UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA
PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM: UMA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

CAMPINA GRANDE – PB
2013

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM: UMA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba como requisito à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque

Campina Grande – PB

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Zailton F. Beuttenmüller – UEPB

B817p Brandão, Jefferson Dagmar Pessoa.

O papel do livro didático no processo de ensino aprendizagem: uma introdução do conceito de função. Campina Grande – PB / Jefferson Dagmar Pessoa Brandão. – 2013.

84 f. il.

Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba– UEPB, 2013.

“Orientação: Prof.ª Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque”.

1. Ensino de matemática. 2. Função matemática 4. Ensino – aprendizagem. I – Título.

21.ed CDD510

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM: UMA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba como requisito à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 06 / JUNHO / 2013

Banca Examinadora

Profª. Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque - UFCG
(Orientadora)

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - UEPB

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida - UEPB

Dedico este trabalho a Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar, neste espaço, minha gratidão a todos aqueles que me apoiaram, de forma direta ou indireta, na realização desta pesquisa.

Agradeço primeiramente a DEUS, autor de todas as coisas, que me deu inspiração, sem ELE nada conseguiria realizar, a ELE devo tudo.

A minha família, nas pessoas de meus pais Ademar Pereira Brandão e Eliane Pessoa Brandão, minha esposa Alcilene Ataíde Alves Pessoa, meus filhos Angelina Ataíde Alves Pessoa e Nícolas Ataíde Alves Pessoa e minha irmã Jéssica Magnany Pessoa Brandão, esses são os meus maiores motivadores, com eles compartilho sonhos, angustias e realizações, sem eles eu não conseguiria, a eles agradeço de coração.

A minha orientadora, Profª. Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque, alguém muito especial, sendo indispensável para o bom êxito da pesquisa. Pessoa realmente capaz, a qual admiro pela grande capacidade, ela incentivou e cobrou nos momentos adequados.

Aos docentes Dr. Silvanio de Andrade e Dr. José Joelson Pimentel de Almeida por aceitarem fazer parte da banca examinadora e por suas contribuições. Aos demais professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Aos colegas da turma de Especialização pela amizade construída e pelas contribuições dadas em meu aprendizado: Erick, Alberto, Alécio, Eduardo, Lucas, Islany, Cristiane, Samara, Ivoneide, Diana, Alane, Josielma, Alane, Delany, Larissa, Edmar, Lourdes e demais.

A todos os que fazem parte da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Francisca Martiniano da Rocha.

Aos companheiros de trabalho do Centro de Ciências Agrárias e Ambientais da UEPB.

A todos que fazem parte da Comunidade São Maximiliano Maria Kolbe, por estarem sempre rezando por mim.

Aos meus amigos que sempre me ensinaram o valor da amizade e da lealdade.

A todas as pessoas não mencionadas, porém não esquecidas, que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação acadêmica.

"Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas" (A. S. Exupéry).

RESUMO

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **O papel do livro didático no Processo de Ensino Aprendizagem:** uma introdução do conceito de Função. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Campina Grande: UEPB, 2013.

O presente trabalho tem como objetivo analisar a abordagem feita na introdução do conceito de Função em um livro didático de matemática do primeiro ano do Ensino Médio, e verificar se esta abordagem favorece a compreensão deste conceito pelo aluno e ajuda o professor em seu planejamento didático e na gestão das aulas. A análise é realizada observando-se, detalhadamente, a abordagem do conteúdo em jogo desenvolvida pelos autores com base nas discussões teóricas desenvolvidas por Gérard Vergnaud relativas aos Campos Conceituais, por Yves Chevallard sobre a Transposição Didática e Guy Brousseau referente às Situações Didáticas, considerando o papel e a importância do livro didático no cotidiano escolar, sem perder de vista o desenvolvimento histórico do conceito de Função. O livro didático é de grande importância no processo de ensino aprendizagem, ele auxilia, orienta e até mesmo direciona este processo. Com este estudo pudemos evidenciar que mesmo um livro didático não apresentando todas as características desejáveis pelo professor, cabe ao mesmo fazer as devidas transformações, correções e/ou complementações para que o mesmo seja usado de forma adequada e desempenhe seu papel no ensino e em especial no que diz respeito à aprendizagem do aluno, auxiliando-o no entendimento e na formação do conteúdo ou do conceito em estudo.

Palavras-chave: Conceito de Função. Análise de livro didático. Ensino Aprendizagem.

ABSTRACT

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **The role of the textbook on the Learning-Teaching Process:** an introduction to the concept of function. Monography (Graduate course on Educational Mathematics). Campina Grande: UEPB, 2013.

The current study has as objectives to analyze the approach performed when introducing the concept of Function in mathematics textbook during the first grade of high school and, verify if this approach contributes to the understanding of the concept by the student and could help the teacher in his didactic planning and the management of the classes. The analysis is carried out based on observation of the concept presented by the mathematics textbook's authors based on the theory of Gérard Vergnaud on Visual Fields, Yves Chevallard about Didactic Transposition and Guy Brousseau on Didactic Situation, according to the role and function of textbook in school life, otherwise, it is the historical development of the concept is analyzed as well. The textbook is very important in the learning-teaching process, it helps, guides and lead to this process get through. With the study, it can be verified that a textbook that does not comply with all issues expected by the teacher, the teacher can do the transformations, corrections and/or adaptations in order to the textbook play its role in the teaching process and in special, in the learning process by the student, leading to the comprehension of the concept of function.

Keywords: Concept of Function. Textbook Analysis. Learning-Teaching.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Parece ser consenso da importância do livro didático no processo de ensino e aprendizagem, pois ele auxilia, orienta e até mesmo direciona a prática escolar e o processo de ensino aprendizagem.

Sabemos que o livro didático, na maioria das vezes, é o único material utilizado pelo professor e pelos alunos. Ainda notamos, pela nossa prática, que para muitos professores ele é visto como verdadeiro e correto, o que faz com que seu uso seja feito de forma ingênua.

Antes de utilizar o livro didático como um material de apoio nas aulas, o professor precisa conhecê-lo previamente – conhecer sua estrutura, sua proposta e possibilidades de trabalho com ou através dele, é necessário analisá-lo cuidadosamente.

O que mais nos motivou a fazer a análise de livro didático na pesquisa foi uma experiência vivida quando lecionávamos numa escola de Ensino Fundamental – tivemos a oportunidade de participar da escolha do livro didático de Matemática que seria adotado pela escola para as turmas de alunos do Ensino Fundamenta II, ou seja, do 6º, 7º, 8º e 9º anos.

A experiência foi a seguinte: o diretor da escola, sem consultar e sem informar aos professores da tarefa a ser realizada, escolheu um dia para que fosse feita a escolha das coleções de livros didáticos que seriam utilizadas pela escola durante os três anos seguintes, para todas as disciplinas. A escolha ocorreu em apenas um encontro dos professores com menos de duas horas de duração – era um dia normal de aulas, após o chamado “intervalo de aulas”, os alunos foram liberados e os professores de todas as disciplinas foram convidados a reunirem-se em uma mesma sala para fazer a escolha da coleção de livros que adotariam.

A escolha ocorreu sem obedecer nenhum critério – verificamos os nomes dos autores das coleções, folheamos os livros de cada coleção, olhando, de maneira superficial, os conteúdos abordados, os exercícios etc. Alguns professores fizeram comentários sobre autores, livros etc. e depois fizemos a escolha, mas, de fato, os livros não foram analisados.

No nosso caso, quando passamos a utilizar o livro escolhido para a disciplina Matemática percebemos que ele não era o mais adequado, passamos a utilizá-lo pouco, usamos mais um que já possuíamos e estávamos acostumados com ele, porém os alunos não o possuíam. Os alunos perceberam e, constantemente, questionavam sobre o porquê da não utilização do livro que receberam.

Acreditamos que este tipo de escolha e uso do livro didático ainda vem ocorrendo muito em escolas de nosso país, o que acarreta grandes prejuízos para o ensino aprendizagem. E, por isso, achamos que esta pesquisa é bastante relevante porque, apesar de o livro didático ocupar um lugar importante no ambiente escolar, parece que nem sempre o professor está atento a isso e acaba fazendo a escolha do livro que a escola irá adotar sem definir claramente os critérios ou até mesmo sem ter nenhum. Isso ficou muito claro e achamos que essa pesquisa iria nos preparar para outras situações como esta.

Além disso, em 2011 lecionávamos em uma turma do 1º ano da modalidade EJA no turno noite na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Francisca Martiniano da Rocha, a única que oferece o Ensino Médio nas modalidades regular e EJA na cidade de Lagoa Seca (PB).

A coleção de livros didáticos escolhida para a disciplina Matemática pela escola naquele ano e distribuída para os alunos em todas as turmas do Ensino Médio regular foi “Conexões com a Matemática”, elaborada coletivamente, organizada e publicada pela editora Moderna em São Paulo no ano de 2010, sob a responsabilidade da professora editora Juliana Matsubara Barroso, este foi o livro que analisamos.

Como não havia livros disponíveis para os alunos da EJA, mas tinha ficado certa quantidade de livros da citada coleção disponível na biblioteca da escola, nos propomos a usar os livros do 1º ano com esses alunos. Os livros eram utilizados apenas em sala de aula no momento da aula de Matemática, não podiam ser levados para casa.

Essas experiências nos conduziram a analisar abordagens de conteúdos na coleção já referida. Como a análise de livro didático é uma tarefa muito difícil de ser realizada, é um trabalho lento e meticuloso e que exige muito de quem a faz porque existem muitos aspectos a serem observados, analisados e avaliados, fizemos, nesta pesquisa, uma análise apenas de como o livro didático introduz o conceito de Função para alunos do 1º ano do Ensino Médio. Essa introdução abrange os problemas que dão sentido ao conceito e as representações envolvendo tabelas, expressões algébricas e gráficos.

O nosso objetivo com essa análise é verificar se duas das funções do livro didático listadas por Gérard e Roegiers, por nós apresentadas na página 44, são possíveis de ocorrer, a saber: “favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes” em relação ao aluno e “auxiliar o professor no planejamento didático pedagógico e na gestão das aulas”.

Em outras palavras, queremos saber se a explanação desenvolvida no livro didático em questão ao introduzir o conceito de função favorece ao aluno a compreensão do que é função e auxilia o professor no planejamento didático do saber relativo ao item 1. Conceito de função[1] e ao item 2. Gráfico de uma função[2] da Unidade 3 e na gestão das aulas. Na verdade, vamos verificar, com base nas teorias por nós discutidas no Capítulo 2 deste texto, se as funções do livro didático explicitadas no parágrafo anterior são possíveis de serem alcançadas pelo aluno e pelo professor, respectivamente.

Por que analisar o conceito de Função?

O conceito de Função é considerado como um dos mais importantes da matemática e apresenta uma grande aplicabilidade. Desta forma, a compreensão e formação do conceito de Função pelo aluno são, portanto, fundamentais. Além disso, em termos curriculares, o conteúdo Funções é pré-requisito para o estudo de vários outros conteúdos do Ensino Médio.

No entanto, os alunos encontram grandes dificuldades em compreender este conceito, tudo isto nos motiva ainda mais em estudar um tema considerado tão importante.

---

[1] O item 1. Conceito de função (p. 68-75) constitui-se dos subitens 1.1 A ideia de função no cotidiano, 1.2 Função na Geometria, 1.3 A definição matemática de função, 1.4 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função, 1.4 Zero de uma função.

[2] O item 2. Gráfico de uma função (p. 76-83) abrange os subitens 2.1 A representação gráfica, 2.2 O plano cartesiano, 2.3 Construção do gráfico de uma função, 2.4 Reconhecimento dos gráficos que representa uma função.

Além disso, nos interessamos por esse conceito porque ele oferece uma grande abrangência de ideias, nos motivando a aprendermos mais sobre ele; corroborando com isso a primeira disciplina do curso de Especialização tratava do ensino aprendizagem do conceito de função. Após as aulas nas quais estudamos esse conteúdo de uma forma aprofundada e direcionada para seu ensino, não tivemos mais dúvidas que função seria nosso objeto de estudo.

Para realizar essa análise nos apoiamos nas teorias dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, das Situações Didáticas de Guy Brousseau e da Transposição Didática de Yves Chevallard, sem esquecer aspectos fundamentais da construção histórica do conceito de Função, necessários para a compreensão e formação do conceito pelo aluno, além do fato de que os mesmos parecem fornecer um caminho para a sua abordagem.

Desenvolvemos esse trabalho observando, analisando e avaliando de maneira detalhada a abordagem dada pelos autores à introdução do conceito de função no Volume 1 da coleção segundo o referencial teórico elencado.

