



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**MODELOS MATEMÁTICOS: DESPOLUIÇÃO DE
LAGOAS E DIGESTÃO DE RUMINANTES**

PAULO MARIANO INÁCIO DA SILVA

CAMPINA GRANDE - PB

Dezembro de 2010

PAULO MARIANO INÁCIO DA SILVA

**MODELOS MATEMÁTICOS: DESPOLUIÇÃO DE
LAGOAS E DIGESTÃO DE RUMINANTES**

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado
no curso de Licenciatura em Matemática
da Universidade Estadual da Paraíba
em cumprimento às exigências legais
para obtenção do título de licenciado em
Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE-PB

Dezembro de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S586e Silva, Paulo Mariano Inácio da .
Modelos Matemáticos [manuscrito]: despoluição de lagoas e digestão de ruminantes / Paulo Mariano Inácio da Silva. – 2010.
35 f. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2010.
“Orientação: Prof. Dr.. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática. 2. Modelos Matemáticos. 3. Poluição da Água. I. Título.

21. ed. CDD 510

PAULO MARIANO INÁCIO DA SILVA

**MODELOS MATEMÁTICOS: DESPOLUIÇÃO DE
LAGOAS E DIGESTÃO DE RUMINANTES**

Aprovado em: 16/12/2010

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADOR

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Dpto. Física - CCT/UEPB

EXAMINADOR

Joselma Soares dos Santos

Profa. Mrs. Joselma Soares dos Santos

Campus VI - CCHE/UEPB

EXAMINADOR

Dedicatória

À memória de meu pai,
Raimundo Mariano.

Agradecimentos

A Deus que está ao meu lado mesmo quando não mereço, nunca me permitindo falhar ou fracassar.

Ao meus pais Raimundo Mariano Inácio e Maria Angelina da Conceição, que me guiaram no caminho certo, fazendo tudo que estivessem ao seus alcances para que eu pudesse estudar, ao meus irmãos que sempre me incentivaram, apoiaram e confiaram incondicionalmente em minha capacidade e desempenho durante todo o curso, assim como na vida.

Ao meu orientador Prof. Aldo Trajano Lourêdo por ter tido comigo a paciência necessária para me ajudar em todo o processo de construção desse trabalho. Além disso sempre torceu pela turma incentivando-a e estando sempre disponível a ajudar e tirar dúvidas dentro e fora de sala de aula.

Aos professores Jean Paulo Spinelly da Silva e Joselma Soares dos Santos por suas disposições em participar de minha banca examinadora e suas valiosas sugestões sobre esse trabalho.

A toda equipe de professores do Departamento Matemática da UEPB, pois sem eles nada disso seria possível.

Epígrafe

“Prefiro ser

Essa metamorfose ambulante.”

(“Metamorfose ambulante”, Raul Seixas)

Resumo

Nas últimas décadas, com o grande processo de industrialização, houve um considerável aumento na poluição das águas. Essa poluição varia desde resíduos sólidos (como os provenientes das indústrias de cimento) até microorganismos patogênicos. Mas o que fazer para limpar os lagos poluídos? É difícil encontrar uma solução imediata para o problema. No entanto, neste trabalho, apresentaremos um modelo matemático que propõe algumas formas para acabar com a poluição das lagoas. Analisaremos dois casos: 1^o considerando que a indústria cessa totalmente a poluição da lagoa; 2^o considerando que a indústria continua a poluir a lagoa, para este, teremos três possibilidades: A indústria deposita uma quantidade constante de poluentes, ou lança os poluentes de maneira decrescente, ou possui um sistema periódico de descargas. Outro modelo matemático que iremos abordar nesse trabalho é a digestão dos animais ruminantes. Tal modelo foi proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956). Porém, para analisar esses problemas precisamos de base teórica. Para que possamos adquirir tal conhecimento matemático, a primeira parte deste trabalho é desenvolvida a teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Palavras chave: Equações diferenciais ordinárias, poluição das lagoas, digestão dos animais ruminantes.

Lista de Figuras

3.1	A indústria cessa totalmente a poluição da lagoa.	11
3.2	A indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes . . .	13
3.3	A indústria continue poluindo a lagoa, mas numa forma decrescente	14
3.4	A indústria tem um sistema periódico de descargas de poluentes.	15
3.5	Sistema digestivo dos animais ruminantes	16
3.6	Digestão de animais ruminantes para os casos em que $k_1 \neq k_2$ e $k_1 = k_2$	20

Sumário

Introdução	1
Objetivos	1
1 Introdução a Equações Diferenciais.	2
1.1 Introdução Histórica.	2
1.2 Classificação de Equações Diferenciais.	3
2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.	5
2.1 Introdução.	5
2.2 Equações Lineares de primeira Ordem.	6
3 Modelos Matemáticos.	9
3.1 Introdução.	9
3.2 Despoluição de Lagoas	9
3.3 Digestão de Animais Ruminantes.	15
Considerações Finais	21
Apêndice A	22
Referências Bibliográficas	26

Introdução

Atualmente um dos grandes problemas de ordem mundial diz respeito à poluição dos recursos hídricos, visto que nos últimos anos temos nos preocupado bastante com a questão de desperdício e degradação desse recurso natural vital para os seres vivos. Visando cultivar esse recurso e combater sua degradação, abordaremos em nosso estudo modelos de despoluição de lagos ou lagoas, utilizando como ferramentas as Equações Diferenciais Ordinárias. No caso de despoluição de lagos ou lagoas o processo é lento, pois consiste em substituir a água do reservatório gradualmente, observando que é necessário uma diminuição no lançamento de poluentes nessas águas.

Outro modelo que iremos abordar no presente trabalho, será a digestão dos animais ruminantes. Tais animais possuem um mecanismo complicado para realizar sua digestão. Simplificando, podemos dizer que eles engolem os alimentos sem mastigar.

No entanto, para que possamos analisar esses problemas matematicamente é preciso uma noção de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Então, reservamos a primeira parte desse trabalho para expor a base teórica que será de fundamental importância a medida que formos prosseguindo.

Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é fazer um estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, aplicando esse conhecimento no modelo matemático para despoluição de lagoas e digestão de animais ruminantes.

Capítulo 1

Introdução a Equações Diferenciais.

1.1 Introdução Histórica.

Não há dúvida, de que a grande motivação inicial para o estudo das Equações Diferenciais veio da Mecânica. Diversos problemas como o movimento dos planetas, a catenária (formato de uma corda pendente presa nas extremidades) e o estudo da oscilação do pêndulo, para citar apenas algumas, já haviam sido estudados empiricamente por homens do quilate de um J. Kepler (1571-1630), L. da Vinci (1452-1519), G. Galileo (1564-1652) e C. Huygens (1629-1695). Porém, faltava a eles a teoria matemática com que pudessem modelar o fenômeno. Com o aparecimento do Cálculo no final do século XVII por obra de I. Newton (1642-1727) e G.W. Leibnitz (1646-1716), inúmeros problemas mecânicos, incluindo estes três, puderam ser então modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais.

Assim, a partir desta época surgia a questão da resolução dos problemas matemáticos apresentados por estes modelos. Vários deles foram resolvidos explicitamente e de maneira elegante por matemáticos de extraordinária habilidade operacional, como os da família Bernoulli: Jacques (1566-1705), Jean (1667-1748), Nicholas (1695-1726), Daniel (1700-1782) e principalmente por um de seus alunos, L. Euler (1707-1783) cuja obra (incompleta) preenche 74 grandes volumes.

Apesar disto, tornou-se claro com o tempo que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita (em termos de funções elementares e suas integrais) para as Equações Diferenciais. O próprio L. Euler introduziu métodos que geravam uma solução aproximada da Equação Diferencial.

A base rigorosa do Cálculo ainda não havia sido lançada no século XVIII, mas os resultados surpreendentes até então obtidos não deixavam dúvidas de que esta teoria matemática era essencialmente correta. Logo, usufruiu-se ao máximo deste filão que parecia inesgotável, ainda que os fundamentos e a justificação estivessem envolvidos em uma bruma misteriosa e mística, mesmo para os grandes mestres da época, gerando assim, uma inquietação que desafiava uma boa parte dos matemáticos no final do século XVIII. Esta inquietação aumentava à medida que alguns resultados contraditórios surgiam e as disputas escapavam invariavelmente para o campo metafísico, onde os critérios matemáticos perdem sua jurisdição.

Era inevitável, portanto, que uma parte do esforço matemático se dirigisse no sentido de esclarecer os fundamentos teóricos do Cálculo e procurar outros métodos de estudo das Equações Diferenciais que não a sua solução explícita. Para caracterizar este período, o nome representativo é certamente o de A. L. Cauchy (1789-1857), que demonstrou rigorosamente pela primeira vez, e por três métodos diferentes, a existência de soluções para uma vasta classe de Equações Diferenciais que inclui essencialmente todos os modelos conhecidos.

Após o início do século XIX os métodos gerais de resolução explícita das Equações Diferenciais perderam a sua proeminência e nenhum método de maior relevância foi desenvolvido até o aparecimento de cálculo operacional de O. Heaviside (1850-1925) e a transformada de Laplace no final do século XIX. Iniciou-se assim a teoria qualitativa geométrica representada por H. Poincaré (1854-1912) e A.M. Liapounov (1857-1918), bem como a teoria de aproximação analítica (expansão em séries) e de aproximação numérica.

1.2 Classificação de Equações Diferenciais.

Com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional, as equações diferenciais são classificadas quanto ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

Quanto ao **tipo** uma equação diferencial pode ser ordinária ou parcial. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto, as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais. As equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

em que y é função apenas de t , são equações diferenciais ordinárias. Um exemplo de uma

equação diferencial ordinária é

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad (1.1)$$

em que $Q(t)$ é a carga presente no capacitor em um circuito com capacitância C , resistência R e indutância L . Exemplos típicos de equações diferenciais parciais são a equação de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (1.2)$$

e a equação da onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t). \quad (1.3)$$

Aqui, α^2 e a^2 são certas constantes físicas. A equação de calor descreve a condução de calor em um corpo sólido, e a equação de onda aparece em uma variedade de problemas envolvendo movimento ondulatório em sólidos ou fluidos.

Quanto á **ordem** uma equação diferencial pode ser de **1^a**, **2^a**, ..., de **n-ésima ordem** dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

As equações (1.1), (1.2), (1.3) são de 2^a ordem.

Quanto a **linearidade** uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo, uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} = f(t). \quad (1.4)$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

2.1 Introdução.

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2.1)$$

onde f é uma função de duas variáveis dada. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça essa equação para todo t em algum intervalo é dita uma solução, e nosso objetivo é determinar se tais funções existem e, caso existam, desenvolver métodos para encontrá-las. Infelizmente, para uma função arbitrária f , não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares. Em vez disso, existem vários métodos, cada um dos quais aplicável a uma determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes dessas subclasses são as **equações lineares**, as **equações separáveis** e as **equações exatas**. Como os modelos matemáticos, que iremos discutir no presente trabalho, exigirão apenas conhecimento de equações lineares de primeira ordem, será apenas essa subclasse de equações que iremos discutir.

2.2 Equações Lineares de primeira Ordem.

Se a função f na Equação(2.1) depende linearmente da variável y , então a Eq. (2.1) é chamada de uma equação linear de primeira ordem. A equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \quad (2.2)$$

é chamada linear, porque a operação efetuada sobre $y(t)$

$$\left[\frac{d}{dt} + p(t) \right] y(t) \quad (2.3)$$

é uma operação linear, isto é,

$$\left[\frac{d}{dt} + p(t) \right] (\alpha y_1 + y_2) = \alpha \left[\frac{d}{dt} + p(t) \right] y_1 + \left[\frac{d}{dt} + p(t) \right] y_2.$$

Observe agora que a expressão $\frac{dy}{dt} + p(t)y$ é “quase” a derivação de um produto. Se assim fosse, a solução da equação estaria reduzida a uma integração.

