função em suas diferentes interpretações, sobretudo, como uma aplicação que relaciona grandezas variáveis, foi o que me motivou a escrever sobre o referido tema.

O estudo de função é muito relevante, haja vista, que a compreensão do seu conceito atua como uma ponte para compreensão de outros conteúdos na matemática. Salientando, que o conceito de função não se aplica apenas no campo da matemática, mas tornou-se fundamental para muitas outras áreas.

> Esse conceito tem aplicações em várias áreas do conhecimento, mas foi nas ciências naturais que teve origem, pois ele é o instrumento próprio para o estudo das leis naturais. É pelo estudo dessas leis que o homem pode dominar melhor os fenômenos naturais e defender-se ou aproveitar-se deles conforme sua necessidade. (SILVA, 1999, p. 29)

O conceito de função passou por um longo processo de evolução que levou muito tempo para ser aperfeiçoado e apesar de aparecer de forma explícita somente a partir do século XVIII, em muitas idéias anteriores o mesmo já aparecia implicitamente.

Com o surgimento das primeiras atividades humanas, o homem primitivo sentiu a necessidade de contar. Os dedos eram utilizados para indicar coleções de até cinco objetos. No entanto, com o desenvolvimento das antigas civilizações os dedos tornaram-se insuficientes, fazendo com que eles recorressem a riscos em ossos, nós em cordas, montes de pedras, etc. Boyer (2003, p. 1), afirma que "(...) o homem se valia desse procedimento como um método de correspondência, reunindo as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observações da natureza (mãos e pés)". Para os autores Sá, Souza e Silva (2003, p. 3), "quando o homem levado pela necessidade passou a associar uma pedra a cada animal visando o controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional". Foi a necessidade que levou estes povos primitivos à tentativa de solucionar novas situações de problemas envolvendo o princípio da contagem e a relação entre grandezas.

Ao longo da história os próprios matemáticos enfrentaram dificuldades e situações desafiadoras para conseguir formalizar o conceito de função, que atualmente, aplicamos em diversas áreas do conhecimento. De acordo com Lima (2009, p. 2), "os professores de matemática, nos dias atuais, também apresentam dificuldades em compreender, interpretar e atribuir significados ao conceito".

Diante desta realidade, é natural que os alunos durante o processo ensino/aprendizagem também demonstrem dificuldades em compreender o conceito de função. Tais dificuldades são evidenciadas, por exemplo, quando verificamos que os alunos associam o conceito de função à relação entre conjuntos sob determinadas condições, mas não encontram ligação com a definição de função; quando utilizam a linguagem algébrica e confundem a representação analítica de uma função com equação; ou quando analisam gráficos de funções, mas não conseguem assimilar a variação das grandezas envolvidas; ou ainda quando demonstram dificuldades com a generalização e preferem resolver determinadas situações problema através de meios aritméticos ao invés de utilizar conceito de função como ferramenta facilitadora; entre outros.

Veremos que este conceito surgiu e se desenvolveu na tentativa de mentes curiosas em compreender e explicar a realidade. A necessidade de uma ferramenta que possibilitasse encontrar métodos de investigação capaz de estudar e prever os fenômenos naturais foi o grande ponto de partida para o seu desenvolvimento.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Noções primitivas do conceito de função já eram percebidas nos registros de antigas civilizações na Antiguidade. Sejam através da contagem, implicando uma correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequência de números naturais; nos registros sobre lunações (espaços entre duas luas novas consecutivas) que representavam a relação entre as fases da Lua e o período de tempo solar através de tabelas que estabeleciam uma correspondência entre valores; ou mesmo na resolução dos problemas da época que envolvia a relação funcional entre duas grandezas, etc., entendemos que o conceito de função já aparecia, mesmo que de forma implícita.

Foram os Babilônios que por volta de 2000 a.C. construíram tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, que podemos entender como tabelas de funções já que estabeleciam uma relação biunívoca entre duas grandezas (BIANCHINI, 2011).

Outro povo que se destacou na Antiguidade pelas suas contribuições, sobretudo no campo da matemática, foram os Egípcios. Registros antigos dessa civilização destacavam problemas do cotidiano que envolvia o cálculo de áreas de terras, volumes de grãos entre outros. Medeiros, A. e Medeiros, C., (2004) *apud* Fonseca, Santos e Nunes (2013, p. 5) afirmam que “muitos desses problemas eram resolvidos por uma equação do 1º grau e o método utilizado pelos egípcios para esse tipo de resolução ficou conhecido como Método da Falsa Posição” e complementam, “(...) percebemos através desse tipo de resolução que os egípcios já possuíam uma ideia da relação funcional entre duas grandezas”.

> Na Grécia Clássica, as explicações para os fenômenos naturais eram baseadas sobretudo em mitos. A partir da fundação da primeira escola filosófica grega por Tales de Mileto, por volta de 600 a.C os filósofos/cientistas procuraram dar explicações mais racionais para os eventos que ocorriam no mundo que os cercava. Desse modo, uma pedra ao ser largada cai, não por ser esta a vontade dos deuses, mas porque possuem uma qualidade chamada peso, que atrai os corpos para o centro da terra. Fenômenos como este, segundo Platão (427-347 a.C.), deveriam ser estudados pela matemática. (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 66)

A Física qualitativa de Aristóteles (384-322 a. C.) foi o modelo que influenciou por muito tempo a evolução da ciência sendo, inclusive, adotada como modelo padrão para a filosofia na Idade Média.

Foi neste período que o bispo francês Nicole d´Oresme (1323-1382), em seu estudo sobre o movimento, procurou representar geometricamente a variação da velocidade que segundo (SEARA DA CIÊNCIA, 2012) era compreendida na época como intensidade da qualidade de movimento.

Para tal, marcou sobre uma linha horizontal, como mostra a Figura 1, pontos que representavam instante de tempo (ou *longitude*) e, para cada um desses instantes, levantava uma perpendicular a essa mesma linha, cujo comprimento (ou *latitude*) significava a velocidade naquele instante.

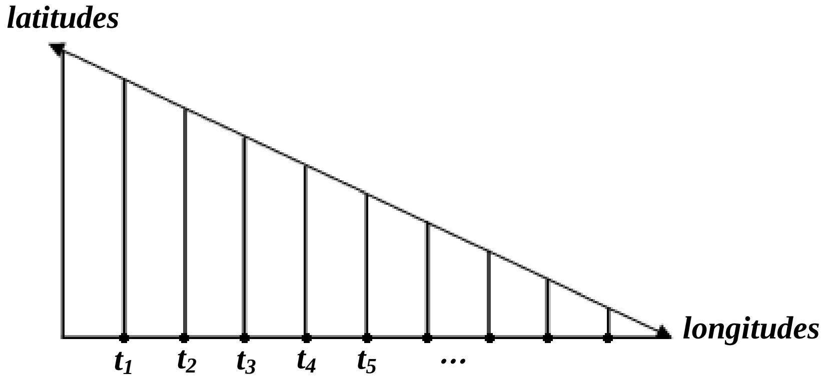

Figura 1 – Gráfico intuitivo da velocidade em função do tempo.

Este gráfico já trazia a clara noção do que posteriormente viria a se tratar da representação de uma função afim ou polinomial do 1° grau.

Em (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 5), os autores afirmam que “numa das obras de Oresme, continha uma extensão da idéia de sua ‘latitude de formas’ para três dimensões e até uma insinuação para quatro dimensões (...) porém não se valia de ferramentas suficientes para conclusões precisas e tal fraqueza teve influência durante toda a Idade Média”.

Foi através do italiano Galileu Galilei (1564-1642) que surgiu o interesse em explicar, de forma quantitativa, os fenômenos naturais que ocorriam no mundo. Isto deu um avanço considerável na ciência, uma vez que, confrontava com a física qualitativa de Aristóteles. Segundo Mendes (1994), o principal interesse de Galileu era entender como os fenômenos ocorriam, com o intuito de descrever as mudanças da natureza.

Apesar de Galileu não ter utilizado formalmente a palavra “função” ele conseguiu demonstrar que dois corpos ao serem abandonados de uma mesma altura, desprezada a força de resistência do ar, chegam ao solo no mesmo instante, ou seja, o tempo desta queda livre seria igual para os dois corpos, o que insinua o conceito de função. Foi o estudo do movimento que originou o conceito de uma função ou de uma relação entre variáveis (MENDES, 1994).

