UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

***CAMPUS* VI – POETA PINTO DO MONTEIRO**

CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS – CCHE

LINCOMBERG MARTINS

Números e Operações Numéricas: explorando possibilidades em um cenário de Resolução de Problemas

MONTEIRO

2016

LINCOMBERG MARTINS

Números e Operações Numéricas: explorando possibilidades em um cenário de Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

MONTEIRO

2016

M379n Martins, Lincomberg.
Números e operações numéricas [manuscrito] : explorando possibilidades em um cenário de resolução de problemas / Lincomberg Martins. - 2015.
66 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Departamento de Matemática".

1. Operações numéricas. 2. Resolução de problemas. 3. Reconceitualizando as quatro operações. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

LINCOMBERG MARTINS

Números e Operações Numéricas: explorando possibilidades em um cenário de Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovado pela banca examinadora em 27 de maio de 2016.

Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Orientador

Ms. José Luiz Cavalcante
Examinador

Ms. Patrícia Melo Rocha
Examinadora

Lincomberg Martins.

Lincomberg Martins
- Licenciando -

Dedicatória

Quero dedicar esse trabalho a Deus, que se mostrou criador, que foi criativo. Seu fôlego de vida em mim foi sustentado e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades, em especial a minha avó, Quitéria Alves de Almeida, que nunca me abandonou, pós a vida não poderia ter me dado uma mãe melhor.

Agradecimentos

Agradecer a Deus, por sempre me dar forças nas horas difíceis, me protegendo e guiando por essa caminha da vida.

Minha avó, Dona Quitéria, que sempre acreditou que eu capaz.

Agradeço à minha família que sempre me apoiou, em especial, a Sandra minha mãe e Adelma minha tia.

Agradeço à meu orientador Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, pelo o apoio durante a realização do trabalho, pela dedicação, pelo incentivo e pelos momentos de estudo.

Agradeço as minhas amigas Aline Cordeiro e Cirila Djaner pelos momentos de descontração e pelo o apoio durante minha trajetória no curso, pessoas pela qual farão parte da minha vida.

Agradeço aos professores Mestres José Luiz Cavalcante e Patrícia Melo Rocha, membros da Comissão Examinadora, pelas críticas e sugestões para enriquecimento deste trabalho.

De maneira geral agradecer a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

É necessários sempre acreditar que o sonho é possível que o céu é o limite e você, truta, é imbatível que o tempo ruim vai passar, é só uma fase e o sofrimento alimenta mais a sua coragem que a sua família precisa de você lado a lado se ganhar pra te apoia se perder.

(Mano Brown)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta com Números e Operações para trabalhar Divisão de Números Decimais, Dizimas Periódicas e Divisão Aproximada de Números Decimais, de maneira a explorar possibilidades a partir da Resolução de Problemas. As leituras realizadas nos mostraram a importância em desenvolver este trabalho, especialmente a reconceitualização das quatro operações numéricas. A Metodologia da Pesquisa foi de cunho bibliográfico, utilizando principalmente as ideias de Polya (1978), Brasil (1998), Allevato e Onuchic (2014), Onuchic e Botta (1998), Nunes et. al (2009), Fuson (1992), entre outros. Já que o professor deve fazer com que o aluno perceba a inter-relação dos conhecimentos Matemáticos, proporcionando sentido ao aprendizado da disciplina. Nessa linha de raciocínio, educadores Matemáticos apontam a Resolução de Problemas como ponto inicial no ensino de Matemática, levando em consideração que os alunos constroem seus conhecimentos diante de situações desafiadoras, na qual buscam maneiras e métodos para chegar à solução. O trabalho poderá contribuir na Educação Matemática, no sentindo que ainda não foi aplicado, mas temos a certeza que o tratamento de números e operações numéricas através da Resolução de Problemas será um caminho para reconceitualizar as quatro operações fundamentais no Ensino Básico.

Palavras-chave: Números e operações. Resolução de Problemas. Reconceitualizando as quatro operações.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje a prática mais frequente no Ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo na lousa, explica oralmente, partindo de definições, demonstração de propriedades, exemplos, e logo em seguida aplica exercícios de aprendizagem e fixação, e pressupõe que o aluno absorva o conteúdo abordado de forma clara e usual. Porém essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois torna o ensino mecânico, sendo que muitas vezes o aluno apenas decora conceitos, fórmulas, processos, e reproduz a matéria, não avaliando se o aluno compreendeu ou não o conhecimento abordado e sua aplicação.

No ensino atual não há nada mais empolgante para o estudante do que ser desafiado, se sentir na obrigação de provar que pode alcançar ou resolver algo, seja no meio escolar ou no meio social. Segundo os PCN é essa disposição que deve ser aproveitada e explorada pelo professor. Assim, as aulas de Matemática podem ser transformadas em momentos estimulantes, que exigem estratégias para resolução de determinados problemas. Por isso, geralmente as aulas tradicionais com a apresentação de exercícios e questões apenas para verificar se os conhecimentos foram fixados não garantem o aprendizado. Além de não avaliar corretamente o aproveitamento do assunto abordado, é um fator que contribui para desanimar a turma, já que a aula passa ser um simples treino de técnicas.

O professor deve fazer com que o aluno perceba a inter-relação dos conhecimentos matemáticos, proporcionando sentido ao aprendizado da disciplina. Nessa linha de raciocínio, educadores matemáticos apontam a Resolução de Problemas como ponto inicial no Ensino de Matemática, levando em consideração que os alunos constroem seus conhecimentos diante de situações desafiadoras, na qual buscam maneiras e métodos para chegar à solução.

Historicamente percebemos que a Matemática se desenvolve a partir de problemas. Em levantamentos bibliográficos que pudemos analisar, a Matemática é um processo histórico e cultural que foi se construindo ao longo dos anos desde a antiguidade, a partir de problemas práticos, como por exemplo, a simples questão de divisão de terras dos egípcios, até se chegar à Matemática mais complexa na qual sempre estamos diante de problemas, situações e buscamos soluções.

Um dos exemplos famosos de problemas na história da Matemática é o Teorema de Fermat. Andrew Wiles (1998), o matemático autor da demonstração deste teorema, recorda o efeito como reagiu perante este: “Aqui estava um problema que eu, com dez anos de idade, podia compreender e soube a partir desse momento que nunca mais o poderia ignorar. Tinha que o resolver”.

Segundo Alan Stewart (1995), no seu livro “Os Problemas da Matemática”, a resolução de problema tem desempenhado um grande papel, não só como forma de desenvolvimento da Matemática, mas também como forma de conhecimento, ou como motivador dos matemáticos: “os problemas são a força motriz da Matemática”, ou seja, só há um avanço matemático, se existe um problema na qual este é preciso de uma solução.

Em nossas pesquisas bibliográficas pudemos ver que os estudos relacionados à Resolução de Problemas foram basicamente desenvolvidos nos últimos 40 anos, e atualmente é uma área muito explorada como alternativa do ensino, já que é considera como processo inicial na aprendizagem de conceitos e ideias.

Dessa forma, no capítulo 2 apresentaremos a Resolução de Problemas segundo as ideias de Onuchic (1999) e Polya (1978) entre outros autores, que falam sobre as reformas no Ensino de Matemática durante o século XX e o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas segundo Allevato e Onuchic (2014).

No capítulo 3, falaremos sobre Números e Operações Numéricas, destacando as origens dos conceitos e das operações numéricas. Ainda nesse capítulo falaremos a importância da reconceitualização das quatros operações numérica para o Ensino Básico.

No capítulo 4 apresentaremos uma Proposta do TCC para trabalhar Divisão de Números Decimais, Dízimas Periódicas e Divisão Aproximada de Números Decimais.

Por fim, apresentamos as considerações acerca do nosso trabalho.

Capítulo 2

Resolução de Problemas

2.1. Reformas no Ensino de Matemática durante o século XX

Segundo Onuchic (1999), na passagem de uma sociedade rural, onde "poucos precisam conhecer Matemática", para uma sociedade onde mais gente "precisa aprender Matemática" em razão da necessidade de técnicos especializados, e daí para uma sociedade de informação onde a maioria das pessoas "precisa saber Matemática" e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos "saber muita Matemática", é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende Matemática.

Assim, discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que, se acreditava, que poderiam levar as melhores formas de se ensinar e se aprender Matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dizem que,

> Os movimentos de reorientação curriculares ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p. 19).

Nesse sentido, de acordo com Onuchic (1999), no início do século XX o Ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através de repetição, com a aplicação de testes em que, se repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia.

Ainda essa autora disse que, é bem verdade que alguns desses alunos chegavam a compreender o que faziam. Conseguiam "pensar" sobre o que trabalhavam e isso os faziam especiais. A maioria, contudo, se esquecia do que havia memorizado em pouco tempo. Nessa época, o currículo ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria.

Anos depois, dentro de outra orientação, Onuchic (1999) diz que, os alunos deviam aprender Matemática com compreensão. Esta reforma descartava a anterior. As tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia “entender” o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participava da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na Resolução de Problemas padrão ou para aprender algum conteúdo novo.

Nessa época começou a se falar em resolver problemas como um meio de se aprender Matemática. Em 1945, George Polya publicou o livro *“How to solve it”*.

Nesse livro o processo de Resolução de Problemas é tratado como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da Resolução de Problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 a 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas. Dewey sugeria que essa orientação pedagógica, centrada em projetos, pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (FIORENTINI, 1994, p. 188).

De um modo geral, os estudos em Resolução de Problemas preocupavam-se inicialmente, com o desempenho bem sucedido da obtenção da solução de problemas. Não houve preocupação com o processo. Para desenvolver sua capacidade de Resolução de Problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. Ou seja, a Resolução de Problemas limitava-se na busca de solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta.

De acordo com Onuchic (1999), nas décadas de 1960/1970, o Ensino de Matemática no Brasil e em outros países do mundo foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Esta reforma também deixava de lado as reformas anteriores. Apresentava uma Matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topologia, etc, e de modo a enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem Matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Esse movimento desencadeou discussões e amplas reformas no currículo de Matemática em vários países, inclusive no Brasil.

Segundo essa autora, no Brasil, o movimento da Matemática Moderna, teve grande influência, durante um longo período, entretanto foi percebido que o que era proposto estava fora do alcance dos alunos. Principalmente nas séries iniciais o ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, deixando de lado questões mais práticas. O movimento da Matemática Moderna passou a retroceder, pois partia de alguns princípios básicos inadequados, e devido às distorções e os exageros ocorridos.

No fim dos anos 1970, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de Resolução de Problemas. Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM[1] – National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda for Action (uma agenda para ação), recomendações para o Ensino de Matemática, que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo, buscar uma melhor Educação Matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia que: a Resolução de Problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80, e destacava que o desenvolvimento da habilidade em Resolução de Problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que

---

[1] NCTM – National Council of Teachers of Mathematics é uma organização norte-americana de professores de Matemática, para o ensino equivalente aos níveis Fundamental e Médio. É a associação de professores de Matemática mais influente nos EUA e no mundo, pois dita normas curriculares e programas de ensino e promove estudos de diretrizes para o ensino em cada década. Realiza congressos nacionais e internacionais e suas publicações são feitas em vários países. Exerce grande influência no Ensino de Matemática do mundo todo, inclusive nos países orientais, por ser quase sempre pioneira em novas propostas de ensino e em publicações.

o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática (ONUCHIC, 1999).

Esse documento ainda dizia que Resolução de Problemas abrange uma grande quantidade de rotinas e lugares comuns, assim como funções não rotineiras consideradas essenciais na vida diária dos cidadãos. Dizia, também, que é preciso preparar os indivíduos para tratar com problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras. Resolução de Problemas envolve aplicar a Matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas. Isso não significa entender a Matemática a ser ensinada somente em função da Matemática necessária para se resolver um dado problema, num dado momento. Uma unidade estrutural e as inter-relações de teorias matemáticas não deveriam ser sacrificadas.

O que se pode entender que, as discussões sobre Resolução de Problemas e os esforços feitos para desenvolver currículos e materiais instrucionais, tanto para professores como para alunos, têm sido convenientes e úteis. Assim, a noção de que Resolução de Problemas devesse desempenhar um papel importante no currículo teve aceitação bem difundida.

Durante a década de 1980, muitos recursos em Resolução de Problemas foram desenvolvidos visando o trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em Resolução de Problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazerem da Resolução de Problemas o ponto central de seu trabalho. Entretanto, não houve o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual este objetivo era encarado. Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de "resolução de problemas ser o foco da matemática escolar" (ONUCHIC, 1999).

Desde o fim dos anos 1980, especificamente em 1989, a Resolução de Problemas se torna uma metodologia de Ensino de Matemática, ou seja, devemos ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse sentido, Onuchic

(1999) disse que, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso.

O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos chave para problemas razoáveis. Assim, um objetivo de se aprender Matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto para o abstrato (ONUCHIC, 1999).