O texto do trabalho foi organizado em quatro capítulos: no Capítulo 1 apresentamos alguns aspectos da construção histórica do conceito de Função. Desenvolvemos, no Capítulo 2, um estudo das teorias dos Campos Conceituais, das Situações Didáticas e da Transposição Didática. No Capítulo 3, discutimos aspectos relativos ao livro didático, o que nos levou a realizar reflexões sobre a trajetória histórica e o papel do livro didático no processo de ensino aprendizagem, ainda resevamos uma parte do capítulo para tratarmos do que é e como deve ser feita a contextualização na disciplina matemática. No Capítulo 4 apresentamos o texto resultante da análise das páginas 68 a 83 do livro didático acima referido. Por fim fazemos as Considerações Finais para explicitarmos a conclusão a que chegamos em relação ao que nos propomos na pesquisa.

CAPÍTULO 1 - UM POUCO DA HISTÓRIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo trazemos um recorte da história do conceito de Função com base nos trabalhos de Oliveira (1997), Pelho (2003), Rossini (2006) e Maciel (2011). Todos esses trabalhos, de forma direta ou indireta, se apoiaram em A. P. Yousckevich da Universidade de Moscou, por meio dos artigos The Concept of Function no Archive for History of Exact Sciences da Editions Springer de 1976 e Le Concept de Fonction jusqu’au milieu do XIX e siècle em Fragments d’Histoire des Mathématiques de 1981, por isso preferimos nos referir a estes e não às referências originais.

Os trabalhos de Rossini (2006) e Maciel (2011), no nosso ponto de vista, são mais completos, trazem detalhes sobre aspectos do conceito de Função vinculados às noções de continuidade, à representação de funções por meio de séries infinitas e ao problema da corda vibrante. Sem dúvida nenhuma são aspectos importantes do desenvolvimento do conceito, mas por se tratar de um trabalho em nível de Especialização que objetiva analisar a abordagem da introdução deste conceito em livro didático do 1º ano do Ensino Médio da Educação Básica, não enfatizamos detalhes relativos a estes aspectos, mesmo sabendo que a história do conceito de função esteve muita ligada à noção de continuidade. Oliveira (1997) e Pelho (2003) fazem um relato mais resumido do desenvolvimento do conceito, no entanto, as suas abordagens são suficientes para a compreensão dos fatos e aspectos relativos ao mesmo no nível em que nos interessa.

Neste relato, vamos nos restringir aos aspectos da história do conceito de Função que nos parecem ser indispensáveis para a análise referida no parágrafo anterior. Destacamos fatos e comentários referentes às noções essenciais do conceito em nível de matemática elementar, às suas representações e às diferentes definições que foram sendo explicitadas em vários momentos do seu desenvolvimento por diferentes matemáticos.

Para um maior aprofundamento da história do conceito de Função, a leitura dos capítulos que tratam deste tema nas quatro primeiras referências ou nos artigos das duas últimas é indispensável.

Os trabalhos de Oliveira (1997), Pelho (2003), Rossini (2006) e Maciel (2011), trazem, inevitavelmente, com diferentes objetivos, as três principais etapas do desenvolvimento do conceito de Função descritas por Yousckevich em 1981.

Na primeira etapa, ocorrida na Antiguidade: existiam estudos de casos particulares de dependência entre duas quantidades; em muitos casos as dependências eram explicitadas por meio de correspondências e representadas em tabelas; não havendo discriminação geral de algum aspecto de Função.

Na segunda, durante a Idade Média: os casos de dependência entre duas quantidades eram vistos em termos geométricos e mecânicos, as dependências eram representadas por descrições verbais ou por gráficos.

Na terceira etapa, ocorrida no chamado Período Moderno: no fim do século XVI e, principalmente, no século XVII, as dependências entre duas quantidades eram representadas por equações, aparecendo, então, as expressões analíticas das funções. A classe das funções analíticas – geralmente expressas por meio de somas de séries infinitas - era muito estudada e utilizada neste período.

Todos os trabalhos mencionam que o método analítico revolucionou a matemática pela sua extraordinária eficácia. No entanto, Rossini (2006) comenta que ver Função como uma expressão analítica, por volta da metade do século XVIII, tornou-se inadequada. Foi, então, mudada a forma de interpretar Função e uma nova definição geral de Função foi introduzida, mais tarde aceita universalmente na análise matemática. Na segunda metade do século XIX, essa definição abriu espaço para o desenvolvimento da teoria das funções, a qual ocasionou dificuldades lógicas dentro da própria matemática no século XX, um período de muitas controvérsias e de mudanças na essência do conceito de Função e de outros conceitos da Análise Matemática. Este seria, então, o último período do desenvolvimento do conceito.

Pela descrição das etapas do desenvolvimento deste conceito, feita acima, e pela leitura que fizemos dos trabalhos já referidos, parece-nos que, em suas primeiras etapas, este desenvolvimento esteve mais atrelado às suas formas de representação do que mesmo às ideias de dependência, correspondência e de variável, ideias essenciais do conceito de Função.

Já na A**ntiguidade** foram observados e estudados casos de dependência entre quantidades, Oliveira (1997) afirma que, na Grécia Antiga, os pitagóricos estudaram a interdependência quantitativa entre “o comprimento e a altura da nota emitida por cordas da mesma espécie, pinçadas com tensões iguais” (p. 14-15). As ideias de função surgidas na antiguidade quase sempre estão relacionadas às construções de tabelas sem mencionar a ideia implícita de correspondência. Eram tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas e outras mais, usadas pelos matemáticos babilônios para seus cálculos, em torno de 2000 a.C. tábuas de funções construídas empiricamente e utilizadas pela astronomia babilônica para compilação de efemérides[3] de astros.

Durante o Período Alexandrino, os astrônomos desenvolveram uma trigonometria completa de cordas; as cordas correspondendo à circunferência de raio fixo. Construíram tabelas de cordas, efetivamente, equivalentes às tabelas de senos, pois estas fornecem os senos dos ângulos de 0^o a 90^o com incrementos de 15’. Eram tabelas astronômicas de quantidades nas quais as posições do Sol, da Lua e dos planetas mudam contínua e periodicamente. Rossini (2006) comenta que nesses trabalhos não havia nenhuma alusão à ideia de função, mesmo considerando que os astrônomos soubessem que as coordenados dos corpos celestes mudavam periodicamente ou que os matemáticos soubessem que, numa circunferência, as cordas de comprimentos diferentes correspondiam a arcos de tamanhos diferentes.

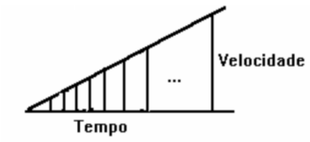
Vemos então que, embora as tabelas construídas na antiguidade manifestassem ideias de correspondência e de dependência entre quantidades, está última de forma mais implícita, os estudos realizados para suas construções não levaram à criação de nenhuma noção de quantidade variável nem de função. Isso nos parece mostrar que naquela época não havia, por parte dos matemáticos, nenhuma necessidade ou intenção de investigar

[3] Uma tabela que contenha a posição de astros em função do tempo recebe a denominação de *efemérides*. As coordenadas dos efemérides do Sol, da Lua, dos planetas e de cerca de seiscentas estrelas são tabelados de dez em dez dias (Arana, 2000).

aspectos do que viria a ser o objeto matemático chamado função, seus estudos apenas revelavam “intuição funcional” ou até mesmo certa “instinto funcional” como diz Oliveira (1997, p. 14). A intenção dos matemáticos de investigar sobre o conceito de Função ocorreu somente no século XVIII como veremos, antes disso, aspectos do conceito eram observados sem, contudo, pensar nele diretamente.

Na **Idade Média**, antes de 1361, no estudo da latitude e longitude das formas, Nicole Oresme (1323-1382) teve, segundo Boyer (1996)[4], um pensamento brilhante: “por que não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas?” Traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante.

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (Boyer, 1996, p. 181).



Fonte: (OLIVEIRA, 1997, p. 16)

Os termos longitude e latitude usada por Oresme são equivalentes, num sentido amplo, aos termos abscissa e ordenada, respectivamente; sua representação gráfica assemelha-se com a da Geometria Analítica, embora não tenha utilizado medidas; suas representações eram imaginárias e qualitativas (OLIVEIRA, 1997). Boyer (1996) afirma que a representação gráfica de uma quantidade variável de Oresme era novidade e comenta: “parece que Oresme percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar isso eficazmente a não ser no caso de função linear” (p. 181) e “uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos de representação gráfica de funções” (p. 180), portanto, um aspecto novo da representação de função.

Na matemática, até o século XII, cada problema era tratado de maneira isolada, havia limitações na simbologia e, portanto, nos procedimentos. Até os

[4] Para um aprofundamento e constatação da riqueza do pensamento de Oresme, a leitura do item A LATITUDE DAS FORMAS em Boyer (1996), p. 180-182, é indispensável.

séculos XIV e XV havia a explicitação de casos particulares de dependência entre quantidades variáveis, as quais eram representadas, mesmo no fim do século XVI, por uma descrição verbal, por tabela ou por gráfico. As funções logarítmicas e as funções trigonométricas foram introduzidas com a utilização dos antigos métodos - tabelas trigonométricas foram elaboradas por Nicolau Copérnico (1473-1543) e seu aluno Georg J. Rheticus (1514-1574), por Johannes Kepler (1571-1630) e seus alunos. Entre 1614 e 1619, John Neper (1550-1617) publicou um trabalho sobre logaritmo trazendo uma tabela de logaritmos de funções trigonométricas e, em 1620, Joost Burgi (1552-1632) publicou uma tabela de logaritmos. A representação algébrica do que se entendia por função surgiu posteriormente, visto que esta dependia dos avanços da própria linguagem e simbologia matemáticas e, consequentemente, da ideia de variável em termos matemáticos.

Oliveira (1997) afirma que, no século XIV, alguns matemáticos estudaram fenômenos[5] como calor, luz, cor, densidade, distância, velocidade e, aos poucos, foram amadurecendo a ideia de que as leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional. Galileu Galilei (1564-1642) foi o precursor destes estudos, depois veio Kepler e Isaac Newton (1642-1727). No século XVII, o estudo das relações entre o movimento curvilíneo e as forças que o afetam tornou-se o principal problema da ciência (ROSSINI, 2006).

Para efeito de estudo, podemos dizer que o desenvolvimento do conceito de Função no **Período Moderno** teve início com Galileu Galilei (1564-1642), que, ajudado pelo advento dos instrumentos de medida, introduziu o quantitativo nas representações gráficas de Oresme. Apesar de seus gráficos serem muito parecidos com os de Oresme, eles resultam da experiência e da medida. Diferentemente de Oresme, “para quem a teoria pura, isenta da experiência, era suficiente”, Galileu tinha o propósito de “encontrar os

[5] Nos trabalhos pesquisados há diferentes denominações para referir-se a essa questão, usam-se os termos fenômeno, forma, qualidade e característica. Vamos, apenas, apresentar uma ideia de cada um deles segundo Durozoi e Roussel (1996). De um modo geral, **fenômeno** é o que aparece, tanto aos sentidos quanto à consciência. O conceito de **forma** quase sempre se opõe ao de matéria, é a natureza da relação que une os conceitos independentemente dos seus significados. Para Aristóteles a **qualidade** é uma das dez categorias do pensamento, como maneira de ser de uma realidade (branco, negro, frio, quente etc.). Varia de intensidade, mas não sendo mensurável, opõe-se à quantidade. Para os sofistas da Antiguidade, a determinação qualitativa não é completamente alheia à quantidade e à medida. Em Aurélio, o verbete **característica** é o que constitui o caráter distintivo, a particularidade de uma pessoa ou de uma coisa.

resultados e as relações que proviessem mais da experiência do que apenas do pensamento” (OLIVEIRA, 1997, p. 17). Ele iniciou o estudo dos movimentos – velocidade, aceleração e distância percorrida – em termos quantitativos e lidou de forma funcional com causas e efeitos dos movimentos por intermédio da experimentação, uma necessidade essencial à concepção de variável dependente. Usando a linguagem verbal de proporção, Galileu afirmou: “o espaço percorrido por um corpo em queda a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado, depende do quadrado do intervalo de tempo utilizado ao percorrer esta distância” (PELHO, 2003, p.20).

No início do século XVI não havia a possibilidade de se fazer generalizações, não se podia representar uma classe de equações por uma equação geral; as ideias de incógnita, parâmetro e variável não eram claras e não se fazia distinção entre elas. François Viète (1540-1603) deu grandes contribuições neste sentido, usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros; isso tornou possível a escrita, sob uma forma simbólica, de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários. A partir das notações de Viète muitas transformações ocorreram na álgebra e no conceito de número que, segundo Oliveira (1977), no fim do século XVI abrangia números reais, imaginários e complexos.