Durante os séculos XVI e XVII, matemáticos franceses deram importantes contribuições para o desenvolvimento do conceito de função. De acordo com Botelho e Rezende, (2007, p. 68) "para estabelecer o conceito de função – como relação de grandezas que variam – foi necessária a definição do conceito de variável, o que se deu, inicialmente, a partir da simbolização da álgebra".

François Viéte (1540-1603) colaborou com o avanço da álgebra que até então predominava a desenvolvida na Grécia Antiga por Diofante. Conforme afirma Mendes (1994) foi Viéte quem fez a distinção entre aritmética e álgebra, passando a analisar os problemas utilizando métodos mais gerais.

René Descartes (1596-1650) procurou solucionar problemas geométricos através de relações algébricas, o levando a criar um sistema de coordenadas que utilizamos principalmente, na construção de gráficos de funções até os dias atuais. Posteriormente ele chegou a utilizar as primeiras e últimas letras do alfabeto, para indicar, nessa ordem, quantidades conhecidas e desconhecidas. Baumgart (1992), *apud* Sá, Souza e Silva (2003, p. 5) cita: "Descartes chegou a definir função como qualquer potência de x, como exemplo: x^2, x^3, x^4, ..., x^n".

Pierre de Fermat (1601-1665), assim como Descartes, ao desenvolverem a Geometria Analítica, estavam contribuindo diretamente para a construção do conceito de função. Isto porque ele passou a relacionar as duas variáveis que se faziam presentes nas equações do seu estudo de curvas. Segundo Botelho e Rezende (2007) o conjunto formado por números e variáveis, que atualmente entendemos ser a expressão algébrica ou forma analítica de uma determinada função, era para Descartes e Fermat, simplesmente uma curva.

De acordo com Courant (2000) *apud* Souza (2001), não foram o inglês Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que, sozinhos, criaram o Cálculo Diferencial e Integral, entretanto, juntamente com outros matemáticos da época, desempenharam um papel decisivo nesta área do conhecimento.

Enquanto Newton desenvolveu as séries infinitas ao dedicar os seus estudos físicos em Mecânica, sendo assim, pioneiro a utilizar o termo "variável independente", Leibniz, usou a palavra "função" pela primeira vez em sua história, apesar de seu sentido ser voltado dentro do contexto geométrico ao se referir as quantidades que variavam numa determinada curva (MENDES, 1994).

Mais tarde, em 1822, outro matemático francês, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), transformou em função o objeto fundamental de estudo do Cálculo Diferencial e Integral, que até então eram as variáveis. De acordo com Silva (1999, p. 30) “a grande contribuição de Cauchy foi o de fundamentar os conceitos básicos do Cálculo nos conceitos de função e limite, e transformar todo o cálculo diferencial e integral de variáveis em cálculo diferencial e integral de funções”.

Posteriormente, o suíço Jean Bernoulli (1667-1748) experimentou diversas notações para uma função de x, sendo fx a mais próxima da que conhecemos nos dias atuais. Conforme Silva (1999) Bernoulli identificava funções como expressões analíticas que envolviam apenas uma variável e não admitia que uma mesma função pudesse ser representada por duas expressões analíticas distintas. Para ele funções eram expressões analíticas tais como $3x - 2$, $x^3 + x^2$, sen x, etc.

Outro suíço, Leonhard Euler (1707-1783), foi o grande responsável pela notação do símbolo f(x) para designar uma função que depende da variável x tornando-o, mais apropriado para representar esse conceito. Ele também diferenciou os conceitos de funções contínuas e descontínuas.

De acordo com Sá, Souza e Silva (2003), nesta época surgiu uma significativa reformulação acerca do significado do conceito de função através do *Problema da Corda Vibrante* que tinha por objetivo determinar a função que iria reger o formato de uma corda elástica, com dois pontos denominados: inicial e final fixos num determinado tempo t, como se ilustra na Figura 2.

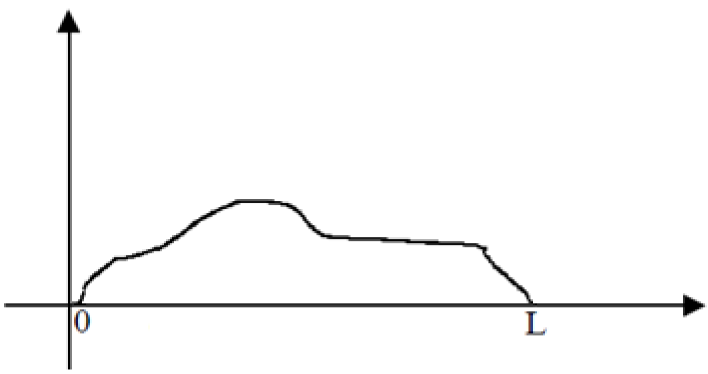

Figura 2 – Problema da Corda Vibrante.

Muitos outros matemáticos foram surgindo e deixando suas contribuições para a construção do conceito moderno de função, sendo que, no século XIX, o matemático russo Georg Cantor (1845-1918) desenvolveu a Teoria dos Conjuntos.

> Por volta de 1870, quando estudava o problema da representação das funções reais por meio de séries trigonométricas, sua atenção se voltou para uma questão com a qual seu espírito tinha uma afinidade natural muito grande: a natureza do infinito. Esse foi o ponto de partida da criação da Teoria dos Conjuntos. (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 5)

O conceito de conjunto se tornara um dos mais importantes da matemática e passou a servir inteiramente como base para o desenvolvimento de vários campos da matemática, tais como: probabilidade, análise combinatória, teoria dos números, álgebra linear, entre tantos outros. Assim como o ponto, a reta e o plano na Geometria Euclidiana são aceitos sem a necessidade de defini-los, na teoria dos conjuntos o próprio conjunto é aceito sem definição, caracterizando-o também como conceito primitivo.

Conforme o conceito de função foi evoluindo ao longo dos séculos, diversos matemáticos procuraram definições utilizando basicamente três idéias: A relação entre quantidades variáveis, a relação entre conjuntos e a transformação, como citamos abaixo.

Em 1797, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), definiu função da seguinte forma:

> Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. [...] Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes da variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada. (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 71)

As definições de funções apresentadas por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em 1821e J. P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) em 1837 foram respectivamente:

> Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 11)

"Se uma variável y está relacionada com uma variável **x** de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a **x**, existe uma regra segundo a qual um valor único de **y** fica determinado, então diz-se que **y** é função da variável independente **x**." (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 11)

Para Rüthing (1984) *apud* Botelho e Rezende (2007, p. 73), George Boole (1815-1864), foi um dos que interpretou o conceito de função como uma transformação, e a definiu da seguinte maneira:

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x). (...) Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0).

Por sua vez Mendes (1994) *apud* Fonseca, Santos e Nunes (2013, p. 12), definiu assim função:

> Sejam **E** e **F** dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y , ou relação funcional de **E** em **F**, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.

A definição atual de função, encontradas nos livros textos, é semelhante à de Domingues e Iezzi (2003, p. 81), que segue:

"Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$."

O conceito de função passou a ser considerado um dos mais importantes para a matemática e embora na literatura vários autores tenham definido função de diferentes modos, sua definição moderna é inteiramente baseada na teoria dos conjuntos, com veremos no capítulo seguinte deste trabalho.

3 FUNÇÃO

Função é uma das ferramentas mais importante da matemática com aplicações em várias áreas de conhecimento, dentre elas: Geometria, Física, Química, Biologia, etc.

3.1 DEFINIÇÃO

O conceito de função é único, entretanto a forma como os autores definem este conceito não é a mesma, porém procuram expressar a mesma ideia. Na literatura encontramos várias maneiras de definir uma função, como veremos nos exemplos a seguir:

1) “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único $y \in B$ recebe o nome de função de A em B.” (IEZZI *et al*, 2010, p.47)

2) “Dizemos que a grandeza y é função da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.” (BIANCHINI, 2011, p.181)

3) “Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único $y \in B$.” (DANTE, 2004, p. 40)

4) “Uma função é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. (...)” (LEITHOLD, 1994, p.32)

5) “Uma função f de um conjunto D em um conjunto E é uma correspondência que associa a cada elemento x de D exatamente um elemento y de E.” (SWOKOWSKI, 1994)

Na Figura 3 vemos que se f é uma aplicação de um conjunto A sobre um conjunto B, ambos não vazios, de tal forma que cada elemento de A, esteja associado a um único elemento de B então, f representa uma função de A em B.

