UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

RENATO FERREIRA ORDONHO

UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE DE SITTER

Campina Grande - PB
Junho de 2018

RENATO FERREIRA ORDONHO

UM ESTUDO DA SOLUÇÃO DE DE SITTER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Campina Grande - PB
Junho de 2018

O65e Ordonho, Renato Ferreira.
Um estudo da solução de De Sitter [manuscrito] : / Renato Ferreira Ordonho. - 2018.
29 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva , Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Métrica. 2. Relatividade geral. 3. De Sitter.

21. ed. CDD 530.11

Elaborada por Giulianne Monteiro Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

RENATO FERREIRA ORDONHO

Um Estudo da Solução de De Sitter

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Aprovado em 25 de junho de 2018

Banca Examinadora

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva / UEPB
Orientador

Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos / UEPB
Examinador

Deusalete Câmara Vilar

Profa. Msc. Deusalete Câmara Vilar / UEPB
Examinadora

Aos Meus Pais.

A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.

Albert Eintein

Agradecimentos

Ao meu orientador professor Jean Spinelly pela dedicação em me ajudar não só no trabalho de conclusão de curso, mas também em todas as disciplinas por ele ministradas.

À minha família, em especial aos meus pais e minha avó por terem me dado apoio durante todos os anos da graduação. E ao meu primo Daniel Porto da Silva que é um irmão para mim.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram durante minha caminhada.

Aos meus colegas de curso, que tive o imenso prazer de conhece-los durante todos esses anos de graduação.

Conteúdo

Um estudo da solução de De sitter

Renato Ferreira Ordonho[1]

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo escrever a métrica de De Sitter. Para isto é preciso fazer de início uma breve discussão acerca da relatividade restrita mostrando seus postulados, as consequências que tais postulados trouxeram para o conceito de espaço que se tinha na época, e o seu significado, após tal discussão trazer os maiores trunfos e as maiores dificuldades enfrentadas pela relatividade geral desde a sua publicação até os dias atuais e enunciar as equações de campo de Einstein com e sem a a inserção da constante cosmológica. Além de uma breve explicação sobre a relatividade restrita e geral mostrar também as consequências desta teoria, tais como a curvatura do espaço-tempo e discutir sobre a relatividade em (2+1) dimensões para então chegar a solução de De Sitter. Após entender o que é a relatividade geral e as suas consequências para o espaço deve-se supor como seria o tensor métrico para tal solução. Calcular então as componentes do tensor de Ricci, aplicar nas relações para encontrar o escalar de Ricci e aplicar nas equações de campo os resultados para finalmente encontrar a métrica e o elemento de linha da solução de De Sitter. Verificar se a métrica de De Sitter descreve um espaço-tempo curvo ou não, para isto é preciso calcular todas as componentes do tensor de Riemann. Por fim analisar os resultados e as consequências de se inserir uma constante cosmológica nas equações de campo.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade Geral, Métrica, De Sitter.

1 Introdução

Desde 1905, quando Einstein publicou seu trabalho sobre a relatividade restrita, o mundo passou a presenciar o crescimento de uma teoria que vem ganhando cada vez mais força ao longo dos anos. Na verdade, após a publicação da relatividade restrita, Einsten

[1]Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

procurou desenvolver uma teoria ainda mais completa. Em 1915, finalmente apresenta a sua teoria finalizada, que hoje é conhecida como a teoria da Relatividade Geral (TRG). Apesar de ter sofrido várias críticas a TRG é, atualmente, uma das áreas mais importantes da física. a teoria da relatividade geral tornou-se um centro de atenção do ponto de vista dos campos de medida (CARMELI, 1982)

Um dos princípios que fundamentam a relatividade geral é o *princípio da equivalência*, o qual afirma que, localmente, um referencial inercial sujeito a um campo gravitacional é equivalente a um referencial acelerado sem campo. Sendo assim, é impossível distingui-los em qualquer experiência (EINSTEIN, 2000; KOGUT, 2001).

Baseado neste princípio, Einstein concluiu que a geometria do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e energia contida nele. E, de modo a formular isto matematicamente, dotou o espaço-tempo de uma estrutura métrica e assumiu que toda informação geométrica está contida em um objeto matemático chamado tensor métrico, o qual é solução das chamadas equações do campo de Einstein (LANDAU e LIFICHITZ, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

Embora o espaço-tempo da relatividade geral possua (3+1) dimensões, alguns autores têm investigado fenômenos físicos em (2+1) dimensões (SOURADEEP e SAHNI, 1992; GOTT e ALPERT, 1984; DESER et al, 1984; GIDDINGS e KUCHAR, 1984). Especificamente, a solução das equações de Einstein num espaço-tempo de (2+1) dimensões, que considera a constante cosmológica diferente de zero, foi obtida por de Sitter (BAÑADOS et al, 1992). A motivação para esse tipo de estudo é que, em tais dimensões, além de serem obtidos de uma maneira mais simples, os resultados mostram como a redução nas dimensões afeta um sistema físico.

O objetivo desse trabalho é deduzir a solução de De Sitter. Antes, porém, faremos uma breve abordagem sobre alguns aspectos das teorias restrita e geral da relatividade.

