UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOÃO CARLOS DA SILVA BARBOSA

PRODUTOS NOTÁVEIS: Um enfoque Geométrico

CAMPINA GRANDE – PB
2016

JOÃO CARLOS DA SILVA BARBOSA

PRODUTOS NOTÁVEIS: Um enfoque Geométrico

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz

CAMPINA GRANDE – PB
2016

B238p Barbosa, João Carlos da Silva.
Produtos notáveis [manuscrito] : um enfoque geométrico / João Carlos da Silva Barbosa. - 2016.
42 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luís Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. Produtos notáveis. 2. Geometria plana. 3. Geometria espacial. 4. Educação matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516

JOÃO CARLOS DA SILVA BARBOSA

PRODUTOS NOTÁVEIS: Um enfoque Geométrico

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz

Conceito Final:

Aprovado em ....24.......... **de**...Maio...... **de**...2016...

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Fernando Luís Tavares da Silva
(Orientador)

Profª. Msª. Núbia do Nascimento Martins
(Examinadora)

Profª. Msª. Maria da Conceição Vieira Fernandes
(Examinadora)

À DEUS, Senhor todo poderoso e onipotente.
Aos meus pais, verdadeiros heróis, que sempre acreditaram no meu potencial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS por ser justo e piedoso para conosco.
À minha família, alicerce de minha vida.
Aos meus amigos, em especial à Alifi, Artur, Ary, Bruno, Gabriel, Gilvan, Jorlan, Magno, Vanessa e Victor, no qual considero como irmãos.
E ao meu Orientador e amigo Fernando Luiz.
Muito obrigado!

"A vida é um grande espetáculo. Só não consegue homenageá-la quem nunca penetrou dentro de seu próprio ser e percebeu como é fantástica a construção da sua inteligência".

(Augusto Cury)

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com intuito de associar a importância do processamento do conhecimento, partindo de demonstrações de Produtos Notáveis, utilizando uma interação com a Geometria Plana, Geometria Espacial e também Desenho, ressaltando a preocupação de que o aluno desenvolva o conhecimento não decorando fórmulas passadas como prontas e concretas, mas acompanhando a construção dessas fórmulas, tomando como base uma abordagem histórica de Geometria Plana e Espacial, desde seu descobrimento, passando pelas enormes contribuições de Euclides e de outros Matemáticos e Filósofos. Mostrando assim que existem maneiras mais aceitáveis e mais objetivas de se abordar um conteúdo em sala de aula, em especial produtos notáveis, contribuindo não só como um aprimoramento profissional, mas também em uma possível e provável melhoria no desenvolvimento do conhecimento no aluno.

Palavras-chave: Produtos Notáveis; Geometria Plana e Geometria Espacial; Construção do conhecimento

ABSTRACT

The present work was developed with the itution of connecting the knowledge process importance, beginning for demonstrations of the Notables Products, using an interaction with the plane geometry , Spatial Geometry and Drawing , highlighting the concern that the student develops knowledge no memorizing of formulas passed, like ready and concrete , but following the construction of these formulas , based on a historical approach of Plane Geometry and Spatial, since its discovery , through the enormous contributions of Euclid and other Mathematicians and philosophers . Thus showing that there are more acceptable ways and more objective to approach content in the classroom , especially remarkable products , contributing not only as a professional development , but also a possible and probable improvement in the development of knowledge in the student

Keywords: Notable Products; Plane Geometry and Spatial Geometry; Construction of knowleadge.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A construção do conhecimento matemático tendo como princípio a prática de uma determinada experiência foi o que nos impulsionou a ser um dos elementos ativos dentro do processo de ensino-aprendizagem do tema escolhido. Em seu desenvolvimento, ao reunir diversos aspectos metodológicos, fica bem claro que não podemos priorizar nenhum em particular, pois todos se complementam.

Uma abordagem onde se solicita uma solução ou um resultado, frente a uma situação-problema real, além de marcar um dos momentos mais importantes dentro do processo de ensino-aprendizagem, mostra também que não devemos tratar a Matemática como uma série de conhecimentos prontos a serem transmitidos, sendo assim tomamos como objetivo principal a construção do conhecimento, fazendo com que o aluno consiga concretizar o que lhe foi passado em sala de aula, relacionando as duas vias da Matemática (Álgebra e Geometria) até então vistas de uma maneira distinta.

Nesse sentido, nossa intenção foi a de não fornecer “ideias prontas”, preservar a intuição matemática, estimular soluções de formas diferentes, mais interessantes e atrativas, que se identifiquem com situações do nosso dia-a-dia.

> Se o aluno é colocado na situação de descobrir, por ele mesmo, o conceito, a regra, o princípio, etc., a partir de uma apresentação apropriada de exemplos, de contra-exemplos e de material didático, ele será capaz de utilizá-los, independentemente, em situações novas (DANTAS, 1987, p. 5).

Complementando mais a ainda a ideia da produção do conhecimento envolvendo a capacidade de raciocínio próprio do aluno, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, de fundamental importância na organização de um trabalho de qualidade diária do aluno e do professor, explicitam que:

> (...) O papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 15).

E ainda enfatiza que:

> (...) A importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções (BRASIL, 1998, p. 15).

Sendo a Álgebra um poderoso instrumento para a resolução através de equações, entendemos ser razoável uma proposta de estudá-las, de forma gradativa, através de situações envolvendo Medidas e Geometria.

Uma vez que as Medidas trazem o mundo real para a sala de aula e agregam as noções de números às relações geométricas, optamos pelo tratamento simultâneo e integrado de Números, Medidas e Geometria, tendo ainda como peça fundamental a utilização de desenhos tridimensionais no estudo de “Soma de Cubos” e “Diferença de Cubos”.

2. RESGATE HISTÓRICO

2.1 GEOMETRIA PLANA OU EUCLIDIANA

Temos por conhecimento de que a Matemática é a mais antiga das ciências e que a sua origem vem das antigas civilizações egípcias. Assim como a Álgebra, o surgimento da Geometria se deu por uma necessidade, a de medir terras. Os agricultores egípcios cultivavam as terras que ficavam nas margens do rio Nilo, que eram divididas em lotes. Na época das chuvas, o Nilo transbordava alagando a terra e, quando voltava ao nível normal, deixava o solo fertilizado, ideal para a agricultura. Como as marcas dos lotes eram carregadas a cada cheia, tornava-se necessário refazer as demarcações para que os lotes fossem redistribuídos aos agricultores. Assim, medindo e desenhando terrenos, os Egípcios descobriram métodos e adquiriram conhecimentos. Tempos depois, os Gregos aprenderam, estudaram e desenvolveram esses conhecimentos, aos quais chamaram de Geometria, que significa "medida da terra" (geo = terra; metria = medida).

Por volta de 300 a.C. surgiu um grande Matemático, Euclides (325-265 a.C.), que teve a maior influência na evolução e na construção da Geometria. Nada se pode afirmar sobre Euclides. Apenas que é possível que tenha estudado na academia de Platão devido à semelhança entre a visão platônica do conhecimento e a sua visão, em particular do desinteresse pelas aplicações práticas. Geômetra grego, que viveu entre os séculos IV e III a.C., lecionava em Alexandria, cidade que ficava ao norte da África, no Egito. Responsável pelas primeiras construções gráficas, utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso, descobriu muitas relações entre os elementos geométricos. Tais conhecimentos foram publicados em sua obra Os Elementos, um conjunto de 13 volumes, nos quais sintetizou o conhecimento matemático da Grécia Antiga.

O estudo da geometria plana ou euclidiana se baseia em analisar as diferentes formas de objetos em três conceitos básicos: ponto, reta e plano. Como não existem maneiras concretas para uma definição de ponto, temos nesse caso apenas que aceitar sua existência e representarmos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto (por exemplo, o ponto A). Definimos uma reta como sendo um conjunto infinito de pontos em sequência.

Segundo Euclides, a Geometria operava-se a partir de certas hipóteses básicas, denominadas axiomas, que eram divididos em dois grupos: noções comuns e postulados, sendo essas hipóteses aceitáveis a todas as ciências e hipóteses próprias da geometria, tais como:

- Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
- O todo é maior do que qualquer uma das partes.

Postulados:

- Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos;
- Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta;
- Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer;
- Todos os ângulos retos são iguais;
- Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

Sendo esse último postulado o responsável pela criação do primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, a Geometria Euclidiana, regido pelos postulados. Esse modelo possuía, aparentemente, um encadeamento lógico perfeito.

2.2 GEOMETRIA ESPACIAL

A Geometria Espacial é a área da Matemática que estuda figuras no espaço, ou seja, que possuem mais de duas dimensões. Seu estudo relaciona os conceitos básicos vistos em Geometria Plana (ponto, reta e plano). O conceito de Geometria Espacial é um pouco mais abstrato em relação à Geometria Plana, pois, todo conhecimento sobre tal estudo se apóia em documentos antigos, denominados papiros, dos quais citaremos como principais o papiro de Rhind e o papiro de Moscou.