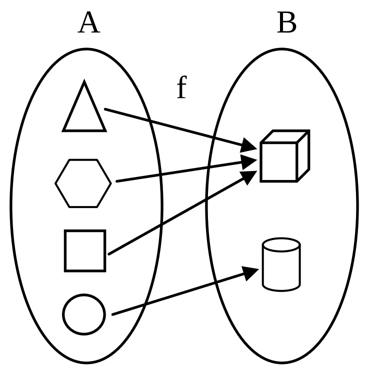

Figura 3 – f é uma aplicação de A em B.

Simbolicamente, escrevemos f: A → B, onde os elementos y ∈ B são função dos elementos x ∈ A, e se escreve: y = f(x), que quer dizer y é a imagem de x através da função f.

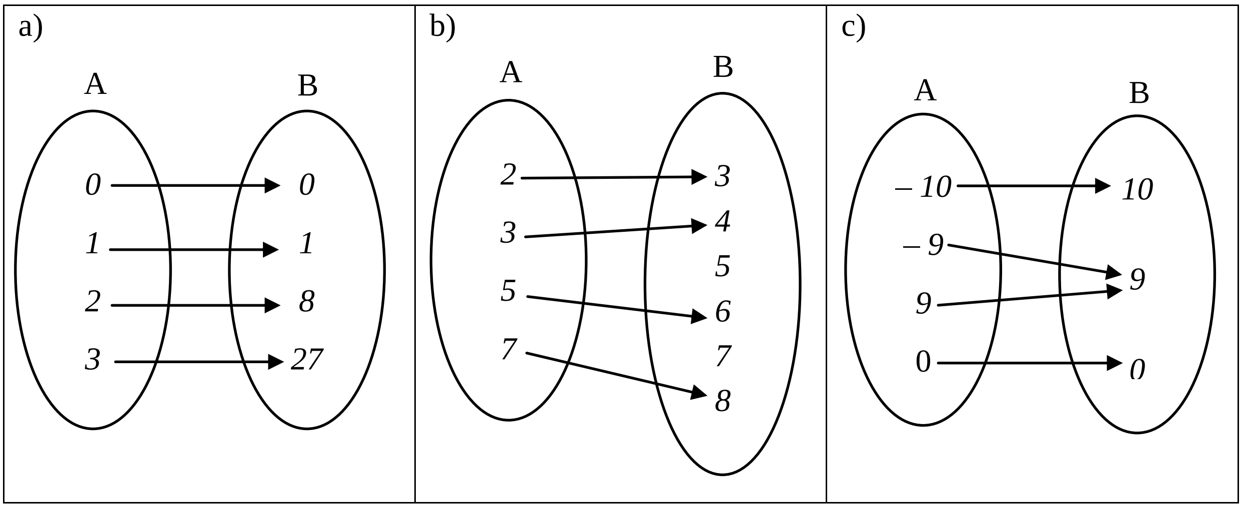

Figura 4 – Exemplos de relações que são funções.

No caso da Figura 4a, temos uma função de A em B que associa cada elemento x ∈ A ao seu cubo y ∈ B. Note que, neste exemplo, não sobra nenhum elemento no conjunto B.

Na Figura 4b, verificamos uma função da qual cada elemento x de A está correspondido ao seu sucessor inteiro y em B. Observe que “sobraram” alguns elementos de B, isto é, não têm correspondentes em A.

Na Figura 4c, observamos uma função que relaciona todo elemento x ∈ A ao seu módulo (valor absoluto) y ∈ B. Neste exemplo, podemos perceber que algum elemento y de B está relacionado a mais de um elemento x de A.

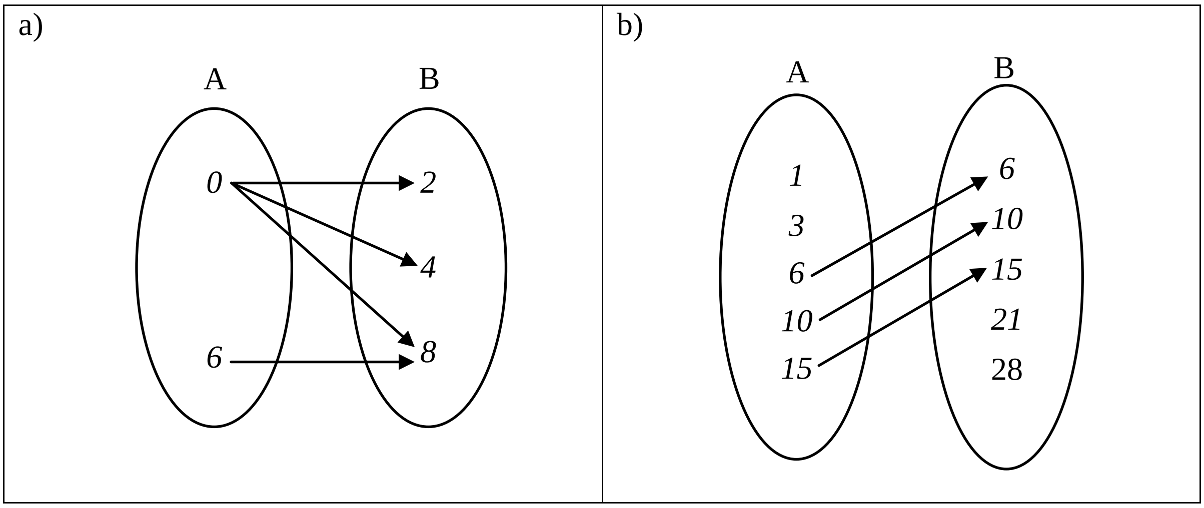

Figura 5 – Exemplos de relações que não representam funções.

Na Figura 5a, temos uma relação de A em B que associa a cada elemento x de A ao seu maior y em B. Esta relação não representa uma função, pois o elemento 0 de A não corresponde um único elemento de B.

Na Figura 5b, observamos uma relação de A em B da qual associa elementos x ∈ A ao seu igual y ∈ B. Esta relação não representa uma função, pois há elementos de A que não estão associados em B.

3.2 CONJUNTOS ESPECIAIS

De acordo com Iezzi e Murakami (2004, p. 84) “toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados”. Sendo assim, o fato de todo x ∈ A se associar a um e somente um y ∈ B através da lei de correspondência y = f(x) tal que (x, y) ∈ f, podemos dizer que dados dois conjuntos A e B, função poderá ser compreendida como qualquer subconjunto de A × B, e por essa razão, possui domínio e imagem. Neste contexto, define-se:

- **DOMÍNIO:** São todos os elementos possíveis x ∈ A, representado por D(f).
- **CONTRADOMÍNIO:** São todos elementos possíveis y ∈ B, representado por CD(f).
- **IMAGEM:** São os elementos y ∈ B, tais que y = f(x), representado por Im(f).

A Figura 6 mostra cada elemento do conjunto A que está associado a um único elemento do conjunto B. Esta relação representa uma função de A em B cujo domínio, contradomínio e imagem estão indicados a seguir.

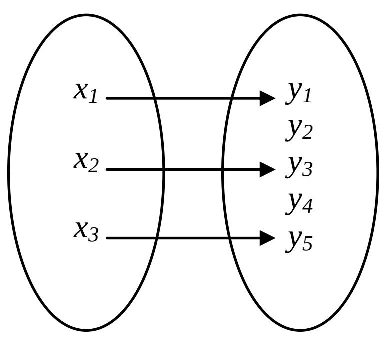

Figura 6 – Exemplo de domínio, contradomínio e imagem de uma função de A em B.

DOMÍNIO: $\{x_1, x_2, x_3\}$

CONTRADOMÍNIO: $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

IMAGEM: $\{y_1, y_3, y_5\}$

3.3 REPRESENTAÇÕES

Uma função descreve as mudanças sofridas por uma grandeza provocadas pela variação de outra. Há várias formas de representar como esta correspondência é feita. Essas representações podem ser através de diagramas de flechas, forma tabular, analíticas ou gráficas, como veremos a seguir.

3.3.1 DIAGRAMA DE FLECHAS

Uma das maneiras mais utilizadas pelos professores de matemática para explicar o conceito de função é a relação de conjuntos por meios dos diagramas de flechas. Esta representação é muito útil para facilitar a compreensão da definição de função, ou seja, a ideia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento y = f(x) de um conjunto B, segundo uma relação definida de A em B.