2 Relatividade Restrita

A teoria da relatividade restrita, publicada por Einstein em 1905, no trabalho intitulado "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", baseia-se em basicamente dois postulados fundamentais. O primeiro, conhecido por princípio da relatividade de Einstein, afirma que *As leis da física devem tomar a mesma forma para todos os observadores em referenciais inerciais*; enquanto que o segundo estabelece que *a velocidade da luz deve ter o mesmo valor quando medida por quaisquer observadores inercias.*

O segundo postulado pode ser observado através do seguinte experimento: Dois corpos A e B, onde B move-se com velocidade constante aproximando-se de A, medem o tempo que a luz leva para percorrer a distância entre eles e o tempo que a mesma leva para atravessar um tubo de um metro. De acordo com os conhecimentos clássicos, B espera que a luz chegue a ele com uma velocidade maior com que chegaria se os corpos estivessem em repouso, porém isso não acontece. De fato, A e B observam que a luz atravessa o tubo com a mesma velocidade. Agora B atinge uma velocidade muito maior para que consiga medir uma velocidade local diferente, mas é em vão. Após algum tempo, B atinge uma velocidade de 0,99c e nota que os sinais luminosos agora chegam azulados. B sabe que essa luz azul é referente a luz de altas frequências, fenômeno semelhante ao que acontece com o som quando o observador e a fonte se aproximam (deslocamento Doppler). Mas, apesar da luz azulada, a velocidade da luz continua a mesma. B então decide fazer o caminho contrário, afastando-se de A a mesma velocidade e percebe que a luz agora assume uma forma avermelhada, mas ainda com a mesma velocidade. Como uma última tentativa, B decide agora que irá tentar ultrapassar a velocidade da luz para que os sinais luminosos lançados por A não o atinjam. Ao tentar ultrapassar essa velocidade, B percebe que quanto mais perto chega da velocidade da luz, mais energia ele necessita para acelerar e, ao final do experimento, após consumir toda a energia disponível no mundo, ainda não é capaz de chegar à velocidade da luz. Então, ao que B pôde observar, aparentemente toda nova energia consumida é usada para criar mais massa e não para aumentar a sua velocidade e, depois de todo o trabalho feito por B, a velocidade da luz ainda possui o mesmo valor, isto é, 300.000 km/s.

Como consequência da invariância relativa a velocidade da luz, Einstein foi levado a interpretar que o espaço e o tempo variam de acordo com o estado de movimento do observador. Por exemplo, quando B se aproxima de A com uma velocidade muito alta, a distância medida por B contrai-se. Além dessa observação, o movimento de B possui um efeito sobre o tempo. Ou seja, quando B compara seu relógio com outros dois relógios sincronizados e em repouso em relação a A, seu relógio está atrasado em relação a estes. Sendo assim, a conclusão mais óbvia é que a sincronização dos relógios é um conceito relativo ao observador. De acordo com essa definição podemos entender também que o conceito de simultaneidade de modo absoluto não é mais válido. É possível entender também que o intervalo de tempo entre dois acontecimentos é mais curto para um observador que está vendo os dois acontecimentos ocorrerem no mesmo ponto do espaço. Esse tempo medido é chamado de "tempo próprio".

Dois acontecimentos físicos em diferentes pontos do espaço, que são simultâneos para um observador A não serão simultâneos para um observador B que se move com uma velocidade muito alta. Este caráter relativo da simultaneidade é consequência do valor finito da velocidade da luz. Este é um conceito fundamental da teoria da relatividade restrita. Caso a luz pudesse assumir um valor infinito o conceito de simultaneidade absoluta passaria a ser válido.

Agora o mundo físico é representado por um espaço de quatro dimensões, conhecido como espaço-tempo e representado por quatro coordenadas (x, y, z e t), onde t representa o instante e as demais coordenadas representam a localização no espaço. Como pode-se perceber, diferentes observadores utilizam diferentes coordenadas para o mesmo acontecimento. O conjunto de todos os acontecimentos da vida de um observador forma uma linha no espaço-tempo e é chamado de linha do Universo. Para observadores inerciais as linhas são geodésicas (linhas retas) deste espaço. Caso dois observadores se cruzem e tomem esse acontecimento como origem das coordenadas, teremos que a invariância da velocidade da luz no vácuo exige que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \ , \tag{1}$$

onde (x, y, z, t) e (x', y', z', t') são coordenadas do mesmo acontecimento para cada um dos observadores.

A geometria do espaço-tempo da relatividade restrita caracteriza-se pelo invariante fundamental:

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \ , \tag{2}$$

que é conhecido como uma distância entre dois pontos deste espaço-tempo a quatro dimensões, designado como intervalo do Universo. Porém, esta distância nem sempre é positiva como na geometria euclideana pois possui três sinais positivos e um negativo. Em dois acontecimentos em que a separação espacial é $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e a separação temporal é t, três situações diferentes podem ocorrer:

$$r^2 - c^2t^2 = 0 \ , \tag{3}$$

os acontecimentos formam um par do tipo-luz;

$$r^2 - c^2t^2 < 0 \ , \tag{4}$$

os dois acontecimentos formam um par do tipo-tempo;

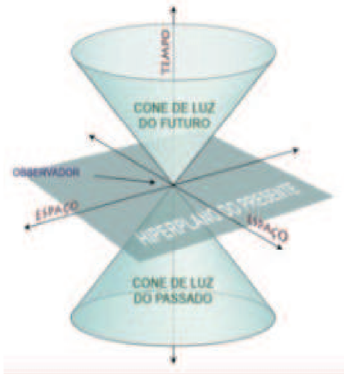
$$r^2 - c^2t^2 > 0 \ , \tag{5}$$

os dois acontecimentos formam um par do tipo-espaço.