2.2.1 Papiro de Rhind

Um dos documentos mais importantes em relação aos conhecimentos egípcios, era dotado de informações sobre trigonometria, aritmética, equações, progressões e cálculos de área e volume, não se sabe ao certo as intenções do mesmo, que vinha intitulado como Instruções para conhecer todas as coisas secretas.

2.2.2 Papiro de Moscou

Com dimensões de aproximadamente 8 centímetros de largura por 5 metros de comprimento, escrito em hierático por um escriba desconhecido por volta de 1850 a.C., possui 25 problemas sendo que alguns desses são de difíceis, às vezes quase impossíveis interpretações devido a degradação da escrita. Nesse papiro é apresentada uma forma de calcular as áreas, o volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrangular.

Grandes responsáveis pelo aprimoramento do estudo da Geometria como um todo, Pitágoras e Platão, associavam o estudo da Geometria Espacial ao da Religião e da Metafísica. Pitágoras, grande discípulo de Thales de Mileto, criou a Escola Pitagórica, onde associava tudo que existe na natureza com números. Na Geometria Espacial trabalhou, especificamente com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. A "harmonia das esferas" era para os Pitagóricos a origem de tudo. Já para Platão, a explicação de tudo, como tudo existia vinha dos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (elemento que permearia todo o Universo).

Outros grandes contribuintes para o Estudo da Geometria Plana foram Leonardo Fibonacci (1170-1240) autor da Prática Geometriae, Joannes Kepler (1571-1630) com Steometria, o cálculo de volume, em 1615, e Euclides, com sua obra Os Elementos, que já fora citado acima.

3. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Historicamente a Matemática construída pela sociedade foi difundida culturalmente, mantida viva por estudiosos sobre o assunto, selecionada e reorganizada de acordo com a necessidade da ciência e armazenada de acordo com sua necessidade, como também reunida posteriormente em textos de divulgação científica ou em manuais escolares. Esse percurso histórico, entretanto, permite-nos estabelecer um diálogo entre o conhecimento aprendido e disseminado mecanicamente, a memória da prática manipulativa que utiliza os objetos matemáticos, os textos, os documentos, os relatos da prática e outros registros, de um modo geral, que os armazenam para torná-los públicos.

A humanidade sempre produziu conhecimento sem ter uma preocupação explícita com as especificidades dessa produção cognitiva, seja ela concebida sob a ótica da Matemática, da Física, da Química entre outras formas de explicar o mundo. O importante é a relação entre os contextos social, cultural e político de quem produziu tal conhecimento.

No decorrer do tempo, alguns professores dedicavam-se à pesquisa, outros eram bons administradores e uma boa parte destacava-se pela capacidade de ensinar. Guelli nos afirma que:

> Euclides fazia parte desse último grupo. Talvez por isso, desde sua publicação em 300 a.C., o livro Os Elementos teve uma repercussão tão grande no mundo científico. Durante mais de vinte séculos os homens estudaram Geometria de acordo com os ensinamentos de Euclides (GUELLI, 2011, p. 14).

A Geometria que aprendemos na escola é toda baseada em Os Elementos. Dos treze livros que compõem a sua obra, nem todos são sobre Geometria. Alguns tratam da teoria dos números inteiros e positivos e dois deles são dedicados à Álgebra: o livro II e o livro V.

No entanto, a Álgebra de Euclides era bem diferente da que usamos hoje. Atualmente, falamos de Álgebra quando as quantidades desconhecidas são representadas por letras e as operações por sinais tais como: $=, x, \div, +, -$, etc. Na sua Álgebra, Euclides representava as quantidades desconhecidas por segmentos de reta, quadrados, retângulos, triângulos, enfim, figuras geométricas. Vale ressaltar que apenas a Bíblia teve mais edições que Os Elementos, de Euclides.

Euclides e seus colegas de Alexandria também manejavam com muita facilidade os Produtos Notáveis, mas eles interpretavam através de construções geométricas. Graças à Álgebra puderam-se expressar essas idéias de forma mais simples.

A nossa sociedade tem uma grande tendência a olhar para o futuro. Destaca assuntos emergentes, como a exploração do espaço e as revoluções ocasionadas pela cibernética. Parece ter pouco interesse no passado. Na verdade, pode-se indagar que o passado tem a proferir a um futuro Matemático, ou a um futuro Cientista ou Engenheiro. Ainda mais, o que é que o passado da Matemática tem a oferecer a um futuro Médico ou Advogado? Interroga o que é que tem a oferecer a um cidadão no geral? Os Professores de Matemática, tanto nos ensinos fundamental e médio como no superior, tende a agir como se a história da Matemática não fosse importante para a aprendizagem dessa disciplina. A Matemática é um assunto técnico e, portanto, basta entender os algoritmos para usá-los corretamente.

No contexto pedagógico, a dissociação entre a Matemática e a sua história é extremamente desagradável por várias razões. Em primeiro lugar, o conhecimento matemático, em contraste com as ciências que são mais sujeitas às revoluções kuhnianas, é de natureza cumulativa. A Matemática é construída, incessantemente sobre as bases já construídas. Em consequência o aluno precisa, no processo de aprendizagem, repensar o que já foi pensado por outros, ou seja, é necessário que o aluno se aproprie do que já foi elaborado por Matemáticos anteriores. Esse processo de apropriação é semelhante a atividades de escalar uma montanha, pois o Professor pode indicar quais são as trilhas mais apropriadas ou mais fáceis, mas é o aluno que tem que subi-la com seus próprios esforços. Em consequência, a história da Matemática é talvez, mais relevante ao ensino da Matemática do que para a maioria das outras disciplinas.

Em segundo lugar, não queremos alunos que saibam apenas manipular algoritmos com algum sucesso. Queremos alunos que tenham uma compreensão profunda e crítica das partes da Matemática que estudam. Richard Skemp indicou isto com a sua distinção entre a compreensão instrumental e a compreensão relacional. A compreensão instrumental é o conhecimento mecanizado. É altamente indicado quando queremos, por exemplo, andar de bicicleta ou guiar um automóvel. Esse tipo de conhecimento nos permite executar atividades rotineiras com muito sucesso, no entanto, não contribui muito ao desenvolvimento da capacidade de enfrentar situações novas, resolver problemas novos ou avaliar situações complexas. Para tanto, precisa-se das habilidades críticas e metacognitivas da compreensão relacional. A investigação da história da Matemática é sempre uma atividade que envolve a compreensão relacional e, portanto, auxilia o desenvolvimento das habilidades matemáticas que queremos que sejam alcançadas por todos os nossos alunos, sejam eles futuros Matemáticos ou não.

Devemos mencionar, ainda, que muitos alunos consideram interessantes os tópicos da história da Matemática. Assim, a história pode ser usada como um fator motivador na apresentação do material novo. Isto pode acontecer de duas formas diferentes. Primeiro, de um ponto de vista mais holístico, a história da Matemática, como já mencionamos, revela as ligações da Matemática com outros aspectos da cultura humana. Segundo, de um ponto de vista mais matemático, devemos lembrar que os Matemáticos anteriores se interessaram por certos conceitos e problemas. Assim, vários alunos também acharão os mesmos problemas empolgantes e desafiantes quando se depararem com os mesmos dos seus estudos.

Infelizmente, muitas das tarefas que nós, Professores de Matemática, infligimos aos nossos alunos são repetitivas, enfadonhas e sem inspiração. A história da Matemática é, no entanto, uma fonte rica de problemas interessantes e desafiantes que podem ser incorporados ao ensino da Matemática, especialmente na forma de atividades de redescoberta ou de resolução de problemas.

Lamentavelmente a história da Matemática é frequentemente usada na sala de aula como uma mera curiosidade ou, ainda pior como uma maneira de fugir temporariamente da matemática. Seu verdadeiro uso como instrumento pedagógico, porém, somente ocorre quando os conceitos e problemas históricos são integrados na rotina diária da sala de aula e se tornam parte da experiência matemática do aluno. As façanhas do passado, pelo menos na Matemática, não são monumentos a serem admirados pasmadamente, são possibilidades excitantes a serem vividas e o aluno precisa lidar com elas, analisando-as, avaliando-as e ate tentando melhorá-las.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

São denominadas Expressões Algébricas, as expressões matemáticas que são dotadas de variáveis e constantes, onde variáveis são termos, representado por letras que representam um número qualquer ou um conjunto, enquanto que as constantes representam valores (ou quantidades) fixos.

Vejamos alguns exemplos de Expressões:

- Para representar o perímetro de um quadrado de lados a**,** usaremos a expressão $P = 4a$;
- São exemplos de expressões também os termos $2x^2$e $2x + 3x^3$ que representam respectivamente monômios e polinômios, na qual veremos em seguida.

4.2 MONÔMIOS E POLINÔMIOS

Monômio representa o produto entre variáveis e constantes. Já o Polinômio é composto de monômios ou soma de monômios.

