UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO EDUARDO SENA DE LUCENA

ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS À MATRIX DE HILBERT

Patos - PB
Maio/2017

ANTÔNIO EDUARDO SENA DE LUCENA

ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS À MATRIX DE HILBERT

Monografia de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Patos - PB
Maio/2017

L935a Lucena, Antonio Eduardo Sena de

Alguns problemas relacionados à Matriz de Hilbert [manuscrito] / Antonio Eduardo Sena de Lucena. - 2017.

62 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.

"Orientação: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira, CCEA".

1. Matriz de Hilbert. 2. Álgebra Linear. 3. Análise Funcional. I. Título.

21. ed. CDD 512.5

À minha mãe, minha família e meus professores.

Antônio Eduardo Sena de Lucena

ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS Á MATRIZ DE HILBERT

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 10 de maio de 2017

BANCA EXAMINADORA

Arlandson Matheus Silva Oliveira

Prof. Me Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Esp. Francisco Anderson Mariano da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

À Deus por toda minha vida.

À minha mãe Maria Ita, meu pai Antônio, a minhas irmãs, meu irmão e toda minha família por todo o apoio.

Aos professores do Curso de Matemática da UEPB do Campus Patos, em especial, Arlandson Matheus, Júlio Pereira, Francisco Anderson, José Ginaldo, Tatiana Rocha, Vilmar Vaz, Francisco Sibério e ao coordenador do curso Elias, que contribuíram ao longo da graduação, por meio das disciplinas.

Ao professor e orientador Arlandson Matheus pela sua dedicação a orientação.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando foi necessário.

Aos colegas de classe, amigos da EMSS e amigos da Capoeira pelo incentivo.

RESUMO

Nesta monografia, seguindo o itinerário traçado por Choi [5], revisitaremos alguns dos principais conceitos da Álgebra Linear e alguns conceitos introdutórios da Análise Funcional com o propósito de estudarmos algumas propriedades de uma família de matrizes quadradas, introduzida por Hilbert [8] em 1894 para estudar um problema de aproximação envolvendo polinômios de Legendre, e de uma matriz infinita, conhecidas na literatura matemática como *matrix de Hilbert.*

Palavras-chave: Matriz de Hilbert. Álgebra Linear. Análise Funcional.

ABSTRACT

In this monograph, following the itinerary traced by Choi [5], we will revisit some of the main concepts of Linear Algebra and some introductory concepts of Functional Analaysis towards the aim of studying some properties of a family of infinite matrices, introduced by Hilbert [8] in 1894 in order to study an approximation problem related to Legendre polynomials, and of an infinite matrix, both known in the mathematical literature as *Hilbert matrix.*

Keywords: Hilber matrix. Linear Algebra. Functional Analysis.

SUMÁRIO

1 Introdução **8**

2 Preliminares **9**

2.1 Teoria de operadores em dimensão finita 9

2.1.1 Espaços vetoriais de dimensão finita 9

2.1.2 Operadores lineares 13

2.1.3 Matrizes 18

2.2 Um pouco de Análise Funcional 36

2.2.1 O espaço ℓ^2 37

3 Problemas e soluções **40**

3.1 Problemas 40

3.2 Soluções 49

4 Conclusão **58**

Referências **59**

1 Introdução

Nesta monografia, seguiremos o roteiro de problemas e soluções referentes à matriz de Hilbert elaborado por [5]. Esta matriz foi introduzida por Hilbert [8] em 1894 para estudar um problema de aproximação envolvendo polinômios de Legendre. Algumas de suas aplicações encontram-se listadas em [14] e nas referências lá contidas.

Matriz de Hilbert batiza, na realidade, uma família de matrizes quadradas finitas, que podem ser pensadas como operadores sobre os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, e pelo menos uma matriz infinita, a qual, conforme veremos, age sobre o espaço ℓ^2 formado pelas sequências de números reais cujos termos elevados ao quadrado constituem uma série convergente ou somável.

O texto organiza-se como segue. O Capítulo 2 é devotado à rememoração de alguns fatos essenciais da Álgebra Linear, particularmente da Teoria de Operadores Lineares em dimensão finita, e à introdução de alguns conceitos iniciais de Análise Funcional, dando ênfase o espaço de Hilbert ℓ^2. No Capítulo 3, seguiremos essencialmete o roteiro de Choi e insvestigaremos algumas das mais fundamentais e belas propriedades da matriz de Hilbert.

2 Preliminares

Este capítulo é devotado ao desenvolvimento da teoria necessária à compreensão dos problemas relacionados à matriz de Hilbert apresentados no Capítulo 3.

2.1 Teoria de operadores em dimensão finita

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais de dimensão finita e das funções entre esses espaços que preservam a estrutura de espaço vetorial, denominadas transformações lineares. Comecemos recordando as definições e algumas propriedades destes dois objetos.

2.1.1 Espaços vetoriais de dimensão finita

Denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 2.1 *Um* **espaço vetorial** V *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio cujos elementos, chamados* **vetores** *podem ser somados e multiplicados por* **escalares***, isto é, elementos do corpo* $\mathbb{K}$*. Se* $u, v, w \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas pela adição e pela multiplicação por escalar:*

EV 1. $u + v \in V$ *(fechamento);*

EV 2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(associatividade);*

EV 3. $u + v = v + u$ *(comutatividade);*

EV 4. existe $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$ *(elemento neutro);*

EV 5. existe $(-u) \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$ *(inverso aditivo);*

EV 6. $\lambda u \in V$ *(fechamento);*

EV 7. $\mu(\lambda u) = (\mu\lambda)u$ *(associatividade);*

EV 8. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *(distributividade);*

EV 9. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *(distributividade);*

EV 10. $1u = u$ *(regra da unidade).*

Denotaremos $u + (-v)$ simplesmente por $u - v$.

Exemplo 1 *O conjunto* $\mathbb{K}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\,(i = 1, \ldots, n)\}$ *com a adição e multiplicação por escalar definidas coordenada a coordenada é um espaço vetorial. O conjunto* $\mathcal{F}$ *de todas as funções* $f : S \to \mathbb{K}$ *definidas num conjunto arbitrário não vazio* S *e com as operações de adição e multiplicação por escalar usualmente definidas é um também um espaço vetorial. O mesmo se pode dizer do conjunto* $\mathcal{P}$ *de todos os polinômios com coeficientes em* $\mathbb{K}$ *ou do subconjunto* $\mathcal{P}_n$ *de todos os polinômios de grau menor do que ou igual a* n*. O conjunto* $\mathcal{S}$ *de todas as sequências de elementos de* $\mathbb{K}$ *com as operações usuais definidas termo a termo é também um espaço vetorial.*

Definição 2.2 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* W *um subconjunto de* V*. Dizemos que* W *é um* **subespaço vetorial** *de* V *se* W *satisfaz as seguintes condições:*

(i) Se v, w *são elementos de* W*, então a soma* $v + w$ *também é um elemento de* W*.*

(ii) Se v *é um elemento de* W *e* λ *é um escalar, então* λv *é um elemento de* W*.*

(iii) O elemento 0 *de* V *também é um elemento de* W*.*

Observe que W é ele próprio um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Com efeito, sendo as propriedades (EV 1)-(EV 10) satisfeitas por todos os elementos de V, elas são satisfeitas *a fortiori* por todos os elementos de W.

Exemplo 2 *O subconjunto de* $\mathbb{K}^n$ *de todos os vetores cuja primeira coordenada é nula é um subespaço vetorial de* $\mathbb{K}^n$*. Se* $S = \mathbb{R}$*, os subconjuntos de* $\mathcal{F}$ *formados por todas as funções contínuas ou por todas as funções de período* π *são subespaços vetoriais de* $\mathcal{F}$*. O mesmo acontece com o subconjunto de* $\mathcal{P}$ *formado por todos os polinômios de grau par e, para* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *com os subconjuntos* c *e* c_0 *de* $\mathcal{S}$ *formados, respectivamente, por todas as sequências convergentes e por todas as sequências que convergem para zero.*

No que segue, V denotará um espaço vetorial real.

Definição 2.3 *Sejam V um espaço vetorial, $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Uma expressão da forma*

$$c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$$

é dita uma ***combinação linear*** *de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exemplo 3 *O vetor $v = (2,5) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (0,1)$, pois $v = 2v_1 + 3v_2$.*

Exemplo 4 *Fixados os vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes vetores,*

$$W = \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \{v \in V : v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, n)\},$$

é um subespaço vetorial de V, denominado o ***subespaço gerado*** *por $v_1, \ldots, v_n$.*

Um caso particular do Exemplo 4 é o seguinte. Consideremos os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$. Então, $\text{span}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$.

É fácil ver que $\text{span}\{e_1, e_2\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, para $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$v = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2 \in \text{span}\{e_1, e_2\},$$

o que implica $\mathbb{R}^2 \subset \text{span}\{e_1, e_2\}$. Destas duas inclusões, inferimos que $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Dizemos, então, que o conjunto de vetores $\{e_1, e_2\}$ **gera** o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Ademais, se os escalares c_1, c_2 satisfazem a relação $c_1e_1 + c_2e_2 = 0$, então $c_1 = c_2 = 0$. Este fato motiva as definições a seguir.

Definição 2.4 *Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é dito* ***linearmente independente (LI)*** *caso a equação*

$$c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = 0$$

admita apenas a solução trivial, isto é,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Se existir $c_i \neq 0$, para algum $i = 1, \ldots, n$, diremos que o conjunto A é ***linearmente dependente (LD)*** *ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são* ***LD****.*

Exemplo 5 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$. *Os vetores* $v_1 = (2, -1), v_2 = (1, 3)$ *formam um conjunto LI. De fato, considere a combinação linear* $av_1 + bv_2 = 0$. *Daí, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 3b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $a = b = 0$. *Portanto, os vetores* v_1 *e* v_2 *são LI.*

Exemplo 6 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$. *Os vetores* $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (-1, 0, -2)$ *e* $v_3 = (2, -3, 1)$ *formam um conjunto LD. Considere a combinação linear* $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. *Daí, obtemos*

$$\begin{cases} 2a - b + 2c = 0 \\ -a - 3c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, uma das suas possíveis soluções é $a = 3$, $b = 4$ *e* $c = -1$. *Logo, os vetores* v_1, v_2 *e* v_3 *são LD.*

Definição 2.5 *Um conjunto* $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ *é uma* ***base*** *do espaço vetorial* V *se:*

(i) ***B*** *é LI;*

(ii) ***B*** **gera** V, *isto é,* $V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Exemplo 7 *O conjunto*

$$\beta = \{e_1, e_2\}, e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$$

é uma base para o $\mathbb{R}^2$, *pois* ***B*** *é LI e gera* $\mathbb{R}^2$. *Essa base é conhecida como* ***base canônica*** *de* $\mathbb{R}^2$.

Mostraremos a seguir que quaisquer duas bases de um espaço vetorial possuem o mesmo número de elementos.