Todos os pares de acontecimento que estão em uma relação de causa-efeito estão nas duas primeiras categorias. Nenhuma informação pode ser transmitida com uma velocidade maior que a da luz. Logo, dois acontecimentos que pertençam à terceira categoria não podem estar causalmente relacionados. O conjunto de acontecimentos que formam um par tipo-luz geram uma hipersuperfície a três dimensões a qual chamamos de cone de luz.

As linhas do universo das partículas que passam pela origem estão contidas no interior do cone de luz que, na relatividade restrita, possui a mesma estrutura em todos os pontos (como podemos ver na figura 1).

Figura 1: Cone de luz



$Fonte : https : //pt.wikipedia.org/wiki/Cone_{d}e_{l}uz$

A transformação de coordenadas que satisfaz a invariância do intervalo do Universo é conhecida como transformações de lorentz.

3 Teoria da Relatividade Geral

Assim como o espaço euclidiano, o espaço-tempo na relatividade restrita é um espaço plano. Contudo, na teoria da relatividade geral, quando Einstein tenta compatibilizar a interação gravitacional com as ideias da relatividade restrita, acaba encontrando como saída renunciar ao espaço-tempo plano.

Nesta seção, discutiremos a questão do espaço-tempo curvo da TRG, apresentaremos as equações de Einstein e faremos uma abordagem sobre o desenvolvimento da teoria desde a publicação até os dias atuais.

3.1 O espaço-tempo curvo da Relatividade Geral

Em um campo gravitacional todos os corpos, independente de massa e sua constituição, sofrem os efeitos desse campo de mesma forma, percorrendo a mesma trajetória. Este fato sugere que o campo gravitacional não é uma força, mas sim uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

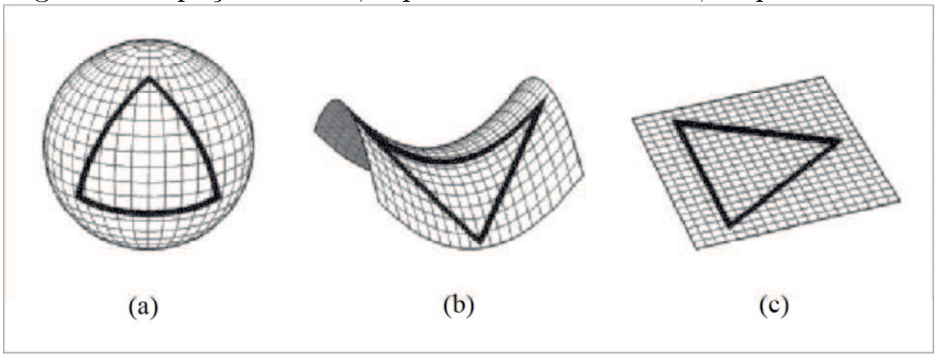
A ideia de Einstein é que: Os observadores em queda livre identificam-se com os observadores inerciais da relatividade restrita em relação às suas observações (Princípio da equivalência). Contudo, diferente da relatividade restrita, dois corpos em queda livre à superfície da Terra não possuem uma velocidade uniforme entre si. Fato este que pode ser facilmente identificado pois os corpos devem convergir para o centro de massa da Terra. Apesar de que, localmente, as trajetórias são quase paralelas. Para justificar as diferenças em relação a relatividade restrita Einstein identifica que a gravitação gera uma curvatura no espaço-tempo. Desse modo, as linhas do universo dos observadores em queda livre neste espaço curvo não serão mais linhas retas e sim as linhas mais diretas que o espaço-tempo curvo admite (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1982).

É necessário entender o que é a curvatura do espaço. De início, podemos definir o espaço vazio como um espaço sem matéria, mas com propriedades definidas entre seus pontos. Na relatividade os pontos do espaço-tempo são acontecimentos físicos que ocorreram em um certo local e em um determinado tempo. Na ausência de um campo gravitacional esse espaço-tempo é simplesmente o espaço-tempo contínuo com quatro dimensões da relatividade restrita.

Para distinguir o espaço euclidiano dos outros espaços é necessário utilizar o axioma das paralelas (por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar somente uma reta paralela a esta reta). No espaço euclidiano o perímetro de uma circunferência é igual a π vezes o seu diâmetro: $C = \pi \times D$, e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos: $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Dentre todos os espaços não-euclidianos apenas dois também são uniformes (homogêneos e isotrópicos). O primeiro possui uma geometria hiperbólica (descoberto por Johann Gauss, Nikolai Lobachevsky e Janos Bolyai); O segundo possui uma geometria esférica (descoberto por Georg Riemann) (ISLAM, 1992).

Os três espaços diferenciam entre si pelos seguintes postulados: (1) No espaço hiperbólico, por um dado ponto passam muitas geodésicas paralelas a uma geodésica dada; (2) no espaço euclidiano, por um dado ponto passa apenas uma geodésica paralela a uma geodésica dada; (3) no espaço esférico, não existe nenhuma geodésica paralela a uma geodésica dada. Tais espaços podem ser vistos através da Figura 2.

