UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

AERCTON NASCIMENTO SILVA

FUNÇÕES QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2016

AERCTON NASCIMENTO SILVA

FUNÇÕES QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em matemática.

CAMPINA GRANDE
2016

S586f Silva, Aercton Nascimento.
Funções quadráticas [manuscrito] : estudo e aplicações / Aercton Nascimento Silva. - 2016.
52 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira, Departamento de Matemática".

1. Funções. 2. Função polinomial. 3. Função quadrática. 4. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.5

AERCTON NASCIMENTO SILVA

FUNÇÕES QUADRÁTICAS: ESTUDO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em matemática.

Aprovado em: 18/05/2016.

BANCA EXAMINADORA

Vandenberg Lopes Vieira

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Ginaldo de Souza Farias

Prof. Me. José Ginaldo de Sousa Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Joselma Soares dos Santos

Profª. Me. Joselma Soares dos Santos
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Aos meus avós maternos Severino Custódio e Roseny Araújo, *“In memoriam”*, com amor, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me sustenta e me dá forças para superar as dificuldades e limitações e me conduzir sempre através da sua soberana vontade.

À professora Maria Isabelle Silva, coordenadora do curso de Licenciatura Plena em Matemática, por seu empenho.

Ao professor Vandenberg Lopes Vieira pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação, pela dedicação, e acima de tudo paciência.

À minha mãe, que sempre esteve ao meu lado, nos bons e maus momentos, sempre me incentivando a prosseguir de cabeça erguida, encarando os problemas e vencendo os desafios.

Aos meus irmãos na fé Jefferson Andrade, Êxado Gaudêncio, pelo incentivo constante para vencer as dificuldades, dando-me ânimo, pelos momentos e palavras de serenidade, amor e repreensão.

Aos meus amigos Lemuel Guerra, Rodrigo Melo, Eustáquio Rangel, pelo incentivo, pelas palavras duras, porém honestas e sinceras, e acima de tudo pelo muito apreço, que se revela através de suas atitudes.

Aos meus colegas de trabalho Dilma Santos, Túlio Leal, Tatiana Alves, pelas palavras de incentivo e apoio para que eu pudesse concluir a graduação.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

“O pensamento lógico pode levar você, de A a B, mas a imaginação te leva a qualquer parte do Universo.”

Albert Einsten

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo, complementar estudos a respeito da função quadrática e aplicação da mesma. O conteúdo de funções tem importância nos estudos em Matemática, pois aparece em todos os níveis de ensino da educação básica, tanto no segundo segmento do ensino fundamental, quanto no ensino médio. Para desenvolver o trabalho, foi realizado uma pesquisa bibliográfica, levantando sobre a origem da definição, desde os conjuntos e relações, os diversos tipos de funções, até chegar na função quadrática, que é foco desse trabalho. A Função Quadrática é uma função polinomial definida por um trinômio de grau 2. Neste trabalho, foram utilizados softwares matemáticos como Winplot e o Geogebra para facilitar a compreensão de representações gráficas das funções. Considerando a importância do entendimento de funções para a matemática e para a compreensão de fenômenos relacionados a diversas áreas do conhecimento, as aplicações que compõem esse trabalho estão fundamentadas na contextualização dos conteúdos e na interdisciplinaridade que colaboram para um melhor entendimento das funções matemáticas.

Palavras-Chave: aplicações, conjuntos, função quadrática, gráficos, matemática.

ABSTRACT

This work aims, complementary studies of the quadratic function and implementation. The functions of content is important in studies in mathematics, as appears in all basic education levels of education, both in the second segment of the elementary school, as and especially in high school. To develop the work, a literature search was conducted, raising about the origin of the definition, since the sets and relations, the various types of functions, until you reach the quadratic function, which is the focus of this work. The quadratic function is a polynomial function defined by a degree of triad 2. In this work, mathematical software was used as Winplot and Geogebra to facilitate understanding of graphic representations of functions. Considering the importance of understanding functions for mathematics and for understanding phenomena related to various areas of knowledge, the applications that make up this work are based on the contextualization of the content and interdisciplinarity that contribute to a better understanding of math functions.

Keywords: applications, sets, quadratic function, graphics, mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence a
$\notin$	Não pertence a
$\emptyset$	Conjunto Vazio
#	Cardinalidade
$\subseteq$	Estar contido em
$\subset$	Estar contido
$\not\subset$	Não está contido
$\mathbb{N}$	Naturais
$\mathbb{Z}$	Inteiros
$\mathbb{Q}$	Racionais
$\mathbb{R}$	Reais
$\mathbb{C}$	Complexos
$\mathbb{Z}_+$	Inteiros positivos
$\mathbb{Q}_+$	Racionais positivos
$\mathbb{Q}_-$	Racionais negativos
$\mathbb{R}_+$	Reais positivos
$\mathbb{R}_-$	Reais negativos
A^*	Elementos não nulos de A
$\{\ \}$	Conjunto Vazio

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O papel que a Matemática possui é de fundamental importância no desenvolvimento da sociedade e seu entendimento torna-se cada vez mais necessário para a evolução científica e produção de novos saberes.

Dentre os diferentes conteúdos matemáticos o conceito de função é sem dúvida, um dos mais importantes. Isso se justifica pelo fato de que tal conceito estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos e pode ser aplicado no estudo de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.

No âmbito matemático básico, o estudo de funções relaciona-se diretamente com a álgebra, no que se refere as expressões algébricas presentes nas leis de formação de funções e na relação entre variáveis, e com a geometria analítica, que utiliza de um sistema de eixos coordenados para a representação de seus gráficos.

A trigonometria tem boa parte de seu estudo e aplicações fundamentados nas funções trigonométricas e seus gráficos. Progressões aritméticas e geométricas também podem ser analisadas através de relações funcionais. Na matemática financeira, podemos relacionar as grandezas envolvidas no cálculo de juros simples ou compostos através de funções.

Podemos citar ainda as conexões estabelecidas entre o estudo de funções e as outras áreas do conhecimento. No ensino da Física, vários fenômenos são descritos através de funções, como, por exemplo, no estudo dos movimentos, onde a distância percorrida por um móvel pode ser dada em função do tempo.

Na Química e na Biologia também são inúmeras as situações onde as funções podem ajudar a descrever e compreender seus fenômenos. A decomposição de algumas substâncias radioativas e o crescimento de uma população de bactérias podem ser representados através de funções exponenciais.

Na área das ciências sociais, econômicas e geográficas, as relações funcionais são úteis para descrever fenômenos, criar modelos que representem a realidade e que podem, por vezes, simular situações futuras.

Estas breves considerações nos mostram o quanto o estudo de funções é importante tanto para o desenvolvimento da própria Matemática, bem como para a compreensão de vários fenômenos naturais, econômicos ou sociais.

Seguindo esse entendimento, este trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem acerca de funções quadráticas, e suas aplicações, desde sua origem, passando por noções de conjunto, de relações e funções.

Para desenvolver o trabalho, realizamos um levantamento bibliográfico relacionado ao tema, seja por livros, trabalhos publicados ou sites especializados de modo a darmos uma abordagem sobre funções quadráticas. Em seguida, continuamos com o estudo, resumos e fichamentos de informações relevantes ao conteúdo e, por fim, realizamos a produção em forma escrita desse Trabalho de Conclusão de Curso.

Para alcançar os objetivos deste trabalho, organizamos capítulos apresentadas a seguir. O capítulo 1 consiste em uma introdução apresentando as justificativas, metodologia e objetivo. O capítulo 2 contém um levantamento histórico, considerando a ordem cronológica do tempo e incluindo fatos relacionados ao desenvolvimento do conceito de função quadrática, até culminar com o que se utiliza atualmente. Traz ainda considerações acerca de relações e funções, em especial as funções quadráticas. No capítulo 3 são apresentados estudos e diferentes aplicações da função quadrática. E na última parte apresentamos a conclusão do trabalho.

CAPÍTULO 1

1 CONCEITUAÇÃO DE CONJUNTO E FUNÇÃO

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos de Conjunto, Relação e Função, os quais serão abordados no intuito de subsidiar os capítulos posteriores. Não faremos, portanto, um estudo mais aprofundado desses conceitos – devido aos objetivos a que o trabalho se propõe – destacaremos sim, os resultados necessários para que o leitor tenha a compreensão dos assuntos que dependem destes.

1.1 NOÇÕES GERAIS SOBRE CONJUNTOS

A noção de Conjunto, em matemática, é considerada primitiva, ou seja, não se define o que seja um conjunto. Intuitivamente, um conjunto é uma coleção, grupo, ou lista de elementos que tem uma ou mais propriedades em comum.

A Teoria dos Conjuntos, essencialmente criada pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), tornou-se o elemento central da estruturação do conhecimento matemático. Esta é uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos. Nessa teoria, Cantor apresenta demonstrações novas de fatos conhecidos e, ao lado disso, inúmeros fatos novos. A mesma contribuiu decisivamente para que se passasse a encarar, sob outra perspectiva, os problemas da matemática, desde os que surgem nos fundamentos da disciplina até os que são típicos de ramos especializados da álgebra, da análise e da geometria.

Tentando, em poucas palavras, dar uma ideia sobre a obra de Cantor, resumimos informalmente a teoria dos conjuntos em pontos chaves:

Intuitivamente, um conjunto é uma coleção ou classe de objetos, também chamados de elementos ou membros. A notação de pertinência serve para indicar que um elemento x pertence a um conjunto A e é denotado por $x \in A$. Se ele não pertence a A, escreve-se $x \notin A$.

Dois conjuntos são iguais se possuem exatamente os mesmos elementos (princípio da extensionalidade). Conjunto vazio é o conjunto que não possui nenhum elemento e é denotado por $\emptyset$. Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos.

A cardinalidade de um conjunto A, intuitivamente indica o número de elementos do conjunto e é denotada por $\#A$. Um conjunto não possui ordenação. Isso significa que não importa a ordem em que seus elementos são postos. Além disso, elementos repetidos podem ser excluídos. Desse modo, os conjuntos $\{2, 5, 8\} = \{8, 5, 2\} = \{5, 5, 8, 2, 8\}$, são iguais.

Podemos representar o conjunto dos objetos que têm uma determinada propriedade $P(n)$, de modo que $S = \{x \mid P(x)\}$. Por exemplo, $S = \{i \mid i = 2n + 1 \; e \; n \in \mathbb{N}\}$, define o conjunto dos números ímpares.

Um conjunto unitário possui um único elemento.