Proposição 2.6 *Sejam* V *um espaço vetorial e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* V. *Sejam* $w_1, \ldots, w_m$ *elementos de* V. *Se* $m > n$, *então* $w_1, \ldots, w_m$ *são LD.*

Demonstração. Veja [11, Theorem I.3.1]. ■

Teorema 2.7 *Seja* V *um espaço vetorial. Suponhamos que um base de* V *tem* n *elementos e que outra base tem* m *elementos. Então* $n = m$

Demonstração. Aplicamos a Proposição 2.6 às duas bases. Essa proposição implica que as alternativas $n > m$ e $m > n$ são impossíveis. Portanto, $n = m$. ■

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- Se V possui uma base com n vetores, então V tem **dimensão** n, fato que será denotado por $\dim V = n$.
- Quando um espaço vetorial V admite uma base finita, dizemos que V é um **espaço vetorial de dimensão finita**.
- Se $V = \{0\}$, por convenção, $\dim V = 0$.
- Outros espaços vetoriais reais serão chamados **espaços vetoriais de dimensão infinita**. Alguns deles serão tratados na Seção 2.2.

Exemplo 8 *Segue-se do Exemplo 7 que* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. *Esse exemplo pode ser facilmente generalizado para* $\mathbb{R}^n$ *e para os* **vetores canônicos** $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}}, 0, \ldots, 0)$, *donde inferimos que* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2.1.2 Operadores lineares

Definição e exemplos

Definição 2.8 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : V \to W$ é uma* ***transformação linear*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e para todo* $v \in V$;

(ii) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, *para todos* $u, v \in V$.

Quando $V = W$, uma transformação linear $T : V \to V$ é chamada de ***operador linear***.

Exemplo 9 *A aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por:* $T(x, y) = (-x, y)$ *é um operador linear.*

(i) *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in \mathbb{R}^2$. *Então*

$$T(\lambda v) = T(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x, y) = \lambda T(x, y) = \lambda T(V).$$

(ii) Sejam $v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} T(v+w) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (-(x_1+x_2), y_1+y_2) \\ &= (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ &= T(v) + T(w). \end{aligned}$$

Exemplo 10 *Se $V = W = \mathbb{R}^2$, definindo T como sendo uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, vemos que T é um operador linear. Se $\mathcal{P}$ é o espaço vetorial dos polinômios, a aplicação $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definida por $T(p) = p'$ (derivação) é um operador linear, bem como $S(p) = \int p$ (integração). Se c é o espaço vetorial das sequências reais convergentes, $L : c \to \mathbb{R}$ definida por $L(x) = \lim x$, onde $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$, é uma transformação linear, bem como $T : c \to c$ dada por $T(x) = (\lim x, 0, 0, \ldots)$.*

Aplicações lineares e matrizes

Exemplo 11 *Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$. Para $x \in V$, definimos $y = T(x)$ por*

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots m. \tag{2.1}$$

(Estamos denotando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$, sendo $y_i = (T(x))_i$ a i-ésima coordenada de y.) Afirmamos que T é uma aplicação linear. De fato, se $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$T(x + \lambda w))_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + \lambda w_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = (T(x))_i + \lambda (T(w))_i.$$

Teorema 2.9 *Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é da forma (2.1).*

Demonstração. Consideremos a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Temos, então, que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Como T é linear,

$$y = T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j).$$

Denotemos a i-ésima coordenada do vetor $T(e_j)$ por a_{ij}, isto é, $a_{ij} = (T(e_j))_i$. Assim, a i-ésima coordenada de y é

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

como queríamos provar. ■

É conveniente representarmos os coeficientes (a_{ij}) da expressão (2.1) como um arranjo retangular:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Denominamos tal arranjo **matriz** $m \times n$, sendo m o número de linhas e n o número de colunas. O elemento a_{ij} é a **entrada** correspondente à linha i e coluna j.

Exemplo 12 *Determinemos a representação matricial de* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + 3y - z)$ *com relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^3$ *e de* $\mathbb{R}^2$*,*

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)e_3 = (0, 0, 1)\} \quad e \quad \mathcal{C} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}.$$

Para isso, explicitemos a ação T *sobre os vetores canônicos de* $\mathbb{R}^3$*:*

- $T(1, 0, 0) = (1, 2) = 1e_1 + 2e_2$;
- $T(0, 1, 0) = (-2, 3) = -2e_1 + 3e_2$;
- $T(0, 0, 1) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2$.

A representação matricial de T *nas bases canônicas é a matriz*

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

No Teorema 2.9, mostramos como associar a cada transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma matriz $A = [a_{ij}]$ que representa T com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Mostraremos agora que a mesma associação entre aplicações lineares e matrizes é válida para o caso de uma aplicação linear $T : V \to W$ entre espaços vetoriais reais de dimensão finita V e W. A principal diferença, neste caso, é que não temos uma escola "natural" para bases dos espaços V e W. Escolhendo uma base arbitrária $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ do espaço V e escrevendo $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, vemos que a aplicação $B : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $B(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)$ é um **isomorfismo linear** entre V e $\mathbb{R}^n$, isto é, B é uma transformção linear bijetiva entre estes espaços. De maneira análoga, escolhendo uma base $\mathcal{C}$ do espaço W, obtemos um isomorfismo linear C entre W e $\mathbb{R}^m$. Temos, assim, o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & W \arrow[d, "C"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

A aplicação linear $T_{\mathbb{R}}$ é definida através da seguinte composição de aplicações lineares

$$T_{\mathbb{R}} = C \circ T \circ B^{-1}$$

é representada por uma matriz A, de acordo como o que vimos anteriormente.

Definição 2.10 *Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então,*

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. A ***matriz de T relativa às bases ordenadas*** *$\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, denotada por $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, é a matriz $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ organizadas da seguinte forma:*

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 13 *Suponhamos que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Seja F uma transformação linear tal que*

$$\begin{aligned} F(v_1) &= 3w_1 - w_2 + 17w_3, \\ F(v_2) &= w_1 + w_2 - w_3, \end{aligned}$$

em que $\{v_1, v_2\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ são bases de V e de W, respectivamente. Então a matriz de F relativa a essas bases é a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.11 *Sejam T, S transformações lineares de V para W (espaços vetoriais reais). Definimos*

$$(T + S)(v) := T(v) + S(v), \quad (\lambda T)(v) := \lambda T(v),$$

para cada $v \in V$. O conjunto de todas as transformações lineares de V para W é um espaço vetorial real, denotado $\mathcal{L}(V, W)$.

Temos o seguinte

Teorema 2.12 *Sejam V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita, $\mathcal{B}$ uma base de V e $\mathcal{C}$ uma base de W. Se T, S são transformações lineares de V em W, então*

$$[T+S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} + [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

Se λ é um número real, então

$$[\lambda T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \lambda\, [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

A correspondência

$$T \mapsto [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

é um isomorfismo linear entre o espaço de transformações lineares $\mathcal{L}(V, W)$ e o espaço de matrizes $m \times n$ (se $\dim V = n$ e $\dim W = m$).

Demonstração. As primeiras fórmulas mostram que a correspondência $T \mapsto [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ é uma transformação linear e são consequência da definição de matriz de uma aplicação linear com relação a bases ordenadas fixadas no domínio e no contra-domínio. Essa correspondência é sobrejetiva, já que cada transformação linear é representada por uma matriz, e injetiva, pois $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ implica $T = S$. Logo, essa correspondência é um isomorfismo linear, conforme afirmamos. ■

Exemplo 14 *Consideremos as bases $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,-2),(2,-5)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Desejamos determaniar a matriz $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ do* **operador identidade** *$I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $I(x) := x$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ (que é, obviamente, um operador linear).*

Note que

$$(1,-2) = 1(1,0) + (-2)(0,1) \quad e \quad (2,-5) = 2(1,0) + (-5)(0,1).$$

Logo,

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é denominada **matriz de mudança de base** *da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$.*

Núcleo e imagem

Encerraremos esta seção tecendo algumas considerações acerca do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

Definição 2.13 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Definimos a* **imagem** *de T, denotada por $Im\,T$, por*

$$Im\,T := \{w \in W : w = T(v),\, v \in V\}.$$

Definimos o **núcleo** *de T, denotado por* $\ker T$, *por*

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

O núcleo e a imagem de T são subespaços vetoriais de V e de W, respectivamente. De fato, se $v_1, v_2 \in \ker T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) = 0 + \lambda 0 = 0$, provando que $v_1 + \lambda v_2 \in \ker T$. Se $w_1, w_2 \in Im\,T$, então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $w_1 = T(v_1)$ e $w_2 = T(v_2)$. Logo, se $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $w_1 + \lambda w_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2) = T(v_1 + \lambda v_2)$, o que mostra que $w_1 + \lambda w_2 \in Im\,T$.

Temos, então, um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear:

Teorema 2.14 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Então*

$$\dim V = \dim Im\,T + \dim \ker T.$$

Demonstração. Veja [4]. ■

Corolário 2.15 *Se* $\dim V = \dim W$, *então T é injetiva se e somente se T é sobrejetiva.*

Demonstração. Se T é injetiva, então $T(x) = 0$ implica $x = 0$ (como se verifica sem dificuldade). Logo, $\dim \ker T = 0$. Assim, $\dim Im\,T = \dim V = \dim W$ e, portanto, $Im\,T = W$. Reciprocamente, se T é sobrejetiva, então $Im\,T = W$ e, portanto, $\dim \ker T = 0$. ■

A formulação do Corolário 2.15 em termos de sistemas lineares é a seguinte:

Corolário 2.16 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Então o sistema não homogêneo $Tx = y$ tem solução única para todo $y \in \mathbb{R}^n$ se e somente se o sistema homogêneo $Tx = 0$ tem solução única.*

2.1.3 Matrizes

A profunda correlação entre matrizes e aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita justifica a importância, sobretudo computacional, do estudo de matrizes.

Definição

Definição 2.17 *Sejam m, n inteiros ≥ 1. Definimos uma* **matriz real de ordem** m **por** n*, ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se $m \times n$), como uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Esses elementos de $\mathbb{R}$ são chamados* **entradas**[1] *da matriz.*

É usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos a_{ij}, ou ainda A_{ij}, em que os índices indicam, nesta ordem a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é geralmente representada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ou por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou simplesmente por $A = [a_{ij}]$, quando a ordem da matriz estiver subentendida. O símbolo $\mathcal{M}(m, n)$ denotará o conjunto das matrizes $m \times n$.

Por vezes, é conveniente ou necessário pensarmos as entradas de uma matriz como funções de sua localização, isto é, $a_{ij} = f(i, j)$, para alguma função $f : \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_m \to \mathbb{R}$, em que $\mathcal{I}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\mathcal{I}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$. Tal é o caso, por exemplo, da matriz de ordem $n \times n$ $H_n = (h_{ij})$ cujas entradas são calculadas da seguinte maneira:

$$h_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad , i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta matriz, ou melhor, esta família de matrizes foi introduzida em 1894 pelo matemático alemão David Hilbert para estudar o seguinte problema de aproximação (veja [8]):

> *Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. É possível encontrar um polinômio não nulo P com coeficientes inteiros tal que a integral*
>
> $$\int_a^b P(x)^2 dx$$
>
> *é menor do que qualquer $\epsilon > 0$ dado, tomado arbitrariamente pequeno?*

[1]Como no caso dos escalares na definição de um espaço vetorial, as entradas de uma matriz não precisam ser necessariamente números reais, podem ser números complexos ou, mais geralmente, elementos de um corpo $\mathbb{K}$.