Figura 2: Espaço Esférico, hiperbólico e euclidiano, respectivamente



Fonte: $http://principo.org/lista-de-figuras-3-lista-de-tabelas-7-introduco-8.html?page=g$

Um universo homogêneo e isotrópico pode ser descrito através da métrica de Friedmann-Robertson-Walker, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a\left(t\right)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{6}$$

onde K representa a curvatura. Do ponto de vista da curvatura, os três espaços uniformes se distinguem porque: O esférico tem curvatura positiva ($K > 0$), o euclidiano tem curvatura nula ($K = 0$) e o hiperbólico tem curvatura negativa ($K < 0$) (ISLAM, 1992). No caso dos espaços bi-dimensionais a curvatura é dada por $K = \pm 1/R^2$, onde R é o raio de curvatura. No caso geral uma superfície tem dois raios R_1 e R_2 medidos em cada ponto, em direções perpendiculares entre si; mas se a superfície for uniforme $R_1 = R_2$, sendo assim existe apenas um raio de curvatura.

Até agora foram mostrados apenas espaços bi-dimensionais para melhor entendimento da curvatura, porém o conceito pode ser extendido para espaços de dimensão qualquer.

Como na relatividade temos um espaço quadri-dimensional a curvatura possui vinte componentes que, na relatividade restrita, são todas nulas. A curvatura do espaço-tempo na relatividade deve ser entendida como uma propriedade geométrica intríseca.

A geometria euclideana era utilizada pelos físicos no espaço vazio do sistema solar para determinar as trajetórias dos planetas em torno do Sol, contudo, não servia para explicar o avanço do periélio de Mercúrio, de 43 segundos de arco por século, que representava uma deformação da órbita. Embora pequena essa deformação permaneceu um mistério até que, no início do século XX, Einstein completou a sua teoria da relatividade geral. A proposta de Einstein foi identificar a gravidade como uma curvatura no espaço. Diferente da interpretação de Newton sobre a gravidade, o Sol deforma o espaço ao seu redor e os planetas passam a percorrer as geodésicas. Caminhos estes que são muito similares aos caminhos determinados pela gravitação de Newton. Porém, na relatividade geral, mercúrio sofre um avanço de 43 segundos de arco por século. Efeito que ocorre em todos os planetas, porém não tão significativo.

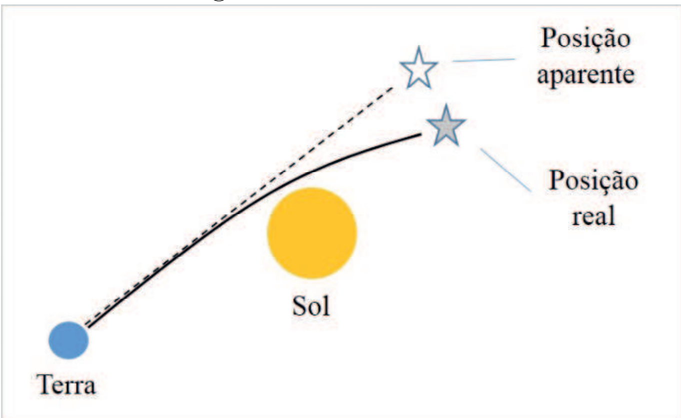
Uma das características mais revolucionárias da relatividade geral é o uso essencial que faz do espaço curvo (na verdade, do espaço-tempo curvo) (RINDLER, 2006). Como o Sol deforma o espaço à sua volta, é normal que também tenha uma influência sobre a luz das estrelas que se encontram na direção do Sol (Figura 3)

Outra forma da gravidade influenciar a luz é mudando a sua frequência. Para observar tal mudança, devemos considerar dois átomos idênticos, A e B que se encontram em repouso em um certo campo gravitacional. O átomo A emite uma luz cuja frequência apresenta um deslocamento para o vermelho, dado por:

$$\frac{\nu_e - \nu_n}{\nu_n} = \frac{\Delta\nu}{\nu_n} = \frac{\Delta U}{c^2} \ , \tag{7}$$

para um observador colocado junto com B e sendo ΔU a diferença de potencial gravitacional entre A e B. Identificando os átomos com relógios atômicos e a frequência da luz emitida com a frequência de referência desses relógios. Sempre que o relógio de A avança um segundo, A envia um sinal luminoso para B. Segundo a equação (7) os sinais luminosos emitidos por A chegarão a B com uma frequência menor que de B. Como não existe perda de informação de A para B concluimos que o relógio A avança mais lentamente que o relógio B. Em suma, o que podemos concluir é que os relógios movem-se mais lentamente na vizinhança dos campos gravitacionais intensos (CRAWFORD, 1995).

Figura 3: Desvio da luz.



Fonte: O autor

3.2 Equações de Einstein

Enquanto a teoria da gravitação de Newton assume a existência de apenas um potencial, a TRG admite a existência de 10 potenciais. Estes dez potenciais são definidos como as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo curvo riemanniano[1].
Naturalmente, as equações diferenciais satisfeitas pelos objetos $g_{\mu\nu}$, devem, em um certo limite, recair na equação do campo newtoniano, isto é, na equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi(x) = 4\pi G\rho(x) \ , \tag{8}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton $(6,67\times10^{-8}\ \mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{s}^{-2})$ e $\rho(x)$ é a densidade de massa produzida pelo campo gravitacional.
Uma vez que a componente 00 do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, é proporcional a densidade de massa, Einstein admitiu que o lado direito da equações de campo deveria

[1]As 10 componentes ao invés de 16 é devido à simetria do tensor métrico.

ser proporcional a este tensor. Além disso, como o tensor de Ricci, o qual é definido por[2]

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \ , \tag{9}$$

é de segunda ordem e possui derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$, assumiu que o outro lado das equações deveria ser construido a partir desse tensor. Fazendo isso, após dois anos de tentativas, Einstein, com algumas contribuições de Hilbert, chegou às seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \ , \tag{10}$$

onde

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ , \tag{11}$$

é o escalar de Ricci e $\kappa = 8\pi G/c^4$. Vale salientar que o valor de κ é obtido quando impomos que, no limite de campo fraco, a TRG deve corresponder à teoria da gravitação newtoniana.