Um conjunto A é dito estar contido em B (escreve-se $A \subseteq B$) se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, desta forma, A é subconjunto de B. Por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos que, $A = \{0, 2, 4\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ou $A \subseteq B$.

Um conjunto A é igual a um conjunto B (escreve-se $A = B$) se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{x \mid x$ é *par, positivo, maior que* 1 *e menor que* $7\}$, temos que $A = B$.

Um conjunto A está contido propriamente no conjunto B (escreve-se $A \subset B$) se, e somente se, $A \subseteq B$ e $A \neq B$. Desta forma A é subconjunto próprio de B e, caso contrário, é subconjunto impróprio.

O próprio Cantor encontra falhas na sua Teoria. Já em 1985, tinha encontrado uma antinomia, que mais tarde, cerca de 1897, Cesare Burali-Forti (1861-1931) apresentou o paradoxo que diz respeito à coleção de todos os ordinais.

O paradoxo de Cantor é outra falha encontrada na teoria, falha esta mais simples e mais fundamental sobre conjuntos. Em carta a Richard Dedekind (1831-1881), Cantor observa que não se pode falar, sem cair em contradição, da classe do todos os conjuntos cardinais como formando um conjunto, ou mesmo do “conjunto de todos os conjuntos”.

Porém, o que mais retratou a falta de bases sólidas para os fundamentos da teoria dos conjuntos, foi o Paradoxo de Russell, tratado adiante com mais clareza. Logo após, compreende-se que as demais antinomias eram, na verdade, contradições na obra de Cantor, e que era necessário rever os seus fundamentos.

1.2 CONJUNTO, ELEMENTO E PERTINÊNCIA

Assim como alguns elementos na geometria elementar, como reta e plano, conjunto é um ente primitivo e, portanto, não é definido. No entanto, os livros trazem uma abordagem conceitual sobre este assunto, através de exemplificações, o que torna possível a universalização de sua ideia.

Podemos entender por conjunto como agrupamento de objetos ou coleção de objetos. Por exemplo:

a) Conjunto das letras do alfabeto;
b) Conjunto dos estados brasileiros da Região Nordeste;
c) Conjunto dos signos do zodíaco;
d) Conjunto dos algarismos pares.

Cada componente que é incluído na formação do conjunto é chamado **elemento**. Dessa forma, nos exemplos anteriores, temos os elementos:

a) $\mathrm{a, b, c, d, e, f, \ldots, z;}$
b) $\mathrm{Paraíba, Pernambuco, Rio\ Grande\ do\ Norte, Maranhão, etc;}$
c) $\mathrm{Áries, Touro, Gêmeos, \ldots, Peixes;}$
d) $\mathrm{2, 4, 6, 8.}$

É importante frisar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo, o conjunto dos times que disputam o Campeonato Brasileiro é formado por equipes que, por sua vez, são conjuntos de jogadores.

Em geral, denotamos conjuntos por letras maiúsculas: $A, B, C, etc.$, e seus elementos por letras minúsculas: $a, b, c, d, e, f, etc.$ Em casos específicos, usamos letras maiúsculas, mesmo para denotar elementos de um conjunto, nos casos em que um conjunto é elemento de outro conjunto.

De acordo com Vieira (2015), para indicar que um elemento, x, por exemplo, é componente de um conjunto A, escrevemos $x \in A$ (lê-se "$x\ pertence\ a\ A$" ou "$x\ está\ em\ A$"). Se x não é componente de A, escrevemos $x \notin A$ (lê-se "$x\ não\ pertence\ a\ A$" ou "$x\ não\ está\ em\ A$").

Um conjunto A pode ser descrito através de dois recursos principais, por meio de forma discursiva, ou seja, citamos ou enumeramos os seus elementos ou expressamos através de declarações precisas em palavras.

Exemplo 1: Seja o conjunto A formado por todos os números primos entre $0\ e\ 20$. Logo o conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Exemplo 2: Seja o conjunto B formado por todos os números pares maiores do que 5. Logo o conjunto $B = \{6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$

Notemos que nestes casos é fácil perceber quais são os elementos que pertencem ao conjunto A e quais elementos pertencem ao conjunto B, pois a forma discursiva, bem como a citação dos elementos foi clara e de fácil percepção. No entanto, nem sempre é possível utilizar-se deste recurso para descrever os elementos de um conjunto, neste caso, utilizamos outro recurso e ele será identificado por meio de uma propriedade característica P de seus elementos. Dessa forma, tem-se que:

$$A = \{x : x\ tem\ a\ propriedade\ P\}$$

E lemos "A é $o\ conjunto\ dos\ elementos\ x\ que\ t\hat{e}m\ a\ propriedade\ P$".

Exemplo 3: Seja o conjunto $C = \{x \mid x$ é $uma\ vogal\ do\ alfabeto\ brasileiro\}$. Logo, $C = \{a, e, i, o, u\}$.

Exemplo 4: Seja o conjunto $D = \{x \mid x$ é $divisor\ inteiro\ positivo\ de\ 9\}$. Assim, $D = \{1, 3, 9\}$.

Quanto aos conjuntos numéricos clássicos, eles serão denotados por ℕ, ℤ, ℚ, ℝ, ℂ, a saber:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ O conjunto dos números naturais,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ O conjunto dos números inteiros,

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0\}$ O conjunto dos números racionais,

$\mathbb{R}$ = é o conjunto dos números reais,

$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ O conjunto dos números complexos, em que $i^2 = -1$.

Temos também, conforme Vieira (2013), que $\mathbb{Z}^{*}{}_{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}\ e\ \mathbb{Z}^{*}{}_{-} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$, respectivamente: conjunto os números inteiros positivos, menos o zero, e conjunto dos números inteiros negativos, menos o zero. Analogamente, temos os conjuntos $\mathbb{Q}_{+}, \mathbb{Q}_{-}, \mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}_{-}$. Além disso, para os conjuntos numéricos $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$, denotaremos por A^{*} ao conjuntos dos elementos não nulos de A, ou seja,

$$A^{*} = \{x \in A : x \neq 0\}.$$

Subconjuntos

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é **subconjunto** de B, e denotamos por $A \subset B$ (lê- se "$A\ está\ contido\ em\ B$"), se todo elemento de A é também elemento de B. Denotamos também $B \supset A$ (lê-se "$B\ contém\ A$"). Respectivamente, a negação de $A \subset B$ será denotada por $A \not\subset B$ (lê-se "$A\ não\ está\ contido\ em\ B$"), a qual é verdadeira quando existir em A ao menos um elemento que não pertence a B. Desta forma, temos que $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$.

E a negação de $B \supset A$ será denotada por $B \not\supset A$ (lê-se "$B\ não\ contém\ A$"), a qual é válida nas mesmas condições de $A \not\subset B$.

Exemplo 5: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$. Temos que $B \subset A, C \subset A$. Ou ainda que $A \supset B, A \supset C$.

Conjunto Unitário e Conjunto Vazio

Define-se como **conjunto unitário** aquele que possui um único elemento. Por exemplo:

a) O conjunto dos números naturais compreendidos entre 0 e 2.
   Nesse caso, existe somente um elemento, o número 1. Representado por {1}.
b) Seja A o conjunto dos inteiros que são raízes da equação $2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1 = 0$.
   Então $A = \{1\}$.

O conjunto **vazio** é aquele que não possui nenhum elemento. A sua representação pode ser feita utilizando duas simbologias: { } ou $\emptyset$. Por exemplo:

a) O conjunto dos números naturais antecessores ao 0 (zero) é considerado vazio, pois nos números naturais não existe antecessor de zero.

b) Seja D o conjunto definido por $D = \{ x \mid x\ \textit{é o mês do ano cuja nome começa com a letra}\ P\}$. Então $D = \emptyset$.

Podemos obter um conjunto vazio quando se descreve um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa. Por exemplo:

$\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$.

$\{x \mid x\ \text{é}\ impar\ e\ múltiplo\ de\ 2\} = \emptyset$.

$\{x \mid x > 0\ e\ x < 0\} = \emptyset$.

1.3 RELAÇÃO BINÁRIA

Para definirmos o conceito de **Relação Binária**, abordaremos alguns conceitos imprescindíveis para a compreensão do nosso estudo.

Podemos entender como **par ordenado**, um conjunto formado por dois elementos a e b, onde chamamos a de primeiro elemento e b de segundo elemento.

Em nosso estudo sobre relações, a ordem dos elementos é significativa. Dessa forma, definiremos par ordenado como sendo o conjunto formado por dois elementos. Vieira (2015) afirma que de forma rigorosa, um par ordenado (a, b) é definido como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, isto é, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Podemos entender como **Sistema Cartesiano**, o plano $\boldsymbol{\alpha}$ definido pela intersecção das retas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, perpendiculares entre si, cuja intersecção chamamos de **origem** ou $\mathbf{0}$. Como mostrado no gráfico da Figura 1.

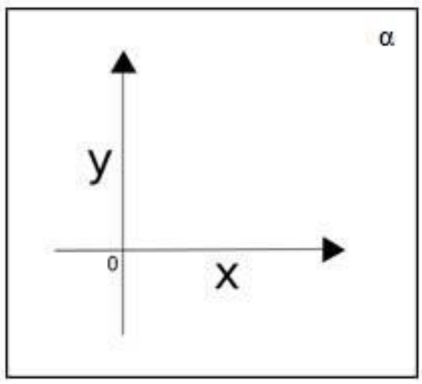

Figura 1: Gráfico do Plano Cartesiano

Tomemos agora um certo ponto $\boldsymbol{P}$ no plano cartesiano, $P \in \alpha$. Tracemos por ele duas retas x' e y', de tal forma que x' seja paralela a x, e y' seja paralela a y, conforme mostrado no gráfico da Figura 2.

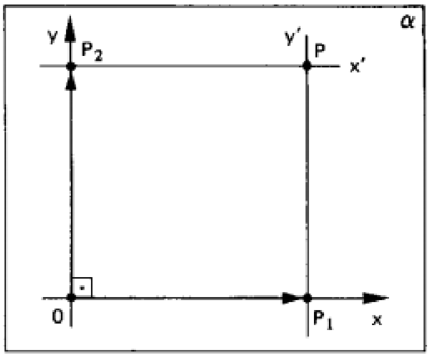

Figura 2: Gráfico do Plano Cartesiano

O ponto de intersecção entre as retas x e y', chamaremos de P_1, e o ponto de intersecção entre y e x', chamaremos de P_2. Nestas condições, Iezzi (1977) define:

a) Abscissa de P é o número real x_p representado por P_1;
b) Ordenada de P é o número real y_p representado por P_2;
c) Coordenadas de P são os números reais x_p e y_p, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p), onde x_p é o primeiro termo;
d) Eixo das abcissas é o eixo x (ou $\boldsymbol{\theta}x$);
e) Eixo das ordenadas é o eixo y (ou $\boldsymbol{\theta}y$);
f) Sistema de eixos cartesiano ortogonal (ortonormal ou retangular) é o sistema $x0y$;
g) Origem do sistema é o ponto $\mathbf{0}$;
h) Plano cartesiano é o plano α.