A aritmetização e algebrização da geometria através dos processos da geometria analítica com René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665) trouxeram contribuições para o conceito de variável e para a representação analítica de função, inicialmente sem se referir à noção de correspondência entre quantidades. Dois dos trabalhos acima referidos destacam que, de modo completamente claro, esse matemático sustenta “a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondendo aos valores dados da outra” (ROSSINI, 2006, p. 38; OLIVEIRA, 1997, p. 18). Descartes chama as curvas algébricas de curvas geométricas e afirma que “todos os pontos destas curvas estão em relação com todos os pontos de uma reta, com a possibilidade de representar esta relação por uma equação, a mesma para cada ponto da curva dada”; Fermat afirma que “tão logo duas quantidades desconhecidas aparecem em uma igualdade, há um lugar geométrico e o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma reta ou curva” (OLIVEIRA, 1997, p.18). Maciel (2011) comenta que Descartes chegou a definir função como qualquer potência de x, como x^2, x^3 etc.

Os quatro autores brasileiros acima citados mencionam sobre a importância da descoberta de Descartes, o uso da equação para a representação funcional foi fundamental; eles “apresentaram o método analítico de introdução das funções, abrindo assim uma nova era na matemática” (OLIVEIRA, 1997, p.18; ROSSINI, 2006) e para o desenvolvimento do conceito de Função.

Muitos outros matemáticos contribuíram para a compreensão do conceito de variável, para sua representação algébrica e, consequentemente, para o desenvolvimento do conceito de função: Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Jean Bernoulli (1694-1698), Leonard Euler (1707-1783), Jean-Louis Lagrange (1736-1813) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Vejamos, de forma resumida, suas contribuições.

Newton escreveu, em 1671, o Método dos Fluxos. Nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, as coordenadas do ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis; a uma quantidade variável ele dava o nome de fluente – uma quantidade que flui – e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Para ele, qualquer coisa que varie continuamente é um fluente, por exemplo, a função e sua variável são fluentes. A taxa de variação da função e da sua variável são fluxos ou fluxões. Essa taxa de variação pode ser pensada em relação ao tempo, por exemplo, se um fluente fosse a ordenada do ponto gerador e indicado por y, em linguagem moderna, sua taxa de variação seria indicada por $\frac{dy}{dt}$. Ou seja, os fluxos são as velocidades através das quais cada fluente cresce em virtude de seu movimento de geração. Excluindo-se a ideia de tempo, admite-se que a quantidade ou o fluente cresça de maneira constante (EVES, 2004, p. 439). Foi ele quem introduziu o termo variável independente e percebeu que uma função poderia ser descrita como algo que conhecemos hoje como série de potências, uma espécie de expressão polinomial.

Oliveira (1997) afirma que Leibniz foi o primeiro a utilizar em um manuscrito, em 1673, a palavra “função”, embora já tivesse a ideia do conceito geral de função, ele não a utiliza para designar a relação formal entre a ordenada de um ponto de uma curva e a sua abscissa. Segundo Pelho (2003), ele usa essa palavra para referir-se a qualquer quantidade variando ponto a ponto de uma curva, por exemplo, para referir-se à coordenada de um ponto, à inclinação de uma curva ou ao raio da curvatura de uma curva. Usou o termo, também, para referir-se às quantidades dependentes ou expressões. Oliveira (1997) afirma que mais adiante a palavra “função” para ele tomou o sentido de um termo geral para diferentes segmentos ligados a uma curva dada. Em artigos publicados em 1692 e 1694 ele chama de “função” os segmentos de retas obtidos por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma dada curva. Ele introduziu as palavras constante e variável, coordenadas e parâmetros.

Pelho (2003) afirma que Jean Bernoulli, em 1697, refere-se à função como uma quantidade formada de alguma maneira por variáveis e quantidades constantes. Em 1698 utiliza a palavra “função” de Leibniz para significar quantidades que dependem de uma variável; propõe a letra grega φ para a característica de uma função, escrevendo o argumento sem parênteses “φx”. Em 1718 explicitou a primeira definição de função: “chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes” (ROSSINI, 2006, p.40)

Segundo Rossini (2006), Euler trouxe um desenvolvimento essencial do conceito de Função. Em seu trabalho de 1748, ele definiu noções iniciais discriminando quantidade constante - “é uma quantidade determinada que tem sempre o mesmo valor. Tais são os números de toda espécie. Utilizam-se as primeiras letras do alfabeto a, b, c etc. para representar essas quantidades, utilizando caracteres”(p. 41), e quantidade variável - “é uma quantidade indeterminada, ou uma quantidade universal que compreende todos os valores determinados. Uma quantidade variável compreende todos os números, não importa a sua natureza. Utilizam-se as últimas letras do alfabeto z, y, x etc. para representar quantidades variáveis”(p.41). Coloca um terceiro item dizendo: “uma quantidade variável torna-se determinada assim que se atribui um valor determinado qualquer [...]” (p.41).

Rossini (2006) traz uma definição de "função" apresentada por Euler em 1748, para ele função é uma expressão analítica:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma maneira que seja, desta quantidade e de números ou de quantidades constantes. Assim, toda expressão analítica que além da variável z contiver quantidades constantes, é uma função de z (p. 41).

Rossini (2006) comenta que a ideia de função como sendo uma expressão analítica é aceita por outros matemáticos, um deles é Joseph Louis Lagrange (1736-1813); em um trabalho seu publicado em 1881, Lagrange define função assim:

> Chama-se função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não de outras quantidades que podem ser vistas como tendo valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, só se consideram as funções que se supõem variáveis; sem nenhuma atenção às constantes que podem ser misturadas (p. 43).

Como as funções descontínuas[6] não podiam ser representadas analiticamente, Euler sentiu necessidade de definir função de modo a englobar todas as classes conhecidas de relações. A sua nova definição engloba uma noção que esteve sempre presente mesmo que não expressa explicitamente, na qual não intervém expressão analítica alguma – trata-se da "noção geral de correspondência entre dois pares de elementos, cada um deles pertencendo ao seu próprio conjunto de valores de quantidades variáveis" (ROSSINI, 2006, p. 45).

Em 1755, Euler define função de outra maneira:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que as outras mudam, essas quantidades também mudam então se tem o hábito de nomear essas quantidades funções das últimas; essa denominação tem o mais amplo entendimento e contém em si mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada

[6] Para Euler continuidade de uma função "é a invariabilidade, imutabilidade da lei que determina a função em todos os valores do domínio da variável; nesse caso a descontinuidade significa a mudança da lei analítica, a existência de leis diferentes em dois intervalos ou mais de seu domínio" (Rossini, 2006, p. 44-45).

> por outra. Se, por consequência, x designa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x, não importando qual a maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x (ROSSINI, 2006, p. 45).

A definição geral de função dada por Euler foi sendo cada vez mais reconhecida e utilizada, foi aceita por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e Dirichlet enquanto novas definições estavam sendo elaboradas.

Euler usou a notação f(x) para representar uma função e fez a distinção entre função algébrica e função transcendente; a primeira é determinada por polinômios e frações racionais, a segunda é representada por funções trigonométricas, funções logarítmicas, funções trigonométricas inversas e funções exponenciais (MACIEL, 2011).

As primeiras discussões sobre o conceito de Função ocorreram no século XVIII com o problema da corda vibrante[7]: vibrações infinitamente pequenas de uma corda finita, homogênea e fixa nas duas extremidades (Rossini, 2006). Esse problema influenciou na reformulação do conceito de Função, pois a ideia de uma função ser uma expressão analítica era muito restrita para a resolução de problemas da matemática aplicada.

No processo de resolução deste problema e de estudos sobre continuidade e séries infinitas surgiram muitas controvérsias sobre o conceito de Função envolvendo os matemáticos Euler, Lagrange, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), Gaspard Monge (1746-1818), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Daniel Bernoulli (1751-1834), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), as quais foram importantes para o progresso da Física-Matemática e da Análise Matemática, mas não serão tratadas aqui.

Rossini (2006) afirma que Lagrange, Euler e outros matemáticos do século XVIII não tinham dúvidas de que poderiam considerar toda função da análise matemática podendo ser representada por uma série de termos proporcionais às potências reais da variável independente. Além disso, a autora afirma que o embrião da ideia de que uma expressão infinita fosse uma "função" não era nova, era conhecida desde a Idade Média, mas foi somente

[7] Para conhecer detalhes relativos a esse problema deve-se ler Rossini (2006, p. 43-44) e Maciel (2011, p. 15-17).

na segunda metade do século XVII que as séries inteiras tornaram-se o meio mais fecundo e universal para a expressão analítica e o estudo de todas as funções.

Voltando à discussão sobre as diferentes formas de ver e definir função, em um trabalho de 1778-1782, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat (1743-1794), marquês de Condorcet, escreve:

> Suponho que tenho certo número de quantidades x, y, z,... e que, para cada valor determinado de x, y, z,... “F tem um ou vários valores determinados: digo que F é uma função de x, y, z...” e apresentando alguns exemplos de funções implícitas e explícitas introduzidas por meio de equações, prossegue: “Sei que logo que x, y, z forem determinados, F também ficará determinado, mesmo que eu não conheça nem a maneira de exprimir F em x, y, z nem a forma da equação entre F e x, y, z, saberei que F é uma função de x, y, z” (ROSSINI, 2006, p. 46).

Sylvestre François Lacroix (1764-1848) leu o trabalho de Condorcet e em 1797 escreve: “Toda quantidade cujo valor depende de uma ou várias outras quantidades, diz-se função destas últimas, quer se conheça quer se ignore por quais operações se deve passar para voltar à primeira” (ROSSINI, 2006, p. 46).

Em meio às controvérsias sobre função contínua, em 1821, Cauchy define função, também, sem falar em expressão analítica, no entanto, Rossini (2006) diz que Youschkevitch supõe que, quando Cauchy escreve que as funções são expressas por meio da variável independente, ele só pensava nas funções que podiam ser expressas analiticamente. Vejamos a definição de Cauchy:

> Desde que quantidades variáveis estejam de tal forma ligadas entre si, o valor de uma delas sendo dado, podem ser obtidos os valores de todas as outras, concebendo-se comumente essas diversas quantidades expressas por meio de uma entre elas, que toma então o nome de variável independente e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são aquilo que se denomina funções desta variável (ROSSINI, 2006, p.47).

Em 1834, Lobatchevsky define função assim:

> A concepção geral exige que uma função de x seja denominada um número que é dado para cada x e que muda gradualmente ao mesmo tempo em que x. O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que dá um meio de testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir, mas permanecer desconhecida (ROSSINI, 2006, p. 48).

Boyer (1996) afirma que, na época dos trabalhos de Fourier, “As funções já não precisavam ser do tipo bem comportado, familiar aos matemáticos até então” (p.352) e que, em 1837, Dirichlet sugeriu uma definição muito geral para função:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de y, então se diz que y é função da variável independente x (BOYER, 1996, p. 352).

O autor comenta que esta definição “está próximo do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas os conceitos de “conjunto” e de “número real” não tinham sido estabelecidos” (p. 352). Esse mesmo autor, em seguida comenta que ‘para indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propôs uma função muito “mal comportada”: quando x é racional seja y=c, e quando x é irracional seja $y=d\neq c$ ’(p.353).

Com as ideias vindas da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX e início do século XX, houve a evolução de alguns conceitos matemáticos básicos, muitos conceitos ganharam nova formulação ou, nas palavras de Eves (2004), “ganharam uma formulação mais conveniente”.

Eves (2004) afirma que Dirichlet, numa tentativa de dar uma definição ampla o suficiente a ponto de englobar uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as estudadas anteriormente, chegou a seguinte formulação:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, a qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da

> função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função (p. 661).

Hermann Hankel (1839-1873), em 1870, define função assim:

> Diz-se que y é função de x se a cada valor de x, em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y, sem que isso exija que y seja definido em todo intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x (ROSSINI, 2006, p.50; OLIVEIRA, 1997).

Rossini (2006) comenta que o conceito de aplicação entre dois conjuntos foi sendo incorporado à ideia de função e tornou-se dominante. J. W. Richard Dedekind (1831-1916) aprofunda a generalização para o objeto função, definindo-o assim:

> Sendo dados dois conjuntos quaisquer E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder e vale a qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor em x que é denotado de modo geral por f(x) (ROSSINI, 2006, p. 51-52).

Em 1939 em um livro escrito pelo grupo Bourbaki[8] a definição de função dada é a seguinte:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (OLIVEIRA, 1997, p.21; ROSSINI, 2006; MACIEL, 2011).

De acordo com Rossini (2006), Georg F. L. Cantor (1845-1918), numa generalização natural e indispensável das coordenadas cartesianas, introduz a noção de produto cartesiano de dois conjuntos quaisquer, o que faz ligar a noção de aplicação f de E em F a um subconjunto do produto cartesiano E x F. Esta ligação é explicitada na definição que segue atribuída, também, ao grupo

---

[8] Em 1935 foi criado um grupo de matemáticos franceses sob o pseudônimo Nicolas Bourbaki e a partir de 1939 começou a aparecer na França uma série de obras matemáticas da mais alta abrangência refletindo as tendências da matemática no século XX.

