Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Matemática

Pedro Fellype da Silva Pontes

Dedução das equações de movimento de partículas por meio das Equações Diferenciais

Campina Grande

2017

Pedro Fellype da Silva Pontes

Dedução das equações de movimento de partículas por meio das Equações Diferenciais

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UEPB, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Juarez Dantas de Souza

Professor Doutor

Campina Grande

2017

P814d Pontes, Pedro Fellype da Silva.
Dedução das equações de movimento de partículas por meio das equações diferenciais [manuscrito] / Pedro Fellype da Silva Pontes. - 2017.
33 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática".

1. Modelagem matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Física. I. Título.

21. ed. CDD 512.94

Pedro Fellype da Silva Pontes

Dedução das equações de movimento de partículas por meio das Equações Diferenciais

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UEPB, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 17 de Março de 2017

BANCA EXAMINADORA

Juarez Dantas de Souza

Professor Doutor

Vandenberg Lopes Vieira

Professor Doutor

Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Professor Doutor

A Deus, toda honra e glória

Aos meus pais, Dedico

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao autor e consumador da minha fé, Deus, por sua infinita graça e bençãos derramadas durante toda a minha vida.

Agradeço aos meus pais Luis Carlos e Eliane Santos por sempre acreditarem nos meus sonhos, mesmo quando pareciam tão distantes, mostrando-me que nada é impossível. As minha irmãs Renaly Pontes e Rayane Pontes e meu cunhado Nelson Junior, por todo companheirismo e apoio durante essa difícil caminhada.

A Maria Nascimento por estar sempre ao meu lado seja nos momentos felizes ou tristes, nunca me deixando abater ou esmorecer.

Aos meus colegas e amigos da UEPB que juntos chegamos ao fim de uma longa caminhada em que, um sempre ajudou o outro. Em especial, agradeço a Lucas Henrique por me ajudar na confecção das figuras presentes nesse trabalho, e a Juan Felipe e Tayná Maria pelos inúmeros artigos publicados em conjunto.

Todo o corpo docente da UEPB que de todas as formas ajudaram na minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao Professor Doutor Juarez Dantas por toda sua paciência e seus importantíssimos conselhos para criação desse trabalho, assim como, as Professoras Mestre Katia Graciano e Doutora Maria Isabelle por me auxiliarem e aconselharem no processo de conclusão de curso.

Ao Professor Doutor Eduardo Gomes, com quem desenvolvi um belíssimo projeto de iniciação científica que além de ter sido meu Professor, foi um grande amigo que ganhei.

Agradeço, ao Professor Especialista Nehemias Lourenço por não só ter me ajudado na construção e revisão do abstract, mas também por me ajudar nas áreas acadêmicas e pessoais e por sua tão grande amizade comigo.

Agradeço, por fim, aos Professores Doutores Vandenberg Lopes e Francisco Sibério pelas importantíssimas observações para melhoramento deste Trabalho de Conclusão de Curso. Foi um prazer tê-los na Banca Examinadora.

"O Princípio da Sabedoria é o temor a Deus" *Pv 1:7*

Resumo

É sabido que a Matemática, enquanto ciência está presente em todos os ramos que possamos imaginar. Ao analisar as Equações Diferenciais, percebe-se que estas são bem mais difundidas e aplicadas em inúmeras ocasiões. Têm-se, por exemplo, aplicações na Biologia, Ecologia, Medicina, Geologia e História (métodos de datação), Matemática Financeira e na Física. Estas várias aplicações ocorre pelo fato de as Equações Diferenciais serem de fácil modelagem às situações mencionadas. Com isso posto, podemos transformar um problema real, que a princípio seria de difícil solução, em uma equação simples que nos trará um resultado aproximado. O objeto central de estudo desse trabalho de conclusão de curso é a aplicação das Equações Diferenciais, em específico, as modelagens e formas de resolução de lançamentos verticais e queda livre, com e sem resistência do ar, o que também serve como nossa metodologia. Assim, torna-se evidente que a metodologia empregada em nosso estudo segue a linha qualitativa.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equações Diferencias, Física.

Abstract

It is well known that mathematics as a science is present in every branch we can imagine. When analyzing the Differential Equations, it is perceived that these are much more widespread and applied in numerous occasions. There are, for example, applications in Biology, Ecology, Medicine, Geology and History (dating methods), Financial Mathematics and Physics. These various applications occur due to the fact that the Differential Equations are easily modeled to the mentioned situations. So, we can transform a real problem, which at the beginning would be difficult to solve, in a simple equation that will bring us an approximate result. The main goal of this study is the application of Differential Equations, specifically, the modeling and forms of vertical launching and free fall, with and without air resistance, which also serves as our methodology. Thus, it becomes evident that the methodology used in our study follows the qualitative line.
Keywords: Mathematical Modeling, Differential Equations, Physics.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

"A Matemática é chave de ouro que
abre todas as Ciências"

DURUY

A cada nova pesquisa realizada e publicações de artigos em diversas áreas, percebemos a matemática intrínseca em cada novo conceito. Essa penetração se dá pelo fato de que em muitas áreas, apenas as observações não podem ser consideradas provas cabais. Muitas provas de conceitos têm de passar pela linguagem matemática.