Como exemplo, na Figura 3 temos a localização no plano cartesiano dos pontos $A(3,3), B(-3,2), C(2,0), D(-2,-4), E(4,-3)$ e $F(0,-2)$.

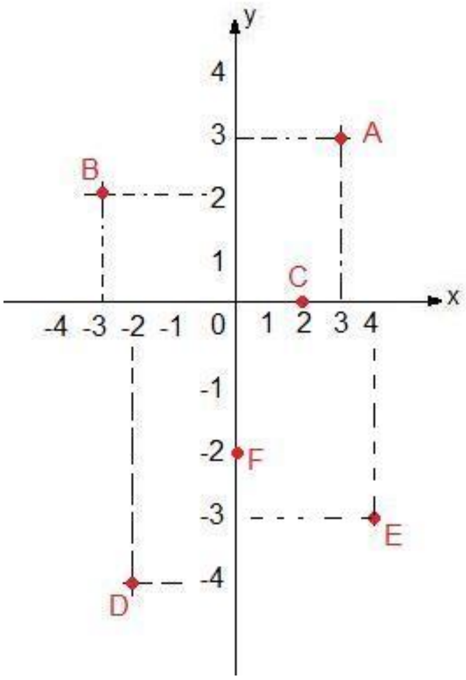

Figura 3: Localização de pontos do exemplo no Plano Cartesiano

Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 7, 9\}$, formaremos todos os pares ordenados possíveis tal que o primeiro elemento pertença ao Conjunto A, e o segundo elemento pertença ao Conjunto B. Assim, os pares possíveis são: $(2, 1), (2, 7), (2, 9), (4, 1), (4, 7), (4, 9), (6, 1), (6, 7), (6, 9)$.

Então, o conjunto de todos esses pares ordenados chamaremos de **produto cartesiano** de A por B, ou ainda A cartesiano B, e o indicaremos por $A\,X\,B$.

Definição 1: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto $A\,X\,B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B (Iezzi,1977).

$$A\,X\,B = \{(x, y) \mid x \in A \;e\; y \in B\}.$$

Se A ou B for o conjunto vazio, definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio. Dessa forma,

$$A\,X\,\emptyset = \emptyset = \emptyset\,X\,B = \emptyset = \emptyset\,X\,\emptyset = \emptyset.$$

Se $A = B$ ou $B = A$, então o produto cartesiano de A por B pode ser denotado $A\,X\,A = A^2$.

Exemplo 6: Considerando os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}\ e\ B = \{1, 6, 7, 9\}$, podemos representar este produto cartesiano por meio de diagrama de flechas, mostrado na Figura 4:

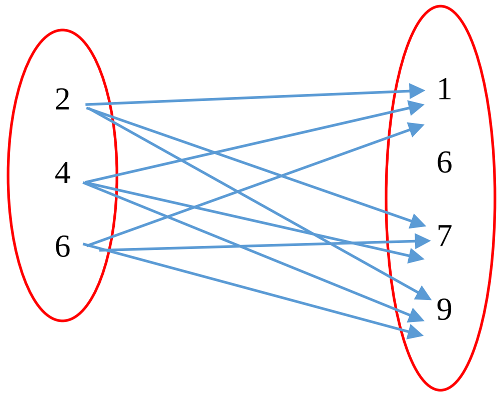

Figura 4: Diagrama de Flechas- Produto Cartesiano

Também podemos representar este produto cartesiano através de gráfico, como o mostrado na Figura 5:

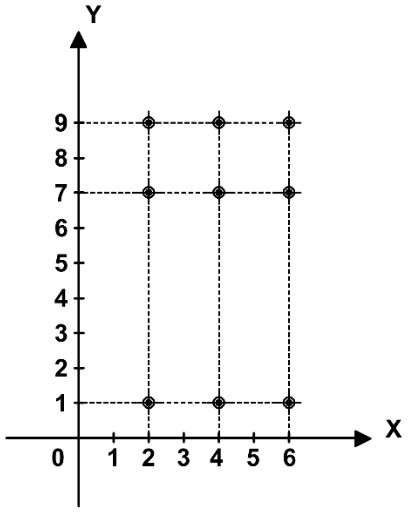

Figura 5: Um dos modos de gráficos representativos do Produto Cartesiano

Portanto:

$$A\ X\ B = \{(2,1), (2,7), (2,9), (4,1), (4,7), (4,9), (6,1), (6,7), (6,9)\}.$$

Exemplo 7: Consideremos os seguintes conjuntos: $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por definição o produto cartesiano de A por B é $A\ X\ B = \{(x, y) \mid x \in A\ e\ y \in B\}$.

Ou ainda:

$A\ X\ B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

Seja R_1 o subconjunto de $A\ X\ B$ formado pelos pares ordenados (x, y) de A por B, tais que $x|y$ (lê-se x é divisor de y, ou simplesmente x divide y), isto é,

$$R_1 = \{(x, y)\ \in\ A\ X\ B|\ x|y\}.$$

Teremos, de acordo com os pares ordenados definidos anteriormente em $A\ X\ B$, como solução o subconjunto $R_1 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 4), (6, 6)\}$.

Seja R_2 o subconjunto de $A\ X\ B$ formado pelos pares ordenados (x, y) de A por B, tais que $y|x$, isto é,

$$R_2 = \{(x, y)\ \in\ A\ X\ B|\ y|x\}.$$

Teremos, de acordo com os pares ordenados definidos anteriormente em $A\ X\ B$, como solução o subconjunto $R_2 = \{(2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

Os conjuntos R_1 e R_2 são denominados Relações Binárias ou simplesmente Relações de A em B. De um modo geral, temos a definição:

Definição 2: Dados dois conjuntos A e B, chama-se **Relação Binária** de A em B todo subconjunto R de $A\ X\ B$.

R é a Relação Binária de A em B se e somente se, $R\ \subset\ A\ X\ B$.

Quando o par ordenado (x, y) pertencer a Relação Binária, escrevemos $x\ R\ y$ (lê-se "x erre y"), no que segue:

$$(x, y)\ \in R\ \Leftrightarrow x\ R\ y.$$

Analogamente temos:

$$(x, y) \notin R\ \Leftrightarrow x \not R\ y.$$

Exemplo 6: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considerando a seguinte relação $R = \{(x, y)\ |\ x\ =\ y\}$ de A em B. Deste modo,

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}.$$

Definição 3: Se R é uma relação de A em B, então definimos o **Domínio** de R indicado por $D(R)$ ao conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) que pertencem a R.

$$x \in D(R) \Leftrightarrow \exists\ y \in B\ tal\ que\ (x, y) \in R.$$

Já a **imagem** é o conjunto $Im(R)$ de todos os segundos elementos dos pares ordenados (x, y) que pertencem a R.

$$y \in Im(R) \Leftrightarrow \exists x, x \in A \; tal \; que \; (x, y) \in R.$$

Decorre da definição que $D(R) \subset A$ e $Im(R) \subset B$.

Exemplo 7: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. E a relação $R = \{(x, y) \mid x \;\; y\}$ de A em B. Então, o Domínio $D(R) = \{2, 4, 6\}$ e a Imagem $Im(R) = \{2, 4, 6\}$

Observe que $D(R) \subset A$ e $Im(R) \subset B$.

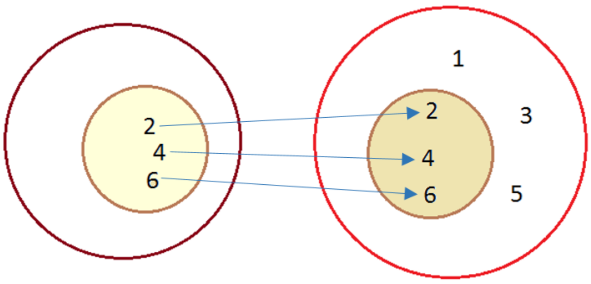

Figura 6: Domínio e Imagem do Exemplo 1.

Exemplo 8: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considerando a seguinte relação R de A em B definida por:

$$x \, R \, y \Leftrightarrow x = y + 1.$$

Logo, $D(R) = \{2, 4, 6\}$ e $Im(R) = \{1, 3, 5\}$.

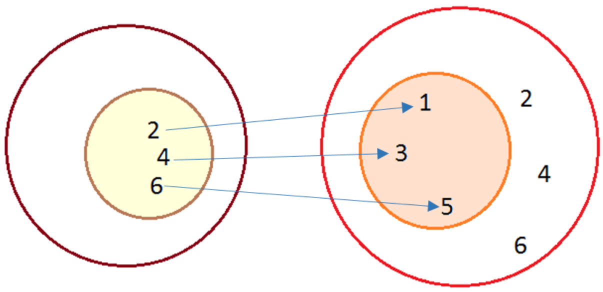

Figura 7: Domínio e Imagem do Exemplo 2.

Exemplo 9: Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq y \leq 7\}$. Considerando $R = \{(x, y) \in A \, X \, B \; tal \; que \; x|y\}$, temos que:

$$D(R) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } Im(R) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

1.4 FUNÇÃO

CONTEXTO HISTÓRICO DA DEFINIÇÃO

A Matemática possui um papel importante no desenvolvimento da sociedade, e sua presença na educação escolar torna-se cada vez mais necessária para a evolução científica e produção de novos saberes. Entre os conhecimentos que são fundamentais para o desenvolvimento da matemática está a noção de função. A definição de função reflete também na ideia intuitiva de função como correspondência entre os “valores” de uma grandeza e os “valores” de outra grandeza que dela depende.

O conceito de função foi se desenvolvendo ao longo da história, isto é, precisou-se de vários séculos para que desde as primeiras noções intuitivas, chegássemos ao complexo estudo das funções presente em nossos dias. Tal conceito de função passou por evoluções acentuadas (EVES, 2004). Esse fato é percebido ao se atentar para os vários refinamentos desse processo evolutivo. Possivelmente, os babilônios tinham uma ideia, não pouco vaga, de função, de fato, sabe-se de tábuas de quadrados, de cubos e de raízes quadradas utilizadas por eles na antiguidade, principalmente na astronomia.