Neste tipo de representação de função todo elemento x ∈ A deve servir como ponto de partida de uma, e somente uma, flecha, como mostra a Figura 7.

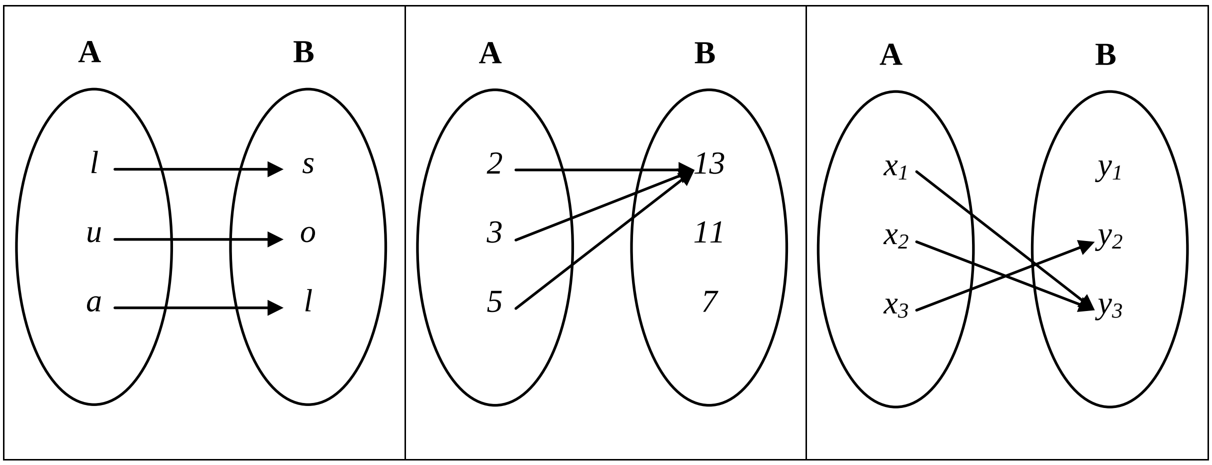

Figura 7 – Exemplos de diagramas de flechas.

3.3.2 TABULAR

Sendo uma das mais antigas formas de representar funções (mesmo que implicitamente pelos povos antigos), a forma tabular é muito utilizada nos dias atuais por profissionais autônomos, tais como taxistas, açougueiros e profissionais liberais, por exemplo, contadores, economistas que utilizam planilhas constituídas por tabelas de valores.

Esta representação de funções consiste em dispor numa tabela as grandezas que se relacionam, facilitando a visualização dos pares ordenados (x,y), como veremos nos exemplos a seguir.

1) As Tabelas 1 e 2 mostram as variações do perímetro y' e da área y'' de um quadrado, que são dadas em função das medidas x dos seus lados, através das leis de correspondência $y' = 4x$ e $y'' = x^2$, respectivamente (dados na mesma unidade de medida).

x	1	2	3	4	5	6
y'	4	8	12	16	20	24

Tabela 1 – Perímetro y' de um quadrado em função do lado x através da lei $y' = 4x$.

x	1	2	3	4	5	6
y''	1	4	9	16	25	36

Tabela 2 – Área y'' de um quadrado em função do lado x através da lei $y'' = x^2$.

2) Sejam $A = \{-27, -8, -1, 0, 1, 8\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ subconjuntos de $\mathbb{Z}$ e $y = \sqrt[3]{x}$ uma aplicação do conjunto A sobre o conjunto B, com $x \in A$ e $y \in B$. A Tabela 3 mostra a representação tabular desta função de A em B.

x	– 27	– 8	– 1	0	1	8
y	– 3	– 2	– 1	0	1	2

Tabela 3 – Raiz cúbica $y \in B$ em função do radicando $x \in A$.

3.3.3 ANALÍTICA

A forma analítica é muito utilizada para descrever os fenômenos que ocorrem não apenas na Matemática, mas na Física, Química, Biologia, Medicina, Engenharia e em diversas outras áreas do conhecimento. Consiste num modelo de equação capaz de relacionar uma variável dependente em função de uma independente.

Vejamos alguns exemplos de representações analíticas de funções:

1) Álgebra:

- $f(x) = |x|$ (*função modular* cuja aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $|x| \in \mathbb{R}$);
- $f(x) = \frac{1}{x}$ (*função recíproca* que se trata de uma aplicação f de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ na qual a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ associa o elemento $\frac{1}{x}$ em $\mathbb{R}$);
- $f(x) = [x]$ (*função máximo inteiro* que é uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$, que é o maior inteiro que não supera a x).

2) Geometria plana:

- $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ (a área A de um triângulo eqüilátero é função da medida do seu lado l);
- $A = \pi r^2$ (a área A de um círculo é função da medida do seu raio r, onde π é uma constante aproximadamente igual a 3,14);
- $l = r\sqrt{2}$ (o lado l de um quadrado inscrito numa circunferência é função do raio r da mesma).

3) Geometria espacial:

- $d = a\sqrt{3}$ (a diagonal d de um cubo em função da medida da sua aresta a);
- $V = \pi r^2 h$ (o volume V de um cilindro em função do raio r e da altura h do mesmo);
- $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ (o volume V de uma esfera em função do seu raio r, com $\pi \cong 3{,}14$).

4) Trigonometria:

- $f(x) = \text{sen } x$ (função circular de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x, associa o seno desse número);
- $f(x) = \sec x$ (aplicação de E em $\mathbb{R}$ que associa a cada número real x, a secante desse número, onde $E = \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$);
- $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$ (função circular de $\mathbb{R}$ em F, inversa de $f(x) = \text{tg } x$, que associa cada número real x, ao arco que corresponde à tangente desse número, onde F = $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$).

5) Matemática financeira:

Sendo M o montante, C capital, J juros, i taxa de juros e t o tempo de aplicação, temos:

- $M = C + J$ (o montante é dado em função da soma entre o capital e os juros);
- $J = C \cdot i \cdot t$ (no regime de juros simples, a variável J está em função das variáveis C, i e t);
- $M = C \cdot (1 + i)^t$ (o montante de uma aplicação financeira no regime de juros compostos é dado em função das variáveis C, i e t).

Assim como ocorre no campo da Matemática quando a representação analítica das funções possibilita investigar determinadas aplicações da álgebra, geometria, trigonometria, matemática financeira, etc., na Física esta forma de representar as funções é uma das grandes responsáveis por descrever e organizar os seus próprios campos de estudo, tais como mecânica, termologia, óptica, ondulatória, e outros.

6) Cinemática:

Veremos nos exemplos a seguir as funções que regem o lançamento vertical (movimento vertical) que são as mesmas do movimento uniformemente variado, sendo com o referencial vertical h e com aceleração gravitacional g, que dependendo da direção do movimento, poderá ser positiva ou negativa.

- $v = v_0 \pm gt$ (Função horária da velocidade onde v representa a velocidade, v_0 a velocidade inicial, g a gravidade e t o tempo).
- $h = h_0 + v_0t \pm \frac{1}{2}gt^2$ (Função horária da posição em função do tempo onde h representa a altura, h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial, g a gravidade e t o tempo).
- $v^2 = v_0^2 \pm 2g\Delta h$ (Equação de Torricelli onde v representa a velocidade, v_0 a velocidade inicial, g a gravidade e Δh a variação de altura).

3.3.4 GRÁFICA

A representação gráfica de uma função que pode também ser compreendida como sua forma geométrica, permite analisar o comportamento das funções possibilitando visualizar as suas principais características.

Estes gráficos são construídos no plano cartesiano consistem em dois eixos perpendiculares entre si, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas (eixo dos x) e o vertical, eixo das ordenadas (eixo dos y), tendo a finalidade de localizar pontos representados por pares ordenados na forma (x, y).

Conforme Iezzi e Murakami (2004, p. 66): “Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p,y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca”.

Assim entendemos que o gráfico cartesiano de uma função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano que satisfazem a condição y = f(x), ou seja, é o conjunto de todos os pontos do plano da forma (x, f(x)), com x variando no domínio de f.