Bourbaki: "Uma função é uma terna ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X x Y, tal que se (x,y) pertence a f e (x, y') pertence a f, então y=y' " (SIERPINSKA, 1992, apud PACCA e ZUFFI, 2000, p. 16).

Eves (2004) comenta que a "teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois cojuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa" (p. 661). Do ponto de vista da ciência matemática isso é um ponto positivo, o objeto função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e muito abrangente. No entanto, a definição de função via teoria dos conjuntos não deixa claro as suas componentes de variação, dependência e correspondência. São definições muito abstratas que trazem dificuldade para um estudante de nível médio.

Defendemos que o indivíduo aprenda matemática resolvendo problemas e acreditamos que para a leitura, compreensão e resolução de qualquer problema matemático por um indivíduo, ele precisa fazer uso de uma representação já que os objetos matemáticos são abstratos. Tanto o enunciado do problema quanto a representação necessária para a sua resolução precisam ser acessíveis ao aprendiz, de modo que ele seja capaz de compreender o problema, de explicitar os dados do problema, de descobrir os procedimentos operatórios que irá utilizar para sua resolução, de resolvê-lo e de exibir sua solução.

Sabemos que os problemas da mecânica, da física e da astronomia no século XVIII provocaram desenvolvimentos da trigonometria, dos logaritmos, a elaboração dos métodos infinitesimais, o enriquecimento das representações matemáticas acerca das grandezas e dos movimentos contínuos quanto à essência e à forma das dependências funcionais. Como vimos, foi exatamente neste período que começaram as discussões sobre o conceito de Função e, nos textos que lemos, o problema da corda vibrante foi o responsável pelo início delas. Isso nos mostra que os problemas envolvendo movimento e variação são importantes e podem provocar o interesse do aprendiz por função, ou melhor, pelo estudo de Função.

Da teoria dos Campos Conceituais deduzimos que o trabalho didático com um conceito relativo a um objeto deve ser realizado com situações ou problemas que dão sentido ao objeto ou ao conceito a ser estudado, que manifeste seu significado, que mostre seus traços ou suas características, essas situações devem ser as mais variadas possíveis. Da teoria das Situações Didáticas, apreendemos que as situações introdutórias para abordagem de um conceito devem ser familiares ao aprendiz e que este deve dispor dos conhecimentos e das condições necessárias para a sua resolução, são as chamadas situações de ação. Essas discussões serão aprofundadas no próximo capítulo.

Por causa do que discutimos nos últimos parágrafos, achamos que a introdução do conceito de função para estudantes do 1º ano do Ensino Médio deve ser feita com problemas; os problemas devem envolver contextos familiares aos estudantes, os contextos podem e devem ser muito variados, contextos envolvendo movimentos, variação de quantidades associadas à grandezas contínuas, por exemplo.

Os estudantes precisam investigar com cuidado o problema, identificar as variações que ali ocorrem; observar quais elementos variam, se são números ou se são outra coisa; se forem números, verificar se as variações estão associadas a alguma grandeza; perceber que são duas coleções de elementos/números que variam, observar qual das coleções tem variação independente e qual tem variação dependente da anterior, compreender a variação dos números/das quantidades observadas e anotá-la de maneira criteriosa, podem fazer uma tabela.

Vimos pela história do conceito de função que a linguagem verbal e as tabelas foram as primeiras representações utilizadas. Os problemas, em geral, dão condições de os estudantes fazerem uma análise detalhada das situações neles envolvidas. Embora o conceito de correspondência não tenha sido percebido pelos matemáticos no início do desenvolvimento do conceito descrito antes, os estudantes já podem ser ajudados a perceberem uma correspondência entre as duas coleções de elementos (nomes, objetos, números etc.) que variam, e a lei da correspondência em termos verbais.

CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO

Tomaremos como referencial teórico para nosso trabalho teorias da Didática da Matemática, uma das tendências da Educação Matemática e que tem forte influência dos autores franceses.

A Didática da Matemática tem como objetivo descrever e compreender os fenômenos da prática educativa; a sua finalidade não é a de fornecer uma forma ideal de como os professores devem comportar-se em suas práticas de sala de aula, ela nos dá subsídios para essa prática, podemos constatar isso nas palavras de Douady.

> A Didática da Matemática estuda os processos de transmissão e aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente uma situação escolar ou universitária. Ela se propõe a descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não se reduz a pesquisar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção particular (DOUADY apud PAIS, 2001, p. 11).

Em Pais (2002), obtemos uma definição para a Didática da Matemática que para ele relaciona-se ao contexto brasileiro:

> A Didática da Matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (p. 11).

As teorias da Didática da Matemática nos ajudam a entender alguns fenômenos didáticos, tais como: as transformações que são feitas no saber ao ser apresentado para o aluno, quer seja pelo autor do livro didático ou pelo professor; as relações estabelecidas entre professor, aluno e saber; as regras de funcionamento do sistema escolar; como o aluno assimila o saber transformando-o em conhecimento; quais são suas dificuldades ao longo da formação do conceito; as possibilidades de elaboração de uma sequência didática adequada para o tratamento de certo conteúdo; as conexões entre a teoria e a prática e em que elas nos auxiliam a melhor compreender o cotidiano da sala de aula etc.

Todas as teorias da Didática da Matemática são necessárias para a análise e compreensão dos fenômenos explicitados no parágrafo anterior, estejam eles relacionados ao trabalho do professor, à proposta do livro didático ou, ainda, à pesquisa acadêmica cujo interesse seja o ensino e a aprendizagem da matemática.

O nosso trabalho, como já foi dito, trata da análise de algumas páginas de um livro didático de matemática do 1º ano do Ensino Médio e para isso optamos por nos apoiar em três destas teorias - Campos Conceituais de Gérard Vergnaud porque dela percebemos que para que o aprendiz compreenda o conceito é importante que seja proposto o conjunto de situações e que ele desenvolva e use uma variedade de esquemas; Transposição Didática de Yves Chevallard porque é no livro didático que esta teoria se manifesta mais explicita, é no livro didático que estão os conhecimentos a serem ensinados; e Situações Didáticas de Guy Brousseau, porque acreditamos que ao olharmos para as atividades e sequência proposta pelo livro didático poderemos perceber qual a organização dada para estas pelos autores. Elas são, portanto, pertinentes ao desenvolvimento e alcance desta tarefa.

2.1. SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Nesta parte do texto iremos expor, de forma resumida, alguns conceitos da teoria dos Campos Conceituais que nos ajudem a entender as formas de abordagem do conteúdo matemático pelo professor ou autor de livro didático que favoreçam a construção de conceitos pelo aluno. Discutimos o que é conceito nesta teoria e os elementos que o constituem, a noção de situação e a ideia de campo conceitual.

O objetivo desta teoria, segundo seu criador, Gérard Vergnaud, citado por Jófili (2010, p. 6), “é o de fornecer um referencial que permita compreender as continuidades e rupturas entre conhecimentos, nos aprendizes, entendendo-se como conhecimentos tanto o saber fazer como o saber expresso”. Conhecimento aqui se refere tanto à competência como à concepção. O saber fazer está associado à competência e habilidade e são expressas de forma inteiramente operacional, já o saber expresso está associado às concepções e são expressas através de sequência de enunciados, expressões verbais ou outras representações simbólicas. Essas continuidades e rupturas têm sentidos diferentes para a criança e adolescente e para o adulto, para Albuquerque (2005, p. 16) “na aprendizagem da criança e do adolescente estão associadas ao desenvolvimento da estrutura cognitiva, já no adulto elas estão sob condições mais ligadas aos hábitos e formas de pensamento adquiridas”.

Vergnaud (apud ALBUQUERQUE, 2005) considera um conceito constituído de três conjuntos:

> S: conjunto de situações que dão um sentido ao conceito (referência). Cada elemento desse conjunto é uma concretização do conceito, um representante;
> I: conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (significado) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas;
> R: conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (p. 54).

No desenvolvimento ou aplicação de um conceito durante a aprendizagem é necessário considerar os três conjuntos simultaneamente.

O termo situação, específico do primeiro conjunto da definição de conceito, “pode ser pensado como um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço e tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações” (ALBUQUERQUE, 2005, p. 53). A palavra situação também tem o sentido de tarefa; uma situação complexa pode ser vista como uma combinação de tarefas. Em qualquer um dos casos é importante conhecer sua natureza e as dificuldades trazidas pela(s) tarefa(s), sendo importante ressaltar que os conhecimentos dos alunos são elaborados, principalmente, por aquelas que dão sentido aos conceitos.

Lopes (2011) afirma que Vergnaud destaca duas principais ideias com relação ao significado atribuído a uma situação: a primeira com relação à história, visto que os conhecimentos dos alunos são moldados pelo que eles já dominam; e a de variedade, pois existe uma grande variedade de situação. As situações é que dão sentido ao conceito, um conceito torna-se significativo através de um conjunto de situações (LOPES, 2011), por isso, para um sujeito compreender um conceito é preciso resolver uma variedade de situações.

Portanto, tanto o professor quanto o autor do livro didático precisam ficar atentos ao tipo de tarefas que estão propondo para o estudante; é preciso analisar se os problemas propostos são apropriados para a aquisição do conceito e se os mesmos têm sentido para o aluno. Além disso, a situação proposta não deve ir muito além da capacidade do aprendiz.

Vergnaud considera que o desenvolvimento cognitivo do indivíduo deve-se, principalmente, ao desenvolvimento de um grande conjunto de esquemas. Quando o sujeito se depara com uma situação, ele irá buscar um de seus esquemas para resolvê-la, quanto mais esquemas o indivíduo possuir mais facilmente será resolvida a situação. (CEMIN, 2008)

Vergnaud chama de esquema a “organização invariante da atividade do sujeito para uma classe de situações dadas” (FRÉNCHI, 1999, p. 164). Um esquema não é um modo de agir que serve para todas as situações. No esquema o que é invariante é a forma com que o individuo organiza seu comportamento, e não o próprio comportamento.

Para Vergnaud, citado por Moreira (2002, p 13), o esquema se refere necessariamente a situações ou classe de situações; ele faz a distinção entre:

- Classes de situações em que o sujeito possui, no seu repertório, em dado momento de seu comportamento, sob certas circunstâncias, as competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- Classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-os ao sucesso ou fracasso.

Um esquema gera ações e deve conter regras; a sequência de ações depende da situação. É no esquema que se devem pesquisar os conceitos-em-ação do sujeito, ou melhor, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito se torne operatória.

Os esquemas usados por crianças maiores e por adultos em alguma classe de situações podem ser muito mais elaborados, porém a ideia é a mesma: o esquema é a forma estrutural da atividade do sujeito.

Por isso, é importante verificar se no livro didático as situações propostas requerem do estudante sempre os mesmos esquemas e os que eles já possuem, ou se elas permitem ao menos a transformação e combinação de esquemas e, consequentemente, a construção de novos esquemas, contribuindo assim para o seu desenvolvimento em relação ao conceito em estudo.

Os invariantes operatórios são os mecanismos utilizados pelo sujeito para analisar e resolver as situações problema. Sobre eles repousa a operacionalidade do conceito. Eles podem ser implícitos quando estão associados ao saber fazer e explícitos quando ligados ao saber expresso.

Encontramos em Jófili (2010, p. 6) a noção de campo conceitual: “é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, em conexão uns com os outros.” Ainda, para Vergnaud (1983 apud JÓFILI, 2010), campo conceitual é um conjunto de problemas e situações cujo tratamento necessita de procedimentos, conceitos e representações variadas que estão estritamente ligadas entre si.

Foram três os argumentos principais que levaram Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 9) ao conceito de campo conceitual:

> Primeiro um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; segundo uma situação não se analisa com um só conceito; e por fim a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Vemos, então, que o domínio de certo campo conceitual ou mesmo a construção de um conceito não ocorre em alguns meses, tempo de sua abordagem em sala de aula, isso pode ocorrer durante anos. Além disso, o conceito do indivíduo se desenvolve – ao longo do tempo novos problemas que dão sentido ao conceito vão surgindo e, portanto, novos esquemas vão se formando.

2.2. SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Para o aluno em aprendizagem o significado de um conteúdo é fortemente influenciado pela forma em que o mesmo lhe é apresentado; por isso o professor deve estar sempre em busca de um tratamento didático para cada novo conteúdo de modo que o aluno tenha vontade de aprendê-lo, que o conceito central ensinado lhe seja atraente e tenha verdadeiro sentido.

Uma teoria que ajuda o professor nesta tarefa é a das Situações Didáticas, elaborada por Guy Brousseau, cujo objetivo é o estudo das diferentes formas de elaboração e apresentação do saber matemático ao estudante. Esta teoria conduz o professor a uma reflexão sobre a maneira de como preparar uma aula de certo conceito matemático, com o objetivo de fazer com que o mesmo seja significativo e relevante para o aluno.