Para responder essa questão, Hilbert derivou uma fórmula exata para o determinante dessa família de matrizes e investigou suas assíntotas. Ele concluiu que a resposta é afirmativa, desde que o comprimento $b - a$ do intervalo seja menor do que 4.

Destaquemos alguns objetos importantes:

- Se $m = n$, dizemos que $A = [a_{ij}]$ é uma **matriz quadrada**. O conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n será denotado por $\mathcal{M}(n)$. Por exemplo, a matriz de Hilbert H_n é uma matriz quadrada.

- A matriz quadrada de ordem n I_n cujas entradas são dadas por $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ é chamada de **matriz identidade**. Por exemplo,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dita **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

  A matriz A é dita **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz quadrada é dita **diagonal** quando $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dita **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz de Hilbert H_n é simétrica.

- Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. A **diagonal principal** de A é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$. O **traço** de A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$ é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de A, isto é,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(n é a ordem de A).

Operações com matrizes

Definição 2.18 *Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a* **soma** *de A e B, denotada por $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.*

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

É imediata a verificação de que a soma de matrizes goza das seguintes propriedades, inteiramente análogas às propriedades da soma de números (de fato, em virtude da maneira como foi definida, a soma de matrizes herda as propriedades da soma de números reais):

- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade);

- $A + B = B + A$ (comutatividade);

- $A + 0 = A$, em que 0 denota a matriz nula $m \times n$ (elemento neutro);

- A+(-A)=0, em que $-A$ é matriz cujas entradas são iguais ao oposto aditivo de cada entrada correspondente da matriz A (inverso aditivo),

quaisquer que sejam as matrizes A, B, C de mesma ordem.

Definição 2.19 *Dada a matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, definimos o* **produto de** A **pelo número real** λ *como* $\lambda A := [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

Por exemplo,

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, temos:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$;
- $0 \cdot A = 0$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer que seja a matriz A, obteremos a matriz nula de mesma ordem que A;
- $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$;
- $1 \cdot A = A$.

Decorre imediatamente das propriedades listadas anteriormente que $\mathcal{M}(m, n)$, munino das operações de soma e de produto por escalar que acabamos de definir, é um espaço vetorial real.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. A matriz A^T é denominada **transposta** de A.

Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}, A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades (cuja demonstração é elementar e será omitida aqui):

- Uma matriz é simétrica se e somente se é igual à sua transposta, isto é, se e somente se $A = A^T$;

- $(A^T)^T = A$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é igual à matriz original;

- $(A + B)^T = A^T + B^T$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual a soma das transpostas;

- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, em que λ é qualquer escalar.

O conjunto das matrizes tem uma estrutura muito mais rica do que a de simples espaço vetorial, obtida com a noção de produto de matrizes, fundamental para a resolução de sistemas de equações lineares na forma matricial e para o estudo da composição de aplicações lineares representadas matricialmente. Nosso próximo objetivo é, portanto, definir a multiplicação de matrizes e mostrar algumas de suas propriedades. A definição de produto de matrizes foi apresentada pelo matemático inglês Arthur Cayley no trabalho intitulado *A Memoir on the Theory of Matrices*, publicado em 1858 na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* Neste trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como foi definida, simplifica em muito o estudo de sistemas de equações lineares. Também observou que esta multiplicação deixava de apresentar propriedades importantes, como a comutatividade e a lei do corte, e que uma matriz não nula não é necessariamente invertível.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definimos o **produto de** A **por** B como a matriz $AB = [c_{kl}]_{m\times p}$ cujas entradas são dadas por

$$c_{kl} = \sum_{t=1}^{n} a_{kt}b_{tl} = a_{k1}b_{1l} + \cdots + a_{kn}\beta_{nl}.$$

Observação 2.1 *Três comentários a respeito da definição de produto de duas matrizes se fazem necessários, a saber:*

(i) Só está definido o produto de uma matriz $A_{m\times n}$ por uma matriz $B_{l\times p}$ se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, isto é, se $n = l$. Além disso, o produto $C = AB$ será de ordem $m \times p$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2(-1) - 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

(ii) *O elemento* c_{ij} *(i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtida, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz e somando estes produtos. Por exemplo,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda.

(iii) *Em geral,* $AB \neq BA$ *(podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não). Por exemplo, sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Então* $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. *Note, ainda, que* $AB = 0$, *sem que* $A = 0$ *ou* $B = 0$.

As seguintes propriedades são válidas desde que as operações sejam possíveis:

- $AI = IA = A$, onde I denota a cada vez uma matriz identidade de ordem conveniente;
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à soma);
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma);
- $(AB)C = A(BC)$ (associatividade);
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$, onde 0 denota a cada vez uma matriz nula de ordem conveniente.

Considere n objetos numerados de 1 até n e misture-os. Cada mistura possível é chamada uma *permutação*. Por exemplo, eis uma permutação de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos considerar uma permutação σ como uma função invertível do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ nele mesmo, de modo que podemos escrever escrever $\sigma(3) = 5$ no exemplo precedente. Mais geralmente, podemos escrever

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{bmatrix}.$$

Como a linha de cima é sempre a mesma, podemos omiti-la e escrever apenas:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{bmatrix}.$$

Assim, nosso exemplo torna-se simplesmente $\sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

A matemática das permutações é extensa; há algumas propriedades básicas das permutações de que precisaremos:

- Existem $n!$ permutações de n objetos distintos (já que há n escolhas para o primeiro objeto, $n-1$ escolhas para o segundo uma vez que o primeiro tenha sido escolhido, e assim por diante).

- Uma permutação que troca de lugar apenas dois objetos é dita uma *transposição*. Qualquer permutação pode ser construída por meio de sucessivas permutações. Por exemplo, para construir a permutação $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ a partir da permutação trivial $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, você pode trocar de lugar o 2 e o 3, e então trocar de lugar o 1 e o 3.

- Para uma dada permutação σ, existe um número de trocas necessárias para construí-la. (Podemos considerar o menor número de trocas, porém não precisamos nos preocupar com isso, pois *quaisquer* duas maneiras de construir uma permutação a partir de trocas resultarão num número de trocas com mesma paridade.) Se esse número é par, dizemos que σ é uma *permutação par*; se esse número é ímpar, dizemos que σ é uma *permutação ímpar*.

Determinante

Definição 2.20 *A* função sinal *é a função* sgn *que associa a cada permutação um elemento do conjunto* $\{-1, 1\}$ *de acordo com a regra de correspondência dada por*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \sigma \textit{ é par} \\ -1, & \textit{se } \sigma \textit{ é ímpar.} \end{cases}$$

Podemos usar permutações para dar uma definição do determinante de uma matriz.

Definição 2.21 *O* determinante *de uma matriz quadrada* $M = (m_{ij})$ *de ordem* n *é*

$$\det M = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\ m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)},$$

onde a soma é tomada sobre todas as permutações de n *objetos.*

Exemplo 15 *Para* $n = 4$*, há* $4! = 24$ *permutações. Para uma matriz quadrada de ordem* 4*,* $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$*, temos:*

$$\begin{aligned} \det M = \quad & m_{11}m_{22}m_{33}m_{44} - m_{11}m_{23}m_{32}m_{44} - m_{11}m_{22}m_{34}m_{43} \\ & -m_{12}m_{21}m_{33}m_{44} + m_{11}m_{23}m_{34}m_{42} + m_{11}m_{24}m_{32}m_{43} \\ & +m_{12}m_{23}m_{31}m_{44} + m_{12}m_{21}m_{34}m_{43} \pm 16 \textit{ outros termos.} \end{aligned}$$

Proposição 2.22 (Propriedades do Determinante) *Seja* $M = [m_{ij}]$ *uma matriz quadrada de ordem* n*. São válidas as seguintes propriedades:*

(i) $\det M = \det(M^T)$*;*

(ii) Se N *é obtida permutando-se duas linhas de* M*, então* $\det N = -\det M$*;*

(iii) Se N *é obtida multiplicando uma linha de* M *por uma constante* λ*, então* $\det N = \lambda \cdot \det M$*;*

(iv) Se M *tem uma linha nula, então* $\det M = 0$*;*

(v) Se duas linhas de M *são iguais, então* $\det M = 0$*;*

(vi)

$$\begin{aligned} m_{i1}C_{k1} + m_{12}C_{k2} + \cdots + m_{in}C_{kn} = 0, &\quad \text{se} \quad k \neq i; \\ m_{1j}C_{1k} + m_{2j}C_{2k} + \cdots + m_{nj}C_{nk} = 0, &\quad \text{se} \quad k \neq j; \end{aligned}$$

(vii) *Se* N *é obtida adicionando-se um múltiplo de uma linha de* M *a outra linha de* M*, então* $\det N = \det M$.

(viii) *Se* M *é triangular, isto é, se* M *tem zeros abaixo (ou acima) da diagonal, então* $\det M$ *é o produto dos elementos da diagonal. Em particular,* $\det I_n = 1$.

(ix) *Se* $M \underset{L}{\sim} N$*, então existe um número real* $\lambda \neq 0$ *tal que* $\det N = \lambda \cdot \det M$*. Em particular, se* R *é a forma reduzida escalonada de* M*, então* $\det M = 0$ *se, e somente se,* $\det R = 0$*. (*$\underset{L}{\sim}$ *denota equivalência por linhas.)*

Uma matriz é dita **elementar** quando pode ser obtida da matriz identidade através de uma única operação elementar linha (veja [6] para detalhes). Usando as propriedades listas na proposição precedente, podemos estabelecer a seguinte

Proposição 2.23 *Se* E *é uma matriz elementar e* A *é uma matriz qualquer, então*

$$\det(EA) = (\det E) \cdot (\det A).$$

Proposição 2.24 *A respeito de uma matriz quadrada* A *de ordem* n*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\operatorname{posto}(A) = n$*;*[2]

(ii) A *é invertível;*

(iii) $\det A \neq 0$.

Demonstração. Se $\operatorname{posto}(A) = n$, então a forma reduzida escalonada de A é $R = I_n$; logo, o sistema $Ax = 0$ só admite a solução trivial. Logo, A é invertível.

Se A é invertível, então A se escreve como um produto $A = E_1 E_2 \cdots E_s$ de matrizes elementares $E_1, \ldots, E_n$. Usando repetidas vezes a Proposição 2.23, concluímos que $\det A = \det E_1 \cdot \det E_2 \cdot \cdots \cdot \det E_s \neq 0$.