4.2.1 Monômios ou Termos Semelhantes

A semelhança entre monômios existe quando suas partes variáveis são idênticas. Observe os exemplos:

- Os monômios $3x$ e $5x$ são semelhantes, pois suas partes variáveis são idênticas em ambos;
- Os monômios $4xy^2$ e $16xy^2$ são também semelhantes.

4.3 OPERAÇÕES COM MONÔMIOS

4.3.1 Adição e Subtração de Monômios

A adição de monômios só pode ser feita se os monômios forem semelhantes. Para efetuar a soma de monômios, somam-se as constantes e conserva-se a parte variável. Por exemplo:

- $4x^2 + 18x^2 = 22x^2$
- $123xy^3z + 321xy^3z = 444xy^3z$

Já na subtração, mantendo o mesmo critério de termos semelhantes, ou seja, subtrai-se as constantes e conserva-se a parte variável, conforme os exemplos:

- $43j^3 - 21j^3 = 22j^3$
- $98k^2z^3 - 56k^2z^3 = 42k^2z^3$

4.3.2 Multiplicação de Monômios

Ao multiplicarmos monômios faremos os seguintes passos: multiplicaremos as partes numéricas, ou constantes entre si, e multiplicaremos as partes literais, ou variáveis em comum, utilizando, caso seja necessário, as propriedades de multiplicação de potências de mesma base:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

E da propriedade associativa da multiplicação:

- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Vejamos, então, alguns exemplos:

- $12x^2 \cdot 3x^3 = 12 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x^3 = 24 \cdot x^5 = 24x^5$
-
- $5s^3h^2m^3 \cdot 10m^2s^3 = 5 \cdot 10 \cdot s^3 \cdot s^3 \cdot m^3 \cdot m^2 \cdot h^2 = 50s^6 \cdot m^5 \cdot h^2 = 50s^6m^5h^2$

4.3.3 Divisão de Monômios

Para divisão de monômios devemos também nos lembrarmos das propriedades de divisão de potências de mesma base:

- $a^m : a^n = a^{m-n}$ com m, n números naturais.

De maneira análoga, a operação se dá por termos em comum, ou seja, parte numérica com parte numérica e parte literal com parte literal.

Exemplos:

- $24x^3 \div 3x^2 = \frac{24}{3} \cdot \frac{a^3}{a^2} = 8a$
- $14x^3y^2 \div 7y^2x = \frac{14}{7} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^2}{y^2} = 2 \cdot x^2 \cdot y^0 = 2x^2 \cdot 1 = 2x$

Observação: vale lembrar, por propriedade de potências, que qualquer número elevado a zero vai ser sempre igual a 1.

4.3.4 Potenciação de Monômios

O estudo de monômios está inteiramente ligado com o de potenciação, por isso é essencial que saibamos as regras de potenciação. Para efetuarmos potenciações de monômios, é preciso lembrarmos das seguintes propriedades:

- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Vejamos os exemplos:

- $(2x^2f^3)^3 = 2^3 \cdot x^{2 \cdot 3} \cdot f^{3 \cdot 3} = 8 \cdot x^6 \cdot f^9 = 8x^6f^9$
- $(-3jkb^2)^2 = (-3)^2 \cdot j^2 \cdot k^2 . b^{2 \cdot 2} = 9 \cdot j^2 \cdot k^2 \cdot b^4 = 9j^2k^2b^4$

4.4 GRAU DE UM POLINÔMIO

Seja um polinômio denotado por $P(x).$, o grau do polinômio será obtido pelo maior expoente da variável x, que possui coeficiente não nulo. Podemos representar o grau de um polinômio por gr(P). Quanto ao grau, classificamos os polinômios como:

- Polinômio constante - grau 0;
- Polinômio linear - grau 1;
- Polinômio quadrático - grau 2;
- Polinômio cúbico - grau 3.

Se tivermos $P(x) = 0$ denotamos então de polinômio nulo e não podemos definir o seu grau. Vejamos alguns exemplos:

- $P(x) = x^3 + 2x^2$ é um polinômio de terceiro grau, ou grau cúbico;
- $P(x) = 16x + 3x^2 + 6x^6$ é um polinômio de 6º grau;
- $A(y) = y + 2y^2$ é um polinômio quadrático.

4.5 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

4.5.1 Adição e subtração de polinômios

A soma de dois ou mais polinômios tem como resultado o polinômio em que os coeficientes são obtidos adicionando-se os coeficientes dos termos que possuem grau em comum. Por exemplo:

Sejam os polinômios $P(x)$ e $A(x)$ dados por:

- $P(x) = 2x + 6x - 2x$ e $A(x) = 4x^3 - 3x + 5x^2$
- $P(x) + A(x) = (6 + 4)x^3 + (2 + 5)x^2 + (-2 - 3)x$
- $P(X) + A(x) = 10x^3 + 7x^2 - 5x$

Por analogia, a subtração de polinômios tem como resultado o polinômio em que os coeficientes são obtidos subtraindo-se os coeficientes dos termos que possuem grau em comum. Exemplificando:

Dados os polinômios $P(x)$ e $A(x)$do exemplo anterior, a subtração é dada por:

- $P(x) - A(x) = (6 - 4)x^3 + (2 - 5)x^2 + (-2 + 3)x$
- $P(x) - A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

4.5.2 Multiplicação entre polinômios

Considere os polinômios $P(x) = 2x^2 - x$ e $A(x) = 3x + x^2$. A obtenção do produto dos polinômios é feita a partir dos seguintes passos: inicialmente, multiplicaremos cada termo de um deles por todos os termos do outro, em seguida faremos a adição. Vejamos o seguinte exemplo:

- $P(x) = 2x^2 - x$ e $A(x) = 3x + x^2$; fazendo a multiplicação, temos:

$$(2x^2 - x) \cdot (3x + x^2) = [2x^2 \cdot (3x + x^2) + (-x) \cdot (3x + x^2)]$$

$$= 6x^3 + 2x^4 - 3x^2 - x^3$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - 3x^2$$

Observação: O grau da multiplicação de dois polinômios não nulos é a soma dos graus desses polinômios.

De fato, como gr(P) = 2 e gr(A) = 2, logo gr(P) + gr(A) = 2 + 2 = 4 = gr(P . A).

4.5.3 Divisão entre polinômios

Quanto à divisão de polinômio existem diversas maneiras de se obter o resultado, tais como: o método da identidade de polinômios, de Descartes; dispositivo de Briot-Ruffini; método da chave; além dos teoremas de D'Alembert e o teorema do resto. Vejamos o método da chave, que é o mais utilizado.

Sejam $P(x)$ e $A(x)$ polinômios com $A(x)$ não nulo. Ao dividir $P(x)$ por $A(x)$ obtemos os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que:

- $P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x)$, onde:

$P(x)$ é o dividendo;

$A(x)$ é o divisor;

$Q(x)$ é o quociente;

$R(x)$ é o resto.

Observações:

- O grau de Q(x) é igual à diferença dos graus de P(x) e A(x);
- O grau do resto R(x), com R(x) não nulo será sempre menor do que o grau do divisor, nesse caso, A(x);
- Se a divisão é exata, o resto R(x) é nulo, ou seja, o polinômio P(x) é divisível pelo polinômio A(x).

Vejamos um exemplo usando o método da chave:

Sendo os polinômios $P(x) = 4x^3 + x^4 + 9 + 4x^2$ e $A(x) = x^2 + x - 1$, obteremos a solução da divisão de $P(x)$ por $A(x)$ de maneira análoga ao algoritmo usado na aritmética.

Pelo método da chave, temos os seguintes passos:

1º passo: Reescrevemos os polinômios dados na ordem decrescente de seus expoentes, completando o polinômio com termos de coeficiente zero:

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9$ e $A(x) = x^2 + x - 1$

2º passo: Divide-se o termo de maior grau do dividendo P(x) pelo termo de maior grau do divisor A(x), obtendo, assim, o primeiro termo do quociente Q(x). Em seguida multiplica-se o termo obtido pelo divisor e subtrai-se esse produto do dividendo:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4} + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{x^4} - x^3 + x^2} & x^2 \\
3x^3 + 5x^2 &
\end{array}
$$

3º passo: Se a diferença obtida tiver grau maior ou igual ao divisor, ela será o novo dividendo. Continuamos, então, o processo a partir do 2º passo:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4} + 4x^3 + 4x^2 + 0x + 9 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{x^4} - x^3 + x^2} & x^2 + 3x + 2 \\
\quad \cancel{3x^3} + 5x^2 + 0x & \\
\underline{-\cancel{3x^3} - 3x^2 + 3x} & \\
\quad \cancel{2x^2} + 3x + 9 & \\
\underline{-\cancel{2x^2} - 2x + 2} & \\
\qquad x + 11 &
\end{array}$$

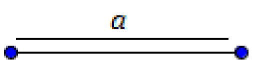
Como a diferença obtida tem um grau menor do que o divisor se dá por encerrado a divisão. Obtemos então o quociente $Q(x) = x^2 + 3x + 2$ e resto $R(x) = x + 11$.