Uma situação didática é:

> Um conjunto formado pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo especifico. (PAIS, 2001, p.65)

Esta teoria não é um modelo de como o professor deve preparar e/ou ministrar uma aula de matemática, ela objetiva fornecer condições que devem ser consideradas no processo de ensino aprendizagem. Ela é uma referência para o processo de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e saber – um tripé essencial para a mesma – sem a presença de um desses componentes possa ser que ocorra ensino aprendizagem, mas não ocorre o que se denomina situação didática a qual se caracteriza pela interação dos momentos de ação entre o aluno, o professor e o saber.

A relação citada é uma triangulação, com uma forte ligação entre os três elementos. Com relação a isso, Pais (2001) afirma que caso ocorra a ausência de um dos componentes não acontece uma situação didática, em suas palavras temos: “sem a presença de um professor, pode até ocorrer uma situação de estudo, envolvendo somente alunos e saber ou, ainda, sem a valorização de um conteúdo, podemos ter uma reunião entre professor e aluno, mas não o que estamos denominando de situação didática” (p. 66).

Em Pinto (2010, p. 27) encontramos que uma “situação didática sempre se caracteriza uma intenção do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo”. Para que o aluno construa um novo conhecimento, no contexto da sala aula, é preciso que o professor considere os diferentes aspectos didáticos no tratamento do conteúdo a ser estudado – as tarefas que os alunos realizarão à sequência em que as mesmas serão propostas aos alunos, a forma como eles trabalharão, se individualmente ou em grupo, o tempo que terão para fazê-la, o material que pode ser utilizado, como será desenvolvida a plenária (uma espécie de discussão no final de uma determinada situação das possíveis resoluções e soluções, dificuldades etc.), entre outros.

Um ponto fundamental é que o aprendiz interaja com a tarefa proposta, ou seja, que a mesma seja significativa para ele. O ensino de determinado objeto matemático ocorre em uma relação entre o aluno com este objeto, conectado por uma intervenção feita normalmente por um professor.

Uma situação ideal para essa teoria é que o professor elabore tarefas que façam com que o aluno retorne no tempo, tendo experiências com situações relativas às necessidades e construção do saber em pauta na própria matemática, propicie um ambiente de pesquisa em sala de aula de modo que o aluno possa refazer os passos feitos pelo cientista, saiba ou perceba quais foram as inquietações ou razões que conduziram ao surgimento do conceito estudado. Objetivando levar o aluno a aprender em pouco tempo um conceito matemático que levou muito tempo para ser percebido e desenvolvido.

A aprendizagem, segundo esta teoria, ocorre através da adaptação; o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos formados anteriormente ao novo conhecimento. Sobre isso Jófili (2010) afirma que o professor deve efetuar a devolução de um problema para o aluno e não a simples comunicação de um conhecimento, o professor deve fazer com que o aluno tome para si o dado problema, como se o problema fosse seu, a responsabilidade em resolver a tarefa é dada ou transferida para o aluno. “[...] as concepções atuais de ensino exigirão do professor que provoque o aluno – por meio da seleção sensata dos problemas que propõe as adaptações desejadas” (p. 4).

Em uma situação clássica e tradicional de ensino, o professor propõe um exercício e, muitas vezes, ou o seu enunciado indica o método que deve ser usado para a sua resolução ou o próprio professor sugere os passos a serem seguidos para chegar à solução. Neste caso, como o aluno já sabe o que deve ser feito, não existe desafio para ele e a aprendizagem pode ficar comprometida, pois a dada tarefa não foi vivida pelo aluno, o aluno não tomou para si o problema.

A matemática tem um papel de colaborar para que o aluno desenvolva certa autonomia e que a mesma tenha certa aplicabilidade no seu cotidiano. Um aspecto importante da situação didática que contribui com esta finalidade é que em sua constituição pode haver situações adidáticas. Uma situação adidática caracteriza-se, essencialmente, pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor. O sujeito é livre, ele se vê e se sente livre, não se sente controlado pelo professor, não há uma intenção didática. As situações adidáticas podem abranger situações-problemas, jogos, e tarefas extraescolares. Sobre a situação adidática, Freitas (1999) coloca que ela representa um momento importante, pois se o aluno consegue ser exitoso na mesma, isto significa que ele conseguiu resolver a tarefa por si só, consequentemente conseguiu sintetizar um conhecimento.

Brousseau ainda propõe quatro tipos de situações didáticas envolvidas no processo de ensino aprendizagem: situação de ação; situação de formulação; situação de validação; situação de institucionalização.

A situação de ação é aquela em que o aluno realiza procedimentos mais imediatos, buscando os conhecimentos que já dominam e que resulta na construção de um conhecimento de natureza mais experimental, operacional ou intuitiva do que simplesmente teórica. Segundo Medici (2007, p. 52) “Nesta fase, inicia-se a resolução da questão com conhecimentos já estáveis no aluno, e este passa a pesquisar o novo assunto, por meio da experimentação – tentativa e erro”.

Na situação de formulação o aluno já utiliza na resolução do problema algum modelo ou esquema teórico contendo um raciocínio mais elaborado. O saber não tem uma função de justificação. Os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-as às informações que devem comunicar. (MEDICI, 2007)

Na situação de validação o aluno já utiliza mecanismos de prova e o saber por ele elaborado passa a ser usado com uma finalidade essencialmente teórica. O aluno deve justificar a pertinência do modelo. “Cada aluno deve defender, perante o grupo, o modelo que encontrou para a resolução da situação proposta, e o grupo, mediado ou não pelo professor, deve validar ou não o modelo apresentado.” (MEDICI, 2007, p. 53)

A situação de institucionalização tem a finalidade de buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Após ouvir as situações encontradas pelo aluno, o professor deve explicar o novo conceito matemático, dando as nomeações adequadas. Há, portanto, a formalização do conteúdo.

Na situação de ação, formulação e validação o aluno é o protagonista responsável pela sua própria aprendizagem, ele se torna um pesquisador testando conjecturas, formulando hipóteses, provando, construindo modelos, teorias, conceitos e socializando os resultados, enquanto que o professor é mediador do processo, responsável pela devolução. Na situação de institucionalização o professor tem o papel de completar e finalizar o processo.

Convém destacar que essa sequência colocada serve apenas para facilitar o entendimento de cada momento, porém, esses acontecem de forma conjunta e interativa.

2.3. SOBRE A TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para examinar as adequações feitas entre um conhecimento científico para um conhecimento a ser ensinado Yves Chevallard desenvolveu a teoria da Transposição Didática. Para esse autor (apud ALMOULOUD, 2007) a transposição didática consiste nos mecanismos gerais que permitem a passagem de um objeto de saber a objeto de ensino.

A transposição didática atenta para como ocorre o desenvolvimento do conhecimento pelos cientistas e como este é aplicado no ambiente de aprendizagem, conversão do conhecimento totalmente formal para um conhecimento mais no nível dos aprendizes.

O principal objetivo da transposição didática é analisar as transformações pelas quais o saber científico, desde sua produção pela comunidade cientifica, passa até chegar ao momento em que o saber é vivenciado pelos alunos durante a prática de sala de aula.

Chevallard define transposição didática como sendo:

> Um conteúdo do saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. Este trabalho que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de transposição didática. (apud PAIS, 2001, p. 19)

Assim, podemos esquematizar a transposição didática como a transformação do saber sábio (produção resultante de uma pesquisa) em saber a ensinar (aquele que o professor seleciona para ensinar e está presente no currículo e nos manuais escolares). Este saber, geralmente, é apresentado nos livros didáticos e a partir das interferências do professor, ele é adaptado e transformado em saber disponível (saber aprendido). Ou seja, temos, então, a seguinte ordem na transposição didática: saber sábio – saber a ensinar – saber aprendido.

O saber apresentado pelos autores nos livros didático deve, com a interferência do professor, ser adaptado e transformado em saber disponível.

Logo o livro didático junto com o professor tem papel fundamental no resultado final do ensino aprendizagem ou, em outras palavras, no saber aprendido.

Para Pais (1999) durante a transposição didática as transformações ocorridas são influenciadas pelo que Chevallard chamou de “noosfera”. A noosfera consiste no conjunto das fontes de influência que atua na seleção dos conteúdos ou do saber a ensinar. Cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros fazem parte da noosfera. Os principais agentes da escolha de conteúdo são os programas escolares e os livros didáticos. A noosfera exerce forte influência na escolha dos conteúdos escolares; influencia, portanto, nos valores, objetivos e métodos do processo de ensino.

Há duas formas da transposição didática: transposição externa e transposição interna. Segundo Chevallard (apud FRÉCHET, 1999) a transposição externa ocorre quando estiver sendo estabelecido o saber cientifico, ou seja, na noosfera, já a transposição interna ocorre, geralmente, no espaço da sala de aula, durante a realização didática do conteúdo. A externa é realizada pelas instituições que regulamentam os textos parâmetros e a interna pelo professor durante o processo de ensino aprendizagem.

CAPÍTULO 3 - ASPECTOS SOBRE LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo trazemos algumas discussões sobre livro didático. Fazemos um breve relato histórico explicitando as diversas formas experimentadas pelos governantes para levar o livro didático a escola, desde 1929 até a criação do PNLD em 1985 e sua execução. Em seguida destacamos a importância e alguns dos papéis exercidos pelo livro didático. Fizemos, também, uma breve discussão sobre a contextualização no livro didático de matemática.

3.1. UM POUCO DE SUA HISTÓRIA

É importante trazer aqui um pouco da história do livro didático. Dentre as leituras feitas sobre livro didático destacamos o artigo “O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo” das autoras Freitas e Rodrigues (2007) no qual elas apresentam essa história com muita propriedade e por isso vamos nos limitar apenas a fazer um resumo das inúmeras formas experimentadas pelos governantes para levar o livro didático à escola, desde 1929 com a criação de um órgão específico para legislar sobre políticas do livro didático até a política de execução do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) pelo Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Há muitas décadas o Ministério da Educação (MEC) vem se preocupando com a presença do livro didático na escola. Isso começou em 1929 com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), que contribuía para a legitimação do livro didático nacional e auxiliava no aumento de sua produção.

Em 1938 foi instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que tratava da produção, do controle e da circulação das obras; em 1945 o Estado consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos; em 1966 o MEC e a Agência Norte-Americana para o

Desenvolvimento Internacional (USAID) realizam um acordo que permitia a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED) para coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático, o qual terminou em 1971 e foi extinta a COLTED, ano em que o INL passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), assumindo as atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros. Em 1976 foi extinto o INL e a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) torna-se responsável pela execução do PLIDEF, ano em que o governo iniciou a compra dos livros com recursos do FNDE e com as contribuições dos estados; em 1983 foi extinta a FENAME e criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) que incorpora vários programas de assistência do governo, incluindo o PLIDEF. Já nesta época propôs-se a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, com a inclusão das demais séries do ensino fundamental, que antes atendia até a quarta série.

Em 1985 o PLIDEF foi extinto e, por meio do decreto 91542/85 foi criado o PNLD, que estabelece alterações significativas, especialmente nos seguintes pontos (BRASIL, 2008):

- Garantia do critério de escolha do livro pelos professores;
- Reutilização do livro por outros alunos em anos posteriores, tendo como consequência a eliminação do livro descartável;
- Aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos;
- Extensão da oferta aos alunos de todas as séries do ensino fundamental das escolas públicas e comunitárias;
- Aquisição com recursos do governo federal, com o fim da participação financeira dos estados, com distribuição gratuita às escolas públicas.

Somente em 1996 os livros inscritos no PNLD passaram a ser avaliados pelo MEC; o processo de avaliação passou por vários aperfeiçoamentos até chegar ao que temos hoje. As obras passam pela avaliação de vários especialistas de Universidades brasileiras seguindo um edital criterioso. Os livros aprovados são apresentados aos diretores das escolas públicas de todo o país, os quais têm o papel de promover os debates entre os professores, no sentido de que eles possam fazer uma boa escolha. Posteriormente à escolha, as editoras ficam com a responsabilidade de enviar para cada escola os livros didáticos que serão utilizados durante três anos.

Atualmente os livros didáticos chegam à escola após uma escolha feita pelos seus professores. A escolha do livro para cada disciplina é feita pelos seus professores tendo como ajuda o Guia do Livro Didático que traz uma síntese da avaliação feita pelos especialistas; os professores têm a oportunidade de escolher os livros de sua preferência para serem por eles trabalhados por um período de três anos; o livro escolhido só poderá ser substituído por outro título na próxima avaliação do livro didático pelo PNLD.

Todo esse processo traz uma responsabilidade a mais para a escola e para o professor, ambos devem responder favoravelmente a esse investimento, em especial o professor; este necessita fazer com que o livro se torne um constante aliado seu e dos seus alunos. Isso parece de certa forma, ter alterado a relação do professor com o livro didático, aumentou a sua responsabilidade com a escolha do mesmo; ele necessita escolher um livro que o auxilie fortemente em seu trabalho de sala de aula e por isso deve fazer uma escolha qualificada de um livro adequado.