Se $\det A \neq 0$, então pela Proposição 2.22(ix), $\det R \neq 0$, onde R é a forma reduzida escalonada de A. Logo, pela Proposição 2.22(iv), R tem n linhas não-nulas. Segue que $\operatorname{posto}(A) = \operatorname{posto}(B) = n$. ■

A próxima proposição estabelece uma propriedade bastante interessante e útil da função determinante.

[2] O posto de uma matriz de M é igual ao número r de linhas não nulas na forma reduzida escolanada por linha da matriz M. Veja [6] para detalhes.

Proposição 2.25 *Se M e N são matrizes quadradas de ordem n, então* $\det(MN) = (\det M) \cdot (\det N)$.

Demonstração. Há dois casos a considerar. Suponhamos, inicialmente, que M é invertível. Então M pode ser escrita como um produto de matrizes elementares,

$$M = E_1 E_2 \cdots E_s.$$

Aplicando repetidamente a Proposição 2.23, concluímos que

$$\begin{aligned}
\det(MN) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_s N) \\
&= \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_s N) \\
&= \det(E_1)\det(E_2) \cdots \det(E_s)\det(N) \\
&= \det(E_2 \cdots E_s N)\det(N) \\
&= \det(M)\det(N).
\end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que M não é invertível. Então M se escreve como

$$M = E_1 E_2 \cdots E_s R,$$

onde cada matriz E_k é elementar e R é a forma reduzida escalonada de M. Note que R tem uma linha nula (caso contrário, teríamos $R = I_n$ e M seria invertível). Daí,

$$MN = M = E_1 E_2 \cdots E_s (RN),$$

e a matriz RN tem uma linha nula. Pelas propriedades do determinante e mais uma vez fazendo repetidos usos da Proposição 2.23, concluímos que

$$\det(RN) = 0 \quad \text{e} \quad \det(MN) = \det(E_1)\det(E_2) \cdots \det(E_s)\det(RN) = 0.$$

Portanto, em ambos os casos, $\det(MN) = (\det M) \cdot (\det N)$. ■

Definição 2.26 *Seja $M = [m_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Seja M_{ij} a matriz obtida suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de M. O* menor *do elemento m_{ij} de M é o determinante da submatriz M_{ij},* $\det M_{ij}$. *O* cofator C_{ij} *do elemento m_{ij} de M é o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo menor de m_{ij}, $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.*

Teorema 2.27 (Desenvolvimento por Cofatores) *Seja $M = [m_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Então*

(i) $\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} C_{ij}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\},$

(ii) $\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} C_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$

onde C_{ij} é o cofator do elemento m_{ij}.

Definição 2.28 *Seja $M = [m_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. A* matriz cofator *de M, denotada por* $\operatorname{cof} M$*, é a matriz quadrada de ordem n cujo elemento na linha i e coluna j é C_{ij}, o cofator de m_{ij} em M,*

$$\operatorname{cof} M = [C_{ij}].$$

A matriz adjunta (clássica) *de M, denotada por* $\operatorname{adj} M$*, é a transposta da matriz* $\operatorname{cof} M$*,*

$$\operatorname{adj} M = (\operatorname{cof} M)^T.$$

Exemplo 16 *Seja* $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. *Calculando* $\det M$ *em relação à primeira linha, encontramos:*

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} &= 2\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + (-4)\det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2(-20+2) - 3(0-2) - 4(0+4) \\ &= -46. \end{aligned}$$

Calculando $\det M$ *em relação à primeira coluna, encontramos:*

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} &= 2\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 0\det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2(-20+2) + 1(6-16) \\ &= -46. \end{aligned}$$

Exemplo 17 *Seja* $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. *Os cofatores de M são:*

$$\begin{aligned} &C_{11} = -18, \quad C_{12} = 2, \quad C_{13} = 4, \\ &C_{21} = -11, \quad C_{22} = 14, \quad C_{23} = 5, \\ &C_{31} = -10, \quad C_{32} = -4, \quad C_{33} = -8. \end{aligned}$$

A matriz adjunta de M é

$$\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.29 *Se M é uma matriz invertível de ordem $n \geq 2$, então*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} M.$$

Demonstração. Como, por hipótese, M é invertível, sabemos que $\det M \neq 0$. Por definição, temos

$$M \cdot \operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Segue da Proposição e da Propriedade que

$$M \cdot \operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det M & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det M & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \det M \end{bmatrix}.$$

Assim, $M \cdot \operatorname{adj} M = (\det M) I_n$. Daí, como $\det M \neq 0$, é claro que $M \cdot \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} M = I_n$. Portanto,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} M.$$

■

Exemplo 18 *Considere a matriz M do Exemplo 17. Temos que* $\det M = -46$. *Então:*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{adj} M = \frac{1}{-46} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 19 (Regra de Cramer) *Se* $\det A \neq 0$, *então o sistema $Ax = b$ de n equações lineares com n incógnitas tem exatamente uma solução dada por*

$$x_j = \frac{\det({}^j A)}{\det A}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

onde ${}^{j}A$ *é a matriz obtida de* M *substituindo-se a* j*-ésima coluna pelo vetor* b*.*

Demonstração. *Se* $\det A \neq 0$*, então* A *é invertível, e, então, a única solução do sistema* $Ax = b$ *é* $x = A^{-1}b$*. Pela Proposição 2.29, temos*

$$x = A^{-1}b = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} b,$$

ou seja,

$$(\det A)x = (\operatorname{adj} A)b.$$

Por definição de adjunta,

$$\begin{aligned}(\det A)x_j &= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{adj} A)_{ji} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\det A_{ij}) b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i C_{ij}.\end{aligned}$$

A última expressão à direita é o desenvolvimento em relação à j*-ésima coluna do determinante da matriz* ${}^{j}A$ *definida anteriormente. Então,*

$$x_j = \frac{\det({}^{j}A)}{\det A}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

■

Observação 2.2 *A Regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la quando esta condição não é satisfeita pode conduzir a erros. Considere, por exemplo, o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

É claro que este sistema não tem solução, pois se $x+y+z = 1$*, então* $3x+3y+3z$ *deve ser igual a* 3 *e não a* 4*. Apesar disso, a Regra de Cramer, usada incorretamente, nos levaria às "expressões indeterminadas"* $x = 0/0, y = 0/0, z = 0/0$ *e à falsa conclusão de que o sistema é indeterminado.*

Observação 2.3 *Resulta da fórmula* $\det({}^{1}A) = x_1 \cdot \det A$ *(e suas análogas para* $x_2, \ldots, x_n$*) que se* $\det A = 0$ *e* $\det({}^{1}A) \neq 0$ *(bem como algum dos demais determinantes* $\det({}^{j}A), j = 2, \ldots, n$*, for* $\neq 0$*), então o sistema é impossível.*

O teorema a seguir é uma importante súmula das nossas conclusões.

Teorema 2.30 *A respeito de uma matriz quadrada A, de ordem n, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A é invertível;*

(ii) *A é não-singular;*

(iii) *o sistema homogêneo $Ax = 0$ só admite a solução trivial* $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$;

(iv) $\operatorname{posto}(A) = n$;

(v) *a forma reduzida escalonada de A é $R = I_n$;*

(vi) $\det A \neq 0$.

Autovalores e autovetores

Definição 2.31 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas no corpo $\mathbb{K}$. O polinômio $p_A(t) := \det(A - tI)$, em que I denota a matriz identidade de ordem n, é o* **polinômio característico** *de A. As raízes $\lambda_i \in \mathbb{K}$ são chamadas* **autovalores** *de A. Os vetores não nulos do núcleo*

$$ker(A - \lambda_i I) := \{x \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda_i I)\, x = 0\}.$$

são chamados **autovetores** *associados ao autovalor λ_i, ou simplesmente autovetores de A. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Fixada uma base $\mathcal{B}$ de V, seja A a matriz de T com relação a essa base. O* **polinômio característico** *de T é $p_T(t) := p_A(t)$. Os* **autovalores** *de T são os autovalores de A. Os* **autovetores** *de T associados ao autovalor λ_i são os vetores não nulos pertencentes ao núcleo $ker(T - \lambda_i I)$.*

Note que os autovalores de uma matriz de ordem n A coincidem os autovalores de A considera como operador linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Exemplo 20 *Considere a matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de M é

$$p(t) = \det(M - \lambda I) = 3 - 4t + t^2.$$

Fazendo $p(t) = 0$, encontramos as raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Os autovetores são os múltiplos não nulos de

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 21 *Consideremos a transformação linear*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & T(x,y) = (y,x). \end{array}$$

Representando T com relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$, verificamos sem dificuldade que seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Além disso, por cálculo direto, vemos que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,-1)$ são autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores de $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. De fato, temos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1) = (1,1) = 1 \cdot (1,1) = 1 \cdot v_1, \\ T(v_2) &= T(1,-1) = (-1,1) = -1 \cdot (1,-1) = -1 \cdot v_2. \end{aligned}$$

Dado um operador $T \in \mathcal{L}(V)$, é importante enfatizarmos que apenas as raízes $\lambda_i \in \mathbb{K}$ do polinômio característico são autovalores do operador. Por exemplo, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por $T(x,y) = (-y,x)$, então seu polinômio característico é $p(t) = t^2 + 1$, que não possui raízes reais. Portanto, T não possui autovalores. Considerando $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido da mesma maneira, $p(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$, e T possui dois autovalores. Isso ilustra o fato de que o estudo de um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ depende muito do corpo sobre o qual V é espaço vetorial.

Finalmente, precisamos garantir que nossa definição de autovalores de um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ independe da escolha de base. Com efeito, sejam $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ duas bases de V e seja M a matriz de mudança de base. Sejam, ainda, $A = [T]_{\mathcal{B}}$ e $B = [T]_{\mathcal{B}'}$. Então

$$\det(A - tI) = \det(MBM^{-1} - tI) = \det(M(B - tI)M^{-1}) = \det(B - tI),$$

em que usamos que a matriz de mudança de base de base é sempre invertível e a Proposição 2.25. Isso garante que os autovalores de T independem da escolha de base.

Matrizes positivas

Definição 2.32 *Seja A uma matriz quadrada real de ordem n. Dizemos que A é positiva semidefinida se*

$$x^T Ax \geq 0$$

para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e **positiva definida** *se*

$$x^T Ax > 0$$

para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exemplo 22 *A matriz*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é positiva definida. Com efeito, se $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} x^T Mx = (x^T M)x &= \begin{bmatrix} (2a-b) & (-a+2b-c) & (-b+2c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2 \\ &= a^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a última expressão obtida é igual a zero somente se $a = b = c = 0$, isto é, se $x = 0 \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 23 *Seja A uma matriz invertível. Então a matriz $A^T A$ é positiva definida. Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então $x^T A^T Ax = ||Ax||^2 > 0$, pois, sendo A invertível, $Ax \neq 0$. (Aqui, $||x|| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ é a norma euclidiana de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.)*

Por brevidade, usaremos o termo matriz *positiva* para uma matriz positiva semidefinida ou para uma matriz posisita. Quando necessário enfatizar que uma matriz é positiva definida, diremos que ela é *estritamente positiva.* Há várias condições que caracterizam matrizes positivas. Algumas delas estão listadas a seguir (veja [1] e [3]).