As primeiras noções de relação funcional surgiram da necessidade de relacionar dois conjuntos de acordo com uma regra ou uma lei, da necessidade de explicar um fenômeno, suas variações e alterações.

A ideia de função matemática esteve sempre ligada historicamente à evolução do conhecimento de correspondências físicas. As associações matemáticas e os fenômenos naturais tornaram-se um canal facilitador na busca da generalização adequada para o conceito de função, por parte dos matemáticos da época, por volta do século XIV.

No século XVII, surgiu a utilização de eixos cartesianos para a representação de uma função com o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). Neste mesmo século, outras importantes contribuições foram dadas para o desenvolvimento do conceito de função, com destaques para Kepler (1571-1630), com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias, e Galileu, com o estudo da queda dos corpos e a relação entre espaço e tempo.

No século XVIII, o filósofo e matemático alemão Leibniz (1646-1716) criou vários termos e símbolos para o uso na matemática. Foi ele quem primeiro utilizou o termo função no desenvolvimento da Análise Matemática. Um pouco mais tarde, a definição de função surge com o matemático suíço Leonard Paul Euler (1707-1783). A definição de função surgia de forma um tanto confusa nos “fluentes” e flexões de Newton (1642-1727).

Newton aproximava-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para se designar variável dependente, e "gentia" para designar a quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Foi Leibniz quem primeiro usou o termo função em 1673 e introduziu igualmente a terminologia de "constante" e "variável". Em 1794, Leibniz introduziu o termo matemático "função" para descrever quantidades relacionadas a uma curva, como a inclinação dela ou um ponto específico da curva. Essas funções relacionadas às curvas são chamadas de diferenciáveis.

O termo função ainda não aparecia num contexto matemático em 1716, mas após dois anos, Johann Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante. A função era, então, um modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis. Assim o conceito de função que nos aparenta ser simples é o resultado de uma evolução histórica, sendo que com nossos estudos conseguimos cada vez mais ampliar o conhecimento perante esse assunto.

A definição de função surgiu com Leonard Euler que escreveu "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama – se função da dita variável". Foi também Euler quem utilizou pela primeira vez a notação $f(x)$.

> De modo geral, uma função y de uma variável $x, y = f(x)$, é uma relação entre pares de elementos com dois conjuntos numéricos X e Y, tal que para cada elemento x do primeiro conjunto X um e apenas um elemento y do segundo conjunto Y é associado. (...) A regra funcional, ou "lei", pode ser introduzida de várias formas: Verbalmente, por uma tabela de valores x e y, por uma expressão analítica, por um gráfico, etc., sujeita apenas a condição de que esta regra definida e uma vez dada o valor de x, esta regra definida e, para achar o valor de y. (DIRICHLET – BOURLAKE apud GUAREZZI, 1996. 103 p.).

No século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da Matemática. Weierstrass defendia que se construísse o cálculo infinitesimal sobre a aritmética ao invés, da geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz. No final do século, os matemáticos começaram a formalizar toda a Matemática usando a Teoria dos Conjuntos.

Foi Dirichlet que criou a definição formal de função. Nessa definição, uma função é o caso especial de uma relação de um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados.

Bento de Jesus Caraça (1901-1948), matemático português, define função da seguinte forma: Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x, escreve-se $y = f(x)$, se entre duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$; x é a variável independente e y é a variável dependente. Existem ainda dois modos de definição de função. Um chama-se definição analítica e a outra definição geométrica. A primeira traduz uma lei matemática de um determinado fenômeno e a segunda que é a definição geométrica relaciona a imagem geométrica da função num sistema de referência cartesiano.

É possível perceber que a definição de função foi aprimorada com o passar do tempo, de acordo com a curiosidade e necessidade de alguns estudiosos em estabelecer uma definição mais precisa e rigorosa que consiste basicamente em chamar de função ou aplicação f a uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B que a cada elemento x do primeiro conjunto faz corresponder um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto (NEVES, 2005). Simboliza-se do seguinte modo:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \mapsto f(x) = y,$$

Em que x é o objeto e $f(x) = y$ é a imagem.

A variável y depende da variável x. Neste caso, dizemos que y é a variável dependente e x é a variável independente.

Ao conjunto A, o conjunto dos objetos, chama-se domínio da função e representa-se por $D(f)$ ou D. Ao conjunto B chama-se conjunto de chegada da função. Ao conjunto B dá-se o nome de **contradomínio** da função. Indica-se o contradomínio da função f por $CD(f)$. Logo, $CD(f) = B$.

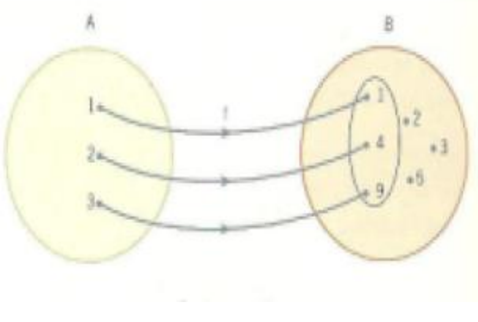

Figura 8: Domínio e Contradomínio

1.4.1 Classificação das funções

As funções possuem algumas propriedades que as caracterizam e podem ser classificadas de acordo com seu comportamento domínio-imagem.

1.4.1.1 Função Injetora

Uma função f de A em B é injetora se os elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, quando,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

ou equivalentemente,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

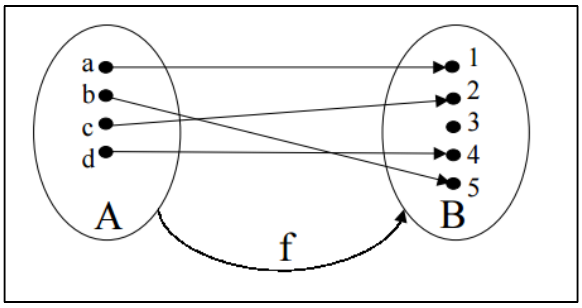

Figura 9: Exemplo de gráfico de uma função injetora.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a função de A em B definida por $y = x + 2$ é injetora. Todos os elementos de B, que possuem correspondência com elementos de A tem um único correspondente, observe o diagrama da figura 10.

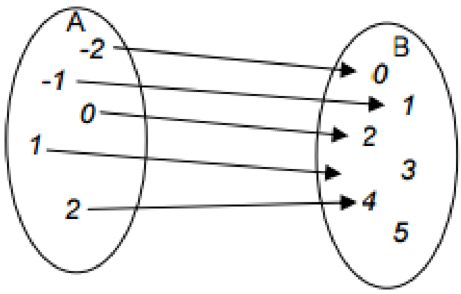

Figura 10: Diagrama de uma função injetora.

Contra - exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 6\}$, a função $f(x) = \{(x, y) \in A\,X\,B \mid y = x^2 + 2\}$ não é injetora, pois existe elemento de B, no caso os elementos 3 e 6, que possuem mais que uma correspondência com elementos de A, como visto no diagrama da figura 11.

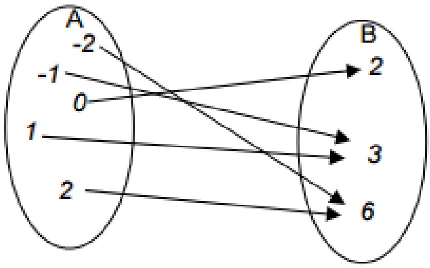

Figura 11: Diagrama de uma função não injetora.

1.4.1.2 Função Sobrejetora

Uma função f de A em B é sobrejetora quando o seu conjunto imagem é especificadamente igual ao contradomínio, $Im(f) = B$. Assim, uma função f de A em B é chamada sobrejetora, se e somente se para todo $b \in B$, existe um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$, ou seja, quando todos os elementos de B são imagens dos elementos de A.

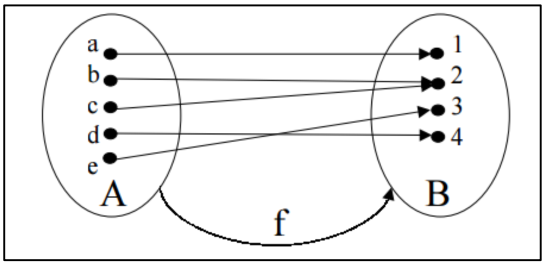

Figura 12: Exemplo de gráfico de uma função sobrejetora.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 6\}$ a função $f(x) = \{(x, y) \in AXB \mid y = x + 2\}$ é sobrejetora. Pois $Im(f) = B$ conforme visto no diagrama da figura 13.

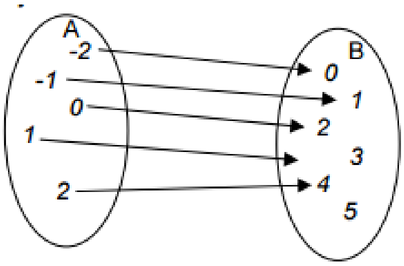

Figura 13: Diagrama de uma função sobrejetora.

Contra exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a função de A em B definida por $y = x + 2$ não é sobrejetora, pois $5, 3, 1 \in B$ e não tem correspondência com elementos de A, como visto no diagrama a seguir.

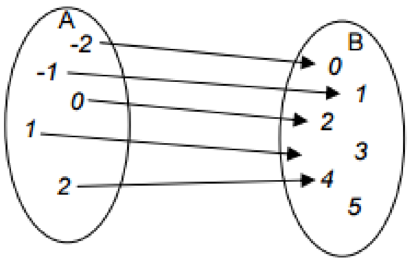

Figura 14: Diagrama de uma função não sobrejetora.

1.4.1.3 Função Bijetora

Uma função f de A em B é chamada bijetora, se e somente se ela for injetora e sobrejetora, simultaneamente.

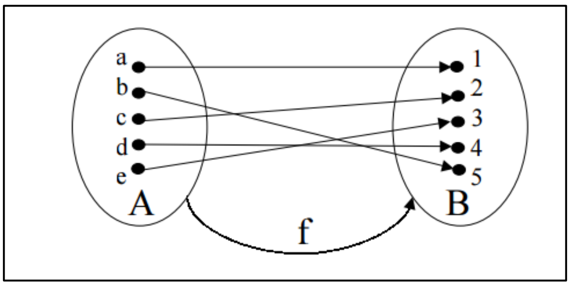

Figura 15: Exemplo de gráfico de uma função bijetora.