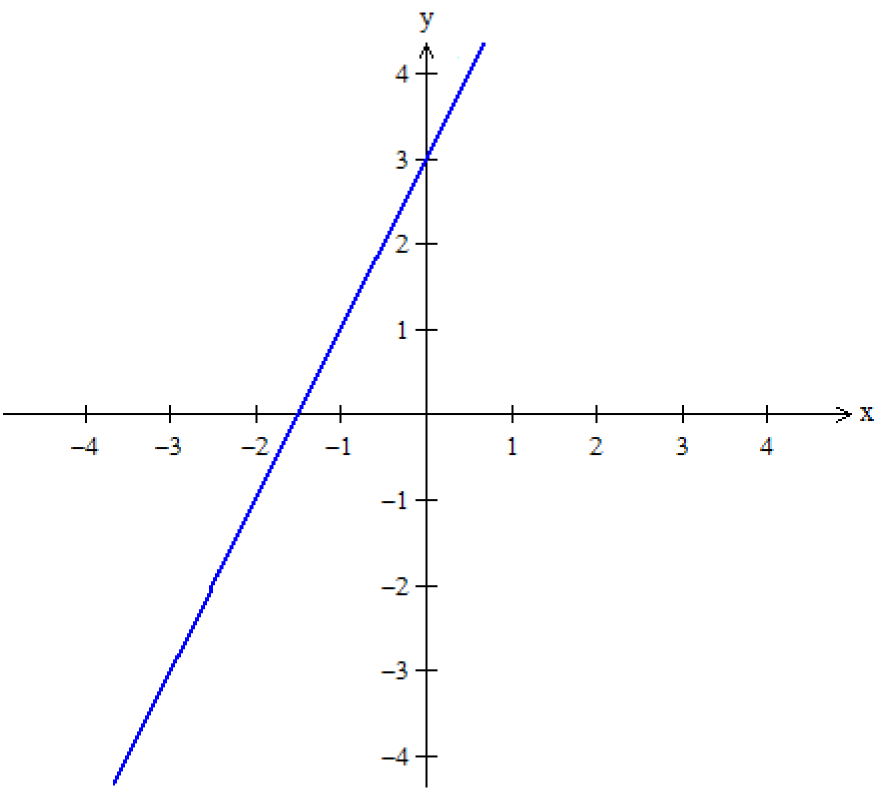

Figura 8 – Gráfico da função afim de ℝ em ℝ definida por f(x) = 2x + 3.

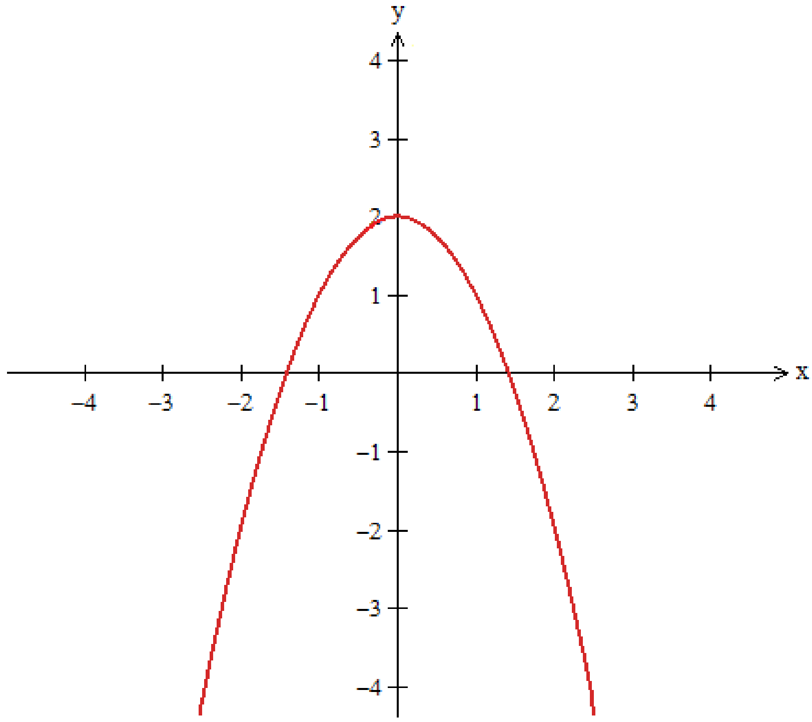

Figura 9 – Gráfico da função quadrática de ℝ em ℝ definida por $f(x) = -x^2 + 2$.

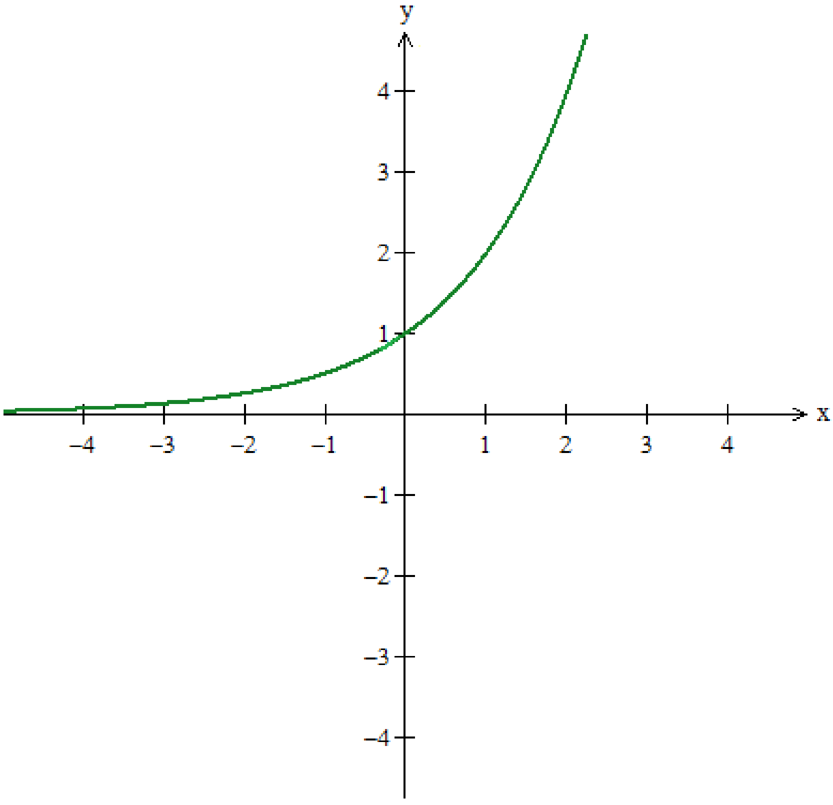

Figura 10 – Gráfico da função exponencial de ℝ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$.

Um gráfico no plano cartesiano representa uma função em x, se toda reta paralela ao eixo y, o intercepta em um único ponto. Neste caso, entendemos que a função será na variável x e não em y. Do contrário, se alguma reta paralela ao eixo y, interceptar o gráfico em mais de um ponto, então este gráfico não representa uma função em x, mas em y, como mostra o gráfico da Figura 11.

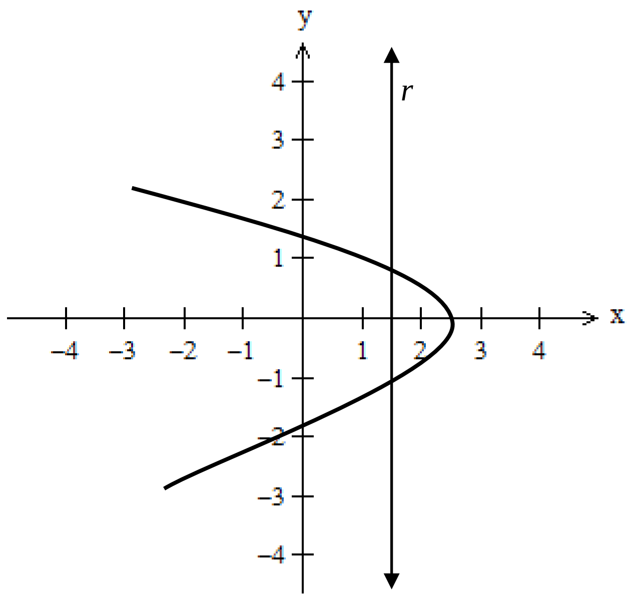

Figura 11 – Gráfico que não representa uma função na variável x.

A reta r, paralela ao eixo y, intercepta o gráfico em dois pontos, portanto, este gráfico não representa uma função em x, salientando que este gráfico representa uma função em y, uma vez que toda reta paralela ao eixo x, o interceptará em um único ponto.