(i) A é positiva se e somente se é simétrica e todos os seus autovalores são não negativos.

(ii) A é positiva se e somente é simétrica e todos os seus menores principais são não negativos. A é estritamente positiva se e somente se todos os seus menores principais são positivos.

(iii) A é positiva se e somente se $A = B^T B$ para alguma matriz B. A é estritamente positiva se e somente se B é invertível.

(iv) A é positiva se e somente se $A = B^T B$ para alguma matriz triangular superior B. Ademais, B pode ser escolhida de tal maneira que as entradas de sua diagonal principal sejam não negativas. Se A é estritamente positiva, então B é única. A decomposição $A = B^T B$ é dita a *decomposição de Cholesky* de A. A é estritamente positiva se e somente se B é invertível.

(v) A é positiva se e somente se $A = B^2$ para alguma matriz positiva B. Tal B é única. Escrevemos $B = A^{1/2}$ e chamamo-la de a raiz quadrada (positiva) de A.

(vi) A é positiva se e somente se existem vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de vetores de $\mathbb{R}^n$. A é estritamente positiva se e somente se os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI.

(vii) A é positiva se e somente se A é simétrica e existe um espaço vetorial euclidiano (isto é, um espaço vetorial munido de produto interno) V, de dimensão k, e vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

A matrix (2.2) é denominada *matriz de Gram* de $v_1, \ldots, v_n$ e denotada por $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n)$.

Para uma demonstração da equivalência entre essas caracterizações, remetemos o leitor a [1].

2.2 Um pouco de Análise Funcional

Paul Halmos [7] propôs o seguinte problema:

Existe um operador linear T (sobre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita) com $||T|| \leq \pi$ and representado pela matrix

$$[1/(i+j-1)] \quad (i,j=1,2,3,\ldots)?$$

Por comparação com o que acontece em dimensão finita, em que a matriz de Hilbert H_n age como um operador linear sobre $\mathbb{R}^n$, não deve causar grande estranhamento nos perguntamos se situação análoga ocorre com a matriz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{4} & & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix},$$

a que nos referiremos doravante como a *matriz de Hilbert infinita.* Imitando o caso de dimensão finita, coloquemos o problema nos seguintes termos:

Existe um subespaço vetorial X de $\mathcal{S}$ (espaço de todas as sequências reais) sobre o qual fica bem definida a aplicação linear de X em X dada por

$$Hx$$

para toda sequência $x \in X$?

O produto Hx deve ser entendido como uma extensão "natural" do produto usual de uma matriz $n \times n$ por um vetor $n \times 1$. Contudo, as entradas do vetor produto serão séries, o que levanta o problema da convergência dessas entradas já presente na parte $||T|| \leq \pi$ do problema que abre esta seção.

Há, ainda, um outro problema que deve ser elencado aqui, um problema de representação, que ilustra a diferença entre o estudo de operadores lineares em dimensão finita e em dimensão infinita. Nem todo operador linear T sobre um espaço de sequências de números reais X pode ser representado matricialmente. Seja, por exemplo, c o espaço vetorial das sequências convergentes. Definimos $T : c \to c$ por $T(x) = (\lim x, 0, 0, 0, \ldots)$. Esta aplicação não pode ser representada através de uma matriz. Com efeito, suponhamos que existe uma matriz (infinita!) A tal que $T(x) = ((Ax)_n)$. Tomando $x = \delta^m$, isto é, $x_m = 1$ e $x_k = 0$ para todo $k \neq m$, temos que $0 = T(x) = (a_{nm})$, m-ésima coluna de A. Portanto, A é a matriz nula. Mas, para a sequência constante $(1, 1, 1, \ldots)$, $T(1, 1, 1, \ldots) = (1, 0, 0, 0 \ldots)$, uma contradição (veja [15, Example 1]).

Apesar de todas essas dificuldades, a resposta para o nosso problema é afirmativa. Basta considerarmos $X = \ell^2$, o espaço de todas as sequências reais cujos quadrados dos termos formam uma série convergente ou somável.

2.2.1 O espaço ℓ^2

Definimos o seguinte conjunto

$$\ell^2 := \left\{ x = (x_i) : x_i \in \mathbb{R}\, \forall\, i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

A demonstração de que este conjunto, munido das operações usuais de soma de sequências termo a termo e do produto de um número real por cada termos de uma sequência, é um espaço vetorial real depende essencialmente da seguinte desigualdade, obtida pelo matemático alemão Hermann Minkowski em 1896 e que, por isso, foi batizada de *desigualdade de Minkowski*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right)^{1/2},$$

quaiquer que sejam $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell^2$.

Demonstração da desigualdade de Minkowski. Para simplificar a escrita, definimos $z_i := x_i + y_i$. A desigualdade triangular para números reais dá

$$\begin{aligned} |z_i|^2 &= |x_i + y_i||z_i| \\ &\leq (|x_i| + |y_i|)|z_i|. \end{aligned}$$

Somando de 1 até um índice n fixado, obtemos

$$\sum |z_i|^2 \leq \sum |x_i||z_i| + \sum |y_i||z_i|.$$

Aplicamos à primeira soma à esquerda a desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\sum |x_i||z_i| \leq \left[\sum x_i^2\right]^{1/2} \left[\sum z_i^2\right]^{1/2}.$$

Analogamente, com relação à segunda soma à direita, obtemos

$$\sum |y_i||z_i| \leq \left[\sum y_i^2\right]^{1/2} \left[\sum z_i^2\right]^{1/2}.$$

Juntando as três últimas desigualdades, encontramos

$$\sum |z_i|^2 \leq \left\{\left[\sum x_i^2\right]^{1/2} + \left[\sum y_i^2\right]^{1/2}\right\} \left[\sum z_i^2\right]^{1/2}.$$

Dividindo pelo último fator e fazendo $n \to \infty$, obtemos a desigualdade desejada. ■

De posse da desigualdade de Minkowski, a verificação de que ℓ^2 é, de fato, um espaço vetorial real é imediata. Obviamente, este espaço não é dimensão finita. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\} \subset \ell^2$, em que e_i denota a sequência cujo i-ésimo termo é igual a 1 e os demais termos são nulos, é LI, de maneira que não podemos $\dim \ell^2 = n$ para nenhum $n \in \mathbb{N}$. Eis uma outra maneira de ver isso: considere o operador linear

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \ell^2 \\ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\mapsto T(x) = (x_2, x_3, \ldots). \end{aligned}$$

Este operador é injetivo, pois dada qualquer sequência $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2$, temos que $T(x) = y$, em que $x = (0, y_1, y_2, \ldots)$, mas não é injetivo, pois $T((1, 0, 0, \ldots)) = 0$. Se ℓ^2 tivesse dimensão finita, isso violaria o Corolário 2.15.

A aplicação

$$\begin{aligned} N : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto N(x) := \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_i) \in \ell^2, \end{aligned}$$

é uma norma em ℓ^2, isto é, satisfaz as seguintes condições:

N1. $N(x) \geq 0$ e $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

N3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$,

quaisquer que sejam $x, y \in \ell^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Empregaremos a seguinte notação: $N(x) = ||x||_2$. Note que condição (N3) é precisamente a desigualdade de Minkowski. O par $(\ell^2, ||\cdot||_2)$ é dito um *espaço vetorial normado.*

A norma $||\cdot||_2$ induz uma noção de *distância* (ou uma *métrica)* entre vetores de ℓ^2. Mais precisamente, é bem-definida a seguinte

$$d(x,y) = ||x-y||_2.$$

Munido desta métrica induzida pela norma, ℓ^2 é um *espaço métrico completo*, razão pela qual dizemos que $(\ell^2, ||\cdot||_2)$ é dito um *espaço de Banach.*

Finalmente, podemos ainda considerar a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \beta : \ell^2 \times \ell^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \beta(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \end{aligned}$$

a qual constitui um *produto interno* em ℓ^2 e relaciona-se com a norma $||\cdot||_2$ da seguinte maneira

$$||x-y||_2 = (\beta(x,y))^{1/2}.$$

Munido deste produto interno, ℓ^2 é um *espaço de Hilbert.* Como não objetivamos neste trabalho adentrar a Análise Funcional, não daremos mais detalhes, os quais o leitor pode encontrar, por exemplo, em [10].

Antes, contudo, de encerrarmos esta seção, precisamos fazer menção a um outro espaço de Banach (mas não de Hilbert) que se fará necessário no Capítulo 3. Trata-se do espaço ℓ^1 definido como

$$\ell^1 := \left\{ x = (x_i) : x_i \in \mathbb{R}\, \forall\, i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty \right\}.$$

Este é também um espaço vetorial, fato que se deve à validade da desigualdade de Minkowski trocando-se 2 por 1 e x_i^2 por $|x_i|$. A norma que faz deste espaço um espaço de Banach é

$$||x||_1 := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

3 Problemas e soluções

Nesta seção, apresentaremos os problemas, acompanhados de soluções, relacionados à matriz de Hilbert listados em [5].

3.1 Problemas

A matriz infinita de Hilbert H e a matriz de Hilbert de ordem finita $n \times n$ H_n são, respectivamente,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{4} & & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & & & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

A notação $\|T\|$ refere-se à norma de um operador linear sobre o espaço de Hilbert ℓ^2. Assim, se um operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ tem a representação matricial $[\tau_{ij}]$, então a norma de T (isto é, a norma de $[\tau_{ij}]$) é definida por

$$\|T\| := \sup \left\{ \left(\sum_i \left| \sum_j \tau_{ij}\alpha_j \right|^2 \right)^{1/2} : \sum |\alpha_j|^2 \leq 1 \right\}.$$

O seguinte fato elementar é bastante útil: se $T = [\tau_{ij}]$ e $S = [\sigma_{ij}]$ com $0 \leq \sigma_{ij} \leq \tau_{ij}$, então $\|S\| \leq \|T\|$. Com efeito, note inicialmente que o supremo que define a norma de um operador S pode ser obtido a partir do conjunto de todas as sequências com todas entradas não negativas, uma vez que

$$||Sx||_2 \leq ||S(|x|)||_2,$$

em que $|x|$ denota a sequência $(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$. Representemos por ℓ_2^+ o conjunto de tais sequências. Fixe $i \in \mathbb{N}$. Para toda sequência $x = (x_n) \in \ell_2^+$, pelo teorema multinomial, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} x_j\right)^2 &= \sum_{\substack{k_1+k_2=2\\ 0\le k_1\le k_2}} \binom{2}{k_1, k_2} \prod_{r,s=1}^{m} \sigma_{ir}^{k_1} x_r^{k_1} \sigma_{is}^{k_2} x_s^{k_2} \\
&\le \sum_{\substack{k_1+k_2=2\\ k_1\le k_2}} \binom{2}{k_1, k_2} \prod_{r,s=1}^{m} \tau_{ir}^{k_1} x_r^{k_1} \tau_{is}^{k_2} x_s^{k_2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \tau_{ij} x_j\right)^2 .
\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_j \sigma_{ij} x_j\right)^2 \le \left(\sum_j \tau_{ij} x_j\right)^2 .$$

Daí, somando em $i = 1, 2, \ldots$, segue-se que

$$\sum_i \left(\sum_j \sigma_{ij} x_j\right)^2 \le \sum_i \left(\sum_j \tau_{ij} x_j\right)^2 .$$

Como isso acontece para toda sequência $x = (x_n) \in \ell_2^+$, inferimos que $\|S\| \le \|T\|$.