Além do PNLD o MEC executa outros dois programas que envolvem o livro didático: o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) criado em 2004 e o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA) criado em 2007 que hoje é chamado de PNLD EJA.

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação é quem executa o PNLD, o PNLEM e o PNLD EJA, sendo que a maioria dos recursos destinados para estes programas provêm do Governo Federal, através da arrecadação do salário-educação[9].

Percebemos a grande importância que os programas voltados para materiais didáticos possuem, notamos que é constante sua consolidação e que está sempre sendo expandido.

---

[9] O salário-educação, instituído em 1964, é uma contribuição social destinada ao financiamento de programas, projetos e ações voltados para o financiamento da educação básica pública e que também pode ser aplicada na educação especial, desde que vinculada à educação básica.

3.2. A IMPORTÂNCIA E O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO

O livro didático ainda ocupa um papel central no universo escolar atual, mesmo coexistindo com diversos outros materiais como quadros, mapas, enciclopédias, recursos tecnológicos, ele é um dos principais e essenciais materiais do ensino e da aprendizagem no contexto escolar.

O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e pode ser definido como um produto cultural híbrido, que se encontra no "cruzamento da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade" (STRAY, 1993, apud FREITAS E RODRIGUES, 2007, p. 2).

Costa e Allevato (2010, p. 2) afirmam que como o livro didático tem a função de contribuir para o ensino aprendizagem, é considerado como sendo "um interlocutor, isto é, um componente que dialoga tanto com o professor quanto com os alunos". Ele é, de fato, uma fonte indispensável de mediação do conhecimento.

Em nossa opinião, o livro didático é um material importante do cotidiano escolar, influencia diretamente nos processos de ensino do professor e da aprendizagem do aluno. No ambiente escolar o livro didático é um instrumento muito útil para professores e alunos, uma vez que ele serve tanto para o professor como apoio pedagógico auxiliando sua prática, como também para o aluno na realização de atividades.

Vimos que os autores que discutem sobre livro didático, cada um, a seu modo, enfatiza a importância do livro didático tanto para o professor como para o aluno. Dante (1996), por exemplo, destaca a importância do livro didático para o professor de uma maneira detalhada. Ele comenta que: "o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem ajuda do livro didático" (p.63). E acrescenta: "para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência" (p.63). Na opinião desse autor:

> Muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor [...] o livro didático de matemática é tão

> necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor (p. 63).

O livro didático é importante para o aluno porque traz benefícios para ele. Nas palavras de Dante (1996):

> Em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático (p. 63).

E continua: “A aprendizagem da matemática depende do domínio de conceitos e habilidades. O aluno pode melhorar esse domínio resolvendo os problemas, executando as atividades e os exercícios sugeridos pelo livro didático” (p.63).

Apesar de toda sua importância, o PNLD esclarece que os professores devem assumir um lugar de destaque:

> Embora o livro didático seja um recurso importante no processo de ensino-aprendizagem ele não deve ocupar papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que a sua autonomia pedagógica não seja comprometida. Não é demais insistir que, apesar de toda a sua importância, o livro didático não é o único suporte do trabalho pedagógico do professor (BRASIL, 2011, p. 19).

Segundo o PNLD 2012, Gérard e Roegiers em seus estudos de 1998, sob o título “Conceber e avaliar manuais escolares” listam algumas funções do livro didático que para eles são consideradas as mais importantes para alunos e professores, são elas:

Com relação ao aluno:

- Favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- Propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia;
- Consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- Auxiliar na auto avaliação da aprendizagem;
- Contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania. (BRASIL, 2012, p. 18-19)

Com relação ao professor:

- Auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;

- Favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referencia;
- Favorecer a formação didática pedagógica;
- Auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno. (BRASIL, 2012, p. 19)

Acreditamos que um bom livro didático deve levar o aluno a compreender os conteúdos, investigar, refletir, concluir, generalizar e aplicar seus conhecimentos, ele pode ser um grande motivador da aprendizagem e importante suporte para eliminação de dúvidas. Um bom livro didático deve prender a atenção do aluno.

Encontramos no PNLD do ano de 2010, três aspectos que são primordiais para que um livro didático de matemática possa exercer seu papel, quais sejam:

a) “Um bom livro didático deve conter informações e explanações sobre o conhecimento matemático que está em nosso cotidiano – um conhecimento que interfere e sofre interferências das práticas sociais do mundo atual e do passado” (BRASIL, 2010, p.11).

Isso diz respeito ao uso de situações reais do cotidiano que envolvem o conhecimento matemático. Além disso, essas situações devem ser as mais variadas possíveis, o que facilitaria a compreensão pelo aluno do conteúdo ou do conceito estudado.

b) “Deve adotar uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno” (BRASIL, 2010, p.11).

Em outras palavras, o livro didático deve articular os conhecimentos que o aluno traz de seu cotidiano com o conhecimento matemático a ser aprendido; isso é fundamental, uma vez que as situações propostas não são totalmente novas para ele, elas trazem em si aspectos que já lhes são familiares, ajudando-o a fazer uma ponte entre o conhecimento novo e o seu, a entender o significado do conceito estudado e seu uso e interferindo na sua construção. Tudo isso está relacionado com a situação de ação da teoria das Situações Didáticas do nosso referencial teórico.

c) “Deve oferecer atividades que o incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com seus colegas” (BRASIL, 2010, p.12).

Colocar o aluno como participante ativo de sua aprendizagem, isso nos remete à ideia de devolução de problema discutida por Brousseau, segundo a qual o professor deve fazer com que o aluno seja motivado para resolver a atividade como se o problema fosse seu. Isso aumenta a responsabilidade do professor em propor tarefas que estimule neste sentido.

Sendo assim a escolha do livro didático deve ser feita de forma consciente e crítica, de forma sistematizada, sem esquecer a realidade, a cultura e os conhecimentos dos alunos que irão utilizar o livro didático. É preciso observar se o livro é compatível com o nível dos alunos e com a realidade da escola. O professor é responsável pela escolha do livro didático e precisa estar preparado para analisar aspectos do livro didático que influenciam no processo de ensino aprendizagem.

É importante frisar que a escolha de um bom livro didático é feita considerando não apenas as indicações do PNLD, esta escolha dever ser feita, também, obedecendo aos critérios do professor, é ele quem conhece as necessidades dos alunos e deve usar suas experiências pedagógicas para fazer uma boa escolha, pois isso favorecerá o seu trabalho durante o processo de ensino aprendizagem.

Tudo isto vem nos mostrar o quanto é importante que seja feita uma boa escolha do livro didático já que o mesmo vai apoiar o trabalho do professor por no mínimo três anos. Neste sentido, ressaltamos ser de extrema significância que as escolas promovam momentos em que os professores possam discutir as questões relativas à escolha do livro didático para que os mesmos façam uma escolha acertada.

3.3. A CONTEXTUALIZAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

A partir da experiência de nossa prática em sala de aula e de conversas com colegas de curso, percebemos que muitos conteúdos matemáticos vêm sendo tratados didaticamente com pouco ou sem nenhum significado para o aluno. Parece-nos, também, que a ausência de significado desses conteúdos já se manifesta na abordagem do próprio livro didático.

É importante ressaltar que existem diferentes concepções sobre as formas de contextualização de conteúdos curriculares em livros didáticos em especial em livros didáticos de matemática. Nestes últimos anos a temática contextualização a qual nos referimos, tem sido muito discutida. Cada autor de livro didático, pesquisador ou professor pode vê-la, compreendê-la ou interpretá-la de uma forma e sob certo ponto de vista, no entanto, ninguém tem dúvida da necessidade de lançar mão dela na abordagem dos conteúdos e muitas são as defesas neste sentido, como vemos, por exemplo, em documentos vindos do MEC.

Para uma melhor abordagem dos conteúdos matemáticos pelo professor e aquisição destes por parte do aluno, os PCNEM (1999) afirmam que o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade e explicam:

> [...] é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (p. 43)

A contextualização, no PNLD (2011), é considerada como sendo um principio que assume o destaque notável no ensino atual, onde favorece a atribuição de significados aos conteúdos matemáticos. É por meio de situações em diferentes contextos que o aluno sente-se motivado a participar ativamente do seu processo de aprendizagem e consegue atribuir significado ao conceito em estudo.

Para Maioli (2012) a contextualização é aplicada em diferentes ambientes. “[...] as ideias a respeito de contextualização sofrem certa variação: ora é o conhecimento que é contextualizado, ora é o ensino, ora são as atividades” (p. 104). O mesmo autor afirma que o professor ver a contextualização no ensino apresentando diversos papeis, a saber: “de proporcionar aprendizagem de forma significativa, outros a veem como elemento de motivação e outros como facilitador no processo de ensino aprendizagem” (p. 106).

Segundo Pavanello (apud VASCONCELOS, 2008) contextualizar é a forma de o professor apresentar o conteúdo ao aluno de uma forma problematizadora, sendo uma situação que tenha sentido para o aluno e que seja compatível com uma circunstância real.

Em Vasconcellos encontramos uma definição que acreditamos deixar claro o que realmente é contextualizar:

> Contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que os conduza à sua compreensão. (2008. p. 49)

Notamos que o mais importante na contextualização é que o conteúdo abordado naquele momento tenha, acima de tudo, sentido para o aluno que aprende. Contextualizar é fazer relação com outros meios, buscando aprofundamento e ampliação para com o conteúdo que está sendo estudado. Segundo Vieira (2004) essa relação vai acontecer por meio de vivências, conhecimentos, práticas e julgamentos dos alunos.

No mesmo texto, esse autor afirma que o princípio da contextualização deve fazer a articulação entre o ensino da matemática com as diversas práticas sociais, endossando que não se pode deixar de considerar que outra forma de contextualizar é através das articulações dentro da própria matemática, entre os conteúdos desta disciplina.

Outro tipo de contextualização enfatiza os fatos históricos da construção e do desenvolvimento do conceito:

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (BRASIL, 1997, p.19).

Tudo isso aumenta a responsabilidade do professor em relação ao trabalho didático; ele precisa levar para suas aulas a prática da contextualização, uma vez que a mesma favorece ao aluno a construção de um determinado conceito.

> O tratamento contextualizado de um conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizam o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto de conhecimento uma relação de reciprocidade (BRASIL, 1998, p. 42).

Então para situar melhor, segundo os documentos oficiais existem três tipos de contextualização – sociocultural, interna à própria matemática e histórica.

O primeiro caso de contextualização é categorizado por Vieira (2004, p. 50) em três, quais sejam: “situação do cotidiano” (problemas e conhecimentos prévios); “abordagem interdisciplinar” (onde o aluno é levado a lidar com informações de outras disciplinas); “Preocupações universais” (Temas transversais). Nos PCNEM (1999) a contextualização sociocultural deve:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (p. 46)

A segunda forma de contextualizar é caracterizada como sendo feita uma abordagem aonde utiliza uma articulação, de conceitos dentro da própria matemática. Vieira (2004, p. 51) destaca que este tipo de contextualização pode ser divida em: “articulação entre as diversas áreas da matemática; articulação entre conhecimento novo e o já abordado e; articulação entre diferentes representações matemáticas”.

Por fim o terceiro caso tem como objetivo mostrar ao aprendiz como o conceito foi construído situando a sua origem, desenvolvimento e seus principais personagens.

Convém destacar, como está explicitado no PNLD (2011) que contextualizações artificiais, aonde uma situação é apresentada como uma forma de pretexto para a obtenção de dados numéricos usados em operações matemáticas se torna sem nenhum sentido, bem como aquelas situações que tentam ser do cotidiano, entretanto são irreais.

A preocupação em reservar uma parte do nosso trabalho para uma discussão sobre contextualização justifica-se devido a acreditarmos que a abordagem da contextualização nos livros didáticos favorece o processo de ensino aprendizagem.

Acreditamos que sendo feita uma adequada contextualização no processo de ensino aprendizagem, a mesma facilitará no aluno a compreensão do conhecimento, uma vez que o conteúdo estará sendo abordado de acordo com o interesse do aluno, da forma que estaremos resgatando as relações com vivências, conhecimentos, práticas e julgamento do aluno; tornando-o, também, participante consciente do seu processo de construção do conhecimento.

Temos a convicção que situações reais devem fazer parte do currículo escolar e que o papel de fazer com que a matemática seja enxergada pelo aluno em situações de seu cotidiano é de responsabilidade dos professores.

A discussão que fizemos aqui nos levou mais ainda a perceber que a contextualização de conteúdos escolares não é algo simples e que sua discussão não se limita a essas páginas; existem diversos víeis sobre este tema o que possibilita muitas investigações, abordagens variadas e ricas.