Nesse sentido, entendemos segundo Onuchic que, é importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, ou seja, apoiados na crença de que o aprendizado de Matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro. Quando os professores ensinam Matemática através da Resolução de Problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente (ONUCHIC, 1999).

2.2. A Resolução de Problemas de acordo com George Polya

George Polya nasceu em 13 de Dezembro de 1887 em Budapeste e faleceu em 7 de Setembro de 1985. Sua família era judaica de origem polaca, foi um ótimo estudante no ensino secundário. Licenciou-se em 1905 tendo sido considerado como um dos quatro melhores alunos do seu ano, o que fez com que ele ganhasse uma bolsa de estudo na universidade de Budapeste, onde começou a estudar Direito. Porém, não se identificou ao curso e se direcionou para o curso de línguas e literaturas, interessou-se depois por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática, onde em 1912 concluiu seu Doutorado. No outono de 1913 foi para Gottingen onde conheceu Hilbert, publicou um dos seus maiores resultados, a solução do problema do passeio aleatório e nesse mesmo ano foi para Paris trabalhar no seu Pós-Doutorado. Em 1914 assumiu um cargo na Universidade de Zurique, foi chamado pelo seu país para guerra, mas recusou-se, e com medo de represália só retornou à Hungria após ter terminado a Segunda Guerra Mundial. Foi na Universidade de Zurique que conheceu sua futura esposa Stella Weber. Casaram-se em 1918, permanecendo juntos até à morte de Polya.

Em 1940, com receio de uma possível invasão alemã da Suíça, decidiu ir para os Estados Unidos. Em 1942 trabalhou como professor na Universidade de Stanford onde permaneceu até a sua retirada do ensino, em 1953. Em 1945 publicou um dos seus livros mais famosos: “How to Solve it” sendo mais tarde traduzido para o português como“A Arte de Resolver Problemas”.

Vale ressaltar que Polya viveu em uma época marcada pelo Movimento da Matemática Moderna, do qual foi um dos opositores mais notórios. Hoje se dá grande importância para Polya. Podemos considerá-lo como o pai do processo de Resolução de Problemas, no qual muitos autores se baseiam e é considerado como ponto de partida no processo de aprendizagem de Matemática.

Segundo Polya, “problema” é algo desafiador, estimulante, que necessite de um pensamento mais elaborado para solucioná-lo e que também desperte o interesse do aluno.

Para George Polya, o processo de Resolução de Problemas é dividido em quatro fases que são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

A seguir apresentamos uma breve descrição das quatro fases na Resolução de Problemas:

Compreensão do problema – não podemos responder a uma pergunta sem termos antes a compreendido, ou ao menos termos entendido do que se trata, da mesma maneira não devemos buscar algo que não corresponda aos nossos objetivos. Isso ocorre muitas vezes em sala de aula, sendo que cabe ao professor evitar que coisas deste tipo aconteçam. O aluno, diante de um problema, deve compreendê-lo e desejar resolvê-lo. Portanto, não basta apenas compreender o problema, o aluno deve estar interessado nele, que por sua vez deve ser formulado pelo professor em um meio termo, nem muito difícil, nem muito fácil (POLYA, 1978).

Primeiramente o enunciado deve ficar bem claro ao aluno, e também cabe ao aluno distinguir as principais partes do problema: a incógnita, os dados e a condicionante. Se existir no enunciado alguma figura, pede-se que seja feito um esboço da figura indicando os dados relacionados ao problema. É importante também que seja levantado uma hipótese provisória.

Por exemplo, ilustrando alguns pontos que foram tratados acima, podemos exemplificar com o problema: “calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura” (POLYA, 1978, p. 5).

Para se extrair o máximo desse problema há a necessidade de conhecer o teorema de Pitágoras e suas aplicações à geometria plana, mas basta um conhecimento superficial da geometria espacial, para que se obtenha nesse problema noções de espaço.

Nesse sentido, o professor, por sua vez, pode tornar o problema mais interessante, dando um exemplo concreto aos alunos, como a sala de aula sendo o paralelepípedo, cujas dimensões podem ser medidas. Os alunos, no problema, devem calcular a diagonal da sala, o professor pode mostrar aos alunos o comprimento, a largura e a altura da sala, e indicar a diagonal, como pode também desenhar a figura na lousa.

Com isso o professor pode trabalhar alguns pontos como: qual é a incógnita? Quais são os dados? Adotar notações para a letra que deve simbolizar a incógnita, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo, qual a condicionante que relaciona o comprimento à largura e a altura com a incógnita, a condicionante e suficiente para determinar a incógnita?

Estabelecimento de um plano – conseguimos um plano quando encontramos caminhos como: quais contas utilizar, os cálculos ou os desenhos para se chegar à incógnita. Esse caminho, muitas vezes, não é algo tão fácil de alcançar, e é a principal etapa na Resolução de Problemas. O professor pode, nesse processo, indagar e sugerir de forma implícita algo ao aluno, que possa usar como ideia no problema (POLYA, 1978).

É importante ao aluno que diante de um problema, tenha em mente experiências anteriores de problemas semelhantes, pois se o problema dado não tiver nenhuma relação com o que o aluno já viu, ou os conhecimentos por ele obtidos, ficará muito difícil ao professor trabalhar o problema, diante disso devemos começar questionando o aluno, conhece um problema correlato?

Devemos analisar que existem muitos problemas que estão ligados de alguma forma ao problema em questão, porém os pontos desse problema muitas vezes não são úteis ao nosso, então devemos considerar um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Se esse método não funcionar, devemos então resolver antes problemas correlatos, lembrando que ao utilizarmos outros problemas para nos ajudar, podemos nos distanciar do problema original e até mesmo perdê-lo, então sempre que estivermos nos distanciando do problema podemos utilizar a indagação: foram utilizados todos os dados? E a condicionante?

Se esse mecanismo não der certo, ou seja, se após a utilização de problemas semelhantes o aluno não conseguir ainda fazer uma analogia para o problema em questão o professor deve estar preparado para dar indicações mais ou menos explícitas, até que seja estabelecido o plano.

Execução do plano – nesse ponto, se o aluno realmente estiver estabelecido um plano e não tiver nenhuma dúvida quanto a ele, sua execução será muito mais fácil, sendo que o maior risco é de o aluno esquecer do plano, o que geralmente ocorre quando o plano é proposto pelo professor (POLYA, 1978).

O professor deve, de qualquer maneira, insistir para que o aluno verifique cada passo, fazendo com que ele se concentre no ponto em questão até que perceba que os passos estão corretos ou não. O principal, é que o aluno se convença da correção dos passos. Em certos casos o professor pode induzir até mesmo ao aluno para que demonstre que os passos estão certos.

Após esse processo o aluno deverá executar as operações corretas, e só caberá ao professor alertá-lo de confirmar cada passo na resolução.

Retrospecto – é comum até mesmo a alunos bons, após chegar e desenvolver a solução do problema, fechar os livros e passar para outro assunto, perdendo assim uma fase importante da resolução, ou seja, se for feito uma retrospectiva completa da resolução, percorrendo o resultado final e os processos para se alcançá-lo, o aluno solidificar e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas. O professor, portanto, deve extrair ao máximo do problema (POLYA, 1978).

Nesse ponto o professor pode questionar o aluno se é possível verificar o resultado encontrado e se é possível resolver o problema de outra forma. Cabe também ao professor mostrar, no retrospecto, relações com o problema resolvido e outros tornando também o ensino mais interessante.

2.2.1. Esquema de Resolução de Problemas segundo Polya

- **Compreender o problema**

    - o que se pede no problema?

    - quais são os dados e as condições do problema?

    - é possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

    - é possível estimar a resposta?

- **Elaborar um plano**

    - qual é o seu plano para resolver o problema?

    - que estratégia você tentará desenvolver?

    - você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

    - tente organizar os dados um tabelas e gráficos.

    - tente resolver o problema por partes.

- **Executar o plano**

    - execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

    - efetue todos os cálculos indicados no plano.

    - execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

- **Fazer o retrospecto ou verificação**

    - examine se a solução obtida está correta.

    - existe outra maneira de resolver o problema?

    - é possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

2.3. A Resolução de Problemas de acordo com Luiz Roberto Dante

Luiz Roberto Dante é doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela PUC de São Paulo e mestre em Matemática pela USP de São Carlos (SP). Ex-professor da rede estadual de ensino, Dante ministra cursos e palestras sobre aprendizagem e ensino da Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. É também assessor do assunto nas prefeituras e escolas das redes particular, estadual e municipal de ensino. O Prof. Dr. Dante foi professor do departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro/SP e um dos fundadores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática desta universidade. É considerado um dos pioneiros em Educação Matemática no Brasil, como campo de pesquisa acadêmica. Por mais de 15 anos lecionou e orientou neste programa, na área de Resolução de Problemas e modelagem. Escreveu vários livros e artigos na área, bem como orientou várias dissertações e teses.

Em seu livro “Didática da resolução de problemas de matemática” sita como objetivos da Resolução de Problemas os seguintes aspectos:

Fazer o aluno pensar produtivamente – atualmente a Resolução de Problemas vem sendo reconhecida mundialmente como uma das principais metas no Ensino de Matemática e nessa metodologia um dos principais objetivos é fazer com que o aluno pense produtivamente, sendo assim é indicado situações-problema no Ensino de Matemática.

Desenvolver o raciocínio do aluno – é importante desenvolver também o raciocínio do aluno, fazendo com que ele se torne capaz de utilizar sua inteligência em determinadas situações seja no meio escolar ou no seu dia-a-dia.

Ensinar o aluno a enfrentar situações novas – é evidente que estamos diante de uma sociedade onde está crescendo gradativamente a tecnologia em proporções altas, dessa forma se torna difícil preparar o aluno de hoje pensando no futuro, ou seja, o que devemos ensinar e quais habilidades dar ao aluno para que ele possa ter proveito no futuro, pensando dessa forma devemos educar o aluno para que ele possa lidar com situações novas, com isso o professor deve desenvolver no aluno a iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência.

Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática – apesar da grande importância da Matemática, é comum, nos dias de hoje, nos depararmos com alunos nas séries iniciais que não gostam da disciplina, seja pelo treino de conceitos, fórmulas ou a consciência da aplicação da matéria. Portanto devemos dar maior respaldo ao aluno para que ele saiba e vincule a Matemática à situações reais do cotidiano, que irão exigir do aluno raciocínio, e um pensamento mais elaborado. Portanto, é importante ao professor concretizar a Matemática com o real na medida do possível, ou seja, não basta apenas ensinar operações numéricas, fórmulas, conceitos de forma mecânica. O aluno precisa saber interagir com situações-problema.

Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras – a Matemática se torna prazerosa quando o aluno se sente desafiado, portanto não basta ao professor colocar o conteúdo e explicar, este deve tornar as aulas mais interessantes desafiando e questionado seus alunos que ficaram felizes ao resolver um problema ou exercício proposto de forma curiosa e intrigante.

Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas – é importante desenvolver estratégias ao aluno para que ele possa utilizar ou se basear na resolução de outros tipos de problemas.

Dar uma boa base Matemática às pessoas – mais do que nunca a Matemática deve tornar as pessoas mais ativas e participantes a tomar decisões com mais agilidade e rapidez, decisões que exigem raciocínio, portanto na Matemática é muito importante a metodologia da Resolução de Problemas, pois com isso formamos cidadãos, que desenvolvem a capacidade de enfrentar e resolver problemas num âmbito social.

Dante (2000) se baseia no método de Resolução de Problemas proposta por Polya, que possui as quatro etapas principais citadas anteriormente. Para Dante essas etapas não são tão fixas, mas auxiliam muito na resolução de um problema, são elas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação.

1ª etapa: compreender o problema – antes de começarmos a resolver um problema devemos antes compreendê-lo, o que pode ser dado respondendo a questões como: (a) O que se pede no problema? O que se está procurando no problema? O que se quer achar no problema? O que o problema está perguntando? (b) Quais são os dados e as condições do problema? O que está exposto no problema e que podem ser utilizados? (c) É possível fazer alguma figura da situação em si dada no problema? e (d) É possível dar alguma resposta estimada para a resolução do problema?

2ª etapa: elaborar um plano – elaborar um plano consiste em desenvolvermos uma ação para resolver o problema, o que pode ser feito também através de algumas perguntas como: Você já resolveu um problema como este antes? Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? É possível colocar as informações numa tabela e depois fazer um gráfico ou diagrama? É possível resolver o problema por partes? é e possível traçar um ou vários caminhos em busca da solução?

Portanto para se resolver um problema precisamos de um plano no qual iremos traçar estratégias, que podem ser: a representação do problema fazendo um esboço ou concretizando o problema, tentativas e erro fazendo estimativas e testando-as, redução ao que tem menos ou ao que tem mais analisando os dados colocados no problema, representação geométrica através de segmentos para representar quantidades, representação algébrica na qual podemos usar letras para representar dados do problema.

3ª etapa: executar o plano – nessa etapa precisamos verificar os passos a serem dados, termos a certeza de que estão corretos e executar o plano fazendo as operações necessárias.