I. Invertibilidade. Calculando, $H_1^{-1} = 1$,

$$H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}, \quad H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ -30 & -180 & 180 \end{bmatrix},$$

não podemos deixar de nos perguntarmos o que acontece no caso geral.

PROBLEMA: Escreva explicitamente a inversa da matriz de Hilbert H_n de ordem n.

Pode ser instrutivo expor o que se tem medo de perguntar:

(a) Sendo cada entrada de H_n o inverso de um número inteiro, por algum tipo de coincidência será verdade cada entrada de H_n^{-1} é um número inteiro?

(b) Em particular, por que $\det H_n$ é o inverso de um número inteiro?

(c) Do fato de cada entrada de H_n ser um número real positivo, segue-se que H_n^{-1} é da forma $[\beta_{ij}]$ com $(-1)^{i+j}\beta_{ij} \geq 0$ para todos i, j?

(d) Cientes de que H_n é uma *matriz de Hankel* (isto é, $H_n = [\alpha_{ij}]$ com $\alpha_{ij} = \alpha_{pq}$ sempre que $i + j = p + q$), acaso devemos esperar algum padrão similiar para as entradas H_n^{-1}?

II. Inversa Formal. Dispondo de uma expressão tratável para cada H_n^{-1} em mãos, o quão longe estamos de encontrar H^{-1}?

Nesta seção, a notação $\sum$ é usada somente para soma sequencial – não é exigida convergência absoluta. Há três propriedades intrínsecas referentes a cada matriz infinita $T = [\tau_{ij}]$: T é dita *formalmente injetiva* se a sequência trivial (θ_j) é a única sequência satisfazendo $\sum_j \tau_{ij}\theta_j = 0$ para cada i; T é dita *formalmente sobrejetiva* se para cada sequência (α_j) existe uma sequência (β_j) tal que $\sum_j \tau_{ij}\alpha_j = \beta_i$ para cada i; $S = [\sigma_{ij}]$ é chamada de *inversa formal* de T se os produtos formais TS e ST são definidos e iguais a I, isto é,

$$\sum_k \tau_{ik}\sigma_{kj} = \sum_k \sigma_{ik}\tau_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Como a multiplicação formal de matrizes infinitas não é associativa, não há correlação efetiva entre essas três propriedades.

PROBLEMA:

(1) A matriz infinita de Hilbert H é formalmente injetiva?

(2) H é formalmente sobrejetiva?

(3) H tem uma inversa formal?

III. Positividade. Se $T = [\tau_{ij}]$ é uma matriz com $\tau_{ij} \geq 0$ e r é um número real, então $T^{[r]}$ denota a matriz $[\tau_{ij}^r]$.

PROBLEMA: Mostre que $H_n^{[r]}$ é positiva para todo número real $r \in (0, +\infty)$.

Observe que, em geral, T positiva não necessariamente implica $T^{[r]}0$ positiva. Por exemplo, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é positiva, mas $T^{[1/2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^{1/2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ não o é.

IV. Fatoração. Em vista da positividade da matriz infinita de Hilbert, Paul Halmos indagou: É possível escrever explicitamente $H = B^2$ com B positiva? Esta questão parece muito assustadora – aparentemente, resolvê-la envolve encontrar a decomposição espectral de H. Contudo, há um problema mais maleável.

PROBLEMA: Escreva explicitamente $H = BB^T$ onde B é triangular inferior (isto é, $B = [\beta_{ij}]_{1 \leq i,j < \infty}$ com $\beta_{ij} = 0$ sempre que $i < j$).

(Observe que tal B é única se, além disso, todas as entradas diagonais de B forem números reais positivos.)

Existem algumas recompensas para a fatoração triangular:

(a) Seja $B_n = [\beta_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ o bloco $n \times n$ superior esquerdo de B. Então segue-se que $H_n = B_n B_n^T$. Assim, um procedimento indutivo para procurar B é admissível.

(b) Além disso, $\det H_n = |\det \ B_n|^2$ é completamente determinado pelas entradas diagonais de B.

(c) Devido à sua estrutura muito maleável, cada matriz infinita triangular inferior com entradas diagonais não nulas admite sempre uma inversa formal que também é triangular inferior. Assim, seja C a inverso formal de B. Então à expressão abstrata $C^T C = H^{-1}$ podemos dar o seguinte sentido: Se $Av = w$, então $C^T(Cw) = v$ – as manipulações matriciais formais para Cw e $C^T(Cw)$ pode ser efetuadas mesmo que o produto $C^T C$ da matriz regular não esteja definido.

V. Companheira. Uma companheira leal da matriz de Hilbert é a matriz

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad L_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

cujas entradas estão dispostas em um padrão em forma de L invertido.

Observe que L (ou L_n) também é um conjunto de inversos de inteiros positivos. Além de semelhança externa, L (ou L_n) também goza de todas as propriedades de A (ou A_n) apresentadas nos problemas precedentes. Notadamente, L admite uma fatoração triangular $L = CC^T$, em que C é a matriz infinita de Cèsaro,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

É com muito gosto que chamamos a companheira L para provar que $H : \ell^2 \to \ell^2$ é um operador limitado.

PROBLEMA:

(1) Observe que $I - (I - C)(I - C)^T$ é positiva.

(2) Prove que $\|A\| \leq \|L\| \leq 4$

Aparentemente, esse problema fornece a maneira elementar mais rápida de mostrar que H é um operador.

VI. Hereditariedade. A descendente imediata da matriz infinita de Hilbert H é

$$H' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{4} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

que compartilhou o nome *matriz de Hilbert* na literatura.

Sem dúvida, H' merece o título de matriz de Hilbert porque H' realmente carrega toda a hereditariedade.

PROBLEMA: Mostre que H e H' são unitariamente equivalentes (isto é, existe um operador unitário U tal que $A = U^* H' U$, em que U^* denota a transposta conjugada de U).

Aparentemente, é surpreendente que (a) as entradas H' são menores que as entradas correspondentes de H, e (b) H' é uma parte própria de H – a primeira linha (ou a primeira coluna) de H foi apagada; no entanto, verifica-se que H' é unitariamente equivalente a H.

VII. Perturbação compacta. Muitos descendentes da matriz de Hilbert infinita H podem ser obtidos simplesmente apagando as primeiras p_1 linhas e as primeiras p_2 colunas de H. Assim, existem infinitas matrizes de Hankel

$$H(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{q+1} & \frac{1}{q+2} & \frac{1}{q+3} & \cdots \\ \frac{1}{q+2} & \frac{1}{q+3} & & \\ \frac{1}{q+3} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

com$q = p_1 + p_2$ sendo qualquer inteiro não negativo. Em particular, $H(0) = H, H(1) = H'$.

É um prazer noticiar que todos esses descendentes são *essencialmente os mesmos* (isto é, a diferença de quaisquer dois deles é um operador compacto). Seja $T_n = [\tau_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ o bloco superior esquerdo $n \times n$ de $T = [\tau_{ij}]_{1 \leq i,j < \infty}$; T_n pode ser considerada uma matriz infinita $[\alpha_{ij}]_{1 \leq i,j < \infty}$ com

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} & \text{se } i \leq n \text{ e } j \leq n, \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Uma das muitas definições equivalentes entre si diz que T é *compacto* se $\lim_{n \to \infty} \|T - T_n\| = 0$; T é dito *classe-traço* se a soma das entradas da diagonal principal de $(T^*T)^{1/2}$ é finita. As seguintes inclusões são bem conhecidas

$$\{\text{operadores classe-traço}\} \subset \{\text{operadores compactos}\} \subset \{\text{operadores limitados}\}$$

em que $\subset$ representa uma inclusão própria como uma subvariedade linear.

PROBLEMA:

(1) Mostre que H não é um operador compacto.

(2) Mostre que $H - H(q)$ é um operador classe-traço.

VIII. A receita de Euler. Existem muitas maneiras possíveis de gerar π, mas é impressionante obter π a partir da fórmula de Euler

$$\pi^2/6 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots.$$

Um conjunto ordenado enumerável Π é chamado um *vetor de Euler* se Π, como um conjunto desordenado, é o mesmo que $\{0\} \cup \{1/k : x \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ e, além disso, cada elemento não nulo $1/k$ ocorre exatamente três vezes em Π. Pela Fórmula de Euler, segue-se imediatamente que cada vetor de Euler tem norma ℓ^2 igual a π.

Agora, recorde que uma matriz T_1 é uma *dilatação* de uma matriz T_0 se T_1 pode ser escrita na forma $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T_0 \end{bmatrix}$. Em outras palavras, se $\mathcal{H}_0$ é um subespaço de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e P é a projeção ortogonal de $\mathcal{H}_1$ sobre $\mathcal{H}_0$, e se $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$, $T_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ são operadores satisfazendo $PT_1\big|_{|\mathcal{H}_0}$, então T_1 é chamado uma *dilatação* de T_0.

PROBLEMA: Dilate a matriz de Hilbert infinita H (ou sua prole imediata H') para uma matriz simétrica real T tal que cada vetor coluna de T seja um vetor de Euler e, além disso, quaisquer dois vetores-coluna de T sejam ortogonais um ao outro. Consequentemente, $T^2 = \pi^2 I$ e $\|T\| = \pi$, donde $\|A\| \leq \|T\| = \pi$.

IX. π novamente. Um parente próximo da matriz de Hilbert de ordem n é

$$Z_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & 0 & \\ \frac{1}{3} & & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & & \cdots & o \end{bmatrix},$$

uma matriz de Hankel de ordem finita com todas as entradas nulas abaixo da diagonal secundária. Assim, "analogamente", existe um parente correspondente da matriz de Hilbert infinita H? Resposta: A própria H (plausível, mas não convincente?). Em outras palavras, a contraparte de dimensão infinita de Z_n deveria ser A (ainda uma resposta controversa?).

De qualquer forma, há uma conexão interessante entre as igualdades $\pi = 2 \arcsin 1$ e $\|A\| = \lim_{n\to\infty} \|Z_n\|$ (em vez de $\|A\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|$).

PROBLEMA:

(1) Mostre que

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \{(1k)^{-1/2} + (2(k-1))^{-1/2} + \ldots + (k1)^{-1/2}\}.$$

(2) Use o item (1) ou outros para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \|Z_n\| \geq \pi$.

A combinação dos resultados dos Problemas VIII e IX trás o seguinte deleitante fato $\|A\| = \pi$.