As equações (10), conhecidadas como as equações do campo de Einstein, constituem um conjunto de 10 equações diferenciais parciais não lineares em $g_{\mu\nu}$. Elas nos permitem obter a métrica quando conhecemos o tensor energia-momentum do sistema físico em questão.

3.3 TRG: Da publicação até os dias atuais

Enquanto preparava a sua revisão sobre a teoria da relatividade restrita, em 1907, Einstein começou a pensar em uma forma de conciliar a teoria de gravitação Newtoniana com a sua nova teoria. Nos anos seguintes, continuou a pesquisar sozinho, até que, em 1913, Marcel Grossmann o ajudou a compreender a geometria riemanniana. Essa colaboração resultou em dois artigos que foram publicados em 1915. Porém, a forma final da teoria foi construida por Einstein e publicada, ainda em 1915, na revista *Berliner Berichte*, num conjunto de quatro artigos.

---

[2] $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\rho}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\rho}$ é o tensor de Riemman, sendo $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$ os símbolos de Christoffel.

Em 1919, durante um eclipse solar, o encurvamento dos raios luminosos rasando o Sol foram medidos e, como esperado, os dados concordaram com a teoria da relatividade geral de Einstein. A relatividade geral ganha força em todo o mundo e, apesar de vários pesquisadores apresentarem uma certa resistência à teoria, é considerada por alguns como uma teoria belíssima.

Apesar de toda divulgação e devido ao investimento matemático que a teoria pedia, a teoria passou a ser conhecida como uma teoria de difícil acesso. Este fato explica parte do isolamento da relatividade geral até o seu renascimento.

Os anos que estão entre o eclipse de 1919 e o experimento de Pound e Rebka em 1960 são marcados apenas por várias tentativas sem sucesso de inserir a relatividade no campo da cosmologia, ou resolver outros problemas que não fossem o avanço do periélio de Mercúrio, o deslocamento das riscas espectrais e o encurvamento dos raios luminosos. E, apesar de revolucionar o campo da gravitação, a relatividade não tinha um campo próprio.

Grande parte dos problemas referentes a dificuldade de se comprovar a teoria se dá ao fato de que a tecnologia, na época que a relatividade geral foi proposta por Einstein, ainda dispunha de várias limitações.

Anos após ter sido considerada uma teoria de difícil acesso e sem aplicação aos outros domínios da física a relatividade, nos anos 60, finalmente torna-se uma teoria bastante popular. Esse êxito enorme se dá à utilização da teoria nas áreas da Astrofísica e Cosmologia. Além disso, ainda em 1960 a descoberta dos quasares catapultou a relatividade geral para a Astronomia.

Em 1929 Edwin Hubble tinha anunciado que as galáxias distantes se afastam com velocidades proporcionais às suas distâncias. Tal deslocamento para o vermelho é conhecido e interpretado até hoje como uma expansão do universo. Os quasares possuem grandes deslocamentos para o vermelho, fato esse que nos mostra que eles se afastam de nós com grandes velocidades.

Os *quasares* são objetos extremamente brilhantes, apesar da sua distância. A forma para explicar tal brilho é admitir que os quasares são objetos que possuem campos gravitacionais extraordinariamente intensos, o que pode implicar em concentrações muito grandes de massa, talvez com milhões de vezes a massa solar. Com a descoberta dos quasares dá-se início a uma nova área da física, a Astrofísica Relativista.

Tempos depois, em 1967, os astrônomos da Universidade de Cambridge descobriram um novo tipo de estrela, chamada *pulsar* devido à emissão regular de impulsos de rádio. Pensa-se que os pulsares são estrelas tão densas que os seus diâmetros não ultrapassam dezenas de quilômetros. Estas estrelas são tão compactas que destroem seus núcleos reduzindo-os a um mar de nêutrons e, do que se conhece de matéria nuclear, as mesmas estão à beira de um acidente catastrófico. A gravidade é tão grande que, se uma estrela de nêutrons possui uma massa maior que três massas solares, ela é capaz de colapsar em fração de segundos e desaparecer do Universo.

A explicação deste fenômeno se encontra na violenta curvatura do espaço que resulta em um campo gravitacional bastante intenso. Este campo gravitacional pode crescer até que, em um determinado momento, ele é forte o suficiente para encurvar os raios luminosos e retê-los em torno da estrela. Quando nem a própria luz é capaz de escapar do campo gravitacional desta estrela ela transforma-se em um *buraco negro*.

Apesar dos buracos negros serem uma parte fascinante foram mal compreendidos por muito tempo devido a oposição do astrofísico britânico Arthur S. Eddington, principalmente depois que Chandrasekhar desenvolveu sua teoria das anãs brancas e mostrou que tais estrelas não poderiam passar de $1,4$ massas solares. Eddington percebeu que as estrelas com massas suficientes não teriam outra escolha se não colapsar e tal colapso causaria uma singularidade (um ponto no espaço que a curvatura é infinita).