Exemplo: Dado os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a função de A em B definida por $y = x^2 + 2$ é: – Sobrejetora , pois todos os elementos de B possuem correspondência com elementos de A – Injetora, pois todos os elementos de B que se correspondem com elementos de A tem só um correspondente, logo é bijetora. Observe o diagrama da figura 16.

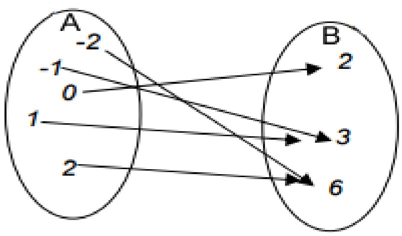

Figura 16: Diagrama de uma função bijetora.

Temos alguns casos em que a função não é bijetora.

Contra - exemplo 1: Apenas Injetora.

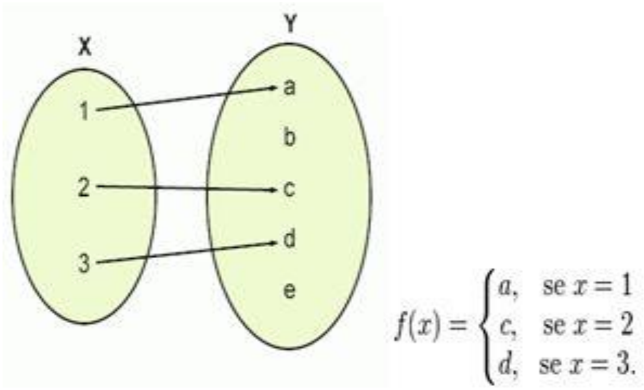

Figura 17: Diagrama de uma função não bijetora.

A função dada não é bijetora, pois a mesma não é sobrejetora. Percebe-se isso pelo simples fato de que o conjunto do contradomínio é diferente do conjunto imagem.

Contra - exemplo 2: Apenas Sobrejetora.

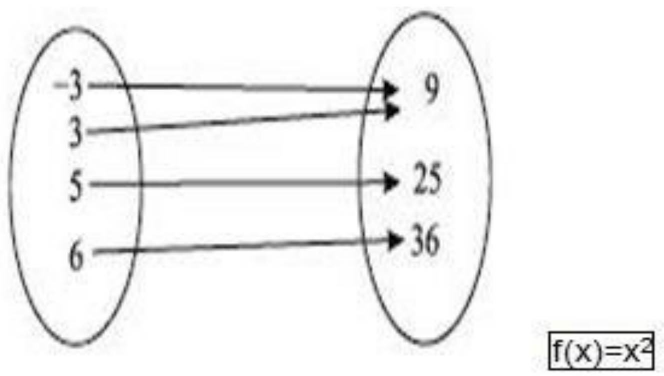

Figura 18: Diagrama de uma função não bijetora.

Essa função também não é bijetora uma vez que não é injetora. Vê-se pelo simples fato de que o elemento -3 e 3 pertencente ao conjunto domínio tem a mesma imagem (9). Sendo assim elementos distintos tendo a mesma imagem representa uma função que não é injetora, consequentemente não é bijetora.

CAPITULO 2

2. FUNÇÃO DO 2º GRAU OU QUADRÁTICA

Toda função estabelecida pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c números reais e $a \neq 0$, é denominada função do 2º grau ou Quadrática, sendo x uma variável real.

As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em situações relacionadas à Física envolvendo movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo, etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas; na Administração e Contabilidade relacionando as funções custo, receita e lucro; na Engenharia Civil presente nas diversas construções, dentre outras.

A representação geométrica de uma função do 2º grau é dada por uma parábola, que de acordo com o sinal do coeficiente "a" pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.

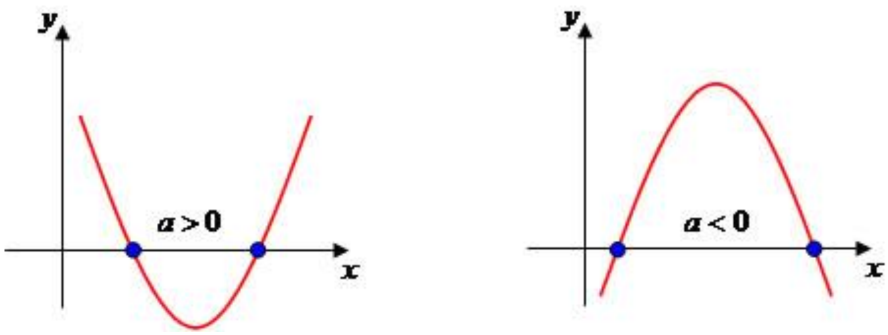

Figura 19: Representação geométrica de uma função do 2º grau.

As raízes de uma função do 2º grau são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x, ou seja, os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Dada a função $f\ (x) = ax^2 + bx + c$, se $f\ (x) = 0$ obtemos uma equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, dependendo do valor do discriminante $\Delta = b2 - 4ac$, podemos ter as seguintes situações gráficas:

- $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e diferentes. A parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos.

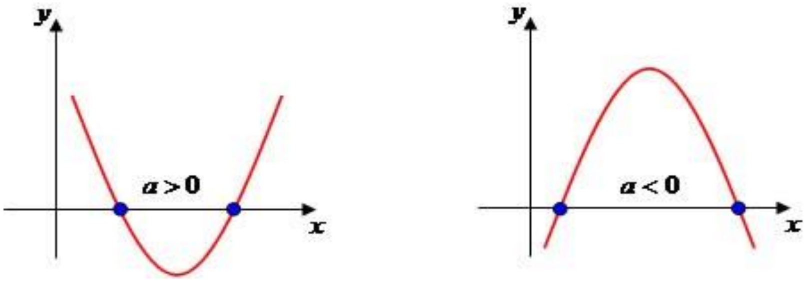

Figura 20: Gráfico de uma equação do 2º grau com $\Delta > 0$.

- $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma raiz real. A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.

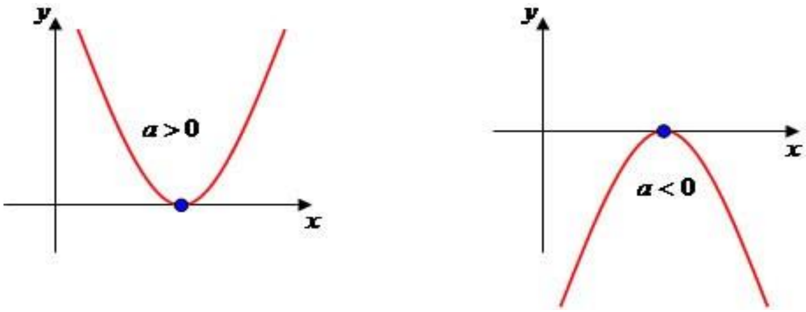

Figura 21: Gráfico de uma equação do 2º grau com $\Delta = 0$.

- $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. A parábola não intercepta o eixo x.

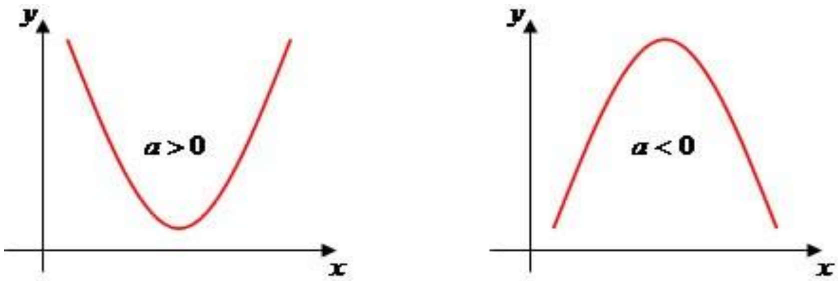

Figura 22: Gráfico de uma equação do 2º grau com $\Delta < 0$.

O vértice da parábola constitui um ponto importante do gráfico, pois indica o ponto de valor máximo e o ponto de valor mínimo. De acordo com o valor do coeficiente a, graficamente temos as seguintes situações:

Quando o valor do coeficiente a for menor que zero, a parábola possuirá valor máximo.

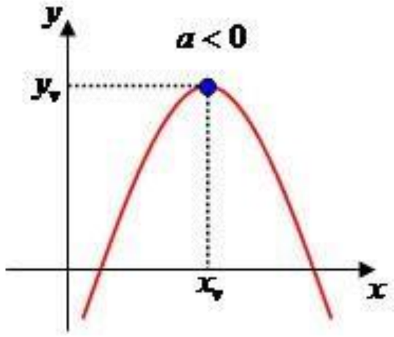

Figura 23: Valor máximo uma função do 2º grau

Quando o valor do coeficiente a for maior que zero, a parábola possuirá valor mínimo.

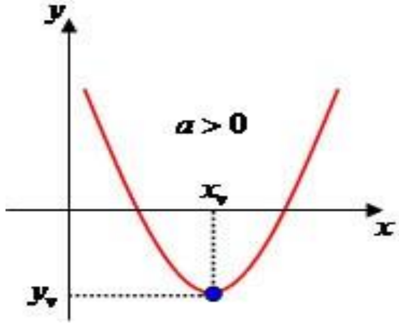

Figura 24: Valor mínimo uma função do 2º grau

Outra relação importante na função do 2º grau é o ponto onde a parábola corta o eixo y. Verifica-se que o valor do coeficiente c na lei de formação da função, corresponde ao valor do eixo y onde a parábola o intersecta.

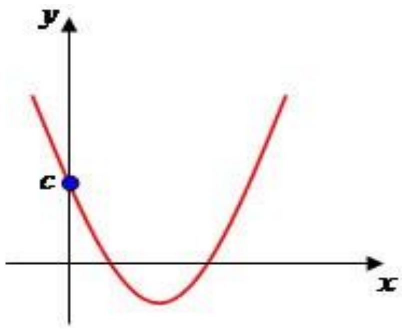

Figura 25: Intercessão dos eixos x e y de uma função do 2º grau

Já definimos função quadrática, conhecemos também seu gráfico com seus pontos notáveis. Neste capítulo vamos estudar função quadrática, que é o foco desse trabalho. Abordaremos a definição formal, o que se considera como valor de uma função quadrática, para melhor entendimento será utilizado exemplos. Por fim mostraremos algumas aplicações da função quadrática.

2.1 VALOR DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Conforme vimos, função quadrática é definida por uma lei que envolve um trinômio de segundo grau, por isso, também é conhecida como função polinomial de segundo grau. Em certas situações de problemas matemáticos é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto.