4ª etapa: fazer o retrospecto ou verificação – o importante nessa etapa é que o aluno verifique os caminhos que o levou até chegar ao resultado, fazendo uma análise minuciosa dos passos tomados e revendo a veracidade dos mesmos. Logo após isso o professor pode fazer as seguintes questões:

- há alguma outra maneira de encontrar a resposta?
- é possível usar o método (ou estratégia) aqui utilizado para resolver problemas semelhantes?

Ressaltando, essa etapa são muito importantes no aprendizado, pois o aluno não somente irá resolver o problema, como também irá analisar o que foi feito e se o que foi feito está correto, construindo assim uma aprendizagem que poderá ser utilizada em problemas semelhantes ou auxiliares em problemas novos.

2.4. A Resolução de Problemas de acordo com os PCN

Até dezembro de 1996 o ensino era estruturado nos termos previstos pela lei federal nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que resumidamente tinha como objetivo proporcionar ao aluno uma formação necessária para o desenvolvimento de suas habilidades como mecanismo de auto-realização, ou seja, preparar o aluno para o trabalho e exercício de sua cidadania.

Após esse período, mais precisamente em 20 de dezembro de 1996 foi aprovada a Lei Federal nº 9.394 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que viria para substituir a antiga.

A Lei de Diretrizes e Bases é a atual lei que rege o ensino Brasileiro, e que tem por objetivo, desenvolver o aluno, dar-lhe formação comum indispensável para o exercício da cidadania e dar-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

O ensino proposto pela LDB enfoca a necessidade de proporcionar uma Ensino Básico comum para o exercício da cidadania, levando em consideração as diferenças regionais, culturais e políticas no país, mediante a criação na escola de condições de aprendizagem para:

> I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
> II - a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
> III - o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
> IV - o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social (BRASIL, 1998, p.41).

Sendo assim, coube aos estados a formulação de um material de orientação e referência para o professor, os PCN, que são os Parâmetros Curriculares Nacionais. Desenvolvido pelo MEC, trazem sugestões, objetivos, conteúdos e fundamentação teórica dentro de cada área, com o intuito de dar suporte ao professor.

Resumimos abaixo algumas ideias dadas nos PCN sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Essas ideias são importantes para compreendermos qual é o papel do Método de Resolução de Problemas na Educação atual.

2.4.1. A Resolução de Problemas e o Ensino-Aprendizagem de Matemática

Segundo os PCN, educadores matemáticos apontam a Resolução de Problemas como ponto inicial no Ensino de Matemática, levando em consideração que os alunos constroem seus conhecimentos diante de situações desafiadoras, na qual buscam maneiras e métodos para chegar à solução.

O processo de Resolução de Problemas deverá levar o aluno a formular hipóteses, comparar com seus colegas e validar seus procedimentos. Há também a necessidade de se observar a resposta dada com a real aplicação do conhecimento envolvido. Sendo assim, o mais importante é o processo de resolução e não a resposta final em si.

Quando o aluno é desafiado e estimulado a questionar suas respostas, torna–se claro o processo de ensino e aprendizagem, não pelo teste de conceitos adquiridos através de problemas, mas pela interatividade do aluno com o problema.

2.4.2. Objetivos para o Ensino de Matemática

De acordo com os PCN o aprendizado da Matemática deve levar o aluno a:

- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo a sua volta;
- Perceber que a disciplina estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- Fazer observações de sua realidade e interagir com o uso de conteúdos matemáticos;
- Resolver situações-problema adotando estratégias, desenvolvendo formas de raciocínio e processos como intuição, indução, dedução, analogia, etc;
- Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos, bem como recursos tecnológicos disponíveis, diante de uma situação-problema;
- Apresentar resultados e sustentar argumentos por meio de linguagem oral e escrita;
- Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Interagir com os colegas de modo cooperativo, aprendendo a trabalhar em conjunto na busca de soluções.

2.4.3. Papel do Professor no Ensino de Matemática

O Ensino de Matemática não é algo tão simples para o professor, pois necessita esforço por parte do mesmo. Segundo os PCN um ponto inicial no Ensino de Matemática é, a identificação por parte do professor de conceitos, procedimentos e atitudes realmente importantes para a vida futura do aluno. Também é relevante verificar quais conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, estimulam a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica.

Nessa linha de raciocínio, propõe-se ao professor, que mostre o conteúdo de modo mais empolgante, de maneira a surpreender o aluno, cabendo ao professor considerar alguns aspectos como:

- Ser um mediador, promover debates sobre procedimentos adotados e analisar soluções encontradas;
- Ser um facilitador, fornecer material de pesquisa na qual o aluno não tem acessibilidade;
- Ser um incentivador, estimulando os alunos ao estudo;
- Ser um avaliador, verificar se o conhecimento aplicado está sendo adquirido, se não, reformular a forma de aplicação;
- Ser um organizador, conhecer os alunos, um pouco da sua cultura e sociedade ao seu redor, para propor problemas e desenvolver atividades.

2.4.4. Como Trabalhar os Problemas de acordo com os PCN

Princípios básicos para apresentar uma situação-problema:

- A situação-problema deve ser o ponto de partida da atividade Matemática. Os conteúdos podem ser abordados com a apresentação de problemas, necessitando ao aluno algum tipo de estratégia para resolvê-la;
- O problema escolhido não deve ser algo que seja resolvido de forma mecânica, com a simples aplicação de fórmulas ou conceitos passados pelo professor, ou seja, só existe um problema se for necessário ao aluno interpretar a situação. Lembrando que a solução não deve estar disponível de forma explicita;
- O problema escolhido deve privilegiar o conhecimento matemático como um conjunto de ideias, assim é preciso que o aluno trabalhe com o conhecimento já aprendido e os dados do problema;
- A Resolução de Problemas não deve ser utilizada como uma finalidade em si, mais sim uma metodologia para a aprendizagem, e com base nela, é possível desenvolver conceitos e procedimentos;

- Ao aluno cabe criar estratégias, procedimentos de resolução, comparar o resultado com o dos colegas e validar seus procedimentos.

2.5. A Resolução de Problemas de acordo com Allevato e Onuchic

Nesta seção discutiremos os fundamentos, abordagem e possibilidades que norteiam a Resolução de Problemas na Matemática Escolar segundo Allevato e Onuchic (2014). Essas autoras dizem que, podemos considerar a Resolução de Problemas como coração da atividade Matemática, a Resolução de Problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos. Nesse sentido, a Resolução de Problemas corresponde uma metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação.

Allevato e Onuchic (2014) dizem que, inicialmente no século XX, ou seja, na década de 1980 aconteceu várias mudanças de perspectivas na Educação Matemática. Com essas perspectivas foram acrescentado diferentes visões de como ensinar, aprender e avaliar; e com isso a Matemática ficou com visões de como ser trabalhada e como se devia trabalhá-la. Neste caso, podemos observa que a Resolução de Problemas, na sala de aula de Matemática tem uma grande importância, já que, os educadores matemáticos nas últimas décadas passaram a ter uma aceitação melhor que a ideia de que resolver problemas merecia mais atenção.

Segundo Lambdin e Walcott (apud Allevato e Onuchic, 2014), a partir de 1980 a fase da Resolução de Problemas apresenta-se, como teorias de aprendizagem que eram construída a partir do construtivismo, Psicologia Cognitiva e a Teoria de Vygotsky, nesse tempo as teorias eram voltadas ao processo de aprendizagem matemático.

Allevato e Onuchic (2014) dizem que, existem três tipos de se trabalhar em sala de aula de Matemática com a Resolução de Problemas, as autoras se apoiam apontando Hatfield (1978) como também, Schroeder e Lester (1989). Assim, elas destacam sua coexistência:

I. O ensino de Resolução de Problemas.
II. O ensino para a Resolução de Problemas.
III. O ensino através da Resolução de Problemas.

Segundo Allevato e Onuchic (2014), na primeira forma que é o ensino sobre Resolução de Problemas pode ser considerada como novo conteúdo. Essa abordagem na Resolução de Problemas já foi discutido anteriormente, porém as autoras destacam as ideias de Polya.

Já na segunda forma,

> O ensino para a resolução de problemas, atualmente preferimos denotar ensino de matemática para a resolução de problemas. Essa mudança quer destacar o fato de que o eixo de sustentação dessa abordagem não está mais na Resolução de Problemas, mas na matemática, tendo a resolução de problemas como um apêndice, um acessório. Nessa visão, a matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utiliza-los. Interessa a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto (em geral, puramente matemático) para problemas em outros contextos, ou seja, se ensina Matemática para a resolução de problemas. Assim, nessa abordagem, apenas após ter desenvolvido a parte "teórica" referente a um determinado tópico matemático, é que o professor propões problemas aos alunos, de fato, como aplicações dos conteúdos estudados. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 37-38)

Na terceira, o ensino através da Resolução de Problemas, que é dada maior atenção, segundo essas autoras a expressão "através" – significando "ao longo" , "no decurso" – enfatiza que o fato de que ambas, Matemática e Resolução de Problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútuas e continuamente. Nesse sentido, documentos como NCTM e os PCN recomendam que a Resolução de Problemas seja o ponto de partida para as atividades Matemática em sala de aula, isto também já foi discutido anteriormente.

Ao estudar a Resolução de Problemas de acordo com Allevato e Onuchic (2014), percebemos que a Resolução de Problemas tem um grande impacto na Resolução de Problemas. Assim,

> A matemática tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento da sociedade desde os tempos pré-históricos até o presente. Hoje esse papel é mais significativo do que antes e promete torna-se ainda mais no futuro. Assim, a Educação Matemática é de grande interesse e suscita grandes debates [...] (Willoughby, 2000, p.1).

Nesse sentido, a Resolução de Problemas faz com que o aluno construa seu próprio conhecimento, a construção da criatividade, e do autonomia e da habilidade de pensar crítico e do trabalho em grupo de ser promovido nessa metodologia (Resolução de Problemas). Dessa forma, Allevato e Onuchic (2014) dizem que, o professor tem o papel como medidor dos processos de ensino, ou seja, deve sempre disponibilizar de materiais de diferentes estilos de aprendizagem para seus alunos.

Entretanto, Cai e Lester (2012) mostram que,

> [...] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua pratica de sala de aula (CAI; LESTER, p. 156).

Considerando que o foco do nosso trabalho foi estudar e pesquisar a construção de como trabalhar Matemática com a Resolução de Problemas, tanto para o ensino, para a aprendizagem e verificar a avaliação, nos apoiamos no trabalho de Allevato e Onuchic, que apresentam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Segundo essas autoras,

> A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em quem o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador. Desse modo, nessa Metodologia, a avaliação é realizada durante a resolução de problemas, "integrando-se ao ensino como vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 139).

Entretanto, Onuchic (1999, p. 203) disse que, O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas "reflete uma tendência de reação e caracterização passada como um conjunto de fatos, domínio de procedimento algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercícios mental".

Nesse sentido, podemos compreender que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas torna-se uma estratégia ou dinâmica para trabalhar em sala de aula.

Isto é, pretendemos deixar claro que neste Trabalho de Conclusão de Curso é uma proposta para futuros trabalhos já que nossa intenção nesta pesquisa foi de cunho bibliográfico.

Capítulo 3

Números e Operações Numéricas

Iniciamos este capítulo trazendo um pouco da história do surgimento dos Conceitos das Operações Numéricas, em seguida apresentamos a reconceitualização das quatros operações fundamentais, onde a Matemática e a escrita tem uma relação muito íntima e simbiótica no que se refere ao processo humano de comunicação do pensamento acerca dos fenômenos naturais e sociais.

3.1. A origem dos conceitos das operações numéricas

Como havíamos falado anteriormente nosso intuito nessa secção é apresentarmos um pouco da história do surgimento das operações numéricas, não vamos nos aprofundar, pois não é o foco do nosso estudo.

Segundo Nunes et al. (2009), dentre as mais importantes contribuições de Piaget para a Educação Matemática é a teoria de que compreensão das operações aritméticas que teve origem nos esquemas de ações das crianças.

Nesse sentido, esses “esquemas” são usados na psicologia como um conceito igual aos que são usados no nosso quotidiano, então podemos dizer que esse esquema é uma ideia em que mostra apenas o básico daquilo que é mostrado.

Nunes et al. (2009) dizem que, os esquemas de ação iniciam quando as crianças começam a entender que a adição e subtração são iguais das ações de juntar e retirar, consecutivamente. Neste caso, os esquemas fazem com que as crianças resolvam, de forma prática, questões sobre adição e subtração. Por exemplo, quando pedimos para uma criança de idade entre 5 e 6 anos que elas pensem que elas tinha 4 balas e seu pai lhe deu mais 3, com quantas ela ficou? A criança naturalmente vai utilizar os dedos para mostrar a quantidade de balas, mostrando com uma mão esticando 4 dedos e com a outra mão esticando 3, com isso vai contar os dedos e logo vai responder sete balas.