4.6 CASOS ESPECÍFICOS

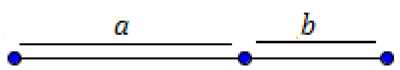
4.6.1 Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos é igual a o quadrado do primeiro termo; mais o quadrado do segundo termo; mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo.

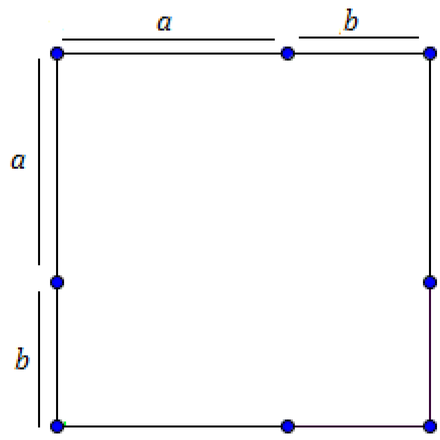
Primeiramente montamos um segmento fomentado por dois pontos quaisquer e denotamos o comprimento desse segmento de a**:**



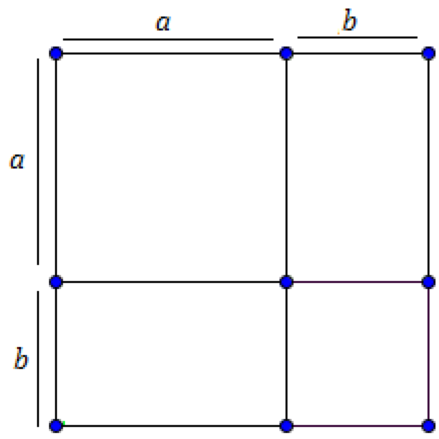
Em seguida, montemos outro segmento partindo de um ponto fixo do segmento anterior e denotamos o comprimento desse segmento de b**:**



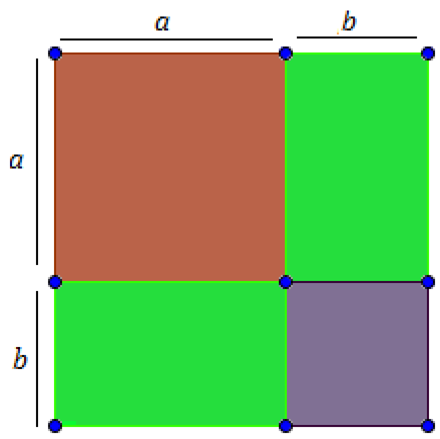
Como queremos calcular o quadrado da soma de dois termos, montemos agora um quadrado com as seguintes medidas de segmentos dados:



Temos agora um quadrado de lados $a + b$. Traçando perpendiculares partindo dos pontos que dividem os segmentos a e b temos:



Com isso, fomentamos dois quadrados e dois retângulos possivelmente notáveis. Um quadrado de lado a, outro quadrado de lado b e dois retângulos de lados a e b:



Pelo conceito de área de quadrados e retângulos, podemos chegar à conclusão de que um quadrado de lados $a + b$ tem a mesma área de um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e dois retângulos de lados a e b:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + a.b + a.b$$

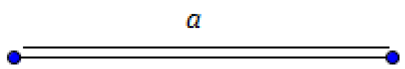
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$$

4.6.2 Quadrado da diferença de dois termos

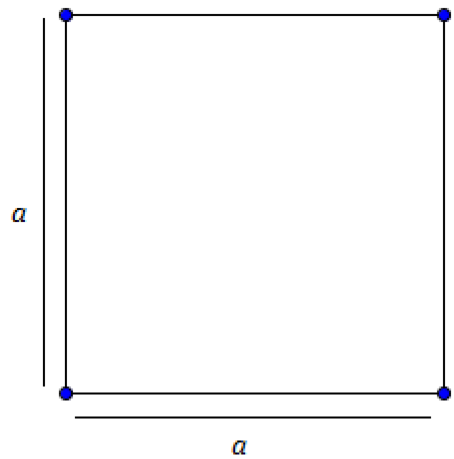
O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo; mais o quadrado do segundo termo; menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo.

Partiremos do fato de que o quadrado do primeiro termo; mais o quadrado do segundo termo; menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo para chegarmos a conclusão de que o resultado será igual ao quadrado da diferença de dois termos.

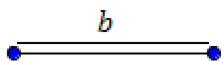
Primeiramente sejam dados dois pontos, montemos um segmento e o denotamos por a:



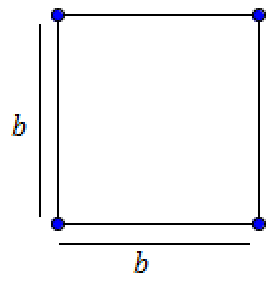
Fomentamos um quadrado de aresta com medida a:



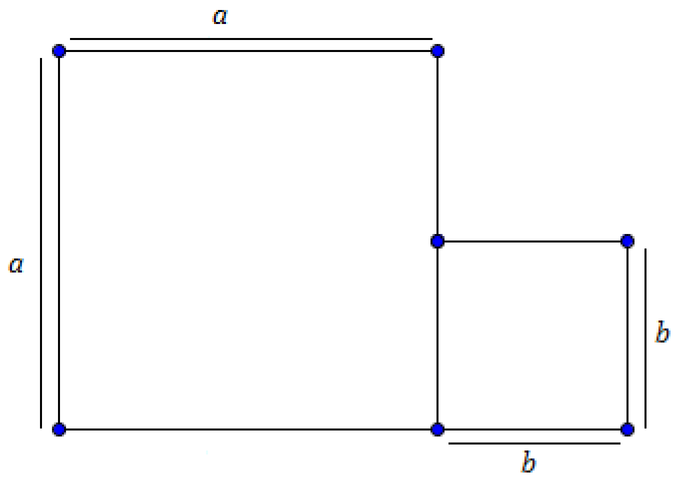
Sejam dois pontos quaisquer e seja o segmento que une esses dois pontos chamado de b:



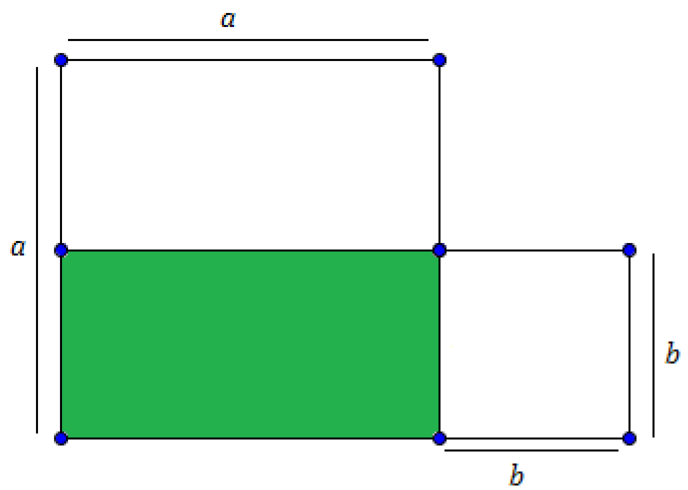
Montemos um quadrado de aresta igual a b:



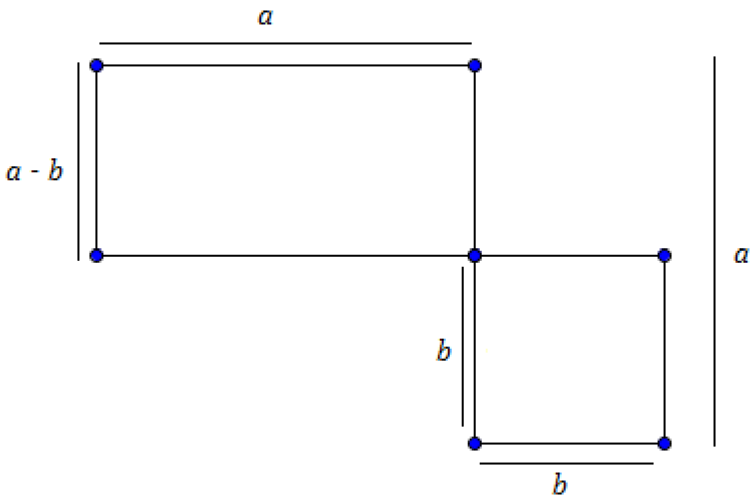
Temos agora um quadrado de área a^2 e outro de área b^2. Coloquemos os dois lado a lado e observemos:



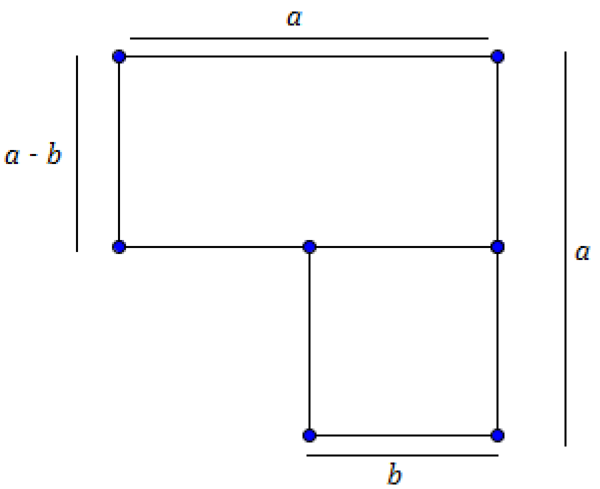
Temos que retirar agora dois retângulos de áreas ab:



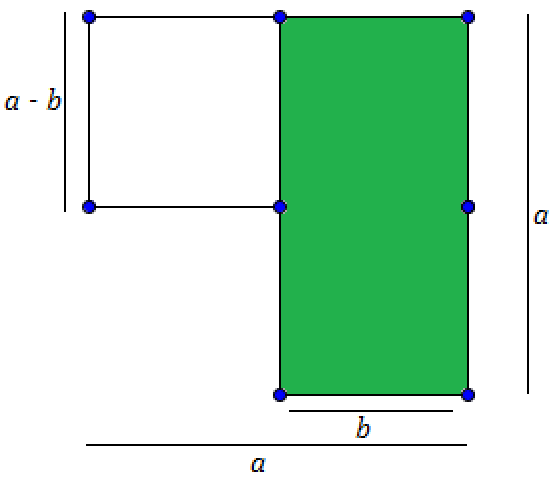
Podemos notar que o retângulo acima tem área igual a ab, já que tem uma base igual a a e a altura igual a b. Retirando esse retângulo temos:



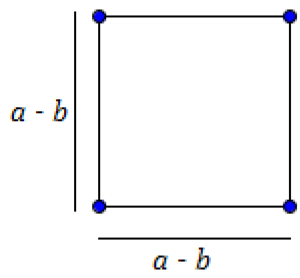
Temos que retirar ainda um retângulo de área ab. Para isso, fazemos o seguinte passo:



Com isso podemos retirar o retângulo que tem base igual a b e altura igual a a, ou seja, de área ab:



Restando, assim, um quadrado de aresta medindo $a - b$, chegando assim a conclusão:



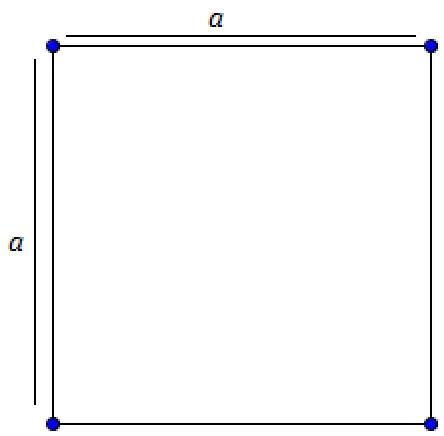
4.6.3 Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao quadrado menos o segundo termo elevado ao quadrado.

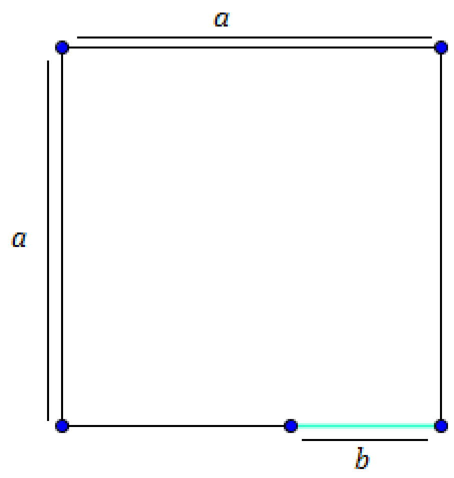
Tomamos como parte inicial a diferença de quadrados.

Sejam dois pontos quaisquer e o seguimento que une esses dois pontos igual a a.

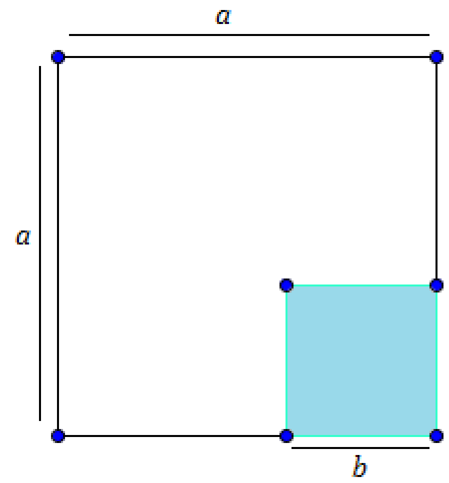
Fomentamos agora um quadrado de arestas igual a a.



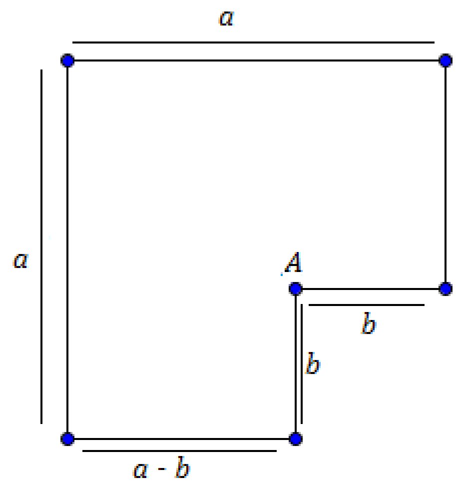
Dentro do quadrado de área a^2, fomentamos um outro quadrado de arestas igual a b . Primeiramente partindo de um segmento qualquer do quadrado de área a^2, formamos um segmento de medida b:



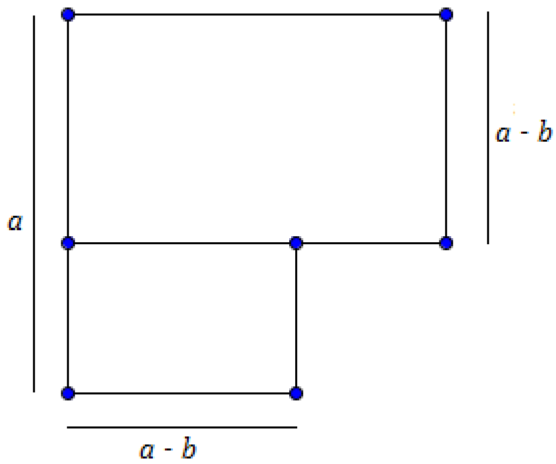
Do segmento igual a b fomentamos um quadrado de aresta igual a b:



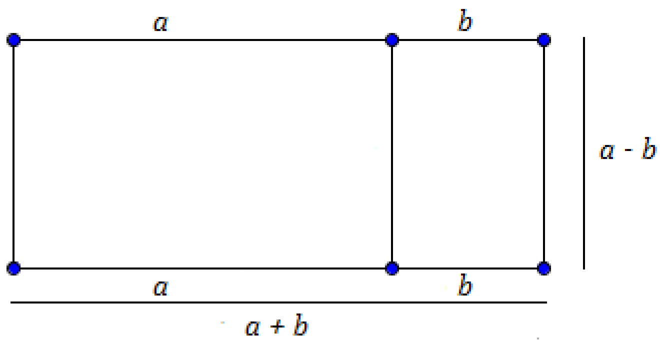
Retiramos o quadrado de área igual a b^2:



Partindo do vértice, caracterizado por A fomentamos o segmento a seguir:



Com isso, formamos dois retângulos. Agora faremos um passo preciso para chegarmos à conclusão:



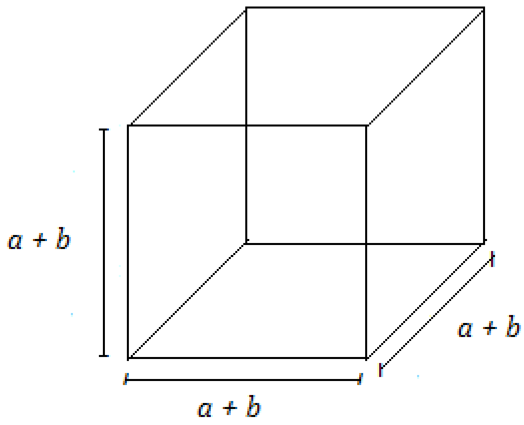
Por fim, montamos um retângulo de base igual a $a + b$ e altura igual a $a - b$. Resolvendo a área do retângulo temos:

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

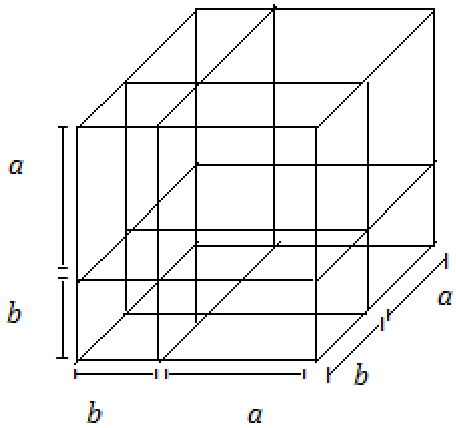
Chegando assim a conclusão.