X. Duas dilatações naturais. A matriz de Hilbert H é uma "matriz de Hankel infinita num único sentido". Em contraste, existe uma família de "matrizes de Hankel bidirecionais infinitas" da forma

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}
 & & \vdots & & \iddots \\
 & & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 \\
 & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\
\hline
 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\iddots & & & \vdots &
\end{array}\right]$$

Duas destas matrizes surgem como dilatações naturais de H: a primeira é denotada por $A^{\#}$ com

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0, \\ 1/k & \text{se } k \text{ é um inteiro não nulo.} \end{cases};$$

a segunda é denotada por $A^{\dagger}$ com

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ é um inteiro não positivo,} \\ 1/k & \text{se } k \text{ é um inteiro positivo.} \end{cases}$$

PROBLEMA:

(1) Mostre que $\|A^{\#}\| = \pi$.

(2) Mostre que $\|A^{\dagger}\| = \infty$.

Por (1), segue-se novamente que $\|A\| \leq \|A^{\#}\| = \pi$. Aparentemente, esta é a maneira mais simples de mostrar $\|A\| \leq \pi$ (compare aos problemas V e VIII).

A combinação de (1) e (2) trás um resultado extremamente fascinante: embora $A^{\dagger}$ seja uma parte triangular inferior direita de $A^{\#}$, acontece que $A^{\dagger}$ explode, enquanto $A^{\#}$ permanece limitada.

Alternativamente, podemos reescrever

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} -A & B^* \\ B & A \end{bmatrix}, \quad A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & A \end{bmatrix},$$

em que B e B_0 são matrizes infinitas de Toeplitz num sentido unilateral

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \cdots \end{bmatrix}.$$

Segue-se, então, que $|B\| \leq \|A^{\#}\| < \infty$ e $|B_0\| = \|A^{\dagger}\| = \infty$, embora B_0 seja uma parte triangular inferior esquerda de B.

3.2 Soluções

I. Solução. Seja

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j-1)\begin{pmatrix} n+i-1 \\ n-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+j-1 \\ n-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix}^2.$$

Um cálculo direto, mas mais trabalhoso conduzindo a $[\alpha_{ij}] = H_n^{-1}$ pode ser justificado por meio de induções matemáticas (em i, em j, ou em n) ou alguns princípios gerais de contagem.

Alternativamente, pode ser mais fácil aplicar um fato conhecido:

$$det[1/(x_i + y_j)] = \Pi_{j>1}((x_j - x_i)(y_j - Y_i))/\Pi_{i,j}(x_i + y_j)$$

(veja [12]). Sejam $x_i = i - 1$, $y_j = j$. Segue-se imediatamente que

$$\det H_n = \frac{\{1!2!\cdots(n-1)!\}^4}{1!2!\cdots(2n-1)!}.$$

Da mesma forma, todos os cofatores de H_n podem ser calculados explicitamente. Portanto $H_n^{-1} = [\alpha_{ij}]$.

II. Solução. (1) Algumas observações são necessárias para reduzir cálculos tediosos.

(a) Se H anula uma sequência $(0, \ldots, 0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ cuja entrada líder não nula é 1, então $1 < |\gamma_1| + |\gamma_2| + \ldots$.

(b) Se H anula uma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, então H faz o mesmo com

$$(0, \alpha_1, \alpha_2/2, \alpha_3/3, \ldots).$$

(c) Se H anula uma sequência não trivial, então H também anula uma sequência não trivial de ℓ^1.

(d) Se H anula uma sequência $(0, \ldots, 0, 1, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ cuja entrada líder não nula é 1 na p-ésima posição, então H também anula uma sequência $(0, \ldots, 0, 0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ cuja entrada líder não nula é 1 na $(p+1)$-ésima posição e $|\gamma_j| \leq p|\beta_j|/(p+1)$ para todo j.

A afirmação (a) pode ser justificada como segue. Seja $x = (0, \ldots, 0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$, em que 1 ocupa a p-ésima posição, tal que $Hx = 0$. A desigualdade $1 < |\gamma_1| + |\gamma_2| + \ldots$ é óbvia se $\sum |\gamma_i| = +\infty$. Suponhamos, então, que $\sum |\gamma_i| < +\infty$. Note que $Hx = 0$ implica

$$\frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{p+i} = 0. \tag{3.1}$$

Sejam $P := \{i \in \mathbb{N} : \gamma_i \geq 0\}$ e $N := \{i \in \mathbb{N} : \gamma_i < 0\}$. Observe que necessariamente se deve ter $N \neq \emptyset$. Se $P \neq \emptyset$, então reescreva (3.1) da seguinte maneira:

$$1 + p\left(\sum_{i \in P} \frac{\gamma_i}{p+i}\right) = -p\left(\sum_{i \in N} \frac{\gamma_i}{p+i}\right). \tag{3.2}$$

É claro que 1 é menor do que o lado esquerdo de (3.2). Ademais, para $i \in N$, temos $-\gamma_i = |\gamma_i|$. Como $p < p + i$, para o lado direito de (3.2) temos

$$-p\left(\sum_{i \in N} \frac{\gamma_i}{p+i}\right) = \sum_{i \in N} \frac{p}{p+i}|\gamma_i| < \sum_{i \in N} |\gamma_i| < \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|.$$

Juntando todas estas informações, obtemos $1 < |\gamma_1| + |\gamma_2| + \ldots$. Se $P = \emptyset$, então

$$1 = -p\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{p+i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p}{p+i}|\gamma_i| < \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|,$$

que é novamente a desigualdade que queremos mostrar.

A afirmação (b) resulta do cálculo

$$\begin{aligned}
0 &= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j/(i+j-1) && \text{para cada } i = 1,2,3,\ldots \\
\Rightarrow 0 &= \tfrac{1}{i}\left[\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j/j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j/(i+j)\right] \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j/(j(i+j)) \\
&= \textstyle\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_{j-1}/((j-1)(i+j-1))
\end{aligned} \quad .$$

Para obter (c), aplique (b) três vezes. Se H anula uma sequência não trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, então H também anula

$$(0, 0, 0, \alpha_1/(1 \cdot 2 \cdot 3), \ldots, \alpha_j/(j(j+1)(j+2)), \ldots)$$

que é uma sequência de ℓ^1 em virtude do fato $\sum \alpha_j/j = 0$ (recorde a hipótese e o criério de comparação para séries numéricas!). A afirmação (d) é consequência imediata de (b).

Suponhamos agora que H não é formalmente injetiva. Então, por (c), podemos supor que H anula uma sequência $(0, \ldots, 0, 1, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ cujo coeficiente líder é 1 na posição p, e $|\beta_1| + |\beta_2| + \ldots < \infty$. Aplicando a afirmação (d) n vezes, vemos que H também anula uma sequência $(0, \ldots, 0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ cuja entrada líder é 1 na posição $(p+n)$ e $|\gamma_j| \leq p|\beta_j|/(p+n)$.Portanto

$$|\gamma_1| + |\gamma_2| + \ldots \leq p(|\beta_1| + |\beta_2| + \ldots)/(p+n) \leq 1$$

quando n é suficientemente grande. Mas, por (a), isto leva a uma contradição. Inferimos que H é formalmente injetiva.

(2) e (3). Observe que sempre que H transforma uma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ em $(1, 0, 0, \ldots)$, então H anula $(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$. Uma vez que A é formalmente injetiva, segue-se que a sequência $(1, 0, 0, \ldots)$ não está na imagem formal de A. Isto, obviamente, mostra que A não tem um inversa formal.

III. Solução. Seguiremos a solução dada em [2] para o problema mais geral de mostrar $C^{[r]}$ é positiva, em que C é uma matriz de Cauchy $C = [c_{ij}]$, $c_{ij} = 1/(\lambda_i + \lambda_j)$, para alguns números reais $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. A matriz de Hilbert finita H_n é um exemplo de uma matriz de Cauchy.

Escolhemos um número ϵ entre 0 e λ_1. Se $r > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j - \epsilon)^r} &= \left(\frac{\epsilon}{\lambda_i\lambda_j}\right)^r \frac{1}{\left(1 - \frac{(\lambda_i-\epsilon)(\lambda_j-\epsilon)}{\lambda_i\lambda_j}\right)^r} \\
&= \left(\frac{\epsilon}{\lambda_i\lambda_j}\right)^r \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_i - \epsilon)(\lambda_j - \epsilon)}{\lambda_i\lambda_j}\right)^m, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

em que os a_m's são os coeficientes na expansão em série

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (|x| < 1).$$

Todos os a_s's são positivos. Mais precisamente, $a_0 = 1$ e $a_m = r(r+1)\cdots(r+m+1)/m!$ para $m > 1$.

A matriz cujas entradas são $(\lambda_i - \epsilon)(\lambda_j - \epsilon)/\lambda_i\lambda_j$ é positiva semidefinida (pois seus menores principais são não negativos). Pelo teorema de Schur, também o são as potências de Hadamard de ordem m desta matriz, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto, a matriz cujas entradas são dadas pela série infinita em (3.3) é positiva semidefinida. A matriz cuja entrada (i, j) é $1/(\lambda_i\lambda)j)^r$ é positiva semidefinida (pela mesma razão que a anterior), donde, novamente pelo teorema de Schur, a matriz cujas entradas são dadas por (3.3) é positiva semidefinida. Fazendo $\epsilon \to 0$, inferimos que a potência de Hadamard de ordem r da matriz C, $C^{[r]}$, é positiva definida para cada $r > 0$.

Observação 3.1 *Choi [5] fornece a seguinte prova de que $H_n^{[r]}$ é positiva. Se x e r são números reais e $r > 0$, $|x| < 1$, então pela expansão binomial,*

$$(1-x)^{-r} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$

em que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = r$, e cada α_k é um número real positivo. Portanto

$$i + j - 1 = ij(1-x) \text{ com } x = (i-1)(j-1)/(ij) < 1,$$

e

$$(i+j-1)^{-r} = i^{-r}j^{-r}(1-x)^{-r} = \sum_k \alpha_k (i-1)^k (j-1)^k/(ij)^{r+k}.$$

Observe que $[\alpha_k(i-1)^k(j-1)^k/(ij)^{r+k}]_{i,j}$ é uma matriz positiva de posto 1. Segue-se que $A_n^{[r]} = [(i+j-1)^{-r}]_{i,j}$, como uma soma de matrizes positivas (ou, alternivamente, pelo teorema de Schur), também é positiva.

IV. Solução. Conforme indicado no texto, a construção recursiva de B é admissível. Assim, $H = BB^T$, onde $B = [\beta_{ij}]$ em que

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2j-1}((i-1)!)^2}{(i+j-1)!(i-j)!} & \text{se} \quad i \geq j, \\ 0 & \text{se} \quad i < j. \end{cases}$$

O algoritmo para obtenção dos blocos B_n é descrito em [13] (veja também [9]).

V. Solução. (1) É óbvio, visto que $I - (I - C)(I - C^T)$ é um operador diagonal com entradas diagonais positivas $1, 1/2, 1/3, \ldots$.