CAPÍTULO 4 – TEXTO RELATIVO À ANÁLISE REALIZADA

Neste capítulo apresentamos o texto descritivo da análise realizada das páginas 68 a 83 do Capítulo 3 do Volume 1 da coleção “Conexões com a Matemática”, elaborada coletivamente, organizada e publicada pela editora Moderna em São Paulo no ano de 2010, sob a responsabilidade da professora editora Juliana Matsubara Barroso.

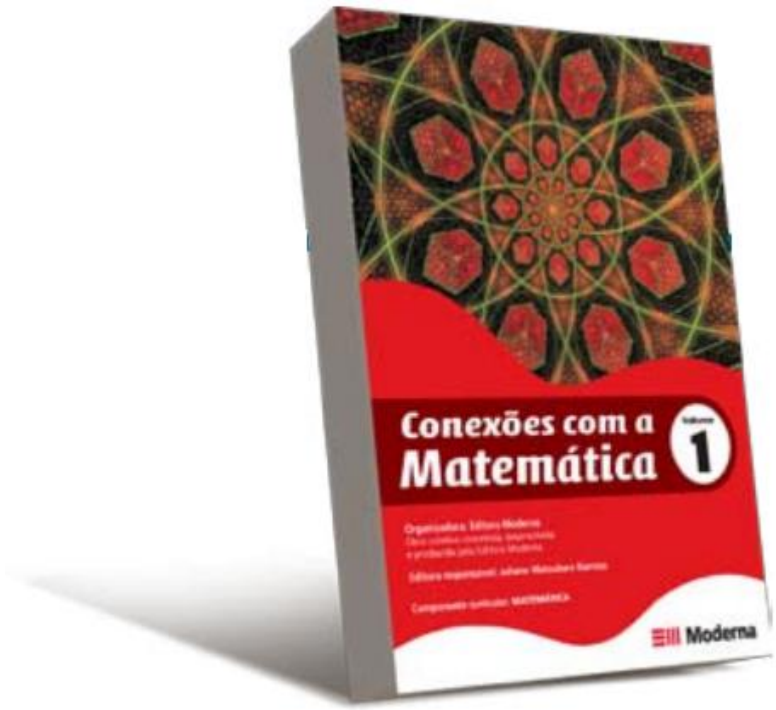


Figura 1: Capa do livro

A coleção em que este livro está inserida é composta por três volumes um para cada série do Ensino Médio. A explanação dos conteúdos em todos os capítulos dos volumes segue predominantemente a sequência – exemplos ou situações em sua maioria relacionadas com práticas sociais, formalização do conteúdo, exercícios resolvidos e por fim exercícios propostos. No final de cada capítulo é colocada uma lista de exercícios complementares, o resumo do capítulo e uma autoavaliação.

Cada volume dessa coleção está organizado em unidades temáticas abrangentes, estas estão divididas em capítulos cujos títulos indicam um tema ou conteúdo menos geral, porém conectado com o da unidade, os capítulos por sua vez são constituídos de itens ou subconteúdos que contém a explanação sobre um conteúdo matemático mais específico ligado ao tema do capítulo.

No volume 1, por exemplo, temos 5 unidades assim constituídas:

Unidade 1: “Trabalhando com a Informação” tem apenas um capítulo sob o título “Organização e apresentação de dados”.

Unidade 2: “Introdução ao estudo das funções” possui dois capítulos, “Conjuntos” e “Funções”.

Unidade 3: “Funções Polinomiais”, também tem dois capítulos, “Função afim” e “Função quadrática”.

Unidade 4: “Outras funções importantes e aplicações” e possui mais três capítulos, “Função exponencial”, “Função logarítmica” e “Sequências”.

Unidade 5: “Introdução a trigonometria”, com dois capítulos “A semelhança e os triângulos” e “Triângulo retângulo”.

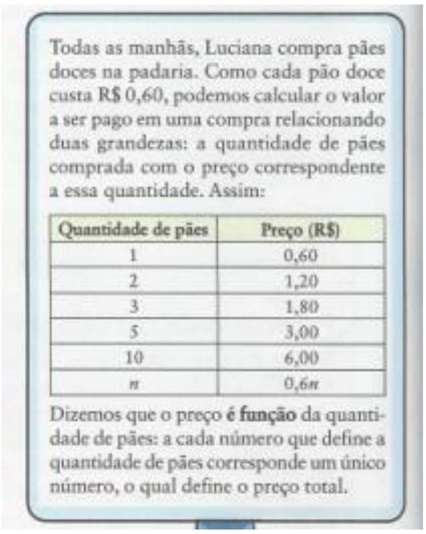
Em geral, cada capítulo do volume 1 traz exercícios resolvidos, exercícios propostos e exercícios complementares, estes últimos se constituem de exercícios das duas primeiras modalidades. Quase sempre, após a discussão de cada subconteúdo relacionado ao conteúdo central do capítulo, aparecem os exercícios resolvidos e, em seguida, os propostos. Os resolvidos são indicados pela letra maiúscula R seguida de um número, R1, R2, ..., R21. Os exercícios propostos são indicados apenas por um número; os exercícios propostos e os resolvidos dentro dos exercícios complementares seguem a mesma numeração.

A nossa análise diz respeito à introdução do conceito de função que faz parte da Unidade 2. Embora essa unidade inclua dois capítulos muito importantes, restringimo-nos a analisar apenas os dois primeiros itens do Capítulo 3 com o objetivo de verificar se duas das funções do livro didático listadas por Gérard e Roegiers, por nós apresentadas na página 44, são possíveis de ocorrer, a saber: “favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes” em relação ao aluno e “auxiliar o professor no planejamento didático pedagógico e na gestão das aulas” em relação ao professor. Em outras palavras, queremos saber se a explanação desenvolvida no livro didático em questão ao introduzir o conceito de função favorece ao aluno a compreender o que é função e auxilia o professor no planejamento didático do saber relativo ao item 1. Conceito de função e ao item 2. Gráfico de uma função da Unidade 3 e na gestão de suas aulas. Na verdade, vamos verificar, com base nas teorias por nós discutidas no Capítulo 2 deste texto, se as funções do livro didático explicitadas no parágrafo anterior são possíveis de serem alcançadas pelo aluno e pelo professor, respectivamente.

No texto, quando citamos o livro didático analisado sempre estamos nos referindo ao volume 1 desta coleção.

O capítulo 3, sob o título Funções, inicia a discussão sobre o objeto função com três situações (p.68-69): duas sob o título “A ideia de função no cotidiano” e uma sob o título “Função na Geometria”. As três situações não são problemas para o aluno resolver, não há nada a ser feito pelo aluno, elas já estão prontas e relatam fatos - compra de pães na padaria por uma pessoa, divulgação da previsão do tempo de um dia em uma cidade e exibição da relação da medida do lado e do perímetro de um triângulo.

Percebemos que os autores começam muito cedo a usar a palavra função, nas duas primeiras situações já a encontramos. Na primeira, após uma tabela que explicita a correspondência entre a quantidade de pães comprados e o preço a ser pago, os autores escrevem: “Dizemos que o preço **é função** da quantidade de pães: a cada número que define a quantidade de pães corresponde um único número, o qual define o preço total” (p. 68); na segunda, depois da tabela que relaciona em um mês a temperatura média de uma cidade a cada dia, aparece: “dizemos que a temperatura média **é função** do dia do mês” (p. 69). Nos dois casos, podemos substituir a expressão **é função** pela palavra **depende,** no entanto, os trechos explicativos que aparecem em ambos não explicitam isso; eles trazem implicitamente a ideia de correspondência unívoca entre as quantidades associadas à palavra função. No segundo caso, os autores trazem a ideia de correspondência não unívoca quando escrevem: “com a temperatura média, não é possível ter certeza de qual é o dia do mês, já que existe mais de uma possibilidade para o dia. Dizemos, então, que o dia do mês **não é função** da temperatura média” (p. 69). Os dois trechos são finalizados sem nenhuma discussão sobre a variação das quantidades e a relação de dependência entre elas, há ênfase, somente, no aspecto unicidade da correspondência sem discutir também o conceito de correspondência. Além disso, nessas duas situações introdutórias, percebemos certa pressa dos autores no uso das expressões **é função** e **não é função**, sem familiarização alguma do aluno com aspectos essenciais do objeto matemático chamado função.



Todas as manhãs, Luciana compra pães doces na padaria. Como cada pão doce custa R$ 0,60, podemos calcular o valor a ser pago em uma compra relacionando duas grandezas: a quantidade de pães comprada com o preço correspondente a essa quantidade. Assim:

Quantidade de pães	Preço (R$)
1	0,60
2	1,20
3	1,80
5	3,00
10	6,00
n	$0{,}6n$

Dizemos que o preço **é função** da quantidade de pães: a cada número que define a quantidade de pães corresponde um único número, o qual define o preço total.

Figura 2: Primeira situação (p. 68)

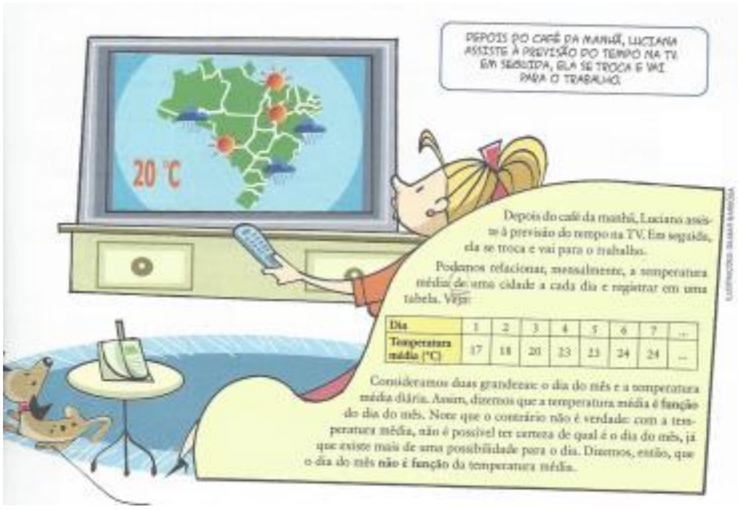
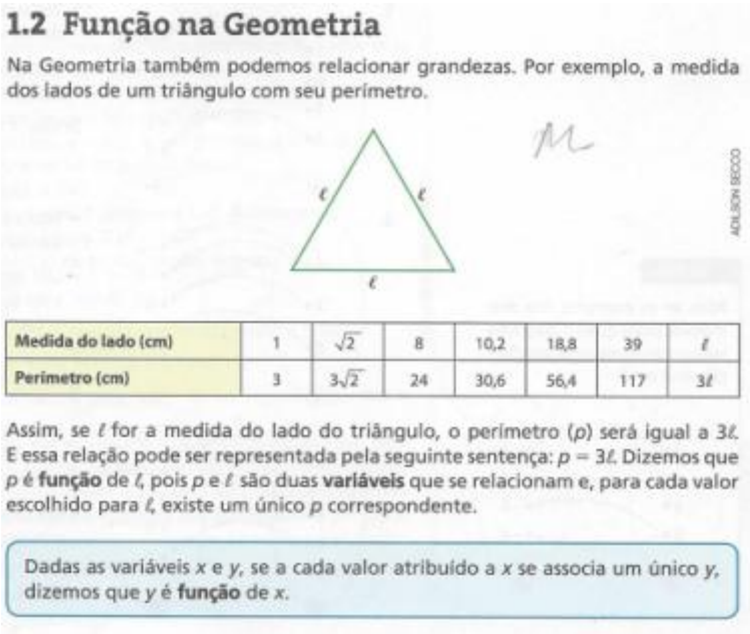


Figura 3: Segunda situação (p. 69)

A próxima situação tratada pelos autores é a que aborda Função na Geometria. Os autores escrevem “Na Geometria também podemos relacionar grandezas” (p. 69), mas na verdade relacionam duas medidas (medida do lado e medida do perímetro de um triângulo) da grandeza comprimento. Nessa situação, eles introduzem o conceito de variável precocemente e sem discuti-lo matematicamente, quando usam a letra ℓ para indicar a medida do lado e a letra p para o perímetro, ou melhor, para indicar a medida do perímetro e chamam as letras de variáveis. Além disso, fazem uma generalização da lei da correspondência quando explicitam a sentença $p=3\ell$, embora use uma fórmula da geometria métrica conhecida pelos alunos. Escrevem que "p é **função** de ℓ" e já definem quando é que uma variável é função de outra. Abordam, de novo, implicitamente a noção de correspondência unívoca quando escrevem: para cada valor escolhido para ℓ, existe um único p correspondente.



1.2 Função na Geometria

Na Geometria também podemos relacionar grandezas. Por exemplo, a medida dos lados de um triângulo com seu perímetro.