Suponha que exista uma função $\mu(t)$ que multiplicada pela expressão (2.3) nos dê:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \frac{d\mu(t)}{dt}y + \mu(t) \frac{dy}{dt},$$

neste caso deveríamos ter

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)p(t)$$

$$\frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu} = p(t)$$

$$\frac{d \ln |\mu(t)|}{dt} = p(t).$$

Integrando a equação

$$\int d \ln |\mu(t)| = \int p(t)dt,$$

como resultado temos $\mu(t) = Ce^{\int p(t)dt}$, chamado fator de integração. Fazendo $C = 1$, temos portanto,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}, \quad (2.4)$$

multiplicando $\mu(t)$ em ambos os lados na Eq. (2.2), obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t),$$

de onde tiramos

$$\frac{d}{dt}(ye^{\int p(t)dt}) = e^{\int p(t)dt}g(t).$$

Integrando a equação, obtemos

$$ye^{\int p(t)dt} = \int e^{\int p(t)dt}g(t)dt + C, \quad (2.5)$$

onde C é uma constante arbitrária. podemos calcular a integral na Eq.(2.5) e expressar a solução y em termos de funções elementares para muitas funções simples $g(t)$. No entanto, para funções mais complicadas, precisamos deixar a solução na forma integral. Nesse caso

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \int e^{\int p(s)ds}g(s)ds + Ce^{-\int p(t)dt}, \quad (2.6)$$

que é a solução geral da equação.

Não é difícil verificar que todas as operações efetuadas são válidas se $p(t)$ e $g(t)$ forem contínuas, e o problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -p(t)y + g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução dada por

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(t)dt} \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}g(s)ds + y_0e^{-\int_{t_0}^t p(t)dt} \quad (2.7)$$

A justificativa para tal afirmação, vem do Teorema da Existência e Unicidade para equações lineares, que será discutido a seguir.

Teorema 2.1. *Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \quad (2.8)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.9)$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário prescrito.

Prova: A demonstração desse teorema está parcialmente contido na discussão anterior, que leva à fórmula Eq.(2.5). Então seja

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + C, \quad \text{onde } \mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad (2.10)$$

A dedução que fizemos sobre equação linear de primeira ordem mostra que, se a Eq. (2.8) tem solução, então ela tem que ser dada pela Eq. (2.10). Analisando um pouco mais a fundo essa dedução, podemos concluir, também, que a Eq.(2.8) tem que ter, de fato, solução. Como p é contínua para $\alpha < t < \beta$, μ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável não-nula. Multiplicando a Eq.(2.8) por $\mu(t)$, temos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = g(t)\mu(t)$$

$$\frac{d\mu(t)y}{dt} = \mu(t)g(t) \quad (2.11)$$

Como ambas as funções μ e g são contínuas, a função μg é integrável e a Eq. (2.10) segue da Eq. (2.11). Além disso, a integral de μg é diferenciável, de modo que y dado pela Eq. (2.10) existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo a fórmula para y dada pela Eq. (2.10) na Eq. (2.11), temos.

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) \cdot \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)}] = \mu(t)g(t)$$

Daí, ficamos.

$$\frac{d}{dt}[\int \mu(t)g(t)dt + C] = \mu(t)g(t)$$

Integrando em ambos os lados no intervalo $\alpha < t < \beta$, temos a igualdade satisfeita. Comprovando que a Eq. (2.10) é realmente solução da Eq.(2.8).

Finalmente, a condição inicial (2.9) determina a constante C de maneira única, de modo que existe apenas uma solução do problema de valor inicial, completando, então, a demonstração. ■

A demonstração do teorema 2.1 foi relativamente simples. Porém, se consideramos as equações diferenciais não-lineares, precisamos substituir este por um teorema mais geral. A dedução de tal teorema torna-se um pouco mais complexa, e será demonstrada no Apêndice A.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos.

3.1 Introdução.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de modelo matemático do processo, tais modelos são representações ou interpretações simplificada da realidade ou uma interpretação de um fragmento de um sistema, segundo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais.

Um modelo apresenta apenas uma visão ou cenário de um fragmento do todo. Normalmente, para estudar um determinado fenômeno complexo, criam-se vários modelos. Os modelos matemáticos são utilizados praticamente em todas as áreas científicas: Biologia, química, física, economia, engenharia e na própria matemática pura.

3.2 Despoluição de Lagoas

As nações em desenvolvimento, por falta de recursos suficientes ou mesmo por negligência na fiscalização do governo, estão sujeitas à constante poluição do ar e da água.

Nos restringiremos neste modelo às formas de despoluição de lagos e lagoas, uma vez que no caso dos rios, quando a poluição ainda não causou danos extremos, eles próprios podem se auto-reparar, bastando para tanto que se tenha uma diminuição no lançamento de poluentes em suas águas. já no caso de lagoas (ou lagos) o processo de despoluição é mais lento, podendo ser efetivado caso ainda não estejam “mortas”. Tal mecanismo de limpeza consiste em substituir sua água gradualmente.

Nos modelos propostos, encaramos o fluxo da água na lagoa como um problema de diluição de substâncias, não levando em consideração a sedimentação dos poluentes, sua ação biológica etc. Faremos agora as seguintes “hipóteses” simplificadoras.

1. Existe um fluxo de água que entra na lagoa, proveniente de um riacho ou “minas”, e uma vazão para outro riacho. As vazões de entrada e saída são iguais e constantes, valendo $r(\ell/dia)$ (r litros por dia).
2. Quando a água entra na lagoa, se mistura rapidamente e de maneira homogênea, havendo uma distribuição uniforme dos poluentes.
3. O volume da lagoa é constante (a quantidade de água de chuva se equilibra com a que se evapora) e igual a v litros.
4. Os poluentes são retirados da lagoa somente através do fluxo de saída.
5. A poluição provém de uma indústria instalada na margem de lagoa ou riacho que a alimenta.