Em 1933 J. R. Oppenheimer e H. Snyder calcularam o colapso de um fluido esfericamente simétrico e sem pressão utilizando as equações da relatividade geral e constataram que não há nada nestas equações que impeçam o colapso e a formação do buraco negro. Apesar destes resultados, a ideia dos buracos negros ficou adormecida até que Roy P.

Kerr apresentou seu trabalho no primeiro simpósio do Texas em Astrofísica Relativista. Kerr recorreu a algumas técnicas sofisticadas da matemática para explorar os princípios de simetria na pesquisa de novas soluções das equações de Einstein.

Na época que Kerr mostrou seu trabalho poucos conseguiram acompanhá-lo devido a complexidade matemática envolvida, mas hoje sabe-se que a solução de Kerr é a única solução para um buraco negro em rotação e, a solução de Schwarzschild, é um caso particular da solução de Kerr quando não há rotação.

Nos anos 70 e 80 ressurge o paradigma da unificação da física, tão sonhado por Einstein nos últimos anos da sua vida, e que dominou muitos anos de desenvolvimentos teóricos ultimamente. Embora ainda não se tenha conseguido um verdadeiro sucesso, com certeza a tentativa de unificação da física nos trouxe vários frutos, dentre os quais está a construção de modelos cosmológicos para o Universo primordial.

Outro ponto que vale a pena comentar é uma das observações astronômicas que foi determinante para o estabelecimento do modelo do *big bang*. Esta observação, talvez a mais relevante, é a chamada Lei de Hubble que descreve o afastamento das galáxias distantes com velocidades proporcionais às suas distâncias: $v = H(t)d$, onde v é a velocidade de recessão da galáxia, d é a distância e H é a constante de Hubble no instante em que se faz a observação. Esta lei nos leva a afirmar que o Universo encontra-se em expansão. É uma lei empírica que pode ser deduzida através da Cosmologia Relativista, área que deriva da teoria da relatividade geral de Einstein. Através da constante de Hubble podemos estimar a idade aproximada do Universo.

A ideia de um Universo em expansão nos leva a pensar que ele passou por uma fase em que era extremamente quente. Isto nos leva a pensar, inevitavelmente, que a expansão começou com um big bang a 13,7 bilhões de anos atrás. Neste sentido, o Universo emergiu de uma singularidade.

Dos problemas relacionados a cosmologia é preciso citar que ainda não temos uma teoria que explique a formação das galáxias de forma unânime. É bem possível também que a maior parte do Universo seja constituído por uma energia chamada energia escura, ou seja, uma matéria que não é visível. Apesar do que parece há bons indícios acerca da existência da mesma. Devido ao fato de ser a maior parte da matéria constituinte do Universo, é essencial que entendamos do que se trata essa energia escura para entender como se deu a criação das galáxias.

Apenas em 1993 a relatividade finalmente ganha um sinal de aprovação com a atribuição do prêmio Nobel a Joseph Taylor e Russel Hulse por sua descoberta do pulsar binário PSR 1913 + 16.

Uma das previsões mais importantes da teoria de Einstein é a existência de ondas gravitacionais. Em 1918 Einstein descobriu soluções das equações da relatividade geral que representavam ondas de curvatura do espaço-tempo que se propagavam com a velocidade da luz.Essas ondas foram detectadas quase um século após a sua previsão, no ano de 2015, confirmando o que foi previsto pela TRG.

Com essas observações e comprovações feitas ao longo dos anos temos que, hoje em dia, é muito estudar astrofísica e cosmologia sem recorrer à relatividade geral.

4 Solução de De Sitter

Algum tempo após ter proposto as equações de campo, Einstein percebeu que elas levavam a um Universo dinâmico. Então, com o intuito de obter uma solução estática, inseriu uma constante cosmológica, Λ, nessas equações e as reescreveu como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \ . \tag{12}$$

Essa constante funciona como uma espécie de gravidade repulsiva capaz de equilibrar a atração da matéria no Universo e evitar o seu colapso. Alguns autores chamam-na até de "força lambda (Λ)". Contudo, como as observações feitas por Erdwin Hubble indicavam que o Universo estava em expansão, a introdução da constante cosmológica não era mais justificada. Esse fato fez com que Einstein chamasse o seu ato de inserir tal constante de "o maior erro da sua vida".

Nesta seção, encontraremos uma das soluções das equações de Einstein com a constante cosmológica, em (2+1) dimensões, conhecida como a métrica de De Sitter. Porém, antes disso, faremos uma discussão sobre TRG em tais dimensões.

4.1 Relatividade Geral em (2+1) dimensões

Além de simplificar os cálculos, a análise da TRG em (2+1) dimensões nos permite compreender como a dimensão do espaço-tempo interfere nos sistemas físicos. Obviamente, todas as características não usuais, exibidas nessas dimensões, são oriundas das propriedades das equações de campo.

Em três dimensões, o tensor métrico, os símbolos de Christoffel e o tensor de curvatura de Riemann possuem as mesmas definições apresentadas nas seções anteriores. Desse modo, ao considerarmos a constante cosmológica, as equações de Einstein devem ser dadas pela expressão (12). Contudo, como não existe limite newtoniano nessas dimensões, devemos considerar κ como sendo uma constante arbitrária (WEINBERG, 1972).