4 O ENSINO DE FUNÇÕES NAS ESCOLAS

Não é nenhuma novidade afirmar que a matemática é uma das disciplinas mais temidas e ao mesmo tempo rejeitadas por boa parte dos alunos no ambiente escolar. Na maioria das vezes esses alunos tendem a ficar desinteressados pela matemática, pois para que obtenham sucesso nas atividades é necessário apenas que decorem um conjunto de passos ou regras, que na maioria das vezes lhes são impostos sem uma justificativa mais convincente sobre a importância do assunto estudado e, sobretudo, sobre a grande influência desta disciplina não somente na sua vida, mas para a ciência em geral.

De acordo com Andrade (2010, p. 3), “(...) a perda de interesse dos alunos se justifica pela frustração que encontram ao não compreenderem os conceitos com os quais a matemática lida, alguns com alto grau de abstração”.

Para que a compreensão do conceito de função seja significativa entendemos que se faz necessário o ensino de outros conceitos como por exemplos, variável, incógnita, grandeza, relação, que de modo geral servirão como base para o entendimento do conceito de função.

> (...) é necessário pensar a formação inicial do professor de matemática valorizando nela a discussão reflexiva sobre a aprendizagem e o ensino de conceitos, sobretudo aqueles que contribuirão para a formação da base do conhecimento matemático, como é o caso do conceito de função. (LIMA; 2009, p. 2)

Um dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para o ensino de Matemática durante o quarto círculo (que corresponde às séries finais do ensino fundamental) é que o aluno possa “observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis” (1998, p. 81).

A partir dos primeiros contatos dos alunos com a álgebra, quando estes começam a utilizar letras para representar números quaisquer nas expressões algébricas e determinados números desconhecidos nas equações, os alunos já estão estudando o conceito de variável e o de incógnita. Entretanto, durante a vivência pedagógica é muito comum observá-los associando os conceitos de variável e incógnita, a qualquer tipo de letra independente do contexto matemático envolvido.

Enfatizar o significado das letras enquanto “variáveis” destacando o seu sentido alterável, isto é, que podem assumir quaisquer valores de um conjunto universo definido, é muito importante para que posteriormente, estes alunos sejam capazes de diferenciar do significado de “incógnitas”, as quais associadas à unicidade do (s) valor (es) desconhecido (s) das equações.

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. (PCN, 2008, p. 118)

Trazemos uma sugestão de atividade, baseada nos PCN, para trabalhar os conceitos de variável e incógnita, numa perspectiva para a compreensão do conceito de função:

- Preço do custo e da venda de um cosmético:

Para que margem de lucro fosse significativa, o contador de uma empresa de cosméticos concluiu que o preço de uma determinada linha de produtos deveria ser vendido a varejo com um valor acrescido em 40% sobre o de custo.

Após lançar a problemática, o professor entregaria aos alunos uma tabela informando o produto com os seus preços de custo e venda (conforme a Tabela 4 a seguir) e sugeria que eles se certificassem que os cálculos fornecidos dos produtos A, B, C e D traduzem de fato os dados do problema.

Produto	**Preço de custo (C)**	**Preço de venda (V)**
A	**2,80**	2,80 + 2,80 x 0,4 = **3,92**
B	**5,00**	5,00 + 5,00 x 0,4 = **7,00**
C	**8,25**	8,25 + 8,25 x 0,4 = **11,55**
D	**10,00**	10,00 + 10,00 x 0,4 = **14,00**
E	**12,25**	
F	**19,70**	
G	**21,15**	
H	**...**	**...**
I	**...**	**...**
J	**...**	**...**

Tabela 4 – Atividade sobre variável e incógnita para o conceito de função.

Em seguida, seria solicitado que os alunos calculassem o preço de venda dos produtos E, F e G, indicados na tabela (esperando que estes chegassem respectivamente aos resultados R$ 17,15; R$ 27,58 e R$ 29,61).

Posteriormente, o professor sugeria que os alunos atribuíssem outros valores aos preços de custo dos demais produtos (H, I e J) e também calculassem os seus preços de venda sob as mesmas condições do problema.

Finalmente, seria solicitado a utilizarem as letras C e V (podendo ser quaisquer outras) para representar os preços de custo e venda, respectivamente, a fim de generalizar e verificar a relação proposta pelo problema.

O aluno poderia empregar a noção de variável para indicar genericamente o preço de venda (V) dos produtos em função do preço de custo (C), ou seja, $V = C + C \times 0{,}4$.

Para os PCN (2008) sugestões de atividades como esta, pode-se ainda propor questões do tipo: *Qual deverá ser o preço de custo de um produto que tem o preço de venda R$ 15,40?* Inicialmente é interessante solicitar aos alunos que façam estimativas, inclusive por meio da calculadora, que possibilitem responder a situações como essa. Assim os alunos irão perceber novo significado da letra C, agora uma incógnita, na expressão $C + C \times 0{,}4 = 15{,}40$.

Ainda de acordo com os PCN (2008), situação-problema como a proposta poderá favorecer o desenvolvimento de um trabalho que visa à simplificação de expressões algébricas. Para tal, os alunos devem se apropriar de alguns ajustes da notação algébrica, como eliminar o sinal de multiplicação e escrever as constantes antes das variáveis. Desse modo em vez de $C + C \times 0{,}4$, poderão escrever $C + 0{,}4C$ ou $0{,}4C + C$.

Para simplificar a expressão $C + 0{,}4C$, eles poderão utilizar a propriedade distributiva, fazendo $C + 0{,}4C = (1 + 0{,}4)C = 1{,}4C$. O aluno irá perceber que resolve mais facilmente a equação $1{,}4C = 15{,}40$, descobrindo qual é o número que multiplicado por 1,4 resulta 15,40, bastando dividir 15,40 por 1,4, resultando em 11 reais o preço de custo do referido produto.

Após realizar algum trabalho, como o sugerido acima, voltado para a compreensão de variável e incógnita, entendemos que o professor deve dedicar-se ao ensino de grandezas e relações, para que a partir dos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, eles possam compreender o conceito de função como relação entre grandezas variáveis.

Para Munhoz, Paula e Moraes (2014, p. 18) “(...) medir e contar são atividades feitas todos os dias por quase todas as pessoas, independente do grau de escolarização”. Por isso se perguntarmos aos alunos o que eles já mediram, é muito provável ouvir como respostas o comprimento da sua própria altura; que alguma vez já verificaram a temperatura de alguém; que já tenham marcado o horário em que passa o ônibus; ou que conferiram se estava correto o troco recebido pelo produto que compraram na padaria, por exemplo.

Entendemos que para a realização de um estudo científico de qualquer fenômeno faz-se necessário identificar as grandezas mensuráveis envolvidas, para que posteriormente seja possível estabelecer as relações existentes entre essas grandezas. No entanto, antes de iniciar em sala de aula algum debate nesse sentido é importante que o professor possa tomar como ponto de partida que tudo aquilo que pode ser medido ou comparado é conhecido como grandeza, para que posteriormente ele possa dar um direcionamento para as relações entre grandezas a partir de situações do próprio cotidiano dos alunos.

> O ato de medir está presente em diversas atividades do nosso cotidiano e, desde muito cedo, os alunos vivenciam situações em que é necessário medir. Ao dizer que um objeto é maior que outro, que um copo está cheio de suco, que faltam cinco dias para uma festa de aniversário ou que o cachorro de estimação pesa 6 quilos, o aluno está estabelecendo relações entre as grandezas envolvidas e fazendo o uso de expressões que informam as suas medidas. (MUNHOZ; PAULA; MORAES, 2014, p. 18).

A ideia de relação, por sua vez, está presente quando realizamos uma conexão entre grandezas pertencentes a determinados conjuntos por intermédio de uma proposição dada. Dessa forma, um exemplo que pode ser discutido em sala de aula para auxiliá-los a compreender de maneira intuitiva o conceito de relações entre grandezas, é se representarmos por H o conjunto de todos os habitantes de uma determinada cidade. Então poderemos facilmente constatar as relações: *"João é parente de Pedro"*, *"João tem o mesmo tipo sanguíneo de Pedro"*, *"João e Pedro são conterrâneos de outro município"*, sendo João e Pedro habitantes de H, ou seja, pertencentes ao conjunto H.