Se a quantidade de poluentes existente na lagoa é prejudicial ao desenvolvimento da vida aquática ou mesmo à recreação, quais os mecanismos existentes para se efetuar sua limpeza?

1º CASO: A indústria cessa totalmente a poluição da lagoa.

Seja P_0 a quantidade de detritos químicos existentes na lagoa no instante em que cessou a poluição, $t = 0$; $P = P(t)$ é a quantidade de poluente dissolvido na água no tempo t . Como o volume da lagoa é constante e as vazões dos riachos também, então é razoável supor que a variação da quantidade de poluentes por unidade de tempo seja proporcional à quantidade total existente na lagoa em cada instante, de modo que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{r}{v}P, \quad (3.1)$$

onde $r > 0$ é a vazão de cada rio. Considerando $P_o = P(0)$ a solução de (3.1), como já vimos, é

$$P(t) = P_o e^{-\frac{r}{v}t}. \quad (3.2)$$

Neste caso, (ver figura 3.1). A quantidade de poluentes diminui rapidamente no princípio e depois lentamente; de qualquer forma $P \rightarrow 0$ quando t cresce. Assim, o problema pode ser solucionado e um aumento na vazão dos dois riachos acelera a despoluição.

Suponhamos que temos uma lagoa com as seguintes características:

$$r = 1000000000;$$

$$v = 8000000000;$$

$$P_o = 16000.$$

Onde,

r - Vazão de de entrada e saída iguais e constantes $r(\ell/dia)$;

v - Volume de água total da lagoa em litros;

P_o - (Coliformes fecais)/mililitro;

t - Tempo em dias.

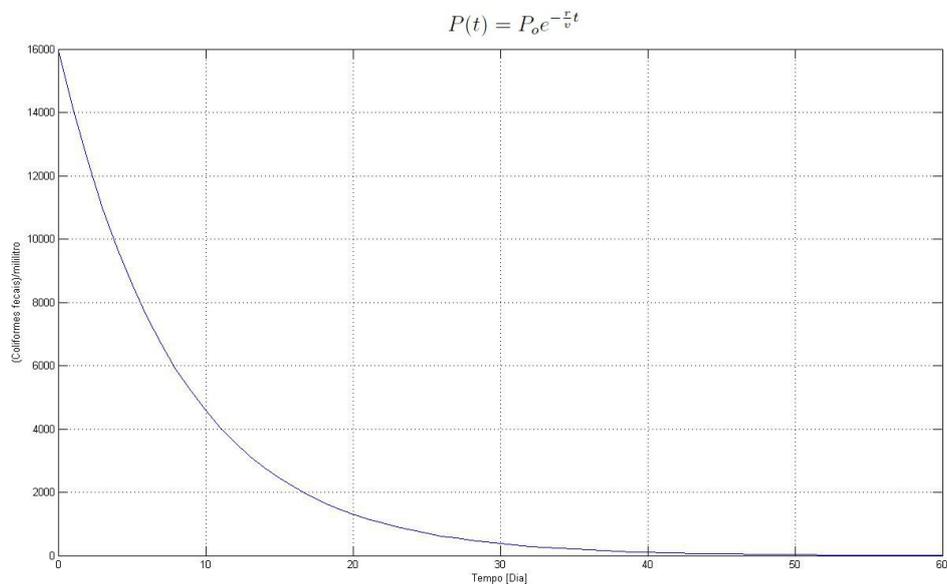


Figura 3.1: A indústria cessa totalmente a poluição da lagoa.

.

2º CASO: A indústria continua poluindo.

Consideremos $Q = Q(t)$ a quantidade total de poluentes acumulados na lagoa pela indústria desde o instante $t = 0$ até o tempo t . Então, $\Phi_i(t) = \frac{dQ}{dt}$ é sua variação por unidade de tempo.

A Equação (3.1) anterior deve ser modificada para

$$\frac{dP}{dt} = \Phi_i(t) - \frac{r}{v}P(t), \quad \text{com } r > 0 \quad e \quad P(0) = P_o. \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é dada por

$$P(t) = P_o e^{-\frac{r}{v}t} + e^{-\frac{r}{v}t} \int_0^t e^{\frac{r}{v}s} \Phi_i(s) ds.$$

Observação:

A primeira parcela de $P(t)$, isto é, $P_o e^{-\frac{r}{v}t}$ é independente do termo proveniente da nova poluição $\Phi_i(t)$ e para t suficientemente grande seu valor é desprezível, o que equivale a dizer que a poluição inicial não afeta sensivelmente a quantidade total de poluentes.

Vamos analisar agora alguns casos particulares, dependendo da maneira como os poluentes são lançados nas águas da lagoa.

a. Se a indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes, então $\Phi_i(t) = \Phi_{io}$ (constante). A Equação (3.3) é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \Phi_{io} - \frac{r}{v}P(t), \quad (3.4)$$

que pode ser reescrita por $\frac{dP}{dt} + \frac{r}{v}P = \Phi_{io}$ (linear com coeficientes constantes). Sua solução será

$$P(t) = P_o e^{-\frac{r}{v}t} + \frac{v}{r} \Phi_{io} (1 - e^{-\frac{r}{v}t}) = (P_o - \frac{v}{r} \Phi_{io}) e^{-\frac{r}{v}t} + \frac{v}{r} \Phi_{io}, \quad (3.5)$$

e quando t cresce, $P(t)$ tende a se estabilizar no ponto de equilíbrio $\frac{v}{r} \Phi_{io}$.

Se $P_o = \frac{v}{r} \Phi_{io}$, a quantidade de poluentes no lago permanece inalterada.

Se $P_o < \frac{v}{r} \Phi_{io}$, a quantidade $P(t)$ cresce até o valor limite $\frac{v}{r} \Phi_{io}$.