4.2 A métrica de De Sitter

A métrica de De Sitter é a solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$), em (2+1) dimensões, no caso em que o Universo é vazio ($T_{\mu\nu} = 0$).

Para obtermos tal solução, assumiremos, inicialmente, que um fluido perfeito de densidade própria ρ e pressão p ocupa todo o Universo. Neste caso, o tensor energia-momento é dado por (BERGMANN, 1975)

$$T^{\mu\nu} = -(\rho + p)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} + pg^{\mu\nu} \ . \tag{13}$$

Admitiremos, também, que o elemento de linha é circularmente simétrico, isto é,

$$ds^2 = -A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 \ , \tag{14}$$

ou ainda

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \ . \tag{15}$$

onde $x^\mu = (ct, r, \theta)$ e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} . \qquad (16)$$

Considerando um observador comovente[3], isto é, um que movimenta-se junto com as partículas do fluido, temos que $dr/ds = d\theta/ds = 0$ e, consequentemente,

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{c^2 A(r)} . \qquad (17)$$

Levando isso em conta e usando (16), vemos que as componentes não nulas do tensor energia-momento são:

$$T_1^1 = T_2^2 = p \qquad \text{e} \qquad T_0^0 = -\rho . \qquad (18)$$

Utilizando a equação (16), temos que os símbolos de Christoffel diferentes de zero são

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{A'}{A}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\frac{A'}{B}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{B'}{B}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B} \quad \text{e} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad (19)$$

onde a"linha" representa a derivada com relação a r. Logo, aplicando essas expressões em (9), encontramos que as componentes não nulas do Tensor de Ricci são:

$$R_{00} = \frac{1}{4AB^2r}\left[2rAA''B - rAA'B + 2AA'B - rB(A')^2\right] , \qquad (20)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4A^2Br}\left[-2rAA'' + Br(A')^2 + rAA'B' + 2A^2B'\right] \qquad (21)$$

e

$$R_{22} = \frac{r}{2AB^2}\left[-A'B + AB'\right] . \qquad (22)$$

Então, como consequência da definição (11), segue que

$$R = \frac{1}{2A^2B^2r}\left[-2rAA''B + rB(A')^2 + RAA'B' - 2AA'B + 2A^2B'\right] . \qquad (23)$$

[3]Uma vez que qualquer observador deve se movimentar de acordo com a dinâmica do Universo, a hipótese de observador comovente é plausível

Após calcularmos as componentes não nulas do tensor de Ricci e o escalar de Ricci, devemos substituir os resultados nas equações de campo. Fazendo isso para $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = 1$ e $\mu = \nu = 2$, respectivamente, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{B'}{B^2 r} - \Lambda = \kappa\rho \ , \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{A'}{ABr} + \Lambda = \kappa p \tag{25}$$

e

$$\frac{1}{4A^2B^2}\left[2A''AB - B(A')^2 - AA'B'\right] + \Lambda = \kappa p \ . \tag{26}$$

Para que o Universo seja estático e homogêneo é preciso que as medidas de ρ e p, feitas por um observador local, sejam as mesmas em todas as partes do espaço, ou seja, ρ e p não devem depender de r. Sabendo disso e integrando a equação (24), chegamos a conclusão que o valor de B será:

$$B = \frac{1}{\xi - (\Lambda + \kappa\rho)\, r^2} \ , \tag{27}$$

onde ξ é simplesmente uma constante de integração.

Independente das equações de campo terem ou não constante cosmológica, o campo $g_{\mu\nu}$ não pode ser determinado completamente pela distribuição de matéria e energia do Universo. De acordo com as equações de Einstein, o campo é afetado por $T_{\mu\nu}$, mas como estamos tratando com equações diferenciais, devemos impor algumas condições de contorno. A condição que usaremos é que para pequenos valores de r, a métrica (16) deve se reduzir a de Minkowisk, ou seja, $A(0) = B(0) = 1$. Deste modo, temos que $\xi = 0$. Então, a eq.(27) torna-se:

$$B = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} \tag{28}$$

em que $1/\mathcal{R}^2 = \Lambda + \kappa\rho$.

A equação de continuidade

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T^\mu_\alpha = 0 \ , \tag{29}$$

juntamente com as equações (18) e (19) nos fornecem, para $\nu = 1$, o seguinte resultado:

$$p' = -\frac{1}{2}\frac{A'}{A}(\rho + p) \ . \tag{30}$$

Mas, conforme comentamos, a pressão é constante. Assim, usando a equação (30), chegamos à

$$A'(\rho + p) = 0 \ . \tag{31}$$

A equação (31) nos dá três alternativas, que são: $A' = 0$, $\rho + p = 0$, ou ambos iguais a zero. O primeiro caso nos direciona para o modelo estático de Einstein; o último caso nos leva à métrica de Minkowski; por sua vez, o segundo caso nos conduz ao modelo de De Sitter. Dessa forma, somando (24) e (25) e usando a condição $\rho + p = 0$, encontramos:

$$\frac{1}{B}dB + \frac{1}{A}dA = 0 \ . \tag{32}$$

Integrando a equação (32), temos que:

$$B = \frac{1}{A} + \chi \ , \tag{33}$$

em que χ é uma constante de integração. Fazendo novamente que $A(0) = B(0) = 1$, chegamos a conclusão que $\chi = 0$. Com isso,

$$A = \frac{1}{B} = 1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} \ . \tag{34}$$