Para esses autores, esse esquema de ação é gerado por meio de um esquema de juntar. Assim, podemos chamar esse método de resolução do problema de “esquema de ação” por motivos da criança não contar as balas e sim estar contando os dedos como representação das balas. Para eles, esse conhecimento formado a partir da experiência quotidiana é a base sobe qual o Ensino de Matemática deve ser construído.

Ainda aproveitando a ideia de Nunes et al. (2009), agora vamos analisar uma Resolução de Problemas semelhante quando mostramos as crianças de 5 ou 6 anos um problema de subtração: imagine que a criança tinha 3 balas e comeu 1, com quantas ela ficou? Numa questão igual a essa, a criança mostra 3 dedos, e depois cobre 1 com a outra mão, e a criança mostra o resultado 2 do dedinho. Mas uma vez podemos analisar que a criança usou os dedos para resolver o problema, e chegar que sua resposta vai ser “duas balas”, e não dois dedos. Com isso a criança terá usado o esquema de ação de retirar.

Segundo Nunes et al. (2009), a adição e subtração para solução de problemas simples, a criança utiliza um esquema de ação que as relações parte-todo podem ser aplicados a qualquer objeto seja eles dedos, papel, pedrinhas, blocos, entre outros. Nesse sentido, o objeto usado para resolver não importa, o que realmente importa é a ação e seu resultado. Assim, esses resultados obtidos utilizando os dedos, realmente é classificado como “pensamento concreto”, isso não quer dizer quer as crianças não sejam incapazes de abstração.

Nesse sentindo, a criança que já compreende a possibilidade de coordenar a resolução prática de problemas, obtidas através de seus esquemas de ações, e sistema de numeração já está começando a aprender Matemática, isto é, a usar os instrumentos e símbolos da Matemática para resolver problemas.

Por tanto, para esses autores, as crianças desenvolvem na vida diária esquemas de ação que elas usam para resolver problemas simples de Matemática.

Ainda nesse contexto, segundo Nunes et al. (2009), vamos trabalhar o conceito de multiplicação que nasce na ideia de adição, ou seja, na repetição das parcelas de números iguais. Mas, podemos observar que nos últimos anos, muitos autores têm lançado uma ideia ou alternativas de como ensinar esse conceito de multiplicação, e um desses conceitos e a adição repetida.

Para esses autores, a relação que existe entre a adição e multiplicação é formada no processo de cálculo da multiplicação: esse método de cálculo multiplicativo pode ser feito com a adição repetida por que a multiplicação é uma distribuição em relação à adição.

Nunes et al. (2009), analisaram a origem dos conceitos de multiplicação e divisão procurando afirmar do tipo “a multiplicação nada mais é que uma adição repetida em parcelas iguais”. Com isso consideramos logo as evidencia que mostra essa nova visão da origem do conceito de multiplicação. Nesse sentindo do ponto de vista conceitual, existe uma diferença significativa entre adição e multiplicação, ou seja, de maneira mais ampla, entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo.

Segundo esses autores, o conceito aditivo apresenta a situação ao qual podemos analisar tudo a partir de um axioma básico: o todo é igual à soma das partes. Em contraste, o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas grandezas ou quantidades).

Nunes et al. (2009), apresentam alguns típicos exemplos de problemas de multiplicação das quais consideraremos duas: (1) uma caixa de bombons contém 25 bombons; quantos bombons há em cinco caixas? – as variáveis são números de caixas e números de bombons: a relação fixa entre elas é 25 bombons por caixa; (2) Tânia comprou três metros de fita. Cada metro custa R$ 1,50. Quanto pagou ao todo? – as duas variáveis são metros e reais; as relações constante é o preço por metro.

Nunes et al. (2009), não deixam claro a respeito da divisão, simplesmente apresentam um esquema da distribuição equitativa, onde esses autores a partir desses esquemas dizem que, a divisão, como a multiplicação, envolve duas variáveis numa relação constante. Porém, é muito mais difícil perceber essas estruturas nos problemas de divisão do que nos problemas de multiplicação. Os autores apresentam o por quê a seguir:

Um problema de multiplicação: Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisam comprar?

Um problema de divisão: Márcio tem 15 bolas de gude. Ele vai distribuí-las igualmente entres seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar?

Nesse sentindo, embora o problema tenha a mesma estrutura – sejam elas duas variáveis, números de amigos e bolas de gude, em uma relação fixa – o problema não pode ser resolvido por correspondência, porque a relação fixa não é conhecida. Portanto, Nunes et al. (2009) disse que, de fato, a pergunta nesse problema é exatamente qual a relação que devemos fixar para que o número de bolas por amigos seja constante (ou seja, cada amigo receba exatamente o mesmo número de bolas de gude que os outros).

3.2. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais

Segundo Onuchic e Botta (1998, p. 19), a "Aritmética é a parte da Matemática que trabalha sobre números, estabelecendo relações, definindo operações e identificando propriedades".

Essas autoras, ainda dizem que, recentemente, muitas pesquisas em Resolução de Problemas tem ressaltado a necessidade de se enfatizar, através da Resolução de Problemas, os conceitos matemáticos, sobrepondo-os as regras e técnicas que são memorizadas e, para muitos, esquecidas. Assim, diante da necessidade de se dar ênfase aos conceitos matemáticos, elas citando Shulman (1978) dizem que, nos chama a atenção ao dizer que: "um lugar de pesquisa crítico é aquele onde a produção de novos conhecimentos leva a uma reconceitualização dramática tanto na área pesquisa como em outras áreas...".

> Pensando nestes dizeres e relacionando-os aos conceitos das quatros operações fundamentais da aritmética, sentimos que é preciso refletir sobre a reconceitualização de números e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. A natureza do número, em suas diferentes operações, muda enquanto nos movemos de adicionar e subtrair para multiplicar e dividir números inteiros. Muda, mais ainda, quando passamos das operações com inteiros para as operações com números racionais (ONUCHIC; BOTTA, 1998, p. 19).

Onuchic e Botta (1998) dizem que, em qualquer domínio de pesquisa, é muito útil parar e voltar, periodicamente, para observa nosso campo de trabalho. É preciso analisar "o que sabemos" e "o que deveríamos saber, mas não sabemos" e em que direção deveríamos nos mover, para achar respostas aos questionamentos que vão surgindo.

Nos primeiros anos, o trabalho das crianças, com números, é feito com os números inteiros e elas operam, sobre eles, adicionando e subtraindo. Contar é sua primeira atividade. O desenvolvimento da capacidade de contar pode ser caracterizado, de início, como uma sofisticação crescendo no tratamento da unidade (FUSON,1988. STEFFE et al. 1983).

Para Onuchic e Botta (1998), as crianças mudam de “contar somente objetos concretos” para “contar os próprios números como unidades”. Apesar da unidade, nesse período, ser um ente único, o número um, a aquisição de uma conceitualização madura de unidade é um processo protelado e reconhecidamente exigente.

As autoras também, dizem que, nos anos seguintes, as operações mudam de adição e subtração para multiplicação e divisão e os números mudam de inteiros para racionais. É claro que, agora, o conteúdo número não é uma simples extensão daquele dos anos iniciais. Nesse sentido, Onuchic e Botta dizem que, há agora, muita coisa nova e desafiadora, tanto para os alunos quanto para os professores. Ainda essas autoras questionam dizendo que, como é que são construídas as noções básicas de multiplicação e divisão de números inteiros e de números racionais?

Assim, pesquisadores atuais da Educação Matemática,

> Preocupados com as dificuldades encontradas pelos alunos na matemática escolar, buscam reconceitualizar as noções já consagradas de números e operações, para poderem identificar razões causadoras dessas dificuldades. A reconceitualização das operações fundamentais se torna necessária para atender aos diferentes tipos de problemas presentes no nosso mundo, relacionados a cada uma delas, já que os problemas do mundo são modelados por elas (ONUCHIC; BOTTA, 19998, p. 19).

Onuchic e Botta (1998) afirmam que, até pouco tempo atrás, pensava-se que as ideias refletidas, pelas quatro operações fundamentais, eram: a adição, o processo de juntar coisas de mesma natureza; a subtração, a operação inversa da adição, a ideia de tirar uma quantidade de outra; a multiplicação, o processo de adicionar, repetidamente, parcelas iguais; e a divisão, a ideia de reconhecer quantas vezes alguma coisa cabe em outra.

Nesse sentindo, as autoras dizem que, numa visão recente sobre as quatro operações, com inteiros positivos, observa-se que as ideias subjacentes a estas operações não são tão simples, são complexas. Ainda elas dizem que, é preciso tomarmos consciência de que, para cada uma das quatro operações, há diferentes tipos de problemas que são resolvidos por uma mesma operação.

Além disso, Onuchic e Botta (1998) afirmam que, a adição pode estar relacionada às ideias de “mudar adicionando”, de “combinar fisicamente” e de “combinar conceitualmente”. Assim, os problemas de subtração podem se apresentar com três espíritos distintos: o “mudar subtraindo”, o “igualar” e o “comparar”.

Nesse sentindo considerando as ideias das autoras, os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de “grupos iguais”, de “comparação multiplicativa”, de “produto cartesianos” e de “área”. Também Onuchic e Botta argumentam que, os problemas de divisão modelam tipos diferentes de divisão: a “divisão partitiva”, a “divisão quotitiva” e a “divisão cartesiana”.

Toda esta complexidade de ideias dificulta a compreensão, na criança, dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, pois a ela são colocadas situações-problema com espíritos operatórios diferentes, ou seja, que são resolvidas por um mesmo algoritmo.

3.2.1. Reconceitualizando Adição e Subtração

Onuchic e Botta (1998) dizem que, nos livros escolares de Matemática das series iniciais vê-se que, num primeiro momento, cuida-se da adição, depois, da subtração e, quando problemas são colocados, essas operações são realizadas como algoritmos diferentes, que foram trabalhados como independentes.

Nesse caso, pesquisas realizadas indicam que as operações de adição e subtração nas séries iniciais deveriam ser trabalhadas a partir de,

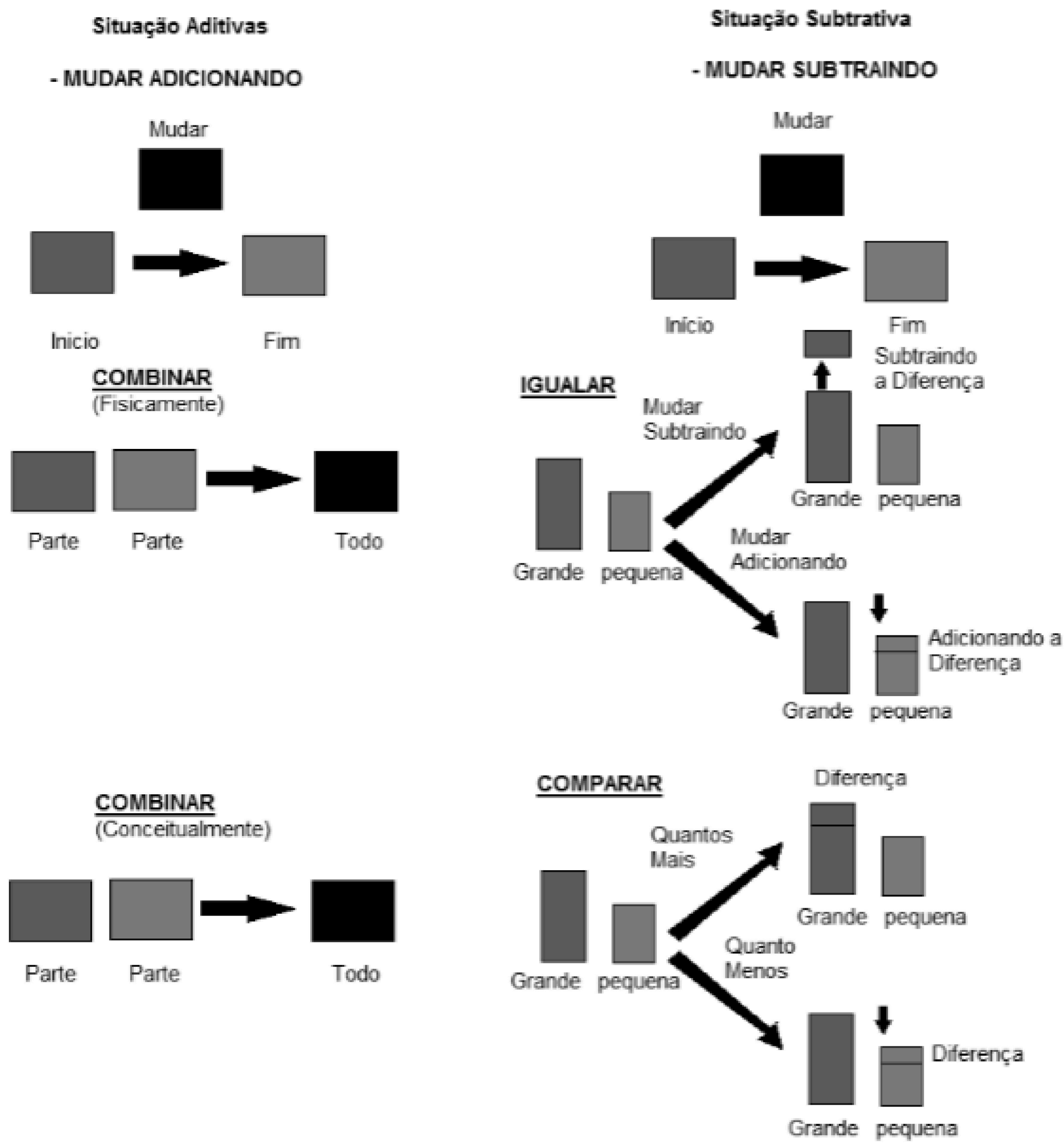
> “problemas aditivos e subtrativos” que permitissem desenvolver, simultaneamente, os conceitos de adição e subtração. Esse trabalho deveria ser feito, concomitantemente, com o trabalho da construção do significado dos números naturais. Só depois disso, é que se cuidaria de conectar os símbolos aos conceitos de adição e subtração; e os problemas aditivos e subtrativos, como membros de uma mesma família, não poderiam ser classificados separadamente (ONUCHIC; BOTTA, 19998, p. 20).