4.6.4 Cubo da soma de dois termos

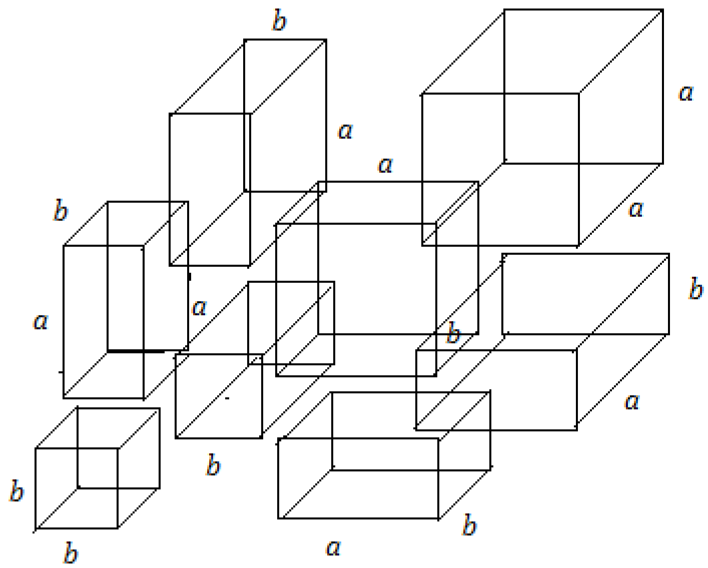
O cubo da soma de dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao cubo, mais três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, mais o segundo termo elevado ao cubo. Tomemos primeiro um cubo de arestas $a + b$ conforme a figura abaixo:



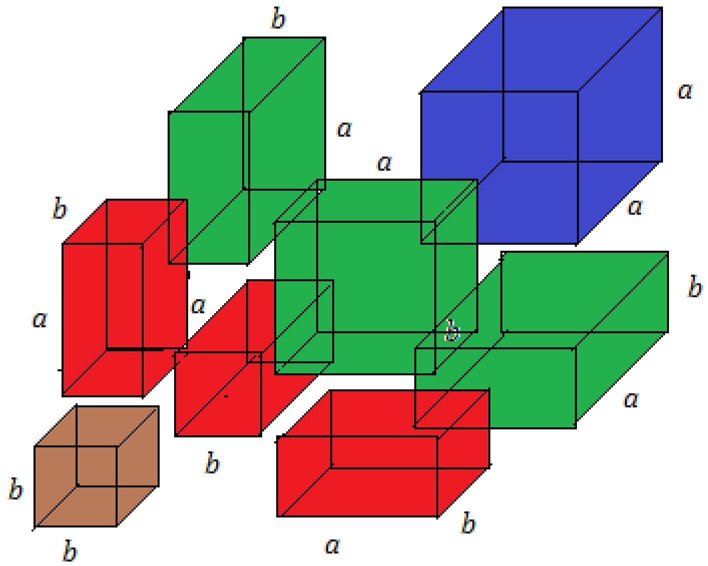
Agora, fixamos valores para a e b e seccionamos o cubo dividindo as arestas:



Analisamos as áreas que formaram depois da secção:



Para concluir a demonstração, preenchemos as figuras com mesmo volume, com cores iguais:

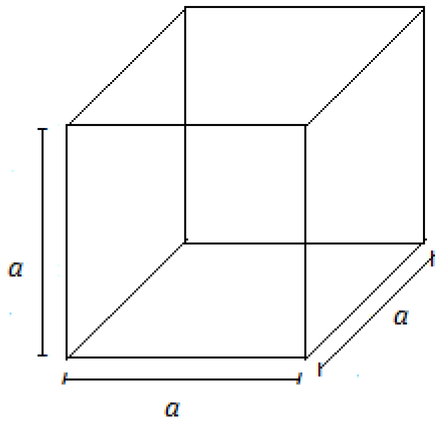


Daí temos $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

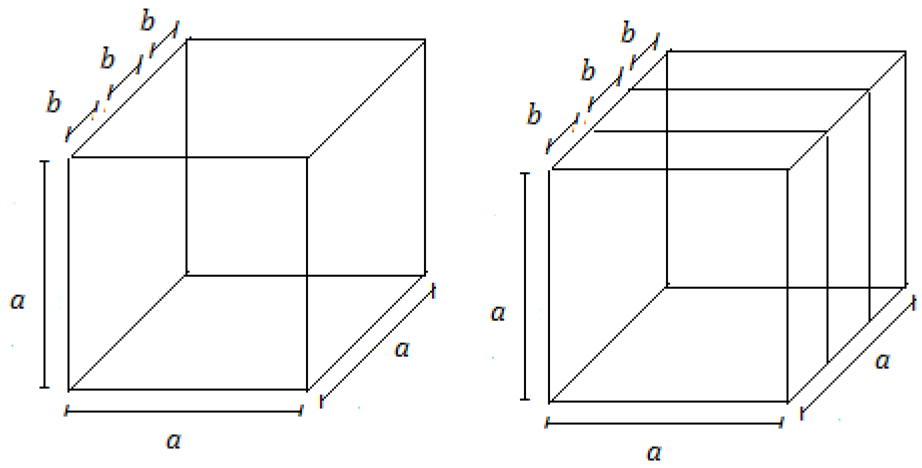
4.6.5 Cubo da diferença de dois termos

O cubo da diferença de dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao cubo, menos três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado, vezes o segundo termo, menos três vezes o primeiro termo, vezes o segundo termo elevado ao quadrado, menos o segundo termo elevado ao cubo. Partiremos da segunda parte da igualdade para melhor fixar a demonstração.

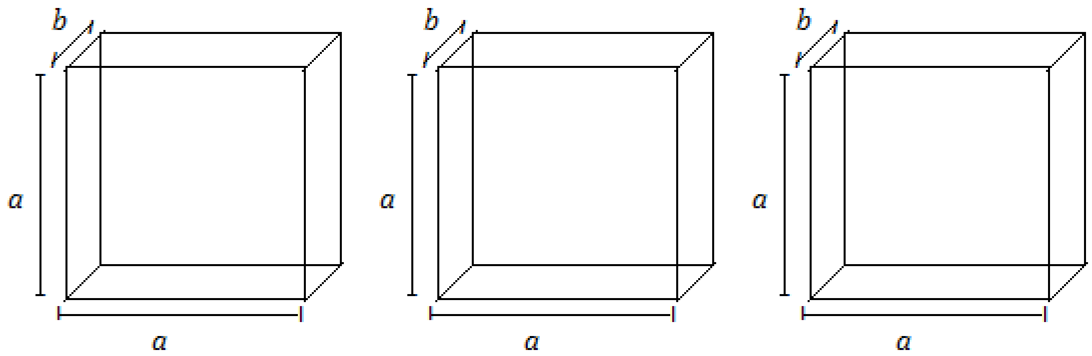
Seja um cubo de aresta a:



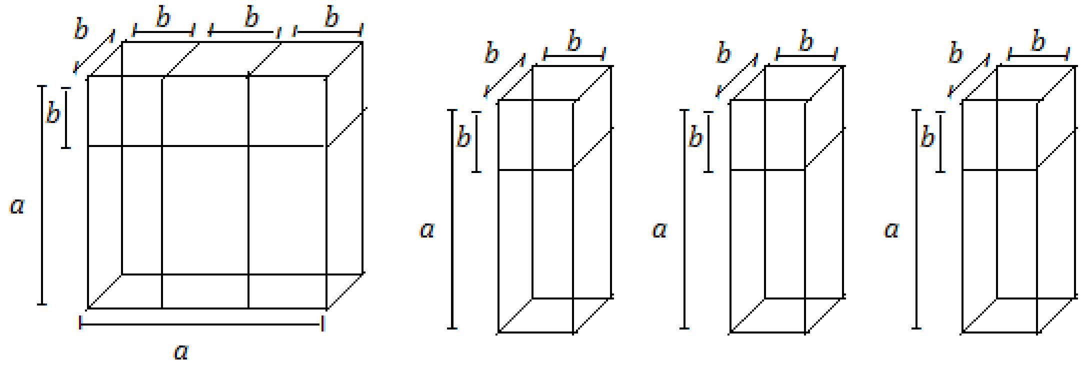
Agora seja b uma medida qualquer tal que $a = 3b$:



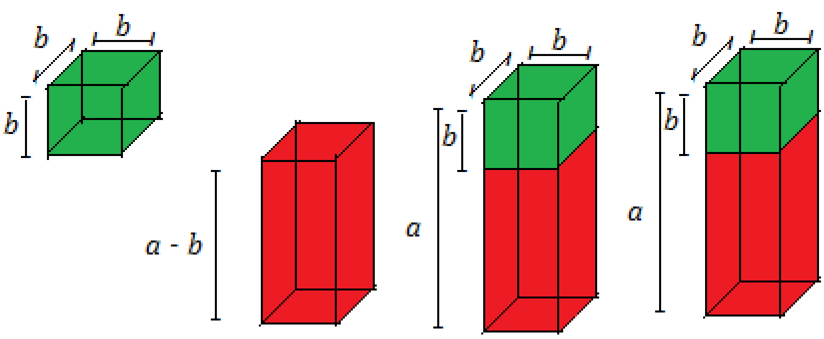
Retiramos agora a^2b três vezes. $(3a^2b)$:



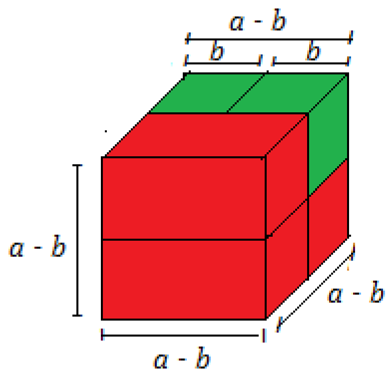
Retornamos agora com ab^2 três vezes $(3ab^2)$:



E retiramos b^3:



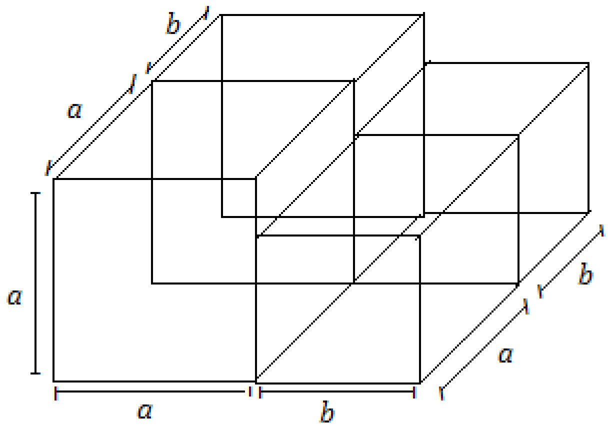
Sabendo que $a = 3b$ podemos ter por conclusão de que $a - b = 2b$. Assim, podemos reorganizar as figuras e formar um cubo de arestas $a - b$ chegando assim à conclusão.



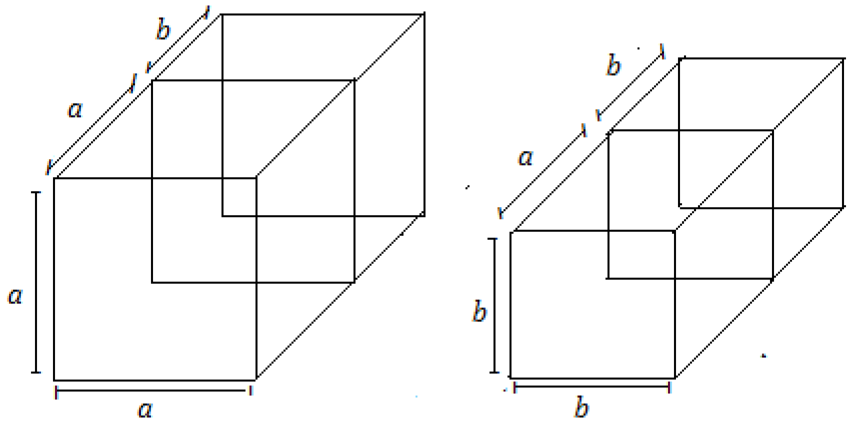
4.6.6 Soma de cubos

A soma de dois cubos possui sua forma fatorada dada pelo produto que envolve a soma das arestas dos cubos, vezes a aresta do primeiro ao quadrado, menos o produto do primeiro pelo segundo, mais a aresta do segundo ao quadrado. Algebricamente $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$, para a e b arestas quaisquer. Partiremos, mais uma vez, da segunda parte da igualdade para melhor fixar a demonstração.

Temos então o seguinte:

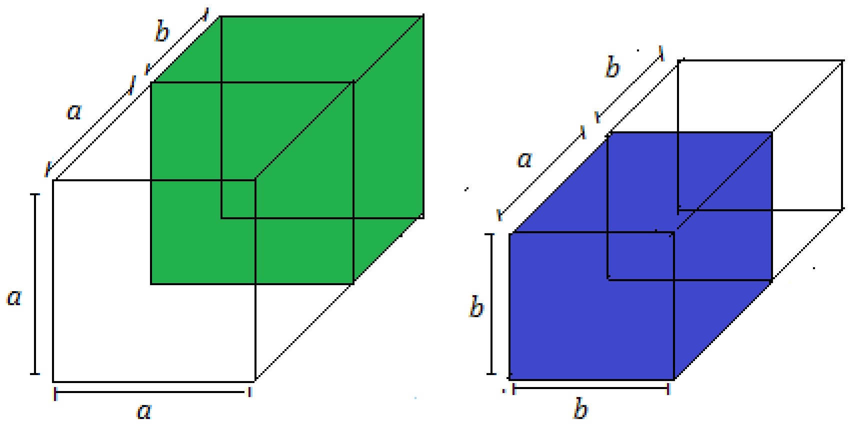


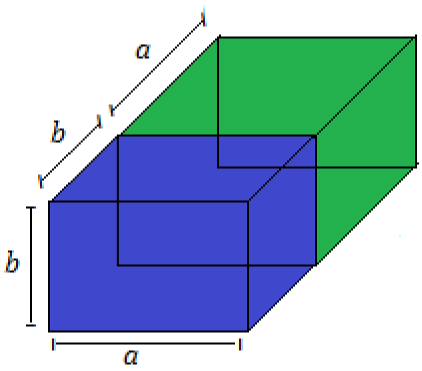
Colocando $(a + b)$ em evidência separando os retângulos temos:



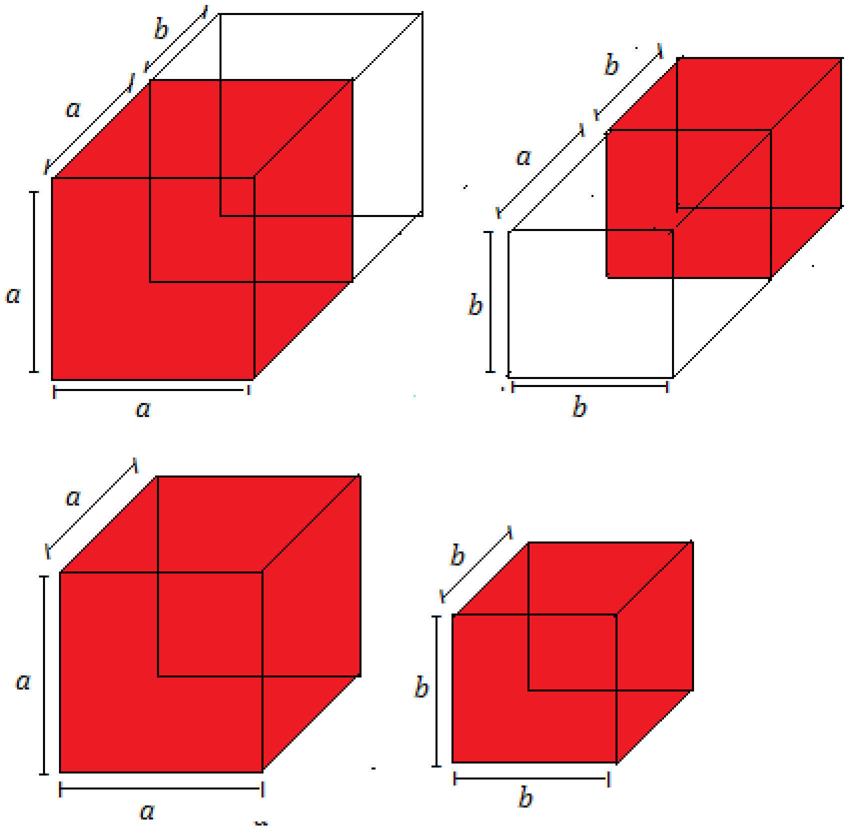
$(a+b)\cdot(a^2)$ e $(a+b)\cdot(b^2)$

Retiramos agora $(a+b)\cdot(ab)$.





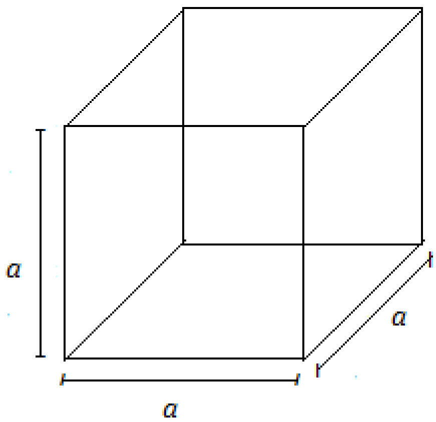
Restando assim a^3 e b^3, chegando a conclusão.