É muito importante trabalhar com exemplos que fazem parte do cotidiano dos alunos para que posteriormente possa fazer sentido o tratamento matemático das relações (matemáticas) entre grandezas que serão indispensáveis no estudo de funções. Por exemplo, ao considerarmos os conjuntos A e B iguais aos inteiros e reais, respectivamente, com $x \in A$ e $y \in B$, são exemplos de relações de A em B: *"x é igual a y"*, *"x é maior do que y"*, *"x e y são primos entre si"*.

Acreditamos que dessa maneira facilitará para que o aluno perceba que em ambos os casos de relação exemplificados algum elemento foi relacionado ao outro, através de uma correspondência estabelecida.

> É importante também que diante dos conceitos apresentados com rigor matemático eles sejam discutidos de forma crítica para que o aluno possa fazer suas escolhas baseadas em parâmetros que lhe tragam significado. Acredita-se que o conceito de função ao se tornar explícito pode ser ressignificado a partir de um pensamento crítico diante do conhecimento que o aluno já apresenta sobre o assunto. (LIMA, 2009, p. 3)

5 APLICAÇÕES

O conceito de função não é apenas aplicado no campo da Matemática, mas tornou-se fundamental para as ciências em geral. Assim, quando verificamos que a nota obtida pelo aluno em uma prova depende do número de questões que ele acertar, ou que o salário de um vendedor de assinaturas de revistas sofre uma variação conforme a quantidade de assinaturas que ele venda durante o mês, ou ainda, a quantidade que o contribuinte, sendo ele pessoa física ou jurídica, mediante as normas da Receita Federal é obrigado a pagar, ao emitir a sua declaração de imposto de renda, dependerá da sua renda, estamos utilizando explicitamente o conceito de função. Vejamos algumas aplicações do conceito de função:

1) Preço de uma corrida de táxi em função da quantidade de quilômetros rodados.

Em uma cidade, a corrida de táxi é cobrada da seguinte maneira: uma quantia fixa (bandeirada) de R$ 3,50 e mais R$ 1,10 por cada quilômetro rodado. A Tabela 5 mostra a relação entre a quantidade de quilômetros rodados k e o preço a pagar p(k).

Distância percorrida (km)	0	1	2	3	4	5	6
Preço a pagar (R$)	3,50	4,60	5,70	6,80	7,90	9,00	10,10

Tabela 5 – Preço a ser pago em uma corrida de táxi indicado pela expressão $p(k)\ 1{,}1k + 3{,}5$.

2) Soma dos ângulos internos de um polígono em função do número de lados.

A soma S_n (em graus) dos ângulos internos de um polígono qualquer, é dada pela lei de correspondência $S_n = (n - 2) \cdot 180°$ em que n representa o número de lados do polígono. Desse modo a soma dos ângulos internos é função do número de lados do polígono, onde $n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 3$, ou seja, $S_n = f(n) = (n - 2) \cdot 180°$.

3) Número total de clientes atendidos e quantia arrecadada ambos em função do número de clientes atendidos sem hora marcada.

Um cabeleireiro cobra R$ 15,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável x de clientes sem hora marcada. As tabelas 6 e 7 mostram as quantidades de clientes atendidos e de dinheiro arrecadado, respectivamente, em função do número de clientes que foram atendidos sem hora marcada neste salão. (DANTE, 2004 - adaptado)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	6	7	8	9	10	11

Tabela 6 – Total de clientes atendidos f(x), em função do número de clientes atendidos sem hora marcada x, ou seja $f(x) = x + 6$.

x	0	1	2	3	4	5
g(x)	90	100	110	120	130	140

Tabela 7 – Total em dinheiro arrecadado g(x), em função do número de clientes atendidos sem hora marcada x, ou seja, $g(x) = 10x + 90$.

4) Valor a pagar da conta de água em função do consumo.

No processo ensino/aprendizagem de função, o professor poderia solicitar que os alunos levassem para sala de aula uma cópia da conta de água da sua casa.

A atividade a ser trabalhada seria voltada para compreender a estrutura tarifária da empresa que cobre o serviço de abastecimento de água da cidade, isto é, entender como são feitos os cálculos que são cobrados nas contas que chegam até as suas residências, e também assimilar a relação de dependência que existe entre o preço a pagar e o consumo mensal.

Utilizaremos como exemplo, os dados pertencentes à categoria residencial "tarifa normal" da Companhia de Água e Esgotos da Paraíba (CAGEPA), obtidos no site da empresa em 28 de Abril de 2016.

O consumo mensal por cada metro cúbico (m^3) de água é calculado da seguinte forma:

CATEGORIA RESIDENCIAL – Tarifa Normal				
FAIXAS DE CONSUMO MENSAL (M³)	**ÁGUA (R$)**	**ESGOTO (R$)**	**A + E (R$)**	**ESGOTO (%)**
Tarifa mínima – Consumo até 10 m^3	32,78	26,22	59,00	80
Acima de 10 a 20	4,23	3,38		80
Acima de 20 a 30	5,58	5,03		90
Acima de 30	7,57	7,57		100

Tabela 8 – Estrutura tarifária da CAGEPA referente à tarifa normal da categoria residencial.

Ao transcrever estes dados, que também são encontrados na fatura que corresponde à conta de água, para a linguagem de função, chamando de x o consumo de água, em metros cúbicos e f(x) o preço a pagar, teremos as seguintes situações:

- Se o consumo mensal de água for de até 10 metros cúbicos, será cobrada uma taxa fixa, denominada tarifa mínima, de R$ 59,00 referente à R$ 32,78 da água adicionada a taxa de esgoto que, neste caso, é de R$ 26,22, ou seja:

$$\textbf{Se } x \leq 10\textbf{, então } f(x) = 59{,}00$$

- Se o consumo de água no período de um mês estiver entre 10 e 20 metros cúbicos inclusive, então o valor da taxa de água será de R$ 4,23 por cada metro cúbico acrescido à taxa de esgoto que corresponde a 80% do que foi consumido, ou seja, R$ 3,38. Portanto temos:

$$f(x) = 4{,}23x + 0{,}8 \cdot 4{,}23x \Rightarrow f(x) = 4{,}23x + 3{,}38x \Rightarrow f(x) = 7{,}61x$$

Logo:

Se $10 < x \leq 20$, então $f(x) = 7{,}61x$

- Se o consumo mensal estiver entre 20 e 30 metros cúbicos inclusive, então a taxa de água será de R$ 5,58 por cada metro cúbico somado com a taxa de esgoto que, para este caso, será de 90% do consumo de água, ou seja, R$ 5,03. Portanto temos:

$$f(x) = 5{,}58x + 0{,}9 \cdot 5{,}58x \Rightarrow f(x) = 5{,}58x + 5{,}03x \Rightarrow f(x) = 10{,}61x$$

Logo:

Se $20 < x \leq 30$, então $f(x) = 10{,}61x$

- Se o consumo durante o mês for superior a 30 metros cúbicos, então a taxa da água será de R$ 7,57 por cada metro cúbico consumido adicionado à taxa de esgoto que corresponde aos 100% do que foi consumido, ou seja, R$ 7,57. Portanto temos:

$$f(x) = 7{,}57x + 1 \cdot 7{,}57x \Rightarrow f(x) = 7{,}57x + 7{,}57x \Rightarrow f(x) = 15{,}14x$$

Logo:

Se $x > 30$, então $f(x) = 15{,}14x$

O valor f(x) a ser pago depende do consumo x de água, por isso entendemos que o preço a pagar é função da quantidade de água utilizada no mês.

Nesse caso de tarifa de água, tem-se:

$$f(x) = \begin{matrix} 59{,}00\,, & \text{se } x \leq 10 \\ 7{,}61x\,, & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 10{,}61x\,, & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 15{,}14x\,, & \text{se } x > 30 \end{matrix}$$

No Ensino Médio, poderemos mostrar que esta é uma função definida por várias sentenças, onde f(x) representa o valor a pagar pelo consumo de água no período de um mês e x, o número de metros cúbicos consumidos no mesmo período.

Agora vejamos alguns exemplos de diferentes consumos de água baseados nesta estrutura tarifária da CAGEPA:

1) Num apartamento reside um casal que, num determinado mês, consumiu 7,5 metros cúbicos de água. Qual deverá ser o valor cobrado na fatura deste casal?

De acordo com os dados do problema, o casal consumiu neste mês 7,5 metros cúbicos de água ($x = 7{,}5$), e deseja-se saber a quantia a ser paga por este consumo, ou seja, $f(x)$.