Nessa questão, a compreensão das crianças em adição e subtração de números inteiros tem sido foco de muita pesquisa nos últimos anos.

Nesse sentido, Fuson (1992) diz que, há quatro situações básicas para adição e subtração: comprar, combinar, mudar adicionando e mudar subtraindo. No presente estudo procuramos entender que, quando há duas quantidades, podemos compará-las ou combiná-las. As situações comparar e combinar são operações binárias, nas quais dois números são operados para produzir um terceiro, que é único. Quando há apenas uma quantidade, podemos acrescentar a esta ou tirar desta uma nova quantidade.

Ou seja, as situações de “mudar adicionando” ou de “mudar subtraindo” acabam sendo operações unitárias, nas quais só um número inicial dado é operado de modo a produzir um terceiro. Para isso, Fuson (1992) diz que, além das quatro situações citadas, há uma outra chamada de igualar, que é combinação dos problemas de comparar e de mudar, nos quais a diferença entre duas quantidades é expressa pelas ações de mudar adicionando ou mudar subtraindo. Estas situações estão resumidas na figura 1.

Figura 1 – Situações de adição e subtração do mundo real



Fonte – Extraído de Fuson (1992)

Concordamos com Onuchic e Botta (1998) quando dizem que, cada situação de adição e subtração envolve três quantidades, sendo que qualquer uma delas pode ser a desconhecida. Para cada uma dessas situações há, então, três problemas correspondentes, como podem ser visto no quadro 1. Estes são apresentados na sequência das dificuldades (da menor para a maior) que as crianças tem ao resolverem os problemas. Para isso, na situação combinar, pode-se distinguir uma primeira parte oculta de uma segunda parte oculta.

Para continuar com a compreensão neste estudo, podemos ver, como estas partes usualmente diferem pouco conceitualmente em situações reais, essa distinção não foi considerada no trabalho de Fuson e, portanto resultaram apenas dois tipos de problemas da situação Combinar, ou seja,

> A adição é uma operação que produz uma soma a partir de duas parcelas conhecidas, e a subtração é uma operação que produz uma das parcelas a partir de uma soma conhecida e da outra parcela conhecida. Assim, duas dessas quatro situações principais são situações aditivas (Combinar e Mudar Adicionando) em quanto às outras duas são situações subtrativas (Comparar/Igualar e Mudar Subtraindo). Entretanto, dentro de cada uma das quatros situações, um dos três problemas requer uma operação de adição para achar a resposta (o problema no qual as duas parcelas são conhecidas) e os outros dois problemas (aqueles nos quais a soma e uma parcela são conhecidas) requerem uma operação de subtração para achar a resposta. Então há uma importante distinção a ser feita entre a situação-problema e a operação (adição ou subtração) requerida para achar a quantidade desconhecida, isto é, há uma distinção entre a situação-problema e o procedimento de achar a solução (ONUCHIC; BOTTA, 1998, p. 21).

Onuchic e Botta (1998) no quadro 1 mostram a variedade de situações que envolvem adições e subtrações, por exemplo, 7 problemas diferentes de adição e 15 diferentes situações ligadas á subtração. As autoras ainda dizem que, podemos inferir, com isso, as dificuldades que as crianças enfrentam ao resolver essas 22 situações conhecendo apenas os algoritmos da adição e da subtração.

Quadro 1 – Problemas de adição e subtração

SITUAÇÕES ADITIVAS	SITUAÇÕES SUBTRATIVAS
Mudar Adicionando	Mudar Subtraindo
Fim Oculto	Fim Oculto

Pedro tinha 3 maçãs. Ana deu a ele mais 5 maçãs. Quantas maçãs Pedro tem agora?	João tinha 8 bolinhas de gude. Ele deu 5 bolinhas para Toni. Quantas bolinhas de gude João tem agora?
Mudança Oculta	Mudanças Oculta
Kátia tem 5 canetas. Quantas canetas a mais ela tem que juntar a essas para ficar com 7 canetas?	Fred tinha 11 doces. Ele perdeu alguns deles e ficou com 4 doces. Quantos doces Fred perdeu?
Começo Oculto	Começo Oculto
Bruno ganhou 2 bolachas. Agora ele tem 5 bolachas. Quantas Bruno tinha no início?	Karen tinha alguns problemas com enunciado. Ela fez 22 deles e ainda tem 79 para resolver. Quantos problemas ela tinha no início?

COMBINAR FISICAMENTE	**IGUALAR**	
	Adicionar	Subtrair
Total Oculto	Diferença Desconhecida	Diferença Desconhecida
Sara tem 6 donuts com açúcar e 9 donuts simples. Ela colocou todos em um prato. Quantos donuds há sobre o prato?	Suzana tem 8 bolinhas de gude. Fred tem 5. Quantas bolinhas de gude Fred tem que ganhar para ficar com a mesma quantidade de Suzana?	Jane tem 7 bonecas. Ana tem 3 bonecas. Quantas bonecas Jane teria que perder para ficar com o mesmo números de bonecas de Ana?
Parte Oculta	Sentença Modificada Sugere a Solução	Sentença Modificada Sugere a Solução
João e Toni ficam com 8 bolinhas quando colocam todas suas bolinhas juntas. João tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas tem Toni?	Há 6 meninos em um time de futebol. Mais 2 meninas juntaram-se ao time. Agora há o mesmo número de meninos quanto de meninas no time. Quantas meninas estão no time?	Havia 11 copos sobre a mesa. Eu tirei 4 deles e, portanto, estaria com o mesmo número de copos e de pratos sobre a mesa. Quantos pratos estavam sobre a mesa?
	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto
	César tem 13 bolinhas de gude. Se Júlio ganhar 5, terá o mesmo número de bolinhas	Havia algumas meninas no grupo de dança. Quatro delas sentaram-se e assim cada

	de gude que César. Quantas bolinhas Júlio tem?	menino pôde ter uma parceria. Há 7 meninos no grupo de dança. Quantas meninas estão neste grupo?

COMBINAÇÃO CONCEITUALMENTE	COMPARA	
Total Oculto	Diferença Desconhecida	Diferença Desconhecida
Há 6 meninos e 8 meninas num time de futebol. Quantas crianças estão no time?	João tem 3 balões. Sua irmã tem 5 balões. Quantos balões a mais sua irmã tem?	Janice tem 8 chicletes. Tom tem 2. Quantos chicletes Tom tem a menos que Janice?
Parte Oculta	Sentença Modificada Sugere a Solução	Sentença Modificada Sugere a Solução
Beatriz tem 14 flores. Oito delas são vermelhas e o restante amarelas. Quantas flores amarelas ela tem?	Luiz tem 6 peixinhos ornamentais. Carla tem 2 mais que Luiz. Quantos peixinhos tem Carla?	O leiteiro trouxe, no domingo, 11garrafas de leite e na segunda 4 garrafas menos. Quantas garrafas ele trouxe na segunda?
	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto
	Maria tem 9 blusas. Ela tem 5 blusas mais que Suzi. Quantas blusas tem Suzi?	Júlio tem 5 bolinhas de gude. Ele tem 8 bolinhas menos do que César. Quantas bolinhas tem César?

Fonte – Extraído de Fuson (1992)

3.2.2. Reconceitualizando a Multiplicação e a Divisão

Onuchic e Botta (1998) dizem que, a pesquisa sobre multiplicações e divisão modificou-se no início dos anos 80 com o trabalho de Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985). Eles concebiam que o modelo intuitivo primitivo para a multiplicação era o de adições repetidas e para a divisão era ou aquele baseado na partição ou aquele apoiado nas subtrações sucessivas.

Greer (1992) revela que, em seu trabalho sobre multiplicação e divisão de números inteiros positivos, que uma certa complexidade se manifesta quando as operações são consideradas não somente de um ponto de vista do cálculo, mas em termos de como elas modelam situações. Esse autor, ainda diz que, no trabalho com a matemática, em sala de aula, sente-se que a maior dificuldade encontrada por muitas crianças está no ato de decidir se um problema dado será modelado pela operação multiplicação ou divisão.

Nesse sentido, a complexidade maior reside primeira em tal percepção e, posteriormente, na resolução do algoritmo. Assim, as calculadoras não revelam se um determinado problema será solucionado pela operação multiplicação ou divisão. Portanto, quem decide isso é quem está operando com a máquina, ou seja, a habilidade nas técnicas operatórias não é suficiente para se resolver problemas.

De acordo com Greer (1992), as classes mais importantes de situações envolvendo multiplicação e divisão de inteiros positivos são: (1) a de grupos iguais; (2) a de comparação multiplicativa; (3) a de produto cartesiano; e (4) a de área retangular.

(1) Grupos iguais: 3 crianças têm 4 balas cada uma. Quantas balas têm ao todo? Nesta conceitualização, os números do problema têm papéis diferentes: 3, o número de crianças, é o multiplicador e 4, o número de balas por crianças, é o multiplicando. O multiplicador opera sobre o multiplicando. O multiplicador diz o número de vezes que o multiplicando vai se repetir, para produzir a resposta.

3x4 = 4+4+4 =12

Multiplicador   Multiplicando

Esta classe de situações multiplicativas, de adições repetidas, é considerada por Fishbein e outros, como o “modelo primitivo” da multiplicação. Por que, então, muitas crianças não sabem tabuada, se essa é a primeira noção de multiplicação que lhes é ensinada nas primeiras séries do ensino fundamental?

Para Onuchic e Botta (1998), talvez seja porque elas não compreendem a multiplicação como adições repetidas. Seria mais fácil o seu entendimento e, após isso, a sua memorização, se fosse trabalhado que o primeiro fator – o multiplicador –

indica quantas vezes o segundo fator – o multiplicando – vai ser adicionado. Ainda essas autoras dizem que, se o aluno conhece o papel do multiplicador e do multiplicando, em uma situação de esquecimento saberá raciocinar. Se não se lembra quanto é 7x8, mas sabe que 6x8 é igual 48, então basta adicionar mais uma vez a quantidade 8 a 48, resultando 56.

Nesse sentindo, Onuchic e Botta afirma que, como consequência desta distinção surgem dois tipos de divisão: a divisão partitiva, que significa repartir em iguais subcoleções ou subquantidades, e a divisão quotitiva, que significa determinar quantas subcoleções ou subquantidades de um dado tamanho estão contidas numa coleção ou numa quantidade.

Já na Divisão Partitiva, por exemplo: Há 12 balas e 3 crianças. Ao repartir-se igualmente as balas pelas crianças, quantas balas cada criança receberá?

12 balas | 3 crianças
4 balas/crianças

Este tipo de divisão, em que o total de balas foi dividido pelo número de crianças, é um exemplo de divisão partitiva. É o dividir uma quantidade em subquantidades.

De acordo com Onuchic e Botta (1998), na Divisão Quotitiva**,** por exemplo: Se há 12 balas e quero dar 4 balas para cada criança, quantas crianças poderão ganhar esse número de balas?

12 balas | 4 balas/ crianças
0 3 crianças

12 balas
– 4 balas
8 balas
– 4 balas
4 balas
– 4 balas
0

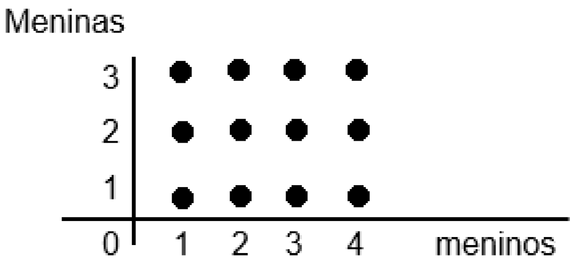
(O divisor foi extraído 3 vezes do dividendo)

De acordo com Onuchic e Botta (1998), este tipo de divisão, em que o total de balas foi dividido pelo número de balas que cada criança deve receber, é um exemplo de divisão quotitiva. Vamos determinar quantas crianças irão receber aquele número determinado de balas complementam as autoras.