A modelagem matemática, como bem afirma Bassanezi (2002, p.16), "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolve-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Ou seja, transformação da linguagem materna para linguagem de símbolos, ou linguagem matemática, que falamos no parágrafo anterior, utilizamos a Modelagem Matemática.

Temos aplicações na Biologia e Ecologia quando estudamos a taxa de crescimento e decrescimento populacional na natureza, Medicina como estudo da propagação de doenças, Geologia e História nos vários métodos de datação como Carbono-14 ou taxa de decaimento de elementos químicos radioativos (ou radioisótopos), Matemática Financeira com problemas de Juros Compostos e nas inúmeras aplicações na Física tais como, movimento massa-mola, equação do calor, problema da corda vibrante, queda livre, circuitos elétricos e vários outros.

A modelagem matemática, propriamente dita, não é algo tão novo quanto nos parece. Ela existe desde a antiguidade quando os gregos olhavam para os céus e tentavam explicar fenômenos naturais por meio de equações matemáticas ou quando Pitágoras (570 a.C. - 495 a.C.) fundamentou as escalas musicais com razões e proporções. Esse pensamento pode ser corroborado quando Galileo Galilei (1564-1642) diz que *"La mathematica è l'alfabeto nel quale DIO ha scritto l'universo"* (A matemática é o alfabeto pelo qual DEUS escreveu o universo). Essas situações podem ser descritas por modelagem matemática, pois expressa que todo o universo é regido pela matemática e sendo assim, podem ser interpretados através do uso dos conceitos matemáticos.

A modelagem matemática pode ser empregada em estratégia de ensino ou como método científico de pesquisa. Podemos pensar como estratégia de Ensino e Aprendizagem pois poderemos utilizar tudo aquilo que aprendemos, seja no Ensino Médio como no Superior, dando assim um sentido maior para aquilo que vemos em sala de aula. Desta forma, os alunos terão que saber usar a lógica e o conceito matemático adequado para poder traduzir o problema proposto da linguagem materna para a linguagem matemática, resolvê-lo e interpretar o resultado.

Acredita-se que o uso da modelagem matemática no Ensino e Aprendizagem permitirá que o aluno perceba melhor cada situação que se deparará no seu dia-a-dia com um olhar mais crítico.

Contudo o uso da modelagem é bem mais difundida nas pesquisas científicas. A evolução nas pesquisas científicas acompanhou o avanço das tecnologias pois pudemos ter acesso a informações muito mais precisas com os equipamentos que possuímos hoje.

Percebemos a importância da modelagem matemática nas pesquisas científicas de várias áreas, pois, salvo a Física que sempre usou a linguagem matemática como forma de explicar os fenômenos físicos, as pesquisas em várias áreas, tais como economia, biologia, quimica, sempre usavam apenas a linguagem materna para descrever seus fenômenos, o que causava dificuldades de entendimento e até certa desconfiança quanto a validação.

Todos esses conceitos, como já falamos, devem passar por um "aval" da matemática. Com este "aval" podemos ter a certeza que tais dados colhidos expressam a realidade, ou que tal função representa o índice populacional de uma certa espécie e etc.

Quando observamos um fenômeno,na sua interpretação, devemos seguir alguns pontos para poder construir um modelo que o represente. Os pontos principais dessa sequência estão representados no diagrama a seguir:

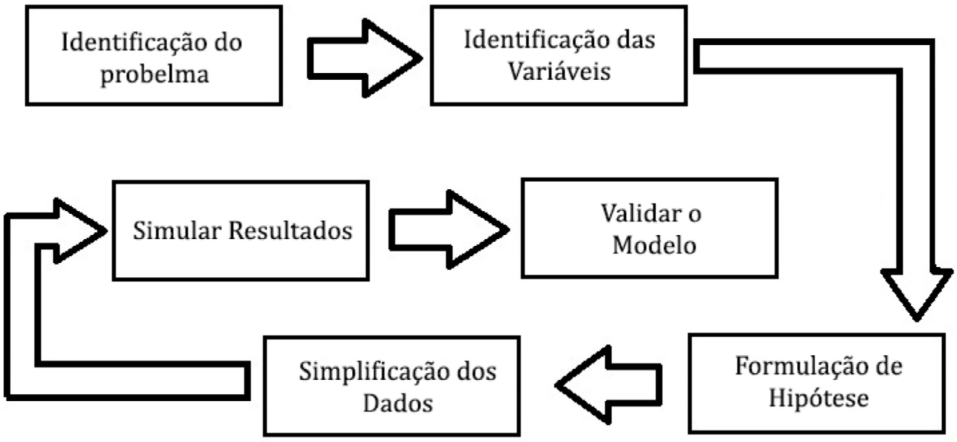

Figura 1.1: Diagrama de passos para a criação de um modelo matemático

Primeiramente, temos que ter um fenômeno ocorrendo em determinada ocasião que queremos estudar. Este fenômeno pode ser de qualquer natureza. Biologia, química, física, economia ou até mesmo um outro problema matemático. Este passo é o que chamamos de *Identificação do problema*. Essa etapa ocorre normalmente em um laboratório, onde um pesquisador se depara com algo novo, diferente do habitual e que possui algum tipo de padrão ou durante a observação de um fenômeno físico, onde o observador procura interpretar o fato observado. Nesta etapa se faz necessário a coleta de todo tipo de dados possíveis.

A segunda tarefa é a *identificação das variáveis*. Como coletamos todos os dados possíveis, há algumas variáveis que não nos servirá. Esta etapa é muito importante, pois se escolhermos variáveis desnecessárias poderemos nos confundir e acabar chegando a um modelo que não se aproxima da realidade como queríamos.

Depois de escolher os dados necessário para o nosso modelo, devemos formular hipóteses de como o fenômeno ocorre. Esta etapa também costuma causar problemas de formulação. Nem sempre o que percebemos como padrão, de fato é o real padrão. Este fato é exemplificado por Lourenço (2007, p.27), imaginemos que devemos encontrar um padrão nas raízes quadradas de números naturais de quatro algarismos. Vamos analisar algumas raízes de números da forma descrita acima,

$$\sqrt{2025} = 45 \qquad \sqrt{3025} = 55 \qquad \sqrt{9801} = 99$$

Então, já temos um problema que foi identificado (encontrar um formula de encontrar raízes quadradas de números naturais de quatro dígitos), identificamos as variáveis e coletamos dados, em especial as raízes de 2025, 3025 e 9801. Devemos agora formular uma hipótese. Perceba que essa raízes analisadas possuem algo em comum. Se dividirmos os algarismos da cada número de dois em dois e somarmos, encontraremos exatamente o valor da raiz quadrada:

$$\sqrt{2025} = 45 \to 20 + 25 = 45$$

$$\sqrt{3025} = 55 \to 30 + 25 = 55$$

$$\sqrt{9801} = 99 \to 98 + 01 = 99$$

Então como serviu para esses três exemplos, podemos formular o seguinte modelo simples para calcular a raiz quadrada de números naturais de quatro algarismos:

$$\sqrt{abcd} = ab + cd$$

Porém, quando analisamos para outros exemplos, não percebemos tal propriedade. Veja que:

$$\sqrt{1024} = 32 \neq 10 + 24 = 34$$

$$\sqrt{1936} = 44 \neq 19 + 36 = 55$$

$$\sqrt{3969} = 63 \neq 39 + 69 = 108$$

Ou seja, fizemos os passos da modelagem descritas até aqui à risca. Porém falhamos ao fazer hipótese sobre o padrão entre os dados coletados. Mostrando assim a importância de criar uma hipótese concisa. Portanto, a expressão $\sqrt{abcd} = ab + cd$ não corresponde a um modelo matemático que sirva para calcular a raiz quadrada de um número. Quanto a esse exemplo, Lourenço (2007, p.29), termina afirmando: "Em nosso exemplo, as nossas evidências não passariam de "grandes coincidências"que nos levariam à aceitação de uma teoria errada."

Nem sempre o melhor modelo matemático para o fenômeno será o mais simples. Na verdade geralmente os modelos são bem mais complexos do que esperávamos. Para amenizar isso devemos seguir nosso quarto passo: *Simplificar os Dados*.

Após feito a simplificação dos dados, nós teremos um modelo matemático do fenômeno e agora devemos *simular este modelo*, que consiste em literalmente testa-lo, atribuindo valores a cada variável e coletar os seus resultados, seja ele manualmente ou utilizando programas computacionais, ou seja, fazer simulações.

Depois de seguir cada passo, teremos então a *validação do modelo*. Nesta etapa será feito um parâmetro entre os dados obtidos nas observações prévia e os dados colhidos com o modelo feito. Esses dados obtidos pelo modelo deve ter uma certa aproximação dos obtidos empiricamente. Na verdade, essa aproximação é crucial para considera-lo um bom modelo, quanto mais próximo do real, melhor será o modelo.

Ainda citando Bassanezi (2002, p.30), ele nos afirma que "Um bom modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Um bom modelo é aquele que tem a capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas".

Este trabalho, tem por objetivo utilizar as equações diferenciais ordinárias para interpretar o movimento de um corpo em várias situações. Trataremos primeiramente do lançamento vertical desconsiderando a resistência oferecida pelo ar. Nosso segundo passo será estudar este mesmo movimento porém considerando a resistência do ar. Sempre iremos dividir este movimento entre lançamento vertical para cima e queda livre.