Exemplo 1: São funções quadráticas:

a) $f(x) = x2$, onde $a = 1$ e $b = c = 0$;
b) $g(x) = -x2 + 5$, onde $a = -1$, $b = 0$ e $c = 5$;
c) $h(x) = (x - 1)2 = x2 - 2x + 1$, onde $a = 1, b = -2$ e $c = 1$;
d) $y = \frac{x^2}{2} - 3x$, onde $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ e $c = 0$.

Determinar os **zeros** ou **raízes**, consiste em determinar um número x e o outro $s - x$. Assim, se $p = x(s - x)$ temos $p = sx - x^2$, ou seja, $x^2 - sx + p = 0$.

Definição 1: Os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ são os zeros ou raízes desta função.

Podemos determinar os zeros das seguintes maneiras:

1. **Por fatoração**

Para a função $f(x) = x^2 - 16$, podemos pensar na diferença entre dois quadrados e reescrever a função como $f(x) = (x + 4)(x - 4)$. Para que o produto se anule, basta que um dos fatores também seja nulo. Assim, as raízes são -4 e 4.

Para a função $g(x) = x^2 - 16x$, podemos reescrever a função como $g(x) = x(x - 16)$. Resolvendo, descobrimos que as raízes são 0 e 16.

Para a função $h(x) = x^2 + 6x + 9$, podemos pensar no quadrado da soma e reescrever a função $h(x) = (x + 3)(x + 3)$. Pensando no produto nulo, descobrimos que -3 é uma raiz dupla da função.

2. Completando quadrado

A equação $x^2 + 6x + 5 = 0$ equivale a $x^2 + 6x + 5 + 4 = 4$ ou $x^2 + 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4$. Então, $(x + 3)^2 = (\pm 2)^2$. Se $x + 3 = 2$, então $x = -1$ e se $x + 3 = -2$, então $x = -5$. Logo os zeros da equação são -1 e -5.

3. Pela fórmula resolutiva de equação que envolve polinômio de 2º grau:

Podemos encontrar os zeros ou raízes de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, usando a fórmula de Bhaskara, dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde sabemos que $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas; se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla e se $\Delta < 0$, a equação não possui solução real.

4. Pela regra da soma e do produto das raízes

Sendo a soma, $S = -\frac{b}{a}$ e o produto, $P = \frac{c}{a}$, investigamos as raízes.

2.2 FORMA CANÔNICA

A lei que define a função quadrática pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Completando quadrado, obtemos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

A equação $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ é a forma canônica da função.

Decorre da forma canônica, a fórmula que fornece as raízes reais da função quadrática $ax^2+bx+c = 0$, equivale a

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2-4ac \geq 0,$$

pois, caso contrário, a função quadrática não possui raízes reais.

A **forma canônica** envolve uma soma de parcelas:

$$f(\mathrm{x})=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

onde a primeira é sempre maior ou igual a zero, variando de acordo com o x e a segunda constante.

Quando $a > 0$, o menor valor dessa soma é atingido, com a primeira parcela sendo nula. Assim, $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. De forma análoga, quando $a < 0$, determinamos as coordenadas do vértice que corresponde ao ponto máximo da parábola.

Considerando as raízes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, sua soma é $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e o produto $x_1x_2 = \frac{-b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Além disso, como

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2\right),$$

Então, a função quadrática pode ser escrita na forma fatorada $a(x - x1)(x - x2)$.

2.3 GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

A utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo a investigação das relações existentes entre a lei que define a função e sua representação. Por isso, nesta seção, sempre trabalharemos com a utilização do Winplot ou Geogebra.

Toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola. Sabemos também que a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa $x \mapsto ax^2 + bx + c$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Veremos o efeito que cada parâmetro a, b e c causa na parábola que representa a função quadrática definida pela forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Os coeficientes a, b e c estão relacionados a características gráficas da parábola.

Se considerarmos, particularmente, as funções definidas por $f(x) = ax^2, a \neq 0 \; e \; b = c = 0$, o parâmetro a está relacionado à concavidade e à abertura da parábola:

- quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima e o vértice da parábola é um ponto mínimo;
- quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo e o vértice da parábola é um ponto máximo;
- quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola;
- quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada);
- os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$ em que a e a' são números simétricos, são simétricos em relação ao eixo x. Veja, por exemplo, os gráficos de $v(x) = 10x^2 \; e \; y = -10x^2$ mostrados na figura 36. Se $a \neq 0$, os gráficos de $y = ax^2 \; e \; y = -ax^2$ são chamados reflexões de cada um deles em relação ao eixo x de acordo com Swokowski (1995).

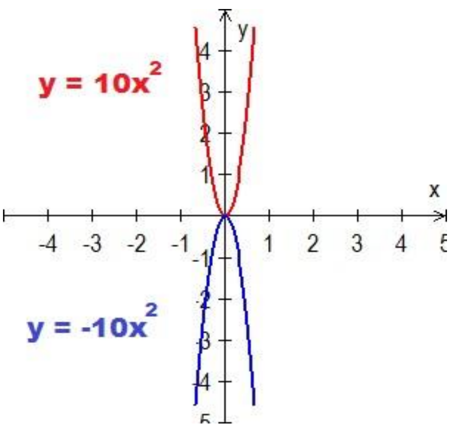

Figura 26: Parábolas Simétricas

Trabalhando a função e fazendo o coeficiente $a = 0$ em $f(x) = ax^2$, a função reduz-se à função constante de equação $y = 0$, ou seja, o próprio eixo x.

Pode-se observar o gráfico da função na figura 37, onde também estão incluídas as parábolas geradas no software Geogebra.

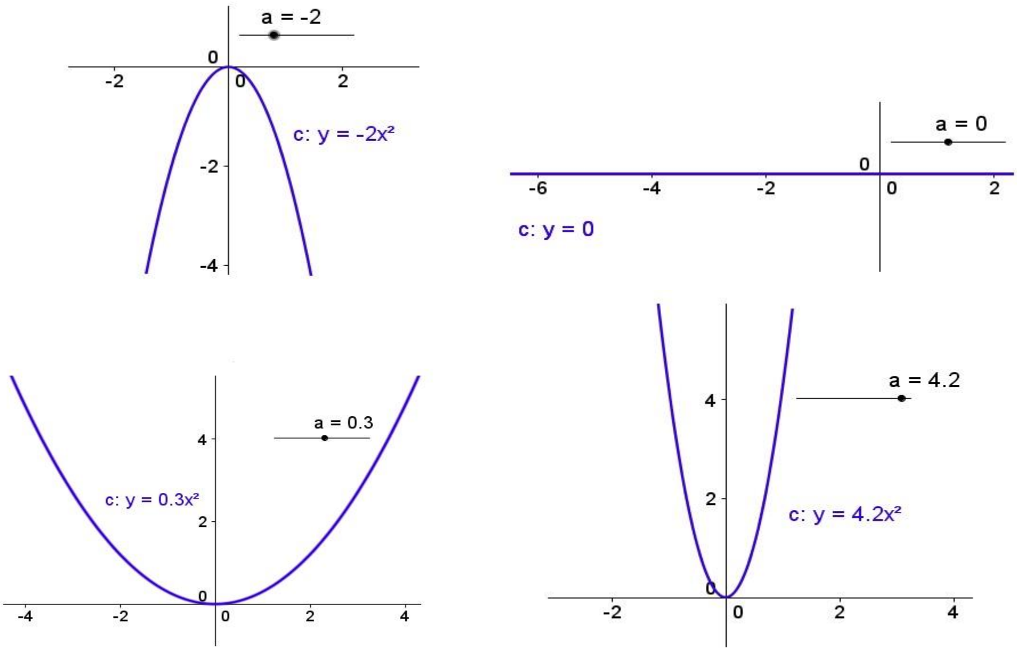

Figura 27: Parâmetro a nas funções $f(x) = ax^2$

O parâmetro b indica se a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente ($b > 0$), decrescente ($b < 0$) ou no vértice ($b = 0$). Além disso, o parâmetro b causa uma translação vertical mais uma horizontal, como pode ser observado na Figura 38.

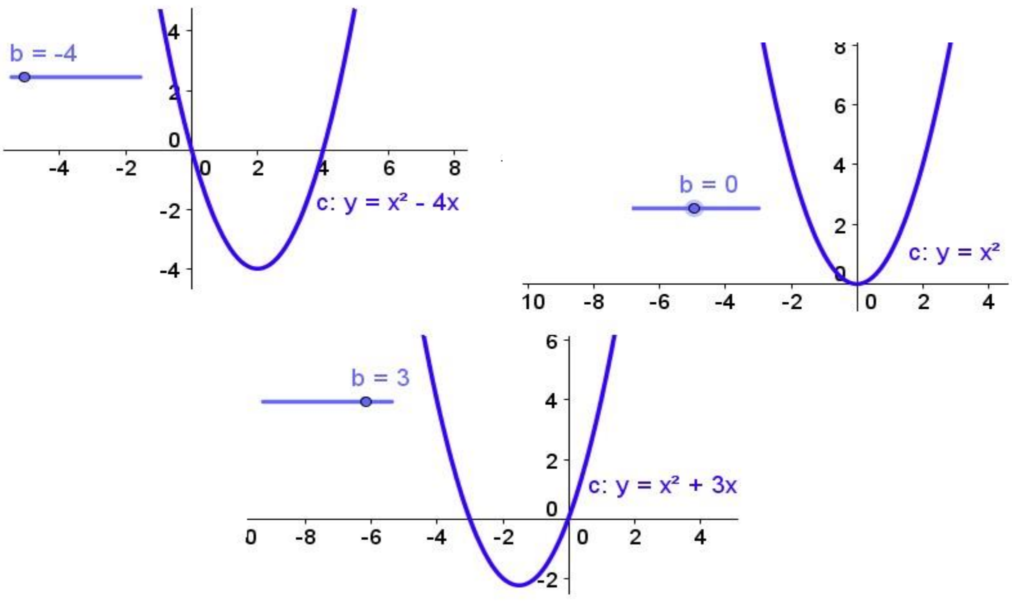

Figura 28: Parâmetro b nas funções $f(x) = x^2 + bx$

Considerando agora as funções quadráticas definidas por $f(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$. Observa-se que a parábola de $f(x) = ax^2 + c$ é igual à parábola de $f(x) = ax^2$ como vistos na figura 39, porém sua posição é, em valores absolutos, c unidades acima ou abaixo no eixo y, conforme c seja positivo ou negativo. Assim podemos construir gráficos de funções pensando em translações (ou deslocamentos) verticais para cima ou para baixo. Isso acontece quando só alteramos o coeficiente c da função, a translação vertical pode ser visualizada no último gráfico da Figura 39.