Nesse sentido, na divisão partitiva, o dividendo é repartido no número de partes especificadas pelo divisor e o resultado, chamado quociente, é o tamanho de cada uma das partes. Já na divisão quotitiva, o divisor especifica uma medida que será repetidamente extraída do dividendo, e o quociente será um número puro, o número de quotas.

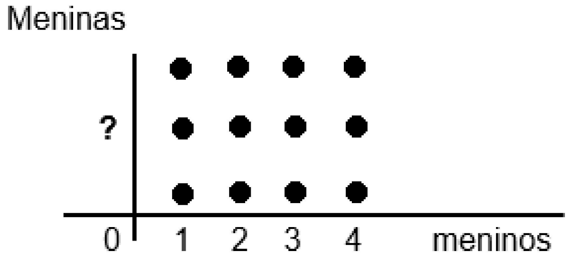
(2) Comparação Multiplicativa: João tem 3 vezes mais maçãs do que Maria. Maria tem 4 maçãs. Quantas maçãs tem João? Nesta conceitualização, o fator multiplicativo 3 é o multiplicador. É possível ver essa situação em termos de uma correspondência “muitos para um”: 3 maçãs de João para 1 maçãs de Maria. Da comparação multiplicativa 3 □ 4maçãs = 12 maças, sairiam as correspondentes divisões partitiva e quotitiva.

(3) Produto Cartesiano: Nesta conceitualização, a multiplicação definida através de um produto cartesiano é recente. Os produtos cartesianos dão um contexto bastante diferente da multiplicação de números naturais. Onuchic e Botta (1998), consideram o seguinte problema: Se há 4 meninos e 3 meninas numa festa, quantos diferentes casais poderão ser formados para dançar?

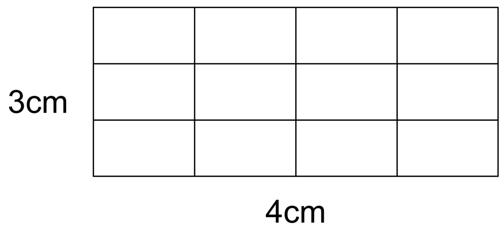


Neste caso, poderão ser formados 12 diferentes casais. Ou seja, como neste tipo de multiplicação há uma simetria entre os papéis dos dois números contidos no problema, então, surge somente um tipo de divisão, chamado de quociente cartesiano.

Já no Quociente Cartesiano: desde que se podem formar 12 diferentes casais e que, nos dançarinos, 4 são meninos, quantos são as meninas? ou, se há 12 casais e 3 são meninas, qual o número de meninos? Observamos que este caso considera conjuntos discretos, podemos ver a seguir:



(4) Área Retangular: Uma figura retangular tem lados de 4cm e 3cm. Qual a área desta figura?



Neste caso, o retângulo é inteiramente dividido em quadrados de 1cm de lado e, portanto, 1cm² de área. A área é encontrada pela contagem desses quadrados, resultando numa área de 12cm².

Nesse sentindo Onuchic e Botta (1998) dizem que, é aquele do produto cartesiano aplicado a conjuntos contínuos e, como um produto cartesiano, os papéis desempenhados pelos números multiplicados são equivalentes. Então, não há dois tipos distintos de problemas de divisão envolvendo esta situação.

12cm² | 3 cm
4 cm

12cm² | 4cm
3 cm

As autoras Concluem dizendo que, em qualquer conjunto numérico trabalhado, N, Z, Q ou R, os conceitos das operações são sempre os mesmos e o domínio desses conceitos nos permite resolver problemas.

Ainda Onuchic e Botta dizem que, as operações mudam de adição e subtração para multiplicação e divisão. Os números mudam, de números inteiros para números racionais. Por baixo de todas as mudanças de nível superficial, está uma mudança fundamental com ramificações distantes: uma mudança na natureza da unidade.

> Enquanto situações aditivas precisam somente envolver quantidades que são derivadas do meio e quantificadas por contagem ou medida, as situações multiplicativas quase sempre requerem a manipulação de relações entre as quantidades. É, de novo, a mudança não é trivial (HIEBERT; BEHR, 1991, p. 18).

Nesse sentindo, Hiebert e Behr (1991) dizem que, ao destacarem as relações entre habilidade com a aritmética iniciante e a aritmética de outras séries, ainda dizem: “O domínio de muitos dos conceitos numéricos e das relações numéricas, num período mais avançados, parece requerer uma reconceitualização de números, isto é, uma mudança significativa no modo pelo qual o número é concebido, a partir das primeiras séries.

Ao estudar a reconceitualização das quatros operações fundamentais, Onuchic e Botta (1998) dizem que,

> Dadas as mudanças fundamentais na natureza do número, não será surpreendente que reorientações cognitivas significantes sejam necessárias para construir e compreender tais mudanças. Isto significa que é provável não haver caminhos contínuos suaves da adição e subtração para a multiplicação e divisão, nem dos números inteiros para os números racionais. A multiplicação não é, simplesmente, adição repetida; e números racionais não são, simplesmente, pares ordenados de números inteiros. Os novos conceitos não são as somas dos conceitos anteriores. Habilidade em trabalhar com conceitos numéricos, no período do sexto ano a nono ano do Ensino Fundamental II, requer uma ruptura com os conceitos mais simples do passado e uma reconceitualização do número em sim mesmo. Na realidade a reconcetualização de números e relações numéricas ocorre, neste ponto, somente para uma minoria de estudantes. Muitos deles continuam a usar conceitos de números inteiros para resolver problemas com números fracionários e simples estratégias aditivas para resolver problemas multiplicativos (ONUCHIC; BOTTA, 19998, p. 24).

Nesse sentido, as autoras dizem que, os problemas, nas primeiras séries do ensino fundamental I, de divisão com números inteiros têm sempre o dividendo maior (ou múltiplo) do que o divisor. Para Onuchic e Botta, desta forma, o quociente é também um número menor que o dividendo.

Assim, dividimos ás inúmeras vezes que as crianças fazem divisões deste tipo, muitas são levadas a achar que a divisão de dois números sempre leva a um resultado menor que a quantidade inicial considerada. Ou seja, na divisão com números racionais, as crianças têm um impacto diante de situações como $2 \div 0{,}25$, onde o resultado é 8, é maior que o dividendo 2.

Segundo Onuchic e Botta (1998), outra ideia construída nas primeiras séries do ensino fundamental I é a noção de que não se pode dividir por um número maior que o dividendo. Isto não é verdade nos números racionais. Nesse sentido, um grande passo para os estudantes compreenderem essas ideias, da divisão com o dividendo menor que o divisor, é a compreensão do surgimento de um número "diferente", expresso como a/ b, b ≠ 0, como solução para a ÷ b, com a < b e b ≠ 0 e que torna a divisão sempre possível.

Greer (1992) Apresenta no quadro 2 situações-problemas para a multiplicação e divisão a seguir:

Quadro 2 – situações modeladas por multiplicação e divisão

Classe	Problemas de Multiplicação	Divisão (pelo Multiplicador)	Divisão (pelo multiplicando)
Grupos iguais	3 criança tem, cada uma, 2 laranjas. Quantas laranjas estas têm juntas?	12 laranjas são distribuídas igualmente entre 3 crianças. Quantas ganha cada uma?	Se você tem 12 laranjas, para quantas crianças pode dar 4 laranja?
Medidas iguais	3 crianças têm 4,2 litros de suco de laranja cada uma. Quanto suco de laranja elas têm juntas?	12,6 litros de suco de laranja é repartido igualmente entre 3 crianças. Quanto cada uma recebe?	Se você tem 12,6 litros de suco de laranja, a quantas crianças você pode ser 4,2 litros?
Taxa	Um barco se move a uma velocidade constante de 4,2 metros por segundos. Até onde ele se moverá em 3,3 segundos?	Um barco se move 13,9 metros em 3,3 segundos. Qual é sua velocidade medida em metros por segundos?	Quanto tempo um barco leva para mover- se 13,9 metros a uma velocidade de 4,2 metros por segundos?
Conversão de medida	Uma polegada mede cerca de 2,54 centímetros. Quanto medirão 3,1polegadas em	3,1 polegadas são cerca de 7,87 centímetros. Aproximadamente quantos centímetros	Uma polegada é aproximadamente 2,54 centímetros. Qual é aproximadamente o

	centímetros?	há em um polegada?	comprimentos em polegadas de 7,87 centímetros?
Comparação multiplicativa	O peso do ferro é 0,88 vezes do peso do cobre. Se um pedaço de cobre pesa 4,2 kg. Quanto pesa um pedaço de ferro do mesmo tamanho?	O peso do ferro é 0,88 vezes do peso do cobre. Se um pedaço de ferro pesa 3,7 kg. Quanto pesa um pedaço de cobre do mesmo tamanho?	Se pedaços de igual tamanho de ferro e cobre pesam 3,7 kg e 4,2 kg respectivamente, quão pesado é o ferro em relação ao cobre?
Parte todo	Uma escola aprovou 35 de seus estudantes em um exame. Se 80 estudantes fizeram o exame, quantos passaram?	Uma escola aprovou 35 de seus estudantes em um exame. Se 48 passaram, quantos estudantes fizeram o exame?	Uma escola aprovou 48 dos 80 estudantes que fizeram um exame. Que fração dos estudantes passou?
Mudança multiplicativa	Um pedaço de elástico pode ser esticado até 3,3 vezes seu comprimento original. Qual é o comprimento de um pedaço de 4,2 metros quando completamente esticado?	Um pedaço de elástico pode ser esticado até 3,3 vezes seu tamanho original. Quando completamente esticado ele tem 13,9 metros de comprimento. Qual ser seu comprimento original?	Um pedaço de elástico de 4,2 metros de comprimentos pode ser esticado para 13,9 metros. Qual é o fator pelo qual ele está sendo encompridado?

Divisão		
Produto cartesiano	Se há 3 caminhos de A para B e 4 caminhos de B para C, quantas maneiras diferentes há para ir de A para C via B?	Se existem 12 caminhos diferentes de A para C via B e 3 caminhos de A para B, quantos caminhos há de B para C?
Área retangular	Qual é a área de um retângulo de 3,3 metros de comprimento por 4,2	Se a área de um retângulo é 13,9 m² e o comprimento é 3,3 m, qual é a largura?

	metros de largura?	
Produto de medidas	A potência de um aquecedor é 3,3 quilowatts de eletricidade. Se usado durante 4,2 horas quantos quilowatts-hora ele consome?	Um aquecedor consome 3,3 Quilowatts por hora. Por quanto tempo ele pode ser usado com 13,9 quilowatts-hora de eletricidade?

Fonte – Extraído de Greer (1992)

Finalizando esta seção, referindo-se ao quadro 2, Greer faz a extensão dos tipos de problemas de multiplicação e divisão de inteiros para a multiplicação e divisão de racionais e, consequentemente, segundo esse autor, surgem diferentes tipos de problemas. Ou seja, sua classificação baseia-se na distinção entre o multiplicador (o que faz a ação) e o multiplicando (o que sofre a ação).

Portanto, analisando o Quadro 2, nota-se que, para as diferentes ideias associadas aos conceitos de multiplicação e divisão, há muitos modelos diferentes de problemas.

Concluindo este capítulo, queremos deixar claro tanto para os professores e estudantes que deveriam ser levados, através de um trabalho com muitos e vários problemas, a perceber que há nos diferentes contextos, diferentes ideias, onde muitas delas são trabalhadas com um mesmo algoritmo. Nesse sentindo, deixamos nossa proposta para futuros trabalhos.

Capítulo 4

Proposta para trabalhar Divisão de Números Decimais, Dízimas Periódicas e Divisão Aproximada de Números Decimais

4.1. Objetivos da proposta

- Reconhecer a divisão de números decimais em situações-problema;
- Adaptar o algoritmo da divisão de números naturais para números decimais utilizando o princípio posicional do sistema de numeração;
- Reconhecer um número decimal como quociente de dois outros (inteiros ou não);
- Reconhecer dízimas periódicas como quociente entre termos de uma fração não decimal;
- Reconhecer o período de dízimas periódicas;
- Reconhecer a necessidade de truncar divisões de números decimais;
- Determinar quocientes com aproximação dada e resto respectivo através da Resolução de Problemas.

4.2. Aplicações para a sala de aula

Nesta proposta, consideramos que o mais importante para se trabalhar em sala de aula, primeiro devemos desenvolver a divisão com divisor natural, segundo o seguinte esquema:

I. Divisão com divisor natural:
   a) quociente decimal finita.
   b) quociente dízima periódica
      - O número decimal como quociente de dois números naturais.
      - A fração como número racional (quociente).

- As decimais infinitas periódicas (dízimas periódicas).
- Quocientes aproximados – o resto, no caso de divisor natural.

II. Divisão com divisor decimal
   - Transformação em outra divisão com divisor natural.
   - Quocientes aproximados – o resto, no caso de divisor não natural.