2 Nota Histórica

> "A matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as Ciências"
>
> JACQUES HADAMARD

Para o início do nosso estudo acredito importantíssimo uma busca pelo conhecimento histórico do objeto de estudo, pois conhecer o processo de evolução, dificuldades, e descobertas nos trará uma visão mais ampla e coerente do assunto em questão. Não só isso, com uma análise histórica também poderemos ver as diferenças entre formas de resoluções usadas por estudiosos antigamente e nossa forma de resolução, fazendo assim um parâmetro do antigo e atual.

A história das Equações Diferenciais está repleta de nomes importantes durante seu belo desenvolvimento. Os estudos das Equações Diferenciais iniciou-se juntamente com os estudos de uma das invenções mais engenhosas da matemática, o Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716). O estudo do Cálculo foi provavelmente um dos mais importantes da história, pois tivemos varias derivações a partir deles, como nosso objeto de estudo, Equações Diferencias. Como bem afirma EVES (2004, p.417):

> "[...]com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou. [...] Esses conceitos têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta."

Leibniz estudando o Cálculo, desenvolveu os sinais de derivada $\frac{\partial x}{\partial y}$, e integral $\int$, um S alongado para dar ideia de *summa* (soma). Publicou a primeira ideia do Cálculo Diferencial, mesmo que antes disso Newton já estava estudando Cálculo, em 1684 num artigo intitulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) onde apresentou a regras de derivação do produto, quociente e potências. Nessa publicação Leibniz trouxe aplicações geométrica para o Cálculo Diferencial. Provavelmente esta tenha sido a principal diferença entre Leibniz e Newton. Anos mais tarde, publicou na *Acta Eruditorum* a ideia do Cálculo Integral. Desenvolveu também uma teoria das equações diferenciais separáveis e resolveu a equação linear de primeira ordem, o que se tornou um dos grandes passos para resolução da Equações Diferencias.

Já Newton nos anos de 1665 e 1666 teve provavelmente o seu período mais prolifero em descobertas matemáticas. Nesse período ele desenvolveu quatro grandes descobertas, a saber, Teorema Binominal, Lei da Gravitação, Natureza das Cores e o Cálculo, que naquele tempo ele chamava de Método dos Fluxos. A primeira publicação do Cálculo por Newton só veio no ano de 1687 em *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ou simplesmente como também é conhecida *Principia*, provavelmente a publicação mais importante de Newton, onde descreveu fundamentos da física e da astronomia na linguagem da geometria pura.

Na primeira seção do Livro I contém um lema muito interessante que seria uma tentativa de definir Limite, a saber:

Lema 1. *Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais.*

Porém, somente no Livro II houve oficialmente um pronunciamento sobre o Cálculo, embora sua linguagem tenha sido completamente diferente da usada hoje em dia. Ele não foi o primeiro a diferenciar e integrar, mas consolidou um algoritmo geral que seria aplicada a qualquer função.

O século XVII e XVIII foram os mais intensos no estudo das Equações Diferenciais, muito por causa da notável família Bernoulli. Leibniz gostava de encontrar novos seguidores e poder estudar com eles. Um desses primeiros seguidores foi Jacques Bernoulli (1654-1705), também conhecido pelo seu nome alemão Jakob. Juntamente com Leibniz, Jacques introduziu o termo "integral" tendo assim a mudança de *calculus summatorius* para *calculus integralis*. Também contribuiu com o estudo da equação de Bernoulli, a saber, $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. Os estudos de Jacques das Equações Diferenciais estavam voltadas para os movimentos planetários, usando princípios de gravidade desenvolvida por Isaac Newton. Outro membro da família Bernoulli que contribuiu fortemente com a matemática e em especial Equações Diferenciais foi o irmão de Jacques, Jean Bernoulli (1667-1748), também conhecido como Johann Bernoulli. Jean estudou as trajetórias ortogonais de uma família de curvas e resolveu de forma brilhante o problema da catenária que pode ser interpretada pela seguinte Equação Diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho g}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Outros membros da família Bernoulli que tiveram notoriedade no estudo das Equações Diferenciais foram Nicolaus II (1687-1759), sobrinho de Jacques e Jean. Assim como os filhos de Jean, Nicolaus III (1695-1726) e Daniel I (1700-1782). Este que foi pioneiro no campo das Equações Diferenciais Parciais e é considerado o primeiro a resolver a equação $y'' + Ky = f(x)$.

Outro matemático famoso que contribuiu para o desenvolvimento das Equações Diferenciais foi o prolifero Leonhard Euler (1707-1783). Pupilo de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos, Nicoulaus III e Daniel I, Euler deu grandes contribuições para o estudo das Equações Diferenciais, como identificar quando equações de primeira ordem são exatas e utilizou-se de séries de potências para resolvê-las. Desenvolveu o método do fator integrante, encontrou uma solução geral para as equações de coeficientes constantes, estudou a equação de Riccati, percebeu a distinção entre equações lineares homogêneas e não-homogêneas.