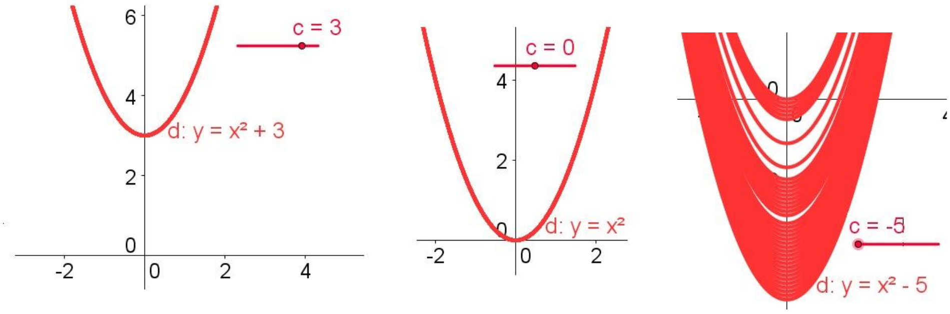

Figura 29: Translações Verticais da Parábola $f(x) = x^2 + c$ e Parâmetro c

Pontos sobre o eixo y têm a abscissa nula. Logo, para sabermos o intercepto y de uma parábola, basta calcular $f(0)$. Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, sempre encontraremos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Logo, toda parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$. Essa é a característica marcante do coeficiente c.

A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$ e o eixo x nos pontos de abscissas iguais às raízes da função quadrática.

A reta vertical $x = x_v$, que passa pelo vértice da parábola, é chamada eixo de simetria.

A função quadrática é uma função polinomial de grau dois que possui domínio real. Se o vértice for um ponto mínimo, a imagem é igual a $[y_v, +\infty)$, e se o vértice for um ponto máximo, a imagem é igual a $(-\infty, y_v\,]$. Ver Figura 40.

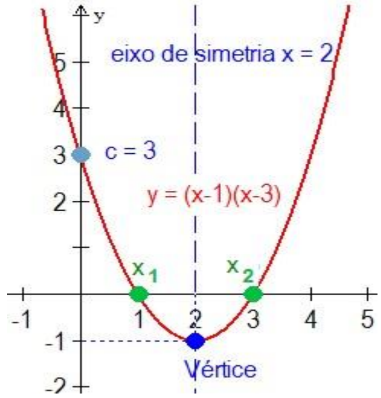

Figura 30: Parábola com interceptos x e y, vértice e eixo de simetria

2.4 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Mostraremos algumas aplicações de função quadrática por meio de problemas que serão apresentados em seções, conforme tipos de atividades ou área de aplicação. Assim, teremos as seguintes seções: atividades relacionadas a problemas do cotidiano; problemas de otimização; atividades com uso do Winplot e/ou Geogebra para observação de translações e parâmetros; atividades envolvendo a parábola no contexto da Geometria Analítica; aplicações da função quadrática na Física, e no Cálculo Diferencial. Todos os problemas vêm acompanhados de soluções.

2.4.1 Problemas do Cotidiano

O objetivo principal desta seção é a modelagem e resolução de problemas através da função quadrática, mostrando que esta função elementar é aplicada em diferentes situações do cotidiano.

Problema 2.1 (Futebol Brasileiro). Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados. Analise este problema para um número qualquer de clubes. Problema retirado do Iezzi (2010).

Solução: Contamos o número de jogos que cada clube participará no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$. Sabendo que o campeonato brasileiro é disputado por 20 clubes, calculamos a quantidade de jogos com o mesmo raciocínio: $20 \cdot 19 = 380$ jogos. Enfim, para cada quantidade x de clubes participantes, é possível calcularmos o número y de jogos do campeonato, ou seja, y é função de x. Assim, podemos generalizar e escrever uma equação (regra) que permita calcular y a partir de x. Para a resolução deste problema, lembre-se da definição da função quadrática e teremos

$$y = x \cdot (x - 1) = x^2 - x.$$

Problema 2.2 (Esporte). Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra poliesportiva com dimensões oficiais $20m$ e $36m$. Tendo recebido $200m$ de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível. Ajude-os. Este problema foi retirado do livro Dante (2011a).

Solução:

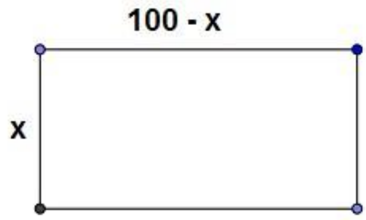

Figura 31: Campo de Futebol

A área é dada por $A(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$.

Como o coeficiente a é negativo, a função $A(x)$ é representada por uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo. Logo, para que a área seja máxima, a dimensão x é a abscissa do vértice $x_v = \frac{-100}{-2} = 50$. A área máxima a ser cercada é um quadrado de lado $50m$, o que está adequado para cercar a quadra $20m \times 36m$.

Os problemas a seguir exigem a determinação de uma equação matemática de uma função que modele um problema da vida real. Neste trabalho, só nos interessa a modelagem da função quadrática.

Problema 2.3 (Modelagem). O comprimento de um lote de construção retangular é três vezes a sua largura. Encontre uma equação que modele sua área em função da largura. Esse problema foi retirado do livro de Stewart (2009).

Solução: $c = 3\ell$ e $A = c\ell$. Então, $A(\ell) = 3\ell^2$. Onde $c = comprimento, \ell = litros$ e $A = área$.

Problema 2.4 (Modelagem). Um retângulo tem um perímetro de $20\,cm$. Encontre uma função que modele sua área em termos do comprimento x de um de seus lados. Problema do Stewart (2009).

Solução: O perímetro do retângulo é dado por $2x + 2y = 20$ e a área é dada por $A = xy$.

Como $2y = 20 - 2x \Rightarrow y = 10 - x$, então, $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

2.4.2 Física

Segundo Galileu, as distâncias percorridas por um corpo em queda livre são proporcionais ao quadrado dos tempos gastos em percorrê-las, ou seja, a função horária das posições é quadrática e definida pela equação $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Quando se diz que o corpo foi abandonado, sua velocidade inicial $v_0 = 0$. A aceleração da gravidade, ao nível do mar é $g \cong 9{,}8 m/s^2$ e $s_0 = 0$. Assim é possível reescrever a função como $s(t) = 4{,}9t^2$.

Problema 2.5 (Queda Livre). Um atleta vai pular de um trampolim de $44{,}1$ metros de altura em relação ao solo. Desprezando-se a resistência do ar, quantos segundos vai demorar sua queda? Quantos metros o atleta já se deslocou após $1s$? (Extraído do livro de autoria de Imenes (1992)).

Solução: Para esta resolução, devemos aplicar o valor da função quadrática $s(t) = 4{,}9t^2$. Onde para $s = 44{,}1$, temos $44{,}1 = 4{,}9t^2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3s$. E para $t = 1, S(1) = 4{,}9\, m$.
<u>*Resposta:*</u> Sua queda vai durar 3 segundos e após 1 segundo, ele já se deslocou 4,9 metros.

Problema 2.6 (Movimento Uniformemente Variado (MUV)). Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de $v = 360km/h$ em $20s$. Calcule o valor da aceleração desse avião (m/s^2) e o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.

Solução: Sabemos que $v = 360\, km/h$, daí $v = \frac{360 \cdot 1000}{3600} = 100\, m/s$ e como $v_0 = 0$, temos $\Delta v = 100\, m/s$. Para o cálculo da aceleração, como $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, e\ \Delta t = 20s$, temos $a = \frac{\Delta_v}{\Delta_t} = \frac{100\, m/s}{20s} = 5m/s^2$.

Como a posição do objeto em função do tempo, no MUV, é dada pela função quadrática

$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, temos: $s - s_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, ou seja,

$\Delta s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 100 \cdot 20 + \frac{at^2}{2} = 2000 + 1000 = 3000.$

Logo, $\Delta s = 3000m = 3km$ é a variação da posição, o deslocamento do avião, ou seja, o comprimento mínimo da pista para que o avião consiga decolar.

2.4.3 Cálculo Diferencial

Problema 2.7 (Taxa de Variação da Função Quadrática). Se um objeto é solto, em queda livre, de uma altura de 100 pés e se a resistência do ar pode ser desprezada, a altura h do objeto no instante t (em segundos) é dada por $h(t) = -16t^2 + 100$.

a) Lembrando que a velocidade média é dada por $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, calcule a velocidade média do objeto nos intervalos $[1;2], [1;1{,}5]\ e\ [1;1{,}1]$.

b) A taxa de variação instantânea, nesse caso chamada de velocidade instantânea é a derivada da função h. Lembrando que a derivada da função quadrática é dada por $f'(x) = 2ax + b$. Calcule a velocidade do objeto quando $t = 1$.

Resolução:

a) Para o intervalo [1;2] temos: $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{36-84}{1} = -48$ *pés/segundo*;

Para o intervalo [1;1,5] temos: $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{64-84}{0{,}5} = -40$ *pés/segundo;* e

Para o intervalo [1;1,1] temos: $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{80{,}64-84}{0{,}1} = -33{,}6$ *pés/segundo*. Observe que as velocidades médias são negativas porque o objeto está se deslocando para baixo, ou seja, a altura h do objeto está diminuindo.

b) Neste item, precisamos calcular a velocidade instantânea. A velocidade é dada por $v(t) = h'(t) = -32t$. Logo, $v(1) = -32$ *pés/segundo*, um valor bem próximo de $-33{,}6$, que é a velocidade média com $\Delta t \to 0$, ou seja, a variação do tempo bem pequena.

2.4.4 Otimização

Em problemas de otimização, buscamos encontrar os pontos ótimos, ou seja, os mínimos ou máximos. No caso da função quadrática, o ponto máximo ou mínimo é o vértice da parábola. Para uma função que representa o lucro de uma empresa, há interesse no valor máximo; para uma função que representa a quantidade de material num processo de manufatura, buscaria-se o valor mínimo. Com estes problemas, aprenderemos a determinar máximos e mínimos da função quadrática.