Santos e Rezende (1983) dizem que, por sua simplicidade, temos verificado uma assimilação bastante fácil e duradoura por parte dos alunos nos primeiros exercícios de divisão de números decimais. Ainda esses autores, afirmam que, devemos dar ênfase às “trocas” (exemplos: 4 décimos = 40 centésimos) que os alunos devem fazer ao longo do cálculo do quociente, e incentivá-los a estimar a ordem do primeiro algarismo não nulo do quociente.

Nesse sentido, em todas as contas, o aluno deve escrever os nomes das ordens acima de cada casa do dividendo e abaixo de cada casa do quociente. Assim, na terceira atividade, após o exercício 4, o professor deve apresentar as notações existentes para as dízimas (por exemplo: 0,3). Se o professor usar pontinhos, deve repetir o período pelo menos duas vezes antes dos pontinhos.

Para aplicação desta proposta, não recomendamos no 6° ano, ou mesmo no início do 7° ano, que se ensine o cálculo de geratrizes das dízimas periódicas. Após o trabalho com equações terão mais condições de compreender a regra para a geratriz de dízimas simples. Ou seja, sugerimos a seguinte ordem:

- dízima simples, com parte inteira nula – pela regra normal;
- dízima simples, com parte inteira não nula – escrevendo como um número misto e depois, se quiser, passando a fração imprópria;
- dízima composta – reduzindo a uma dízima periódica simples através da multiplicação por potência de 10, calculando a geratriz da nova dízima, e, depois, dividindo o resultado pela potência de 10 pela qual foi multiplicada.

  Possíveis exemplos:

  1) $0,555... = \frac{5}{9}$.

     $0,2424... = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$.

  2) $1,333... = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

  3) $0,4222... = ?$

  Multiplicando por 10:

$4{,}222 = 4\,\frac{2}{9} = \frac{38}{9}$

Logo: $0{,}4222... = \frac{38}{9} \div 10 = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$.

Na quarta atividade desta proposta, desse o problema 1, é importante que o aluno escreva acima do dividendo e abaixo do quociente o nome de todas as casas decimais. Assim reconhecerá o resto facilmente. Para esta atividade, o professor deve trazer para cada grupo de alunos uma tira de papel de 15 cm de comprimento.

Antes de começar a quinta atividade, o professor deve enfatizar, com possíveis problemas concretos, a propriedade da divisão exata: "multiplicando (ou dividindo) o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera". Esta propriedade será o suporte para efetuar divisões com divisor decimal.

Nesse sentido, multiplicam-se o dividendo e o divisor por uma potência de 10 que transforme o divisor em número natural, obtendo uma nova divisão cujo quociente é o mesmo da divisão dada.

Assim, se a tabela do problema 1 não for suficiente para fixar essa propriedade, deve ser ampliada.

Na sexta atividade desta proposta, no quinto item da tabela do problema 1, não é necessário fazer a divisão para obter o resto. Basta usar a propriedade fundamental da divisão aproximada: quociente X divisor + resto = dividendo.

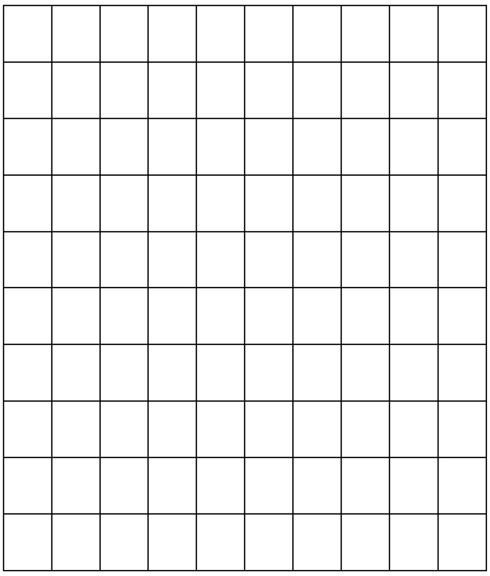
Sendo assim, através do problema 1, o professor deve explorar a seguinte propriedade da divisão: "multiplicando (ou dividindo) o dividendo e o divisor pelo mesmo número o quociente não se altera, e o resto fica (multiplicado ou dividido) por esse número".

Já nos problemas 6 e 7, o professor deve chamar a atenção para o fato de que a ordem de grandeza do resto não é a mesma do quociente.

Em consonância com o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o conteúdo Números e Operações, esta proposta apresenta seis atividades que descreveremos a seguir, nessa secção os leitores poderão apreciar problemas prontos.

4.2.1. Primeira atividade

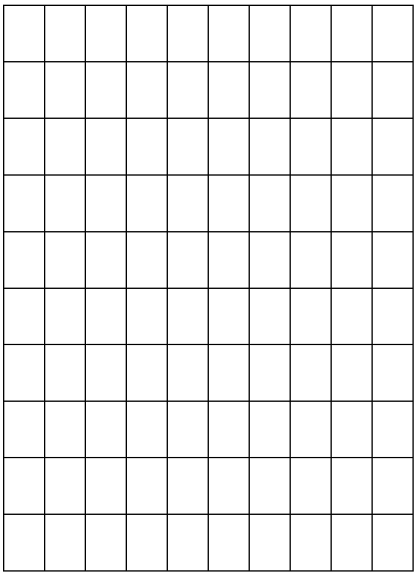
Problema 1: O quadrado representa a unidade dividida em 100 partes iguais. Pinte nele regiões correspondentes a: 0,2 (em vermelho); 0,5 (em preto); 0,16 (em azul).



Dividindo-se cada região pintada em duas, três e quatro partes iguais, respectivamente, quais os resultados obtidos?

Problema 2: Agora efetue: (Faça a ilustração no quadrado)

0,08 : 4 =
0,12 : 6 =
0,24 : 8 =
0,9 : 3 =

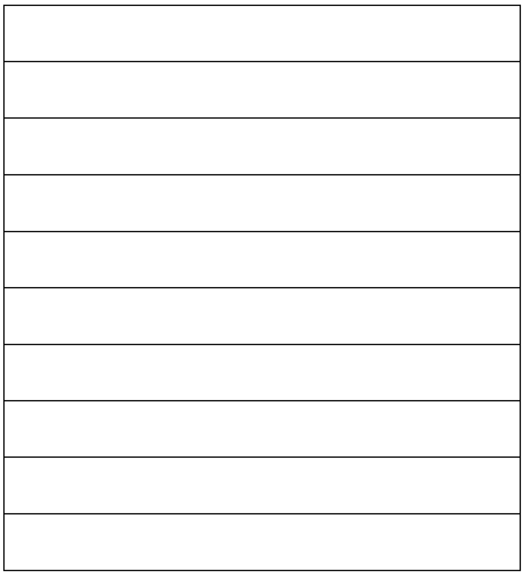


Problema 3: Para efetuar a operação $0{,}2 \div 4$. Pinte, no quadro abaixo, uma região correspondente a 0,2. Divida a região pintada em 4 partes iguais e contorne uma delas.

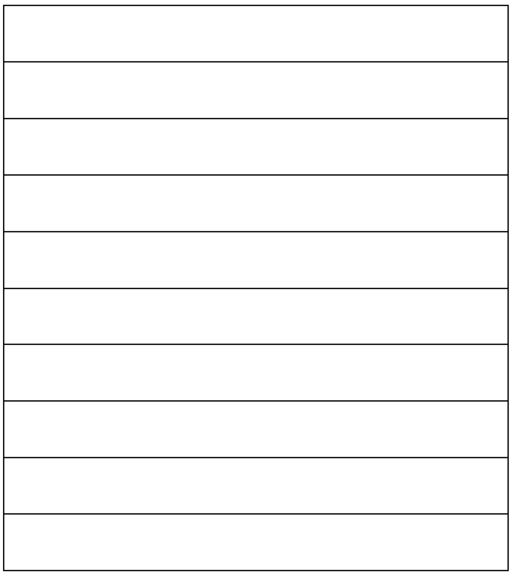
Esta parte será maior, igual, ou menor que um décimo?

Escreva o número decimal que esta parte representa:

Por que obtivemos o resultado em centésimos?



Problema 4: Represente o número 0,04 no quadro abaixo e determine 0,04 : 5 =



Problema 5: Observe que 0,2 : 4 = 0,20 : 4 =_____

0,04 : 5 = 0,040 : 5 = _____

Note que para dividir 0,2 por 4 você trocou 2 décimos por 20 _____________. Você fez isso colocando um zero à direita do algarismo 2.

- Para dividir 0,04 por 5 você trocou 4 ____________ por _________ milésimo.

  0,04 : 5 = 4 centésimos : 5 = ________ milésimos : 5 =_____ milésimos.

Neste caso, seria bom armar as contas para os problemas (3) e (4):

u	dec	cent	
0,	2	0	4

0,	0	5
u	dec	cent

u	dec	cent	
0,	4	0	5

0,	0	8
u	dec	cent

Problema 6: Observando os problemas acima, resolva completando os espaços:

u	dec	cent	mil	
0,	0	2		5

u	dec	cent	mil	
0,	4	8		8

u	dec	cent	mil	
0,	1	2		8

0,	1			25

4.2.2. Segunda Atividade

Problema 1: Arme e efetue:

a) 6,2 : 2

b) 5,1 : 5

c) 1, 47 : 7

d) 6,12 : 6

Problema 2: Ao calcular 0,5 : 2 que quociente e resto deverão ser obtidos?

Para continuar a divisão, o que você deve fazer com o resto?

O que obterá ao dividi-los por 2?

O que se pode concluir dessa operação?

Então, efetue e conta:

0,	5				2			

Problema 3: Efetue:

0,	7				2			

9,	6				8			

Problema 4: Arme e efetue (continue até encontrar resto zero):

0,9 : 6 =

2,32 : 4 =

1,02 : 8=

3 : 2 =

11 : 4 =

1 : 5 =

2 : 8 =

Sugestão: Usando números decimais, muitas divisões podem ser estendidas até obter resto zero.

Problema 5: Você encontrou 1÷ 5 = 0,2 = $\frac{2}{10}$ = $\frac{1}{5}$ e também 2 ÷ 8 = 0,25 = $\frac{25}{100}$ = $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{8}$

Comentário: Toda fração é igual ao quociente do numerador pelo denominador.

Transforme em número decimal,

- Dividindo numerador por denominador; e depois

- Encontrando a fração decimal equivalente, comparando os resultados obtidos:

a) $\frac{7}{8}$ = ______ b) $\frac{3}{4}$ = ______ c) $\frac{12}{8}$ = ______

Problema 6: Para cercar um canteiro quadrado, preciso de 5,16 m de arame. Qual a medida de cada lado do canteiro?

Problema 7: No quarto bimestre, Teresa obteve notas 5,6; 4,8 e 7,3 em Português. Qual a média de Teresa nesse bimestre?

4.2.3. Terceira Atividade - Dízimas Periódicas

Problema 1: Determine os quocientes abaixo:

a) 2 : 3 = _____ b) 10 : 9 = ____
c) 7 : 3 = _____ d) 3 : 11 = ____
Ao resolver, o que você observou nesses quocientes?
Continuando essas divisões, você poderia encontrar resto zero?

Comentário: Decimais infinitas periódicas como as obtidas acima chamam-se DÍZIMAS PERIÓDICAS. Os blocos de algarismo que se repetem no quociente formam números chamados PERIÓDOS das dízimas.

Problema 2: Escreva os períodos de cada uma das dízimas do exercício anterior:
a) __________ b) ___________
c) ___________ d) ___________

Problema 3: Dadas as frações $\frac{4}{3}\frac{9}{6}\frac{5}{10}\frac{5}{9}\frac{3}{20}\frac{3}{15}$
a) Contorne
- Com um círculo, as frações equivalentes a frações decimais;
- Com um retângulo, as que não são equivalentes a nenhuma fração decimal.

b) Divida o numerador de cada fração pelo denominador respectivo e escreva ao lado o número decimal correspondente. O que você concluiu?

c) Escreva o período de cada dízima periódica que você encontrou.

Problema 4: Numere a 2ª coluna de acordo com a 1ª:

1) 0,35	( ) $\frac{7}{10}$
2) 4,323232...	( ) $\frac{3201}{100}$
3) 75%	( ) $\frac{70}{9}$
4) 7,777...	( ) $\frac{7}{20}$
5) 32,01	( ) $\frac{6}{8}$
6) 0,7	( ) $\frac{75}{100}$

Comentário: Uma fração que representa uma dízima periódica chama-se GERATRIZ dessa dízima.

4.2.4. Quarta Atividade - quocientes aproximados de números decimais

Problema 1: Dobre uma fita de 1 metro de comprimento em 3 partes iguais. Meça uma dessas partes com uma fita métrica marcada em centímetros.

Você encontrou _________ cm =_________ m, mas essa medida não é exata.

A medida é o quociente de 1 por 3?

Faça de conta:

Este quociente será uma decimal exata ou uma dízima periódica? Por quê?