Dois nomes que não poderemos deixar de citar como grandes estudiosos das Equações Diferenciais são Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) e Alexis Claude Clairaut (1713-1765). D'Alembert, enquanto estudava o problema das cordas vibrantes, foi o primeiro a conseguir resolver a seguinte Equação Diferencial Parcial, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, no qual encontrou a seguinte solução, $u = f(x+t) + g(x-t)$. Clairaut ao estudar as equações encontrou um tipo de equação que entra em um grupo de equações diferenciais que são resolvidas por artifícios simples, a saber, $y = xy' + f(y')$. A resolução dessa equação é dada por uma substituição de $p = y'$.

As Equações Diferenciais também chamou a atenção do grandioso Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o Príncipe dos Matemáticos. Gauss, como afirma EVES (2004, p.521) "[...] é universalmente considerado o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos." Ele foi o primeiro a reconhecer que a teoria das funções de uma variável complexa era o ponto principal para entender muitos dos resultados da equações diferenciais aplicadas.

Quem voltou as atenções as Equações Diferenciais foi Augustin-Louis Cauchy

(1789-1857), considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX. Devido seus estudos, temos as chamadas Equações de Cauchy-Riemann, a saber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

O estudo se dá até hoje e vários outros nomes apareceram durante a história, farei aqui menções honrosas a algum deles. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Jules Henri Poincaré (1854-1912), dentre tantos outros.

3 Equações Diferenciais

"Eis a matemática - a criação mais original do engenho humano"

WHITEHEAD

As Equações Diferenciais, como o próprio nome já diz, são as equações que possuem derivadas em sua forma. A definição formal é a que segue:

Definição 1. *Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

As equações diferenciais podem ser classificadas em tipo, ordem e linearidade. Quando uma equação possui somente derivadas em relação a uma única variável independente, ela será classificada como Equações Diferenciais Ordinárias, doravante EDO, como é o caso de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Quando isso não ocorrer, ou seja, existam derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes é chamada de Equações Diferenciais Parciais, doravante EDP, como é o caso de $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dt} = u$. Esta é a classificação pelo tipo. Nós só trataremos aqui das EDO.

A classificação por ordem se dá pela ordem da maior derivada da equação, ou seja, a seguinte equação tem ordem n,

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Por fim, vejamos a classificação por linearidade. Para isto, vejamos a definição formal e suas propriedades:

Definição 2. *Uma Equação Diferencial é linear se, e somente se, as duas condições a baixo forem satisfeitas:*

i. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1;

ii. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Essa definição é equivalente a poder escrever a equação da seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Quando a equação não for linear, ela será chamada de não-linear.

Para resolução das Equações Diferenciais temos vários métodos. Para o nosso caso, trataremos apenas com o método da separação de variáveis e fator integrante. Vejamos, primeiramente, o método das separáveis.

Digamos que desejamos resolver a seguinte Equação Diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \text{onde} \quad f(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Ou seja, podemos escrever a Equação Diferencial da seguinte forma,

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.1}$$

Quando $M(x,y) = M(x)$ e $N(x,y) = N(y)$, podemos reescrever (3.1), assim

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x)}{N(y)} \tag{3.2}$$

Uma Equação Diferencial na forma (3.2) é dita separável e para resolvê-la basta separar as variáveis e integrar ambos os lados, isto é,

$$\int N(y)dy = -\int M(x)dx$$

Vamos agora pensar em uma Equação Diferencial linear de primeira ordem, ou seja, segundo a Definição 2, podemos escrever esta equação da seguinte forma,

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

Fazendo $\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = p(x)$ e $\frac{g(x)}{a_0(x)} = h(x)$, temos

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = h(x) \tag{3.3}$$

Para resolver equações que apresentam esta forma, devemos utilizar o método do fator integrante que, por definição, é dada por

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Sendo assim, multiplicaremos toda a Equação (3.3) por $\mu(x)$ e observaremos que o primeiro membro da equação será, sempre, uma derivada do produto. Ou seja,

$$(y \cdot \mu(x))' = h(x) \cdot \mu(x)$$
$$\int (y \cdot \mu(x))' dx = \int h(x) \cdot \mu(x) dx$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \int h(x) \cdot \mu(x) dx$$

Agora que vimos os conceitos de Equações Diferenciais e dois de seus métodos de resolução, vamos utiliza-los para modelar algumas equações da cinemática, sendo a primeira um objeto em queda livre.