Classicamente, a única forma da igualdade $\rho + p = 0$ ser válida é se considerarmos $\rho = p = 0$, pois a pressão não pode ser negativa. Ainda classicamente, a interpretação que temos do modelo de De Sitter é que tal modelo descreve um Universo vazio. Usando o fato que $p = \rho = 0$, temos:

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \Lambda \ . \tag{35}$$

E, finalmente, substituindo a equação (28) e (34) na equação (14), e levando em conta a relação (35), encontramos o elemento de linha do universo de De Sitter, o qual é dado por:

$$ds^2 = -\left(1 - \Lambda r^2\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \Lambda r^2)} + r^2 d\theta^2 \ . \tag{36}$$

Por conseguinte, a métrica de De Sitter é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\Lambda r^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\Lambda r^2\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

A métrica de De Sitter é construída a partir da ideia de um Universo estático, utilizando por isso a constante cosmológica Λ e, a partir da métrica, somos tentados a pensar que o espaço-tempo da solução de De Sitter é plano, pois a mesma é diagonal. Porém, para termos certeza disso é preciso calcular todas as componentes do tensor de Riemmann e, caso todas as componentes sejam nulas, de fato o espaço-tempo será plano. Contudo, calculando as componentes do tensor de Riemmann, encontramos as seguintes componentes não nulas:

$$R_{0101} = -\Lambda, \quad R_{0202} = \left(-1+\Lambda r^2\right)\Lambda r^2 \quad \text{e} \quad R_{1212} = \frac{\Lambda r^2}{1-\Lambda r^2}. \tag{38}$$

A partir destas componentes do tensor de Riemmann podemos concluir que o espaço-tempo do Universo de De Sitter não é plano, mas curvo.

5 Considerações finais

A introdução da constante cosmológica nas equações de campo, além de ter a função de contrabalancear a atração gravitacional da matéria, mantendo o Universo estático, traz profundas consequências nas soluções destas equações.

Com a análise da solução de de Sitter, pudemos perceber estas consequências. De fato, como vimos, esta solução trata de um Universo vazio, e mesmo assim nem todos os componentes do tensor de Riemann zeraram, indicando que o espaço-tempo desta solução não é euclidiano. Dessa forma, podemos concluir que a presença da constante cosmológica é que proporcionou este resultado inusitado, porque se não há matéria não deveria haver curvatura.

Além disso, notamos que a solução de De Sitter descreve um Universo dinâmico, pois não existe matéria para equilibrar a ação repulsiva da constante cosmológica.

ABSTRACT

The present work aims to write the De Sitter metric. For this, it is necessary to begin with a brief discussion about the relativity of the relativity, showing its postulates, the consequences that such postulates brought to the concept of space that was had at the time, and its meaning, after such discussion bring the greatest trumps and the greatest difficulties faced by general relativity from its publication to the present day and enunciate Einstein's field equations with and without the insertion of the cosmological constant. In addition to a brief explanation of the relativity and general relativity also show the consequences of this theory, such as the curvature of space-time and discuss about relativity in (2+1) dimensions to then reach the De Sitter solution. After understanding what general relativity is and its consequences for space one must assume how the metric tensor would be for such a solution. Then calculate the components of the Ricci tensor, apply in the relations to find the Ricci scalar and apply in the field equations the results to finally find the metric and the line element of the De Sitter solution. Check whether the De Sitter metric describes a curved space-time or not, for this it is necessary to calculate all the components of the Riemann tensor. Finally, we analyze the results and the consequences of inserting a cosmological constant into the field equations.

KEYWORDS: General Relativity, Metric, De Sitter

Referências

BAÑADOS et al. Phy. Rev. Lett., vol. 69, 1982.

BERGMANN, Peter Grabriel. Introduction to the Theory of the Relativity. Dover Publicações. New York, 1975.

CARMELI, M.Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory. New York: John Wiley and Sons, 1982.

DESER, S. et al, Three-dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space, Ann. Phys., vol. 152, (1984), pág. 220-235.

D' INVERNO, R. Introducing Einstein's Relativity. New York: Oxford University Press, 1998.

FERRARO, Rafael. Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

GIDDINGS, S. et al, Einstein's Theory of Gravity in a Three-dimensional Space-time, Gen. Rel. Grav., vol 16, (1984), pág. 751-775.

GOOT, J. Richard e ALPERT, Mark, General Relativity in a (2+1) Dimensional space-time, Gen.Rel.Grav., vol. 16, (1984), pág. 751-775.

ISLAM, J.N. An introduction to mathematical cosmology. Cambridge university press, 1992.

JACKIW, R. e TEITELBOIM, C. Quantum Theory of Gravity, ed. S. Adam Hilger. 1984

KOGUT, John B. Introduction to Relativity. Harcourt Academic Press, New York. 2001.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., Teoria o Campo. HEMUS-Livraria Editora Ltda. São Paulo. 1974.

RINDLER, W. Relativity: Special, general and cosmological. New York: Oxford

University Press, 2006.

SOURADEEP, Tarun e SAHNI, Varun, Quantum Effects Near a Point Mass in (2+1)-dimensional Gravity, Phys. Rev., vol. D, no 46, (1992), pág. 1616-1633.

WEINBERG, Steven. Gravitation and Cosmology. Inglaterra, John Wiley, 1972.