Sugestão:

A medida encontrada, _____________ , é o valor aproximado para 1 : 3 , calculado em centésimos. Por isso apareceu um resto, que foi _______

Problema 2: Meça a tira de papel que você recebeu com a régua.

Ela mede ______ cm. Dobre a tira em 4 partes iguais e meça uma delas com a régua. A medida aproximada da parte será ________ cm e _______ mm ou _______ cm.

Nesse caso a régua só mede até décimos de centímetros, logo o quociente será aproximado até os milímetros (décimos de centímetros).

Faça a conta até obter o quociente em décimos

dez	unid	dec	
1	5,		4

u	dec	

15÷4 Quociente em décimos:________

Resto: ______

Continue a conte e responda:

- O quociente de 15 por 4 é uma decimal exata ou uma dízima periódica?

  Por que obtivemos inicialmente um resto?

- Quando o quociente é uma dízima periódica; ou
- Quando só se precisa de um certo grau de exatidão, considera-se o quociente aproximado e aparece então um resto.

Problema 3: Determine o quociente e restos abaixo:

a) 1,628 : 13 – Quociente em milésimos: ________________

Resto: ______________

b) 3 : 8 – Quociente em centésimos: _________________

Resto: ______________

c) 1 : 3 – Quociente em décimos de milésimos:_________

Resto: ______________

4.2.5. Quinta Atividade

Problema 1: Complete a tabela, onde:

D= dividendo

D	d	q
5	2	
0,5		2,5
350	7	
	0,7	50

d= divisor

q= quociente

Problema 2: Escreva os termos que faltam nas divisões e efetue uma delas:

a) 0,4 : 0,2 = __________: 2 = ________
b) 8,4 : 0, 12 = __________: 12 = _______
c) 2,432 : 0,13 = __________: 13 = _______
d) 3 : 0,15 = __________: ___ = ________
e) 45 : 0,9 = __________: ___ = ________

Problema 3: Arme e efetue (até obter resto zero ou uma dízima periódica):

a) 1,5 : 0,25
b) 121 : 4,4
c) 0,25 : 0,02
d) 0,453 : 0,5
e) 23 : 0,06
f) 0, 35 : 0,4

Problema 4: Com 48 ripas e meia de madeira, cobre-se exatamente o rodapé de uma sala de 38,8 m de perímetro. Qual a medida de cada ripa usada?

Problema 5: Deve-se ladrilhar uma sala de 36 m² de área com cerâmicas retangulares de dimensões 0,20 m e 0,15 m. Quantas cerâmicas serão necessárias?

Problema 6: Multiplicando 0,24 por ____________ obtemos 8,4.

4.2.6. Sexta atividade - quocientes aproximados de números decimais.

Problema 1: Complete a tabela, onde:

D = dividendo d= divisor q= quociente r= resto

D	D	q	r
26	6		2
260	60	4	
130	30		10
32	6	5,33	

3,2	0,6	5,33	
10	7	1	
1 000	700		300

Problema 2: Determine agora o quociente de 2, 68 por 0,7 em centésimos. Para isso arme a conta:

2	6,	8			7

e observe:

2,68 : 0,7 = 26,8 : 7

Dividendo: 2,68 x 10 = 26,8

Divisor: 0,7 x 10= 7

Quociente: __________ o mesmo: ______

resto: __________ x 10 _______

Depois que você encontrou o resto da divisão 26,8 : 7, como você descobriu o resto da divisão 2,68 : 0,7? ________

Problema 3: O quociente da divisão de 36,2 por 4, em décimos é _________ e o resto será _________.

Problema 4: Determine os quocientes indiciais e os restos correspondentes:

a) 0,453 : 0,5 Q (em centésimos) = _________ Resto: ______
b) 23 : 0,06 Q (em centésimos) = _________ Resto:_______
c) 4,63 : 0,21 Q (em centésimos) = _________ Resto: ______

d) 0,35 : 0,4 Q (em centésimos) = _________ Resto: _______

4.2.7. Aplicações em situações-problema

1. Uma fábrica embalou uma produção de 100m² de azulejos em caixas com 0,25m² em cada uma. Quantas caixas foram necessárias?

2. Em uma prova, cada item de primeira questão vale 0,75, cada item da segunda vale 1,2 e a terceira questão vale 1,0. Que nota tirou o aluno que acertou apenas 3 itens da primeira questão e 4 da segunda questão?

3. Tenho 5 m de fazenda para dividir igualmente com as minhas três irmãs, com cada uma recebendo 1,25m, quantas irmãs eu tenho?

4. Uma pessoa confecciona pulseiras e gasta, para cada uma, 0,18 m de fio de nylon. Se ela comprar 2,75 m de fio de nylon, quantas pulseiras poderá fazer? Sobrará fio de nylon? Quanto?

5. Quantos livros no máximo de 2,2 cm de espessura podem ser guardados em uma prateleira de 3,52 m de comprimento?

6. Um circuito tem 18,75 km. Um piloto com velocidade de 300 km/h, em quanto tempo faz uma volta?

7. Num restaurante, são gastos 40 latas de óleo com 0,6 litros cada uma mensalmente. Quantos litros de óleo são gastos por mês nesse restaurante? Se o dono do restaurante quiser comprar esse óleo em latas de 4,5 litros, quantas latas deverá comprar por mês nesse restaurante? Nesse caso quantos litros sobrarão a cada mês? Ele precisará comprar, todo mês a mesma quantidade de latas de 4,5 litros? Justifique sua resposta.

Considerações

No desenvolvimento desse trabalho pudemos perceber a preocupação de George Polya em desenvolver etapas a serem seguidas no processo de Resolução de Problemas. O autor tem como um roteiro a ser seguido diante de um problema a ser solucionado. Esse roteiro consiste na compreensão do problema, elaboração de um plano que seria a estratégia para resolver o problema, a execução do plano, e por fim fazer uma retrospectiva ou verificação do que fora feito ao longo das etapas do processo. Essas etapas, para o autor, devem ser seguidas à risca na busca da solução para o problema. Também pudemos perceber que Polya estava preocupado na evolução da Matemática em si, como teoria da sua época, devendo levar o aluno a pensar como um matemático e, de acordo com o mesmo, esse processo deve ser utilizado um pouco antes da chegada do aluno ao curso superior, ou seja, nas séries finais do ensino pré-universitário.

Já Luis Roberto Dante, mesmo se baseando em Polya, e tendo a visão das etapas propostas pelo mesmo, tem o ponto de vista de que essas etapas não devem ser seguidas de forma tão rigorosa, mas apenas servir como base e auxílio no processo da Resolução de Problemas. Em seu livro "Didática da Resolução de Problemas de Matemática", ao contrário de Polya, indica a metodologia para ser trabalhada nas séries inicias do Ensino Básico, mais precisamente do 1ª ao 6ª ano, com o objetivo de levar o aluno ao desenvolvimento de suas potencialidades de acordo com sua vivência na escola e fora dela.

Por sua vez, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) não é citado nenhum roteiro ou etapa a serem utilizadas no processo para a resolução de um problema. O problema deve ser algo que motive o aluno e o desafie.

Nos PCN a Resolução de Problemas deve ser utilizada como ponto de partida no Ensino de Matemática, sendo que os conhecimentos devem ser explorados mediante problemas, na qual o resultado não está colocado de forma explícita, levando o aluno a desenvolver estratégias para sua resolução que em alguns casos será utilizada em outros problemas.

A Resolução de Problemas não deve ser utilizada em paralelo ou com a aplicação da aprendizagem, mas sim uma orientação que, segundo os PCN, proporciona um contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Nos PCN pudemos perceber também, que não é citado indicação nenhuma para a série em que se pode iniciar a utilização da metodologia de Resolução de Problemas. Nos PCN, "resolver problemas" é uma capacidade a ser desenvolvida em todas as séries do ensino fundamental e médio e que deve proporcionar ao aluno base para estudos posteriores. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução.

Podemos analisar nos PCN a preocupação em formar cidadãos. É claro o objetivo de fazer com que o aluno desenvolva procedimentos e estratégias para que, diante de problemas, possa saber como agir e de forma a auxiliar no crescimento do aluno como um cidadão, que estará mais preparado a lidar com problemas do cotidiano.

Percebemos, então, que o processo de Resolução de Problemas tem significados diferentes para as fontes analisadas – Polya, Dante, Onuchic e os PCN. Tem objetivos diferentes: desenvolver a teoria Matemática, desenvolver o raciocínio matemático da criança e formação para a cidadania, respectivamente. E tem aplicações diferentes ao ensino, conforme cada autor. Essas diferenças estão relacionadas aos contextos educacionais e científicos das épocas de cada uma dessas fontes.

Cabe ao professor de Matemática que usa a metodológia de Resolução de Problemas para ensinar a Matemática aos seus alunos perceber estas diferenças para que possa aplicar este método de acordo com os seus objetivos educacionais.

É necessário que o Ensino de Matemática evolua juntamente com a sociedade. Não podemos ficar presos aos antigos modelos de ensino e ignorar as inúmeras descobertas na área da Educação Matemática, no que diz respeito à maneira como os alunos desenvolvem os conceitos matemáticos sobre as quatro operações, e às diversas formas de auxiliar nessa construção.

Com isso, sobre os conceitos que são relacionados as quatros operações da aritmética, sentimos que é preciso refletir sobre a reconceitualização de números e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Conforme Onuchic e Botta (1998) mostram, é preciso analisar "o que sabemos" e "o que deveríamos saber, mas não sabemos” em que direção deveríamos nos mover, para achar respostas aos questionamentos que vão surgindo.

Desta forma, a reconceitualização das operações fundamentais se torna necessária para atender aos diferentes tipos de problemas presentes no mundo, relacionados a cada uma delas já que os problemas do mundo são modelados por elas.

Referências bibliográficas

BEHR, M.J., HAREL, G., POST, T., LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D.A. (Ed). **Handbookof research on mathematics teaching and leaning**. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem**. Rio Claro: UNESP, 1997. 185 p. dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – ICCE, UNESP, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC, 1997. 141p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 1998. 148p.

CAI, L.; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é importante para a Aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM.** Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012. Tradução de BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G.Disponívelem:<http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?jounal=gepem&page=article&op=vew&path%SB%SD=837>. Acesso em: 24 jun.2015.

Dante, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo, Ática 2000.

FIORENTINI et al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista- Dossiê: educação matemática**, Belo Horizonte: UFMG, n. 36, 1994.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M,. & MARINO, M. **The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division.** Journal for Research in Mathematics Education, 1985, 16, p. 3 – 17.

FUSON. K. C. Research on whole number addition and subtraction. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 243 – 275.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 276-295.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In: HATFIELD,L. L.; BRADBARD, D. A. (org.). **Mathematical problem Solving:**

HIEBERT, J & BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In:____.(Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3. ed. Reston: LEA, NCTM, 1991. p. 1-18.

KIEREN, T.E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades.** 3. ed. Reston: LEA, NCTM, 199. p. 162-181.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the Scholl Mathematics Curriculum. In: MARTIN, W. G.; et al (ed,). **The Learning of Mathematics.** Yearbook 2007. Reston, Va: NCTM, 2007, p. 3-25.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S; BRYANT, P. Educação Matemática - **Números e operações numéricas**. SP: Cortez Editora, 2009.

NUNES, T. & BRYANT, P. (1997). **Crianças fazendo matemática**. Porto alegre: Artes Médicas.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONICHIC, L. R., BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**. São Paulo, Ano 5, n. 3, p. 5-8, jan. 97.

ONUCHIC, L. R; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatros operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática.** São Paulo, ano 6, n. 3, p. 19-26, 1998.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005, p. 212-231.

Polya, George. **A arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro, Interciência, 1978

Pires, C. M. C. **Currículos de Matemática**: da organização linear à ideia de rede. – São Paulo: FTD, 2000

SANTOS, V. M.; REZENDE, J. F. **Números linguagem universal**. Instituto de Matemática/UFRJ. Projeto Fundão. SPEC/PADCT/CAPES. 1983.

SCHROEDER, T.; LESTERJR, F. R. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCYM, 1989, P. 31-42.

SCHWARTZ, J.L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3. ed. Reston: LEA, NCTM (National council of Teachers of Mathematics), 1991. p. 41-52

STEWART, A. – **Os problemas de Matemática**. Disponível em http://ia.fc.ul.pt/investigacoes/invmat/probleinvest.htm. Acesso 11/04/20016.

STEFFE, L. P., VON GLASERSFELD, E., RICHARDS, J., & COBB, P, **Children's counting types: Philosophy, theory, and application**. New York: Praeger, 1983

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3. ed. Reston: LEA, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 1991. p. 141-161.

YAMONOSHITA, R. & MATSUSHITA, K. (1996). Classrom models for Young children's mathematical ideas. In H. M. Mansfield, N. A. Pateman, & N. descampsBernarz (Eds.), **Mathematics for tomorrow's young children**: International Perspective on curriculum. Dordrecht: Kluwer Academic