Se $P_o > \frac{v}{r} \Phi_{io}$, a quantidade $P(t)$ diminui com o tempo, ainda tendendo a $\frac{v}{r} \Phi_{io}$; neste caso se a vida aquática for compatível com o nível $\frac{v}{r} \Phi_{io}$, ela poderá ser restaurada depois de algum tempo, conforme está ilustrado na figura 3.2.

Observação:

Sabendo que a vazão de entrada e saída (r), o volume total de água na lagoa (v) e a poluição inicial (P_o) são as mesmas da análise anterior. Resta-nos determinar apenas Φ_{io} . Então, digamos que $\Phi_{io} = 2000$, $\Phi_{io} = 2500$, $\Phi_{io} = 1500$ para $P_o = \frac{v}{r} \Phi_{io}$, $P_o < \frac{v}{r} \Phi_{io}$, $P_o > \frac{v}{r} \Phi_{io}$ respectivamente. Onde Φ_{io} é dado em (Coliformes fecais)/mililitro por dia. ou seja, a cada dia temos uma taxa constante de Φ_{io} depositado na lagoa.

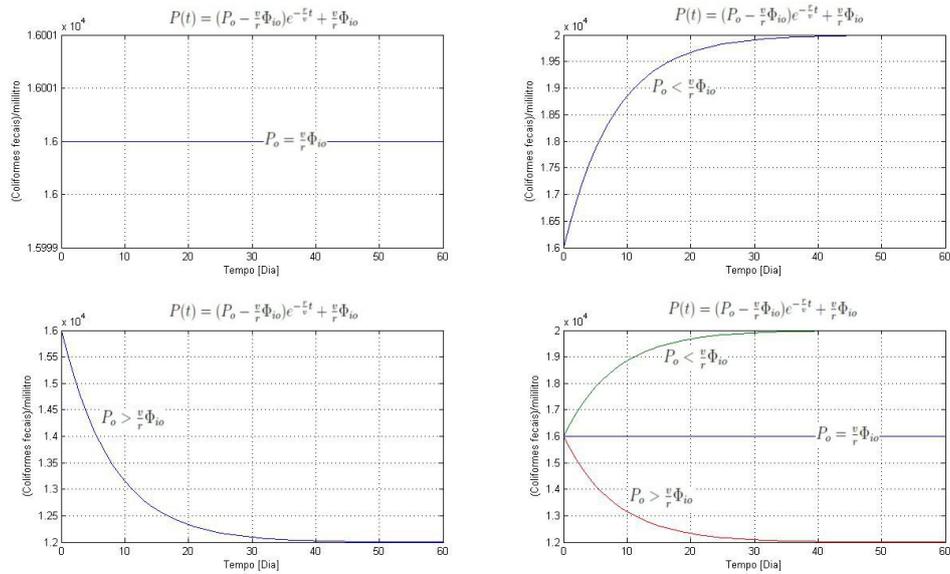


Figura 3.2: A indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes

Se utilizarmos a concentração de poluentes, em vez da sua quantidade, isto é, $C(t) = \frac{P(t)}{v}$, a solução da Equação (3.4) será dada por

$$C(t) = (C_o - C_{io})e^{-\frac{r}{v}t} + C_{io}.$$

É uma forma mais prática e mais utilizada.

b. Suponhamos agora que a indústria continue poluindo a lagoa, mas numa forma decrescente, isto é, lançando cada vez menos poluentes por unidade de tempo. Por exemplo, $\Phi_i(t) = \Phi_{io}e^{-bt}$ ($b > 0$). Neste caso,

$$\frac{dP}{dt} = \Phi_{io}e^{-bt} - \frac{r}{v}P(t). \tag{3.6}$$

A solução desta equação linear é dada por

$$P(t) = (P_o - \frac{\Phi_{io}}{\frac{r}{v}-b})e^{-\frac{r}{v}t} + \frac{\Phi_{io}}{\frac{r}{v}-b}e^{-bt} \quad \text{se } \frac{r}{v} \neq b$$

ou

$$P(t) = P_o e^{-\frac{r}{v}t} + \Phi_{io} e^{-\frac{r}{v}t} = (P_o + \Phi_{io})e^{-\frac{r}{v}t} \quad \text{se } \frac{r}{v} = b.$$

Em ambos os casos, $P(t)$ tende a zero quando t cresce e, portanto, a lagoa será despoluída depois de algum tempo. (ver Figura 3.3.)

Observação:

Consideramos os seguintes valores na construção desse gráfico:

$$b = 0.25;$$

$$\Phi_{io} = 2000.$$

Os valores r , v e P_o são os mesmos das análises anteriores.

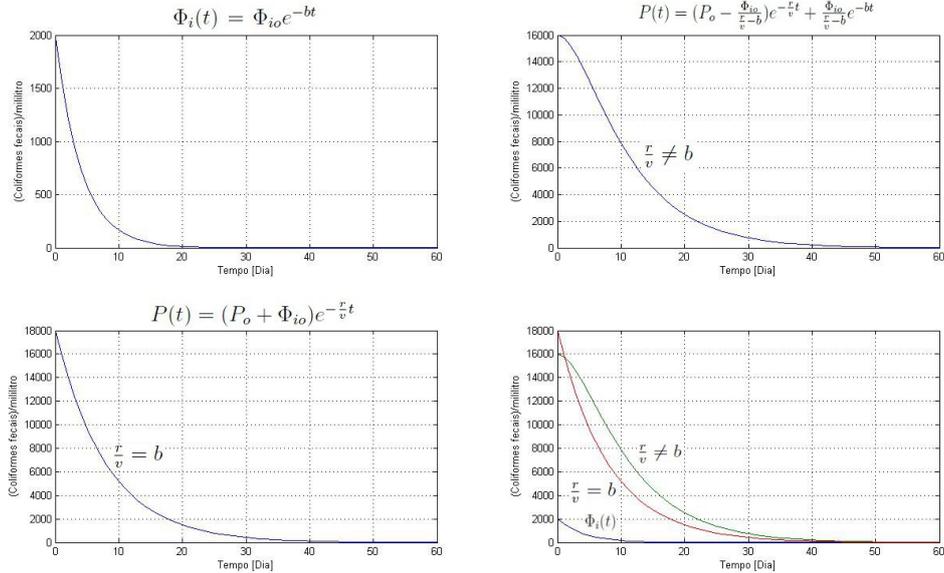


Figura 3.3: A indústria continue poluindo a lagoa, mas numa forma decrescente

c. Se a indústria tem um sistema periódico de descargas, intensificando-as em certas ocasiões e reduzindo-as em outras, uma tentativa para $\Phi_i(t)$ pode ser