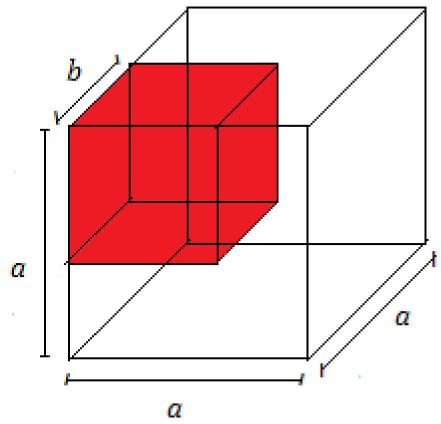
4.6.7 Diferença de cubos

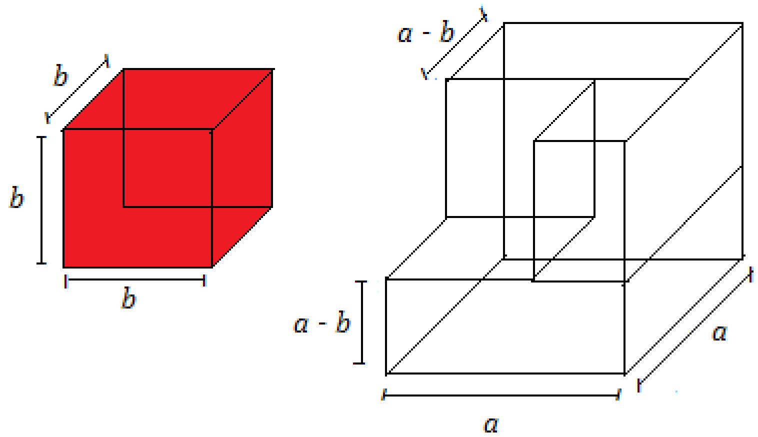
A diferença de dois cubos possui sua forma fatorada dada pelo produto que envolve a diferença das arestas dos cubos, vezes a aresta do primeiro ao quadrado, mais o produto do primeiro pelo segundo, mais a aresta do segundo ao quadrado. Algebricamente $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, para a e b arestas quaisquer.

Primeiramente consideramos um cubo de aresta a:

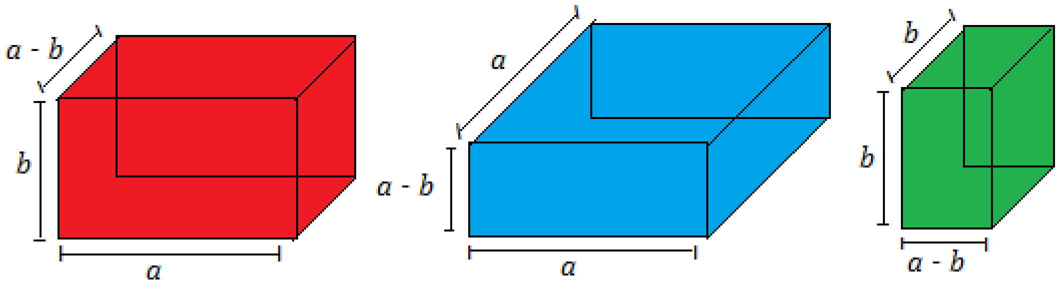


Agora seja b uma medida tal que $a > b$, fomentamos no cubo de aresta a um cubo de aresta b conforme citado, e em seguida o retiramos:

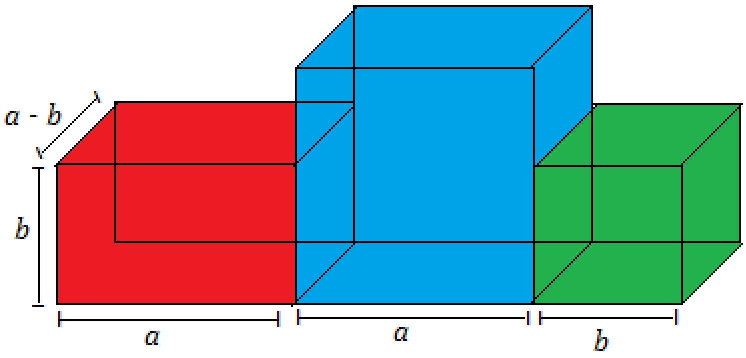




Desmembrando o que restou após a subtração entre os cubos, temos:



Agora, colocamos $(a - b)$ em evidência e chegamos a conclusão:



a - b
b
a
a
b

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o cenário venha mudando, a forma de ensinar Matemática ainda prioriza a memorização de fórmulas, a formalização de terminologias, mecanização de algoritmos. Sem fazer um paralelo com a realidade dos fatos diários, a profusão de números, símbolos e outros entes matemáticos, parecem etapas de um código difícil de ser decifrado. Tais atitudes proporcionam atitudes de indiferença, receio e até antipatia por uma disciplina que pode ser percebida e trabalhada em diversas atividades do dia a dia.

A importância das formalidades encontradas nas definições e teoremas que, reconhecidamente desenvolvem aspectos significativos na formação de um Educador, tais como: organizar, escrever, argumentar, estimar, demonstrar, dentre outros, deve ser sempre realçada. A rigidez inerente às operações realizadas deve ser interpretada como uma atividade que irá proporcionar um bem comum. Em conjunto com outras áreas de conhecimento, tem contribuído ao longo dos tempos na obtenção de resultados que melhoram a qualidade de vida da humanidade. Vista dessa forma, não há como pensar em uma Matemática, antipática e sem utilidade.

Se por um lado é verdade que a abordagem dos casos convencionais dos Produtos Notáveis, através dos métodos algébricos, é potencialmente mais prático e ágil, por outro lado, os Educadores não enfatizam sua relação com a Geometria Plana, Geometria Espacial, Desenho. Nem por isso, entendemos que a obtenção dos resultados através de um caminho que até então desconhecia, deva ser considerada mais importante do que as apresentadas na grande maioria dos livros didáticos e reproduzida mecanicamente pelos Professores de Matemática nas instituições de ensino em seus diversos níveis.

No entanto, verificar que o tema não é um mero truque proporcionado pelas operações algébricas e que tem a ver com outros tantos conteúdos, ainda que em Matemática, proporciona uma sensação de satisfação e de convicção, uma vez que para obtenção de resultados significativos no ensino de Matemática, passa pela mudança de postura do Professor.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOSQUILHA, Alessandra. **Minimanual compacto de Matemática:** Teoria e prática, ensino fundamental. 2. Ed. rev. São Paulo: Rideel, 2003.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Secretaria de Educação. Brasil: MEC/SEF,1998.

DANTAS,M.M.S(1987) Ensino de Matemática: um processo entre a exposição e a descoberta. Salvador: IFUFBA

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática, equação:** O idioma da Álgebra. Editora Ática, 2001.

IEZZI, Gelson. Dolce Osvaldo. Machado, Antonio. **Matemática e Realidad**e: 8ª série; 4 ed. Reform. São Paulo: Atual, 2000.

LONGEN, Adilson. **Matemática em movimento.** 8ª série; São Paulo: EB. 1999.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA,John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles**. A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

NETTO, Scipione di Pierro. **Matemática:** Conceitos e Histórias. 2 Ed. São Paulo: Scipione, 1995. (7ª série).

ONAGA, Dulce Santiago; NÉRI, Iracema. **Matemática:** Idéias e Desafios, 8ª série. São Paulo, Saraiva, 2002.

TOSSATO, Claudia Miriam; PERACCHI, Edilane de Pilar; ESTEPHAN,Violeta M**. Coleções Ideias e Relações**. Curitiba, Positivo, 1° edição, 2002.

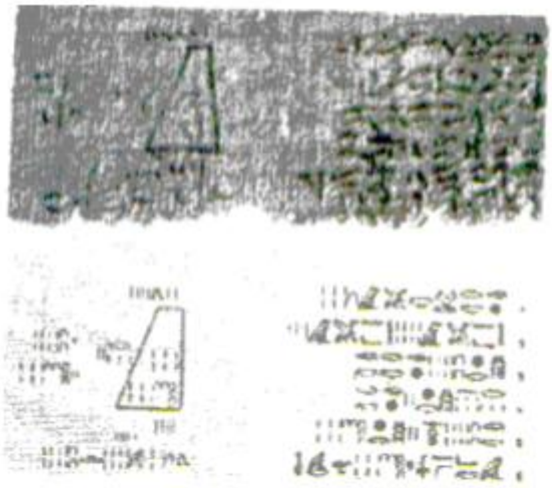
Sites

NOÉ, Marcos **Geometria Plana**. http://brasilescola.uol.com.br/matematica/geometria-plana.htm. Acesso em 15/nov./2015

SÁ, Robson.**Geometria Plana**. Disponível em: http://www.infoescola.com/geometria-plana/ Acesso em: 15/ nov./ 2015

ANEXOS

Papiro de Moscou



Papiro de Rhind