3.1 Queda Livre

"A matemática é o instrumento indispensável para qualquer investigação física"

BERTHELOT

Vamos supor a queda livre de um objeto na atmosfera. O objeto fica sujeito a resistência do ar e seu peso. Para estudar este movimento, vejamos a segunda lei de Newton:

A força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida.

$$F = m \cdot a \tag{3.4}$$

Onde F é a força medido em N, m a massa medido em Kg e a a aceleração medido em m/s^2. Este ultimo, também sabemos que é a derivada da velocidade em relação ao tempo, ou seja, $a = \frac{dv}{dt}$, substituindo em (3.4), temos:

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{3.5}$$

Considerando a situação conforme a Figura 3.1, sabemos que a aceleração que age sobre o objeto nada mais é que a aceleração gravitacional, denotada por g. Além disso, também devemos levar em consideração a resistência do ar que é proporcional à velocidade do objeto, de forma que a força resultante sobre o objeto é,

$$F = mg - \gamma v \tag{3.6}$$

Onde γ é o coeficiente da resistência do ar, dado em kg/s, e está com sinal negativo pois sua força é contrária ao sentido do movimento. Então, de (3.5) e (3.6), temos:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{3.7}$$

Que é uma Equação Diferencial Ordinária linear de primeira ordem, onde m, g e γ são constantes. A Figura 3.1 a seguir representa as forças agindo sobre o objeto.

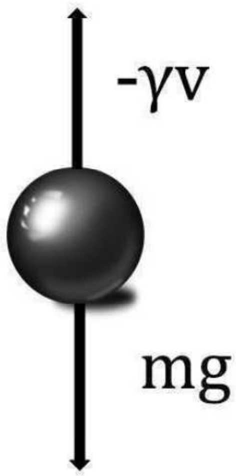

Figura 3.1: Diagrama de forças agindo sobre o objeto em queda livre

3.1.1 Velocidade

Considerando a variação da velocidade em relação ao tempo, dividindo a equação (3.7) por m, temos:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = g \tag{3.8}$$

A equação (3.8) é uma Equação Diferencial de primeira ordem que pode ser resolvida pelo método do fator integrante, que como foi explicado no começo do capítulo será $\mu(x) = e^{\frac{\gamma}{m}t}$, de forma que:

$$e^{\frac{\gamma}{m}t}\frac{dv}{dt} + e^{\frac{\gamma}{m}t}\frac{\gamma}{m}v = e^{\frac{\gamma}{m}t}g \tag{3.9}$$

Sendo $e^{\frac{\gamma}{m}t}$ uma função de t, observamos que o primeiro membro da equação (3.9) corresponde a derivada de $ve^{\frac{\gamma}{m}t}$, de forma que podemos reescrever:

$$d(ve^{\frac{\gamma}{m}t}) = ge^{\frac{\gamma}{m}t}dt \tag{3.10a}$$

Integrando ambos os lados temos da equação (3.10a):

$$\int d(ve^{\frac{\gamma}{m}t}) = \int ge^{\frac{\gamma}{m}t}dt \tag{3.10b}$$

$$ve^{\frac{\gamma}{m}t} = \frac{m}{\gamma}ge^{\frac{\gamma}{m}t} + C_1 \tag{3.10c}$$

E portanto,

$$v(t) = \frac{m}{\gamma}g + C_1e^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{3.11}$$

Como o corpo estava inicialmente em repouso, a velocidade inicial é nula, ou seja, tratamos aqui de um problema de valor inicial, logo, a velocidade no instante $t = 0$ é nula e da equação (3.11), temos:

$$0 = \frac{m}{\gamma}g + C_1e^{-\frac{\gamma}{m}0} \tag{3.12a}$$

$$0 = \frac{m}{\gamma}g + C_1 \tag{3.12b}$$

$$C_1 = -\frac{m}{\gamma}g \tag{3.12c}$$

Portanto,

$$v(t) = \frac{m}{\gamma}g - \frac{m}{\gamma}ge^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{3.13}$$

Esta é a equação da velocidade do objeto em queda livre. A Figura a seguir representa a velocidade exercida neste movimento:

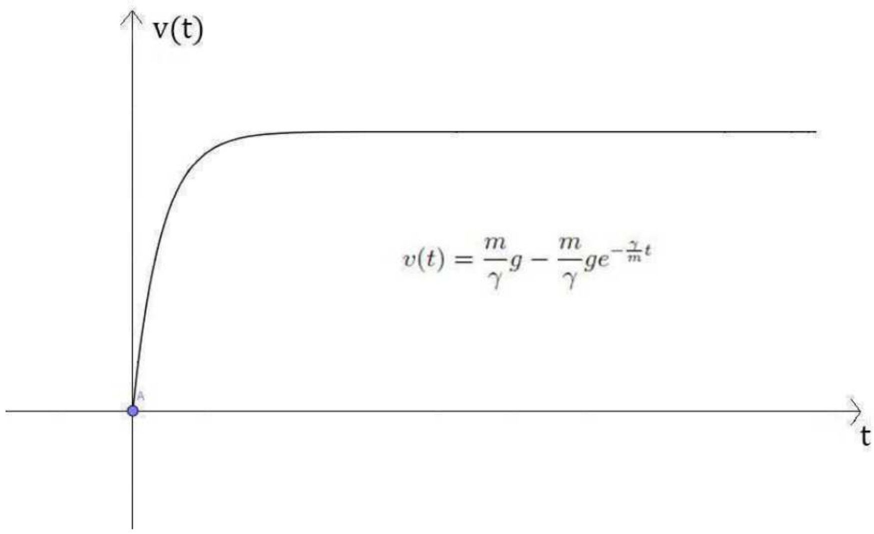

Figura 3.2: Velocidade com Resistência do ar

3.1.2 Deslocamento

Sabemos que a velocidade é a variação do espaço percorrido em um determinado tempo, sendo assim $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, substituindo em (3.13), temos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{\gamma}g - \frac{m}{\gamma}ge^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

Sabemos que esta é uma EDO da forma separável (x e t), logo separando as variáveis e integrando ambos os lados, temos:

$$\int dx = \int \left(\frac{m}{\gamma}g - \frac{m}{\gamma}ge^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) dt \tag{3.14a}$$

ou ainda,

$$\int dx = \int \left(\frac{m}{\gamma}g\right) dt - \int \left(\frac{m}{\gamma}ge^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) dt \tag{3.14b}$$

resolvendo as integrais e considerando que x é uma função de t, temos:

$$x(t) = t\frac{m}{\gamma}g - \left(\frac{m}{\gamma}g\right)\left(-\frac{m}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + C_2 \tag{3.14c}$$

$$x(t) = t\frac{m}{\gamma}g + \frac{m^2}{\gamma^2}ge^{-\frac{\gamma}{m}t} + C_2 \tag{3.15}$$

No instante $t = 0$, o corpo tem sua posição inicial, $x(0) = x_0$. Com isso,

$$x_0 = 0\frac{m}{\gamma}g + \frac{m^2}{\gamma^2}ge^{-\frac{\gamma}{m}0} + C_2 \tag{3.16a}$$

$$x_0 = \frac{m^2}{\gamma^2}g + C_2 \tag{3.16b}$$

$$C_2 = x_0 - \frac{m^2}{\gamma^2}g \tag{3.16c}$$

Substituindo em (3.15), temos:

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\gamma}\left(tg + \frac{m}{\gamma}ge^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{m}{\gamma}g\right) \tag{3.17}$$

Que é a equação do deslocamento durante a queda livre. Na Figura 3.3 ilustramos os comportamento da Equação (3.17) a equação do deslocamento:

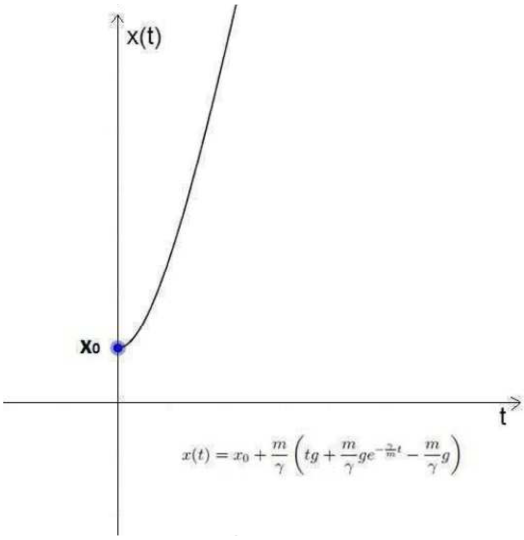

Figura 3.3: Deslocamento da partícula com Resistência do ar

3.2 Lançamento vertical, sem resistência do ar

"As leis da Natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus"

JOHANNES KEPLER

Vamos considerar agora o lançamento vertical para cima de um corpo, em um espaço hipotético que não possui resistência do ar, conforme ilustramos na Figura 3.4. Consideremos também que o corpo seja lançado com uma velocidade inicial, $v(0) = v_0$. A figura abaixo nos mostra as componentes do lançamento vertical.

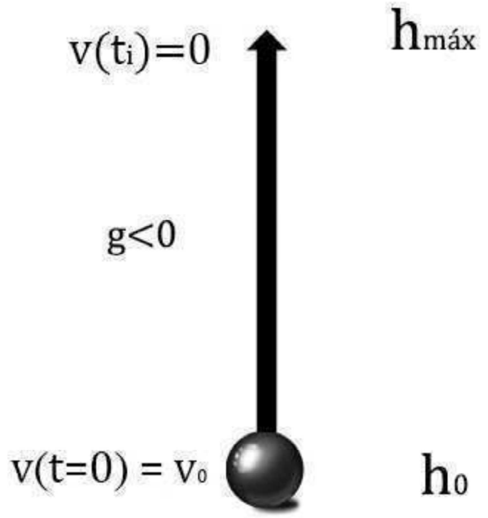

Figura 3.4: Componentes do lançamento vertical para cima

3.2.1 Velocidade

Vamos buscar a equação da velocidade. Já sabemos que a aceleração a (que nesse caso será a gravidade g do espaço hipotético) é a variação da velocidade em relação ao tempo e que gera assim uma EDO da forma separável (v e t), ou seja, $\frac{dv}{dt} = g$.