$$\Phi_i(t) = \Phi_{io}(1 + \sin wt), \quad w > 0.$$

Neste caso, colocando $\lambda = \frac{r}{v}$, obtemos

$$\frac{dP}{dt} = \Phi_{io}(1 + \sin wt) - \lambda P(t), \tag{3.7}$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = (P_o - \frac{\Phi_{io}}{\lambda} + \frac{\Phi_{io}w}{\lambda^2+w^2})e^{-\lambda t} + \frac{\Phi_{io}}{\sqrt{\lambda^2+w^2}} \sin(wt - \theta) + \frac{\Phi_{io}}{\lambda},$$

onde θ é tal que $\cos \theta = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2+w^2}}$.

Assim, quando t cresce ($t \rightarrow +\infty$), $P(t)$ é governado pela função

$$P(t) = \frac{\Phi_{io}}{\lambda} + \frac{\Phi_{io}}{\sqrt{\lambda^2+w^2}} \sin(wt - \theta),$$

que oscila em torno do valor $\frac{\Phi_{io}}{\lambda}$ com a mesma frequência da $\Phi_i(t)$. O valor mínimo desta oscilação ocorre quando $\sin(ut - \theta) = -1$, e neste instante ainda $P(t) > 0$ pois $\frac{\Phi_i}{\lambda} > \frac{\Phi_{io}}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}}$.

O valor máximo assumido por $P(t)$ não supera $\frac{2\Phi_{io}}{\lambda} = \frac{2\Phi_{io}V}{r}$ (ver figura 3.4). Com estas informações, o valor de Φ_{io} pode ser ajustado para que ocorra uma despoluição.

Observação:

Sabendo que os valores r, v e P_o são os mesmos usado anteriormente. adotaremos outros valores importantes para construção desse gráfico:

$$\Phi_{io} = 2000;$$

$$w = 2 \times 1 \times \pi.$$

Sendo $w(\text{rad}/\text{dia})$.

Perceba que os Gráficos 01 e 02 são iguais. Sendo que o Gráfico 01 está representado em um nível de detalhamento maior, ou seja, as subdivisões da escala do tempo são maiores.

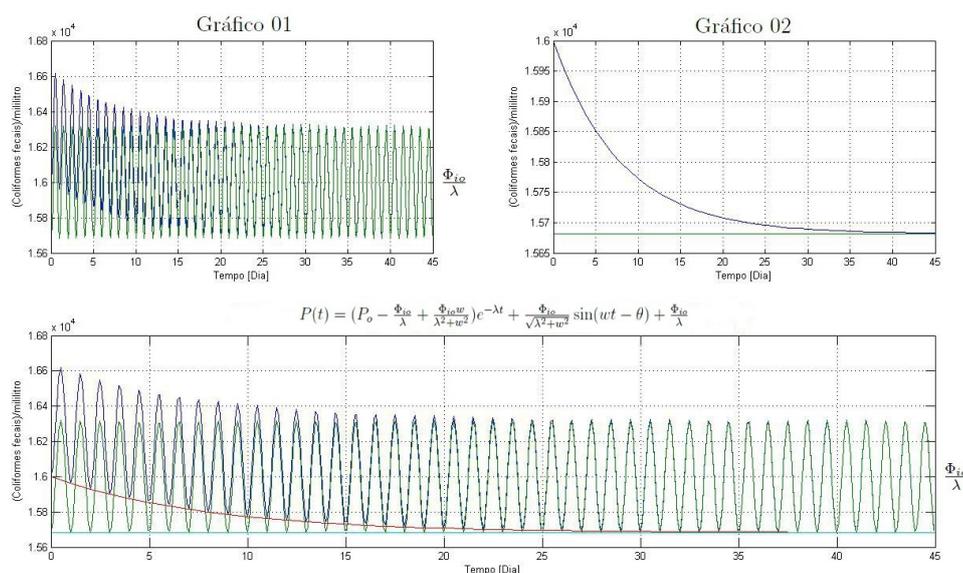


Figura 3.4: A indústria tem um sistema periódico de descargas de poluentes.

3.3 Digestão de Animais Ruminantes.

Os animais ruminantes, tais como carneiro, bode, veado, boi, etc, possuem um mecanismo complicado para realizar sua digestão. Simplificando, podemos dizer que eles engolem os alimentos sem mastigar, indo para a primeira cavidade do estômago, chamada *rume*. Após

serem ruminados, estes alimentos seguem para o abomaso (coagulador), a quarta cavidade do estômago, onde são digeridos. Seguem posteriormente para o duodeno, o primeiro segmento do intestino, e em seguida, na forma de fezes são eliminados de maneira intermitente.

Sabemos que o fluxo do rume para o abomaso e deste para o duodeno é aproximadamente contínuo.

Num esquema simplificado temos

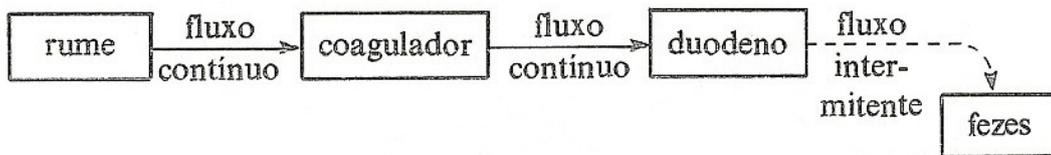


Figura 3.5: Sistema digestivo dos animais ruminantes

O modelo matemático, proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956), é o seguinte:

Seja

$x = x(t)$ a quantidade de alimento no rume, no instante t ;

$y = y(t)$ a quantidade no coagulador, no instante t ;

$z = z(t)$ a quantidade que chegou no duodeno até o instante t ;

Se a quantidade de alimento engolida pelo animal no instante $t = 0$ é q (este alimento vai diretamente para o rume), então $x(0) = q$, e $y(0) = z(0) = 0$.