Como o consumo não ultrapassou os 10 metros cúbicos ($x \leq 10$), utilizaremos $f(x) = 59{,}00$.

Portanto, este casal terá que pagar a tarifa mínima que é de R$ 59,00.

2) Uma família de quatro pessoas consumiu no período de um mês 17 metros cúbicos de água. Neste caso, quanto essa família terá que pagar?

Conforme verificamos nos dados do problema, a família consumiu neste mês 17 metros cúbicos de água ($x = 17$), e deseja-se saber a quantia a ser paga por este consumo, ou seja, $f(x)$.

Como o consumo ficou entre 10 e 20 metros cúbicos ($10 < x \leq 20$), utilizaremos $f(x) = 7{,}61x$. Ou seja, $f(17) = 7{,}61 \cdot 17 \Rightarrow f(17) = 129{,}37$.

Portanto, esta família terá que pagar R$ 129,37 pelos 17 metros cúbicos de água consumidos no referido mês.

3) O dono de um pequeno estabelecimento comercial pagou no mês anterior R$ 275,86 referente à conta de água do seu estabelecimento. Desconfiando desse valor, ele procurou a sua fatura e constatou que havia utilizado, neste período, exatamente 23 metros cúbicos de água. O valor pago corresponde ao consumido?

De acordo com os dados do problema, o dono do estabelecimento consumiu neste mês 23 metros cúbicos de água ($x = 23$), e deseja saber se a quantia paga por ele que foi R$ 275,86, corresponde ao que ele consumiu.

Como o consumo ficou entre 20 e 30 metros cúbicos ($20 < x \leq 30$), utilizaremos $f(x) = 10{,}61x$. Ou seja, $f(23) = 10{,}61 \cdot 23 \Rightarrow f(23) = 244{,}03$.

Portanto o valor a pagar pelo dono desse estabelecimento por ter consumido 23 metros cúbicos de água no mês deveria ter sido R$ 244,03, cabendo o mesmo a procurar a empresa para contestar a sua fatura.

4) Os proprietários de um pensionato cujo consumo mensal de água varia entre 31 e 35 metros cúbicos por mês, verificaram a existência de alguns vazamentos de água no seu estabelecimento e logo providenciaram os devidos reparos. Por isso foi inevitável o aumento da tarifa de água daquele mês, que foi de R$ 635,88. Admitindo que não houve erros no valor cobrado da tarifa, qual foi a quantidade de metros cúbicos consumidos nesse período?

Conforme verificamos nos dados do problema, o valor pago pelos proprietários do pensionato neste mês foi de R$ 635,88, ou seja, $f(x) = 635{,}88$. Deseja-se determinar a quantidade x de metros cúbicos gastos nesse período.

Como o consumo foi acima de 30 metros cúbicos ($x > 30$), utilizaremos $f(x) = 15{,}14x$. Ou seja, $f(x) = 15{,}14x \Rightarrow 635{,}88 = 15{,}14x \Rightarrow x = \frac{635{,}88}{15{,}14} \Rightarrow x = 42$. Portanto o consumo no pensionato neste mês foi de 42 metros cúbicos, devido aos vazamentos.

Esta aplicação além de possibilitar o entendimento do conceito de função através da correspondência que existe entre consumo de água e o valor a pagar, permite que o aluno compreenda como são feitos os cálculos das tarifas da conta de água, além de proporcionar a reflexão sobre dicas de economia de água promovendo uma reflexão do consumo consciente deste bem que é indispensável à sobrevivência.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificamos que historicamente o conceito de função levou muito tempo para ser construído e formalizado, tendo assumido ao longo dos séculos, diferentes interpretações, tais como, relações entre grandezas variáveis (associadas à ideia de variação cujas aplicações estão mais presente no cotidiano dos alunos), relação entre conjuntos (que é a mais utilizada na definição moderna de função) e transformação (que se refere a uma aplicação que transforma uma grandeza em outra).

Esse conceito tornou-se o instrumento mais apropriado para o estudo das leis naturais, nas quais teve sua origem, contribuindo para desenvolvimento da matemática e de outras áreas do conhecimento.

Acreditamos que o professor de matemática durante o ensino de função, deva valorizar os conhecimentos prévios que o aluno já possui e se dedicar ao ensino de outros conceitos que servirão de base para a compreensão do conceito de função, que tanto se faz presente no cotidiano dos alunos.

Quando pagamos uma conta de água, não é necessário pensar em dois conjuntos não-vazios A e B, pelos quais cada elemento de A se corresponde a um único em B, para perceber que o conceito de função está envolvido nessa situação. O aluno entende facilmente que o valor a ser pago depende do que foi consumido no mês, ou seja, que há uma variação do valor a pagar em relação à quantidade utilizada de água.

Levar para sala de aula uma reflexão valorizando nela a compreensão do conceito de função antes de dar um tratamento matemático ao mesmo poderá fazer uma grande diferença na aprendizagem dos alunos.

Reconhecemos a importância da compreensão da definição de função, dos seus conjuntos especiais e das suas representações, mas concordamos com Silva (1999, p. 32) quando afirma que "mais importante do que a definição formal é compreender o significado do instrumento matemático apresentado", que possibilitará ao aluno compreender outros conteúdos posteriores, tanto da matemática elementar vista no Ensino Básico, como da mais avançada facilitando o entendimento e consequentemente diminuindo as dificuldades de compreensão dos "Cálculos" e das "Álgebras", uma vez que estes alunos ingressem num eventual curso superior da área de Ciências e Tecnologia.

"O estudo da maneira como ocorre a variação das grandezas, por ter participado de forma decisiva na construção de um método para a ciência e na própria evolução da matemática devem estar presentes de alguma maneira no ensino de funções". (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 75)

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Flávia Costa da Silva. **Funções no Ensino Médio:** Conceitos, representações e uso, em uma abordagem multidisciplinar. 2010. 43 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BOTELHO, Leila Maria Lima; REZENDE, Wanderley Moura. **Um Breve Histórico do Conceito de Função**. Caderno Dá Licença, Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense v. 6, p. 63-76, 2007.

BOYER, Carl B. **A História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blüncher, 2003. Revista Resumos Literários. Conhecimento Específico.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCNs). Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

FONSECA, V. G.; SANTOS, A. R.; NUNES, W. V.. **Estudo Epistemológico do Conceito de Funções:** Uma Retrospectiva. In: XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. E56 XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática - Retrospectivas e Perspectivas. Curitiba: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações, 1 Ensino Médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol. 1; 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** vol. 1; 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

LIMA, Luciana de; **A Aprendizagem Significativa do Conceito de Função na Formação do Professor de Matemática**. In: 32a. Reunião anual da Anped, 2009, Caxambu. Trabalho GT 19 - Educação Matemática, 2009.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito função:** Aspectos Históricos e Dificuldades Apresentadas por Alunos na Transição do Segundo para o Terceiro Grau. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

MUNHOZ, Danilo Pereira; PAULA, Mabi Katien Batista de; MORAES, Sueli Simão Moraes. **A Importância de Ensinar Grandezas e Medidas**. Pacto Nacional pela

Alfabetização na Idade Certa: Grandezas e Medidas / Caderno 06, MEC, SEB, Brasília, 2014. p. 18-23.

PARAÍBA. Companhia de Água e Esgotos da Paraíba (CAGEPA). **Estrutura Tarifária**, 2016. Disponível em: <http://www.cagepa.pb.gov.br/outras-informacoes/estrutura-tarifaria/> Acesso em: 28 abr. 2016.

SILVA, Maria Helena Morais. **Análise Histórica do Conceito de Função**. Caderno Dá Licença , Niterói, v. 2, p. 16-24, 1999.

SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. D. B.. **A Construção do Conceito de Função**: Alguns Dados Históricos. Traços (UNAMA), Belem, v. 6, n.11, p. 81-94, 2003.

SEARA DA CIÊNCIA. Universidade Federal do Ceará (UFCE). **Curiosidades da Física**, 2016. Disponível em: <http://www.searadaciencia.ufc.br/folclore/folclore260.htm> Acesso em: 02 abr. 2016.

SOUZA, Veriano Catinin de. **A origem do Cálculo Diferencial e Integral**. 2001. 26 f. Monografia (Especialização em Orientação Educacional) – Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica** vol. 1; 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.