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, temos:

$$\int dv = \int g dt \tag{3.18a}$$

$$v(t) = gt + C_4 \tag{3.18b}$$

Considerando que no instante $t = 0$, $v(0) = v_0$, temos:

$$v_0 = g0 + C_4, \qquad C_4 = v_0 \tag{3.18c}$$

E portanto,

$$v(t) = v_0 - gt \tag{3.19}$$

O sinal da gravidade g é negativa pois a aceleração é contrária ao movimento, como podemos ver na Figura 3.4.

Na Figura 3.5 ilustramos o comportamento da Equação (3.19),

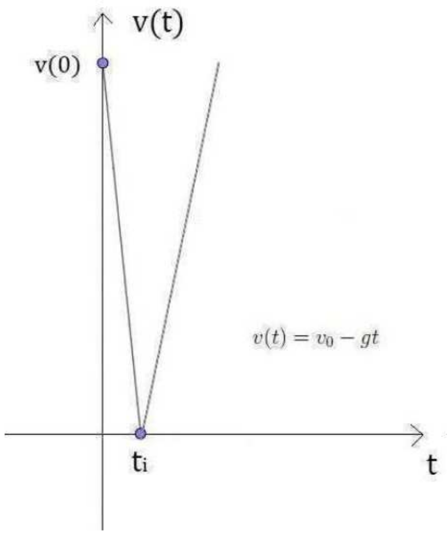

Figura 3.5: Velocidade sem Resistência do ar

3.2.2 Deslocamento

Vamos mostrar agora a variação da altura (h) de um corpo lançado verticalmente para cima de uma altura inicial h_0 com as mesmas condições iniciais anteriores. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, temos:

$$\int dh = \int v dt \tag{3.20a}$$

Usando (3.19), temos:

$$\int dh = \int (v_0 - gt)dt \tag{3.20b}$$

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_5 \tag{3.20c}$$

Fazendo $t = 0$:

$$h_0 = v_0 0 - \frac{g0^2}{2} + C_5, \qquad C_5 = h_0 \tag{3.20d}$$

E portanto:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \tag{3.21}$$

A Figura 3.6 ilustra o comportamento da Equação (3.21),

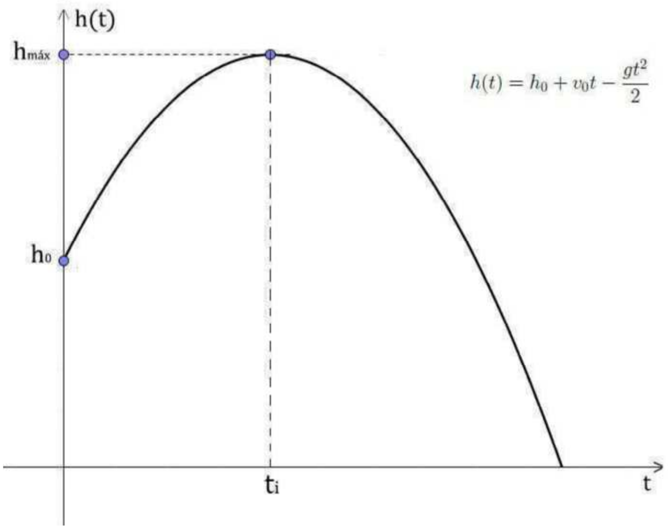

Figura 3.6: Deslocamento da partícula sem Resistência do Ar

4 Considerações Finais

"Não há Ciência que fale das
harmonias da natureza com mais
clareza do que a Matemática"

PAULO CARUS

Neste trabalho, verificamos que a equação de movimento de um corpo pode ser descritas a partir da solução de uma equação diferencial. No entanto, existem inúmeras aplicações de equações diferenciais e de outros conceitos matemáticos, mais simples ou mais complexos, na solução de problemas. O resultado geralmente descrito por uma ou várias funções matemáticas é o que chamamos de modelagem.

É claro que os modelos não expressam perfeitamente a realidade, mas podem apresentar uma boa aproximação, em particular, as equações de movimento de um corpo reproduzem resultados perfeitos.

Referências Bibliográficas

[1] Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, 3ª ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*, 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1969.

[3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática*, 5ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

[4] Lourenco, A. *Como Tudo Começou*, 1ª ed. São José dos Campos: Editora FIEL, 2007.

[5] Machado, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas*, vol. 1. Ponta Grossa, PR: TODAPALAVRA, 2012.

[6] Zill, D. G. *Equações Diferenciais*, 3ª ed., vol. 1. São Paulo: Pearson, 2000.