Também, em qualquer instante t , temos $x(t) + y(t) + z(t) = q(\text{constante})$.

As hipóteses formuladas para o fluxo do alimento consistem de duas propostas arbitrárias e análogas:

Primeira, o alimento sai do rume numa razão proporcional à quantidade de alimento que está nesta cavidade, isto é, a taxa de decrescimento $\frac{dx}{dt}$ é proporcional a x .

$$\frac{dx}{dt} = -k_1x, \quad (k_1 > 0). \quad (3.8)$$

Segunda, o alimento sai do coagulador numa taxa proporcional à quantidade que ai está. Assim, é bastante razoável supor que

$$\frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y, \quad (k_1 > 0 \text{ e } k_2 > 0), \quad (3.9)$$

pois no mesmo instante entra k_1x e sai k_2y .

Resolvendo primeiramente a Equação (3.8), temos $x(t) = ke^{-k_1t}$ e como $x(0) = q$, vem $x(t) = qe^{-k_1t}$.

Substituindo este valor na Equação (3.9), temos

$$\frac{dy}{dt} = -k_2y + k_1qe^{-k_1t}, \quad (3.10)$$

cuja solução já conhecemos. Usaremos agora um outro método de resolução das equações lineares não homogêneas: *Método da variação de parâmetros*.

Supomos que $y(t) = u(t) \times v(t)$, onde uma destas funções pode ser arbitrária, enquanto a outra será determinada da Equação (3.10)

Então,

$$\frac{dy}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}.$$

Comparando com a Equação (3.10), procuramos escolher u e v de modo que

$$u \frac{dv}{dt} = k_1qe^{-k_1t} \quad (3.11)$$

e

$$v \frac{du}{dt} = -k_2y = -k_2uv \implies \frac{du}{dt} = -k_2u. \quad (3.12)$$

Logo,

$$u(t) = c_1e^{-k_2t},$$

sendo c_1 é uma constante arbitrária.

Substituindo isto na Equação (3.11), resulta

$$c_1e^{-k_2t} \frac{dv}{dt} = k_1qe^{-k_1t}$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1q}{c_1} e^{(k_2-k_1)t}.$$

Se $k_1 \neq k_2$, integrando temos

$$v(t) = \frac{k_1q}{c_1(k_2-k_1)} e^{(k_2-k_1)t} + c_2,$$

onde c_2 é a constante de integração.

$$\text{Então, } y(t) = u(t) \times v(t) = \frac{k_1 q}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c_1 c_2 e^{-k_2 t}.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 0$, temos $c_1 c_2 = -\frac{k_1 q}{k_2 - k_1}$. Assim,

$$y(t) = \frac{k_1 q}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), \quad (k_1 \neq k_2). \quad (3.13)$$

Sendo $k_1 = k_2$, obteremos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1 q}{c_1} \Rightarrow v = \frac{k_1 q}{c_1} t + c_2,$$

e portanto

$$y(t) = u(t) \times v(t) = k_1 q t e^{-k_1 t} + c_2 c_1 e^{-k_1 t}.$$

Como $y(0) = 0$, temos

$$y(t) = k_1 q t e^{-k_1 t}, \quad (k_1 = k_2). \quad (3.14)$$

Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno até o instante t , usamos

$$z(t) = q - [x(t) + y(t)] \quad (3.15)$$

Se $k_1 \neq k_2$, encontramos:

$$z(t) = q - q e^{-k_1 t} - \frac{q k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}),$$

isto é,

$$z(t) = q - \frac{q}{k_2 - k_1} (k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}). \quad (3.16)$$

Se $k_1 = k_2$, temos

$$k_1 = k_2, \quad z(t) = q - q e^{-k_1 t} - q k_1 t e^{-k_1 t},$$

ou seja,

$$z(t) = q [1 - e^{-k_1 t} (1 + k_1 t)]. \quad (3.17)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow q$, isto é, quando t for suficientemente grande, todo alimento chega no intestino (ver Figura 3.6).

Aparentemente, este modelo é apenas curioso; no entanto, sua importância consiste em se poder estabelecer o valor nutricional de vários alimentos selecionados, assim como sua granulação adequada para serem melhor aproveitados na digestão.

O método consiste simplesmente em se medir a excreção fecal, dando-a como função o tempo depois que foi alimentado com uma quantidade constante q .

Sabemos que $z(t)$ é o total de alimentos que chegou no duodeno até o instante t , incluindo os alimentos que já foram excretados. Desde que a excreção não é um processo contínuo, não vamos aqui representar tal fenômeno por uma equação diferencial.

Notamos que quando o alimento chega no intestino ele é excretado depois de um certo tempo. Suponhamos que em média cada excreção se dê num intervalo de tempo igual a T , ou seja, a quantidade de fezes produzida no instante $t > T$ é, em média, a quantidade de alimentos que chegou no intestino até o tempo $t - T$. Se indicamos por $f(t)$ a quantidade de fezes produzida até o instante t , temos

$$f(t) \cong z(t - T) \text{ para todo } t > T.$$

Se $k_1 \neq k_2$,

$$f(t) \cong q - \frac{q}{k_2 - k_1} [k_2 e^{-k_1(t-T)} - k_1 e^{-k_2(t-T)}],$$

para todo $t \geq T$.

Se $k_1 = k_2$,

$$f(t) \cong q[1 - e^{-k_1(t-T)}(1 + k_1(t-T))].,$$

para todo $t \geq T$.