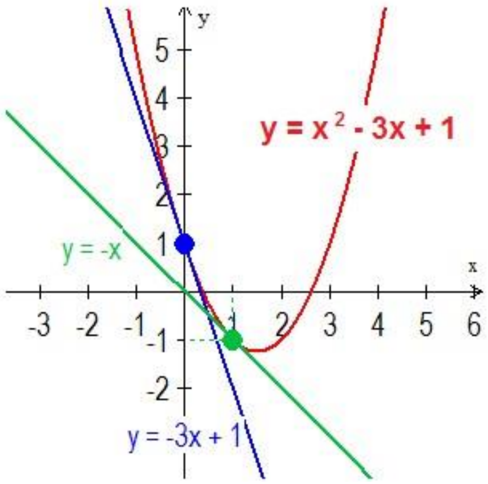

Figura 32: Parábola e Tangentes

Problema 2.9 (Futebol). A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h(t) = -t^2 + 6t$. Em que instante a bola atinge a altura máxima? Qual é essa altura máxima atingida pela bola? (extraído do livro de autoria de Dante (2011a)).

Solução: O que está sendo perguntado corresponde às coordenadas do vértice da parábola, que possui concavidade voltada para baixo. Portanto, o vértice é o ponto máximo da função. Como buscamos encontrar o ponto máximo, este é um problema de otimização. O instante será dado por $t_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$ segundos. A altura máxima atingida pela bola é $h_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{36}{4} = 9$ metros. Note que a altura também é a imagem de 3 pela função, ou seja, $h(3) = -9 + 18 = 9$.

Problema 2.10 (Lançamento Oblíquo). Um ponto material é lançado do solo, verticalmente para cima e tem posições s no decorrer do tempo t dadas pela função horária $s = 60t - 5t^2$ (s em metros e t em segundos).

a) Escreva os intervalos de crescimento e decrescimento da função;

b) Calcule o tempo gasto para atingir a altura máxima;

c) Determine a altura máxima em relação ao solo;

d) Grafique o problema.

Resolução:

a) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função são determinados através do estudo do sinal da derivada primeira da função.

Como $s'(t) = 60 - 10t$, $s'(t) < 0$ quando $t > 6, s'(t) = 0$ quando $t = 6$ e $s'(t) > 0$ quando $t < 6$. Sendo s decrescente se $t \in (6, \infty)$ e crescente se $t \in (-\infty, 6)$.

b) O tempo gasto para atingir a altura máxima corresponde ao valor de t que anula a derivada primeira, ou seja, $s'(t) = 0 \Rightarrow 60 - 10t = 0 \Rightarrow t = 6\, segundos$. Esse valor também poderia ser calculado como a abscissa do ponto máximo, já que a parábola tem concavidade voltada para baixo e o vértice é um ponto máximo. Logo, $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-60}{-10} = 6$.

c) A altura máxima em relação ao solo corresponde ao y do vértice (valor máximo da função) que pode ser calculado como $s(6) = 360 - 5 \cdot 36 = 180m$ ou $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3600}{-20} = 180$**;**

d) Observe a Figura 43.

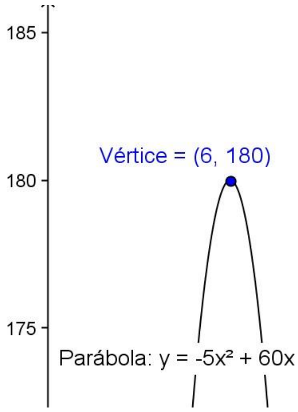

Figura 33: Parábola e Ponto Máximo

Problema 2.11 (Área Máxima). O dono de uma granja quer construir um cercado retangular aproveitando um muro já existente. As dimensões do cercado podem variar, desde que o comprimento da parte cercada, sem contar o muro, seja $36m$ (perímetro igual a 36), pois o granjeiro só tem $36m$ de tela.

a) Determine a área A desse cercado, em função de x.

b) A é uma função quadrática na variável x. Elabore o gráfico dessa função, que deve ter a concavidade voltada para baixo.

c) O granjeiro quer um cercado que tenha maior área. Qual é essa área e quais devem ser as dimensões do cercado? (Imenes, 2010)

Resolução: Este é um problema também de modelagem. Precisamos: identificar a variável; expressar todas as incógnitas em função da variável; montar um modelo (equação matemática); resolver a equação e comprovar a resposta.

a) Observe a Figura 44 e conclua que $A(x) = x(36 - 2x) \Leftrightarrow A(x) = -2x^2 + 36x$.

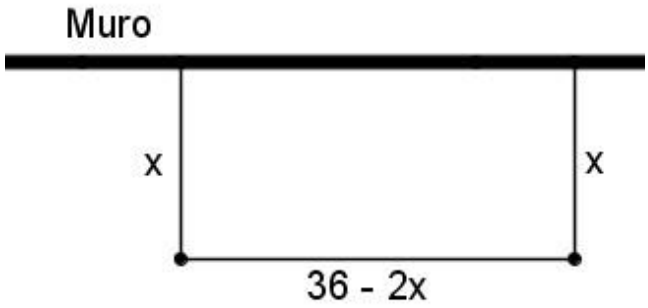

Figura 34: Granja

b) Gráfico de $A(x) = -2x^2 + 36x$

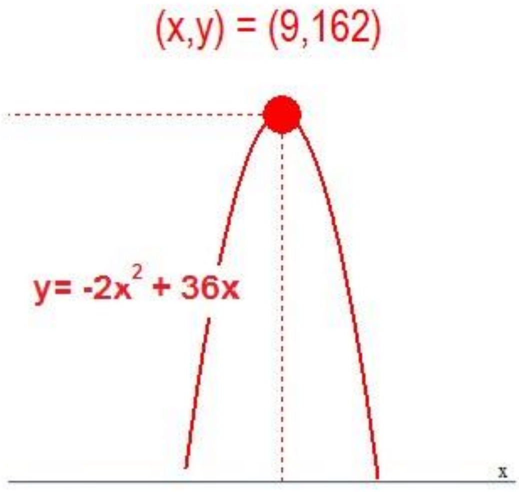

Figura 35: Gráfico de função $f(x) = -2x^2 + 36x$

c) Como na função $A(x) = -2x^2 + 36x, a < 0$, atinge valor máximo em $x_v = \frac{-36}{-4} = 9m$ e $A(9) = -2 \cdot 81 + 36 \cdot 9 = -162 + 324 = 162\, m^2$ é a área máxima. Assim, as dimensões do retângulo devem ser $9m$ e $18m$, para que a área seja máxima.

Problema 2.12 (Economia). Seja p o preço de venda por unidade de determinado bem e q a respectiva quantidade vendida a este preço. A receita total R auferida pela venda de q unidades ao preço p é dada por $R = pq$. O lucro total é dado pela diferença entre a receita e o custo total, ou seja, $L = R - C$. Considerando $q = 20 - p$ a equação da demanda de um bem e $C = 2q + 17$ a equação do custo associado, determine:

a) a equação da receita;

b) a função lucro;

c) o valor de q para se obter a receita máxima;

d) o valor de q para a obtenção de um lucro máximo.

(problema extraído do livro de Silva, 1993).

Resolução:

a) A equação da receita é $R(q) = p \cdot q\ (20 - q)q = -q^2 + 20q$.

b) A função lucro é definida por $L(q) = R - C = -q^2 + 18q - 17$.

c) O valor de q para se obter a receita máxima é a abscissa do vértice de R, o que corresponde a $q = \frac{-20}{-2} = 10\ unidades$.

d) O valor de q para a obtenção de um lucro máximo também é a abscissa do vértice de L, o que corresponde a $q = \frac{-18}{-2} = 9\ unidades$.

3 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu em elaborar uma proposta para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções quadráticas.

Para tanto, levamos em consideração os resultados de algumas pesquisas sobre a conceituação e definições de função. Os resultados destas pesquisas e uma breve revisão teórica, levando em consideração todo o contexto histórico na qual se deu a evolução da conceituação e definição de funções, confirmaram a importância que o conhecimento sobre função quadrática assume nas sociedades modernas.

Nosso trabalho nos mostrou a central importância dos estudos sobre os fundamentos de funções especialmente função quadrática. A variedade de assuntos que podem ser pesquisados e aprofundados é imensa, nesse sentido, nosso trabalho foi direcionado na contextualização do conceito de função quadrática e em suas aplicações.

A introdução de alguns conceitos básicos no início do trabalho formou o terreno adjacente que facilita o entendimento das funções quadráticas. Algumas definições acerca de conjuntos e relações, necessárias para definirmos uma função, também foram discutidas. Alguns exemplos referentes as definições apresentadas no trabalho e alguns tipos de aplicações referentes a funções quadráticas também foram aplicadas ao final desse.

A elaboração deste trabalho trouxe enriquecimento à minha formação matemática. Espera-se que o mesmo venha a servir como material de apoio a quem possa interessar.

REFERENCIAS BIBIOGRÁFICAS

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática 1**. Versão Beta. São Paulo-SP: Editora Moderna.

BOYER, Carl Benjamin.; MERZBACH, Uta C. A **History of Mathematics.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BUCCHI, Paulo. Curso Prático de Matemática. 1ªedição. São Paulo-SP: Editora Moderna, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Lisboa,1984. 192 p.

EVES. H. **Introdução à história da Matemática.** Tradução Hygino H. Rodrigues, 3ªedição.campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

GUAREZZI, Arlene. **O Processo de Apropriação do Conceito de Função Polinomial do Primeiro Grau no Ensino Fundamental.** 2002. 148 p. Dissertação (Mestrado em Educação)- Curso de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Palmas.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos, **Fundamentos da Matemática Elementar, Conjuntos Funções.** 6 ed. São Paulo: Editora Atual, 1985.

NEVES, M. **Matemática 10ªclasse: Reforma Educativa do Ensino Técnico Profissional**. Angola,2005

SILVA, Fernanda Laureano. **Matemática & Educação: uma proposta pedagógica no ensino do Cálculo**. Monografia (Especialização), UFMG, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Belo Horizonte, 2010, 57 páginas. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografias_noturna/monografia_fernanda_laureano.pdf.>. Acesso em: 21 nov. 2008.

SELDEN, A. e SELDEN, J. **Research perspectives on conceptions on functions summary and overview.** In: HAREL, G e DUBINSKY, E. The concept od Function: Aspects os Epistemology and Pedagogy. USA: Mathematical Association of America, 1992. p.1-21Swokowski, E. W. (1995). Cálculo com Geometria Analítica, volume 1. Makron Books, São Paulo, 2ª edição.

VIEIRA, Vandenberg Lopes. **Álgebra Abstrata para Licenciatura**. 2ª Ed. Eduepb/Livraria da Física, Campina Grande-PB/São Paulo-SP, 2015.