(2) Aqui a igualdade $\|TT^*\| = \|T\|^2$ para a norma de operadores sobre espaços de Hilbert será usada duas vezes. Primeiro, por (1),

$$\|I - C\|^2 = \|(I - C)(I - C)^*\| \leq 1;$$

isto é, $\|I - C\| \leq 1$, $\|C\| \leq 2$. A seguir,

$$\|L\| = \|CC^*\| = \|C\|^2 \leq 4.$$

Uma vez que cada entrada de A é um número real positivo menor do que ou igual à entrada correspondente de L, segue-se que

$$\|A\| \leq \|L\| \leq 4,$$

conforme desejado.

VI. Solução. Seja C a matriz infinita de Cèsaro como mencionado no Problema V. É fácil ver que tanto $C : \ell^2 \to \ell^2$ como $C^* : \ell^2 \to \ell^2$ são injetivas (logo, a imagem de C é densa). Em seguida, um cálculo direto garante que $CH = H'C$. O resto da prova é a reafirmação do seguinte lema que é conhecido por muitos estudiosos de operadores.

Lema 3.1 *Suponhamos que T, S e C são operadores limitados que satisfazem $CT = SC$. Se T e S são hermitianos e se C é injetivo e tem imagem densa, então T e S são unitariamente equivalentes.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [5].

VII. Solução. (1) Claramente, $H - H_n$ contém uma submatrix $n \times n$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2n+1} & \frac{1}{2n+2} & \cdots & \frac{1}{3n} \\ \frac{1}{2n+2} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{3n} & & \cdots & \frac{1}{4n-1} \end{bmatrix}$$

Seja Q a matriz $n \times n$ em que cada entrada é $1/n$. Então Q é uma projeção ortogonal (isto é, $Q = Q^* = Q^2$) e, assim, tem norma 1. Uma vez que Y é entrada a entrada maior do que $Q/4$, segue-se $\|H - H_n\| \geq \|Y\| \geq \|Q/4\| = 1/4$. Isso prova que H não é compacto.

(2) Primeiro, observe que $H(q)$ é positiva. Esta é uma consequência imediata do fato de que H (ou H') é uma dilatação de $H(q)$ se q é um inteiro par (ou ímpar). Em seguida, use a noção de produto de Hadamard: se $T = [\tau_{ij}]$ e $S = [\sigma_{ij}]$, então o produto de Hadamard é, por definição, $T * S = [\tau_{ij}\sigma_{ij}]$. É fato elementar que se T e $S0$ são positivos, então também o é $T * S$ (teorema de Schur). Temos que,

$$\begin{aligned} H - H(q) &= \left[\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{q+i+j-1}\right]_{ij} \\ &= \left[\frac{q}{(i+j-1)(q+i+j-1)}\right]_{ij} = qH * H(q). \end{aligned}$$

Como H e $H(q)$ são positivas, segue-se que $H * H(q)0$ também o é e, assim o mesmo vale para $H - H(q)0$. Finalmente, observe que a soma das entradas diagonais do operador positivo $H - H(q)$ é

$$\sum_j q/((2j-1)(q+2j-1)) < \infty.$$

Portanto, $H - H(q)$ é um operador *trace-class.*

VIII. Solução. Primeiro, defina uma função auxiliar $\Phi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(k,l) = \begin{cases} 1/k & \text{se } k \neq 0, l = 0 \\ 1/l & \text{se } k = 0, l \neq 0 \\ -1/k & \text{se } k = l \neq 0 \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

Segue-se que:

(a) Φ, considerado como um conjunto ordenado, é um vetor de Euler;

(b) se (k_0, l_0) é um par fixado de inteiros diferente de $(0,0)$, então

$$\sum_{k,l} \Phi(k,l)\Phi(k+k_0, l+l_0) = 0.$$

Em seguida, seja $\mathcal{H}_0$ o espaço de Hilbert ℓ^2 com a base ortonormal $\{f_1, f_2, \dots\}$ e seja $\mathcal{H}_1$ o espaço $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ com a base ortonormal $\{e_\mu : \mu \in \mathbb{Z}^2\}$. Mergulhe $\mathcal{H}_0$ em $\mathcal{H}_1$, identificando cada f_j com e_μ onde $\mu = (j,0)$. Assim, a matriz infinita de Hilbert H (ou H') representa um operador $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, enquanto duas matrizes $T = [\tau_{\mu\nu}], S = [\sigma_{\mu\nu}]$ $(\mu, \nu \in \mathbb{Z}^2)$ a serem construídas abaixo são operadores $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$. Agora, defina

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &= \Phi(k-1, l) \\ \sigma_{\mu\nu} &= \Phi(k,l) \end{aligned} \quad \text{se } \mu + \nu = (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Consequentemente, se i e j são números inteiros positivos e $\mu = (i,0), \nu = (j,0)$, então $\tau_{\mu\nu} = 1/(i+j-1), \sigma_{\mu\nu} = 1/(i+j)$; isto é, T é uma dilatação de H, e S é uma dilatação de H'. De (a) e (b), segue-se que cada vetor coluna de T – isto é, $(\tau_{\mu\nu})_\mu$ para cada ν fixo – é um vetor de Euler e quaisquer dois vetores coluna de T são ortogonais (resultado similar é válido para S).

IX. Solução. (1) $\sum_{j=0}^{k-1}(j(k-j))^{-1/2} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{j}{k}\left(1-\frac{j}{k}\right)\right)^{-1/2}$ é uma soma de Riemann para a função $(x(1-x))^{-1/2}$ em $(0,1)$. Portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}(j(k-j))^{-1/2} = \int_0^1 (x(1-x))^{-1/2} = 2 \text{ Arcsin } 1 = \pi.$$

(2) Seja v o vetor coluna $(1, 2^{-1/2}, \dots, n^{-1/2})$. Então

$$\|Z_n\| \geq (Z_n v, v)/\|v\|^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k/k\right) / \left(\sum_{k=1}^n 1/k\right)$$

em que $a_k = \sum_{j=0}^{k-1}(j(k-j))^{-1/2}$. Visto que $\lim_{k\to\infty} a_n = \pi$ (por (1)), segue-se por cálculo ordinário que $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n a_k/k\right)/\left(\sum_{k=1}^n 1/k\right) = \lim_{k\to\infty} a_k = \pi$. Logo, $\lim_{n\to\infty}\|Z_n\| \geq \pi$, como queríamos.

X.

Lema 3.2 *Sejam T e H matrizes infinitas bidirecionais da forma*

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & \vdots & & & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & & \\ & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \\ & & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \\ & & & \vdots & & \ddots \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & \vdots & & & \ddots \\ & & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \\ & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \\ \hline & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & & \\ \ddots & & & \vdots & & \end{array}\right].$$

Se $\alpha_k \geq 0$ para cada inteiro k, então $\|T\| = \|H\| = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k$.

Demonstração. Seja S_k a matriz na mesma forma que T com uns ao longo da k-ésima diagonal e zeros nos outros lugares. Então é óbvio que $\|S_k\| = 1$ e $\|T\| = \|\sum \alpha_k S_k\| \leq \sum \alpha_k$. Por outro lado, considere a matriz de Toeplitz $n \times n$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & & \\ \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha_{-n} & & & & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

(como uma submatriz de T) e o vetor coluna constante $v = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$. Então

$$\begin{aligned} \|T\| \geq & \ (Xv, v)/\|v\|^2 \\ = & \ \alpha_0 + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)(\alpha_1 + \alpha_{-1}) + \left(1 - \tfrac{2}{n}\right)(\alpha_2 + \alpha_{-2}) + \ldots + \tfrac{1}{n}(\alpha_n + \alpha_{-n}). \end{aligned}$$

Quando n tende ao infinito, o lado direito converge para $\sum \alpha_k$. Assim $\|T\| \geq \sum \alpha_k$. Portanto, a igualdade $\|T\| = \sum \alpha_k$ é verificada. ∎

A prova acima pode ser modificada de modo a produzir resultado análogo para H. Alternativamente, seja U a matriz unitária na mesma forma que H com uns ao longo da diagonal principal e zeros em toda parte. Então, segue-se que $T = HU$, e, assim, $\|T\| = \|H\|$, como desejado.

Solução. (1) A fórmula de Euler será usada duas vezes aqui. Primeiro, por cálculo direto $(A^{\#})^2$ está na mesma forma que T no Lema 3.2 com $\alpha_0 = \pi^2/3$ e $\alpha_k = 2/k^2$ se k é um inteiro não nulo. Como $A^{\#}$ é hermitiana, segue-se que

$$\|A^{\#}\|^2 = \|(A^{\#})^2\| = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k = \pi^2.$$

Portanto, $\|A^{\#}\| = \pi$, como queríamos.

(2) Segue-se do Lema 3.2.

4 Conclusão

O estudo da matriz de Hilbert finita possibilitou a revisão de diversos conceitos da Álgebra Linear, além de propiciar um contato muito frutuso com técnicas analíticas. O estudo da matriz de Hilbert infinita, por sua vez, se mostrou um excelente itinerário para, inspirando-nos em situações que ocorrem em dimensão finita, partirmos para um horizonte mais amplo, o da Análise Funcional. Embora neste trabalho tenhamos lidado apenas com operadores matriciais sobre espaços de dimensão infinita, isso já foi o bastante para percebermos as sutis questões inerentes ao desprendimento da representação de uma aplicação por meio de uma matriz finita.

Referências Bibliográficas

[1] Abraham Berman and Naomi Shaked-Monderer. *Completely Positive Matrices.* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., 2003.

[2] Rajendra Bhatia. *Infinitely Divisible Matrices.* The American Mathematical Monthly, Vol. 113, No. 03 (Mar., 2006), pp. 221-235.

[3] Rajendra Bhatia. *Positive definite matrices.* Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2007.

[4] Hamilton P. Bueno. *Álgebra Linear, Um Segundo Curso.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] Man-Duen Choi. *Tricks and Treats with the Hilbert Matrix.* The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 05 (May, 1983), pp. 301-312.

[6] Adilson Gonçalves e Rita M. L. de Souza. *Introdução à Álgebra Linear.* São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1977.

[7] Paul Halmos. *A Hilbert Space Problem Book.* 2nd. Edition. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1982.

[8] David Hilbert. *Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms.* Acta Mathematica, Springer Netherlands, Vol. 18 (1894), pp. 155-159. DOI: 10.1007/BF02418278.

[9] Sin Hitotumatu. *Cholesky Decomposition of the Hilbert Matrix.* Japan Journal of Applied Mathematics, 5 (1988), pp. 135-144.

[10] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[11] Serge Lang. *Linear Algebra.* 3rd. Edition. New York: Springer-Verlag, 1987.

[12] Allan Pinkus. *Totally Positive Matrices.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[13] L. Ridgway Scott. *Numerical Analysis.* Princeton: Princeton University Press, 2011.

[14] John Todd. *Computational Problems Concerning the Hilbert Matrix.* Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 65, No. 1, January-March, 1961.

[15] Albert Wilansky. *What infinite matrices can do.* Mathematics Magazine. Vol. 58, No. 5 (Nov., 1985), pp. 281-283.