Logo abaixo temos o gráfico que representa a digestão dos animais ruminantes

Suponha que estejamos analisando um animal de grande porte físico, com as seguintes características:

$$q = 30;$$

$$k_1 = 3;$$

$$k_2 = 1.5;$$

$$T = 0.5.$$

Onde,

q - Quantidade de alimento inicial (kg/dia);

T - Período em dias de cada excreção.

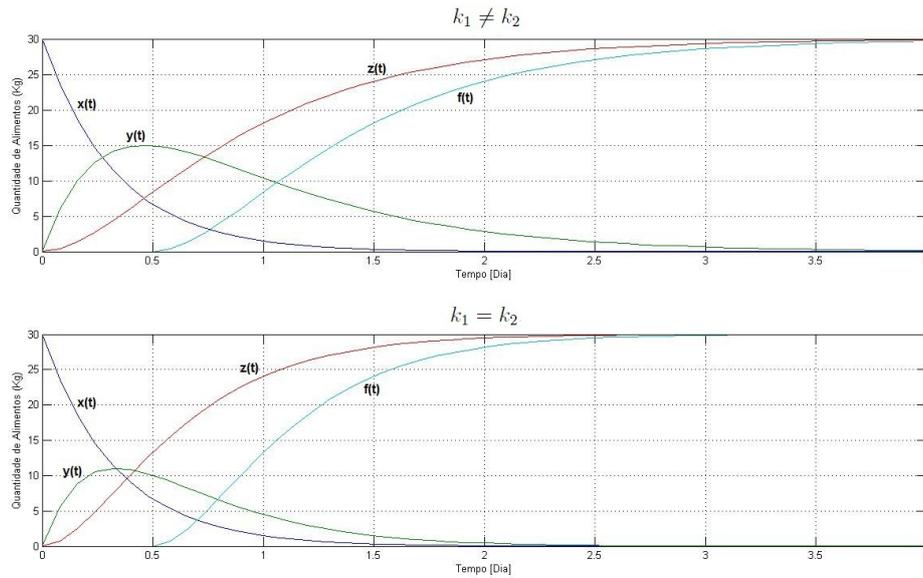


Figura 3.6: Digestão de animais ruminantes para os casos em que $k_1 \neq k_2$ e $k_1 = k_2$.

Observação:

A permanência de um alimento no sistema digestivo é um dos fatores responsáveis pelo melhor aproveitamento deste alimento. Assim, uma simples análise gráfica da excreção fecal via modelo matemático pode fornecer um método eficiente na preparação de alimentos.

Considerações Finais

A proposta deste trabalho foi de apresentar uma abordagem da teoria das equações diferenciais ordinárias que é essencial para o estudo dos modelos matemáticos de despoluição de lagoas e digestão de animais ruminantes. Ao estudar os modelos percebemos o quanto as equações diferenciais são importantes para análises de problemas do mundo real.

Vale ressaltar que os modelos matemáticos geram apenas aproximações para problemas reais. Eles serão mais próximos da realidade na medida em que o fenômeno estudado for mais estável, ou seja, quando os fatores adversos não variarem muito em relação às suposições iniciais consideradas para o modelo. Por exemplo, nos modelos propostos para despoluição de lagoas, encaramos o fluxo da água na lagoa como um problema de diluição de substâncias, não levando em consideração a sedimentação dos poluentes, sua ação biológica etc. Obviamente, essas variáveis que não levamos em consideração irão influenciar nos resultados de nossa análise. Cabe a nós decidirmos se essa influência é relevante ou insignificante para solução do nosso problema.

Por fim, espero que esse trabalho possa contribuir para todos aqueles que estejam estudando modelos matemáticos para despoluição de lagoas ou para digestão de animais ruminantes.

Apêndice A

Vamos discutir, neste apêndice, a demonstração do Teorema 3.1, o teorema fundamental de Existência e Unicidade para problemas de valor inicial de primeira ordem.

Teorema 3.1. *Suponha que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\delta < y < \gamma$ contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Prova:

(a) Existência:

Defina a sequência de funções $y_n(t)$ por

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Como $f(t, y)$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva b tal que

$$|f(t, y)| \leq b, \quad \text{para } (t, y) \in R.$$

Assim

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_0|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva a tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0| ds \leq ab \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1| ds \\ &\leq a^2 b \int_{t_0}^t |s - t_0|^2 ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}. \end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Então

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$.

Segue-se de (3.18) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} (\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^m \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}$$

então passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \quad (3.19)$$

Logo dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$, para $\alpha' < t < \beta'$. Daí segue-se que $y(t)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t , temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ e $|y(s) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$, o que implica que

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon.$$

Além disso para $\alpha' < t < \beta'$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \lim_{x \rightarrow \infty} y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

pois, por (3.19), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_n(s) - y(s)| ds \\ &\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}. \end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lim_{x \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.

(b) Unicidade:

Vamos supor que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad z(t) = \int_{t_0}^t z'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) &= |y(t) - z(t)| \\ &\leq \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)| ds = \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ e multiplicando-se por e^{-at} obtemos

$$\frac{d(e^{-at}u(t))}{dt} \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que $e^{-at}u(t) = 0$ (lembre-se que $u(t) \geq 0$ e portanto que $u(t) = 0$, para todo t). Assim $y(t) = z(t)$, para todo t .

■

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, Rodney C.; FERREIRA, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo-SP. Editora Harbra-, 1988. 67p.
- [2] BOYCE, William E., DiPrima, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8ª Edição. Rio de Janeiro-RJ. LTC, 2006. 60p.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 4ª Edição. Rio de Janeiro-RJ. LTC, 2000. V.1. 337p.
- [4] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo**. Rio de Janeiro-RJ. Editora Guanabara dois, 1978. V.1. 479 p.
- [5] SIMMONS, George Finlay. **Differential Equations with Applications and Historical Notes**. 2ª Edição. New York. Editora McGraw-Hill, 1991. 399p.
- [6] SANTOS, Reginaldo J. **TÓPICOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**/ Reginaldo J. Santos.- Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.