Medida do lado (cm)	1	$\sqrt{2}$	8	10,2	18,8	39	ℓ
Perímetro (cm)	3	$3\sqrt{2}$	24	30,6	56,4	117	3ℓ

Assim, se ℓ for a medida do lado do triângulo, o perímetro (p) será igual a 3ℓ. E essa relação pode ser representada pela seguinte sentença: $p = 3\ell$. Dizemos que p é **função** de ℓ, pois p e ℓ são duas **variáveis** que se relacionam e, para cada valor escolhido para ℓ, existe um único p correspondente.

Dadas as variáveis x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é **função** de x.

Figura 4: Terceira situação (p. 69)

Após apresentar apenas três situações envolvendo a ideia de função, os autores afirmam: "Você já percebeu como a ideia de função está presente em nosso cotidiano" (p. 70). Achamos que as três situações apresentadas não são suficientes, ou melhor, não respaldam essa afirmação. Para a compreensão do que é função, o aluno precisaria trabalhar com uma grande variedade de tarefas que deem sentido ao conceito de função, como propõe Vergnaud de acordo com as discussões feitas por nós.

Além disso, o livro traz a definição de função sob o título de "A definição matemática de função" utilizando a ideia de correspondência sem nenhuma discussão sobre ela. Achamos que o livro apresenta a definição do que é função muito cedo; para Brousseau a institucionalização deve ser o último passo na sequência de atividades planejada pelo professor para a abordagem de um conceito; a institucionalização foi feita antes mesmo da proposição de situações de ação para os alunos, situações nas quais os alunos usam conhecimentos adquiridos relacionados ao objeto que está sendo estudado.

Ao definir função os autores usam palavras e expressões sem discutir os seus significados matemáticos, a saber: variável dependente, variável independente, aplicação, transformação, lei matemática. Em geral, em nível de Ensino Médio, só se trabalha com funções nas quais os conjuntos de partida e de chegada são numéricos, não sendo necessário o uso das denominações aplicação e transformação substituindo função.

Para comentar sobre as expressões variável dependente e variável independente o livro traz: “Se y está definido em função de x, chamamos x de **variável dependente** e y de **variável independente**” (p. 70). Essa é uma explicação puramente abstrata, que não ajuda o aluno a entender claramente o que é variável, variável dependente e variável independente. Gostaríamos de saber, por exemplo, o que se passa na cabeça do aluno ao ler a afirmação: “Se y está definido em função de x [,,,]”.

Achamos conveniente ter havido uma discussão mais aprofundada sobre estes termos, principalmente fazendo uso da correspondência entre dois conjuntos de números. A sua representação não pode ficar limitada a tabelas com dados específicos, trazendo a correspondência elemento a elemento e restringindo-se a um número finito dos elementos do conjunto de partida. O aluno precisa perceber que para manejar com conjuntos infinitos é necessária uma representação simbólica para seus elementos; sem isso teríamos dificuldade de explicitar a lei da correspondência – a generalização só é possível com o uso da variável em termos matemáticos, através da qual se obtém o que é denominado no livro por “lei matemática”; uma expressão usada no texto e explicada em apenas 3 linhas.

Acreditamos que a forma usada pelos autores não deixa claro a matemática envolvida em cada uma das expressões referidas. Sentimos falta de situações onde poderia está sendo trabalhado com os alunos noções de generalização, isso lhes ajudaria na compreensão de como expressar uma lei matemática e para que obtê-la.

A abordagem dos autores exige que o professor faça algumas transformações no texto e explique, detalhadamente, os aspectos implícitos em cada situação. Em nossa opinião, o saber disponibilizado pelo livro didático deve sofrer a interferência do professor adaptando-o para seus alunos.

Logo após a definição de função os autores fazem uso da representação da correspondência por meio de diagramas de flechas. Parece-nos que o objetivo é fazer com que o aluno perceba quando uma correspondência entre dois conjuntos é ou não uma função, apenas para casos em que o conjunto de partida e o de chegada são conjuntos finitos. Essa representação, de certa forma, ajuda nessa percepção, no entanto, a maioria das funções trabalhadas é com domínio e contradomínio no conjunto dos números reais.

Notamos, portanto, que na introdução do conceito de função, que inclui a definição, nada foi proposto para o aluno, apesar de os autores já terem apresentado formalmente o conceito de função e conceitos com ele relacionados ou, em outras palavras, que fazem parte do seu campo conceitual. Somente a partir da página 72 o livro começa a propor exercícios para o aluno.

No capítulo 3, os exercícios resolvidos R1 e R2 (p. 71-72) trazem em seu enunciado uma tabela preenchida que é ou será usada para respondê-los e têm uma estrutura muito parecida - explicitam as variáveis dependentes e independentes; trazem a “lei matemática” da correspondência; pedem para calcular um valor da imagem dando um valor do domínio e vice versa - eles solicitam do aluno o mesmo esquema de resolução.

O R1 trata da correspondência estabelecida ente a medição de diferentes intervalos de tempo e a distância percorrida por um automóvel nestes intervalos, “Tempo (h) → Distância (km)”. No item b) os autores pedem a expressão da “lei matemática”, no entanto, essa expressão já é dada na própria tabela, afirmam que a variável dependente (y) é a distância e a variável independente (x) é o tempo. Em Campiteli (2006) encontramos a seguinte discussão para a palavra variável: “... supondo que E seja um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, convenciona-se representar qualquer um dos seus elementos por um símbolo, por exemplo, x. A esse símbolo, chamamos variável” (p. 36).

Exercícios resolvidos

R1. Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, em cada intervalo de tempo, verificou-se a distância percorrida.

Esses dados, tempo em hora e distância percorrida em quilômetro, foram registrados na tabela:

Tempo (h)	0,2	0,4	0,8	1,6	2	x
Distância (km)	10	20	40	80	100	$50x$

a) Indicar as variáveis (dependente e independente) relacionadas nessa situação.
b) Expressar a lei matemática que associa a distância percorrida com o tempo.
c) Calcular a distância quando o tempo é igual a 2,8 h.
d) Calcular o tempo quando a distância é 330 km.
e) Como seria a resposta do item **d** se ela fosse dada em horas e minutos?
f) Observando os valores da tabela, é possível concluir que a distância percorrida por esse móvel é diretamente proporcional ao tempo gasto para percorrê-la?

Resolução

a) Assumindo que a distância percorrida varia em função do tempo, a variável dependente (y) é a distância, e a variável independente (x) é o tempo.
b) Pelos dados da tabela percebemos que, para determinar a distância y em função de certo tempo x, devemos multiplicar por 50 o número real positivo que representa x.
Temos, então, a seguinte lei: $y = 50x$ ou $f(x) = 50x$.
c) Queremos calcular $f(x)$ para $x = 2{,}8$, o que indicamos por $f(2{,}8)$.
Substituindo o valor de x na lei da função, temos:
$f(2{,}8) = 50 \cdot 2{,}8 \Rightarrow f(2{,}8) = 140$
Portanto, em 2,8 horas, o móvel percorreu 140 quilômetros.
d) Queremos agora calcular x para $f(x) = 330$.
Substituindo o valor de $f(x)$ na lei da função, temos:
$330 = 50x \Rightarrow x = \frac{330}{50} \Rightarrow x = 6{,}6$
Logo, para percorrer 330 quilômetros, o móvel gastou 6,6 horas.
e) 0,6 h equivale a $0{,}6 \cdot 60$ min, ou seja, 36 min.
Portanto, a resposta do item **d** também pode ser expressa por 6 h e 36 min.
f) Comparando a variação dos valores do tempo e das distâncias, percebemos que: quando o tempo duplica, a distância também duplica; quando o tempo quadruplica ocorre o mesmo com a distância; quando o tempo quintuplica, a distância também fica multiplicada por cinco etc. Ou seja, a razão entre a distância e o tempo é constante, portanto essas variáveis são diretamente proporcionais.

Figura 5: Exercício resolvido (p. 71)

Portanto, é preciso que os autores tratem melhor os conceitos trabalhados, dando um maior grau de atenção e discussão para estes e trazendo uma explicação clara e ao mesmo tempo correta.

O R2 aborda a correspondência entre o valor a ser pago, pelo passageiro, por uma corrida de táxi ao percorrer determinada distância, alguns pares de números desta correspondência são colocados em uma tabela com duas colunas, no topo da primeira coluna aparece “Quilômetro rodado” e em cada linha desta coluna está escrito um intervalo da forma “n ≤ x < n +1”, n número natural; logo cada intervalo contém apenas o número n do conjunto dos números naturais. No topo da segunda está escrito “Valor a ser pago (R$)” e em cada linha está o cálculo do valor a ser pago usando a fórmula “y = 5,00 + 1,20.n” onde x e y são números reais, cálculo feito para o número natural n do intervalo.

R2. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: R$ 5,00 a bandeirada mais R$ 1,20 por quilômetro rodado. Conforme a tabela:

Quilômetro rodado	Valor a ser pago (R$)
$0 \leq x < 1$	$5{,}00 + 1{,}20 \cdot 0 = 5{,}00$
$1 \leq x < 2$	$5{,}00 + 1{,}20 \cdot 1 = 6{,}20$
$2 \leq x < 3$	$5{,}00 + 1{,}20 \cdot 2 = 7{,}40$
$3 \leq x < 4$	$5{,}00 + 1{,}20 \cdot 3 = 8{,}60$
$n \leq x < n + 1$	$5{,}00 + 1{,}20 \cdot n = y$

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Pode-se estabelecer uma função entre essas grandezas? Em caso positivo, quais seriam as variáveis (dependente e independente) dessa função?
b) Qual é a tarifa para uma viagem de 3,4 km?
c) Qual é a tarifa de táxi para uma viagem de 6,5 km?
d) Rita gastou R$ 23,00 em uma viagem de táxi nessa cidade. Qual foi o número inteiro de quilômetros dessa viagem?

Resolução

a) Sim, pode-se estabelecer uma função: para cada número real positivo que representa o total de quilômetros de uma viagem (variável independente, a qual chamaremos de x), associa-se um único valor de tarifa (variável dependente, a qual chamaremos de y).
b) Como 3,4 está entre os inteiros 3 e 4, de acordo com a tabela, a tarifa é de R$ 8,60.
c) Como 6,5 está entre 6 e 7, para calcular a tarifa quando $x = 6{,}5$, devemos substituir n por 6 em: $y = 5{,}00 + 1{,}20\ n$.
Portanto, a tarifa é R$ 12,20.
d) Queremos agora calcular n, $n \in \mathbb{N}$, para $y = 23$.
Substituindo o valor de y em $y = 5{,}00 + 1{,}2\ n$, temos:
$$23 = 5 + 1{,}2 \cdot n \Rightarrow n = \frac{23 - 5}{1{,}2} \Rightarrow n = 15$$
Logo, Rita fez uma viagem de 15 quilômetros.

Figura 6: Exercício resolvido (p. 72)

Para nós não ficou claro o que os autores propuseram. Qual é, então, o domínio da correspondência explicitada na tabela?

Da forma como está escrito na primeira coluna da tabela, podemos deduzir que o domínio da função é constituído de intervalos do conjunto dos números reais, no entanto, o cálculo é feito apenas para o número natural n de cada intervalo. O exercício desconsidera que nos intervalos dados existem, por exemplo, infinitos números racionais. Isso pode trazer dificuldades para o aluno se ele estiver em condições de perceber esses detalhes. Mesmo em situações práticas, para os cálculos do valor a ser pago por uma corrida de táxi não são considerados apenas os números inteiros, podemos ter, por exemplo, uma corrida com 1,5km rodados e neste caso o usuário pagaria 5,00 + 1,20 x 1,5 = 6,80 e não 6,20 como é apresentado.

Além disso, pelo cálculo feito na segunda coluna, para cada um dos intervalos explicitados há apenas um número real como imagem, ou seja, a função é constante em cada intervalo "n ≤ x < n +1", n número natural, x número real. Nada disso é discutido ou pelo menos comentado pelos autores.

O exercício proposto 1 traz uma tabela, na qual aparece "Faixa de consumo (m^3) → Valor (R$)", explicitando a correspondência entre cada faixa de consumo de água e o valor a pagar por esse consumo. Observando a tabela vemos que, de novo, o domínio da função é constituído de intervalos de números reais, denominado "faixa de consumo". No primeiro intervalo, de 0 a 10m^3, a imagem é R$ 13,10 e a função é constante; nos outros intervalos o valor a ser pago depende da quantidade de água consumida e em cada intervalo a "lei matemática" da função muda, provavelmente foi por isso que não se pediu tal lei. Nada disso foram discutidos e destacados pelos autores, eles perderam uma oportunidade de fazer com que o aluno percebesse aspectos novos relativos a uma função, como por exemplo, a existência de função cuja lei é expressa por mais de uma sentença.

Exercícios propostos

1. Para calcular o preço do consumo de água de seus usuários, uma companhia de saneamento básico aplica a seguinte tabela:

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R$)
Até 10	13,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,25 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,10 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 5,70 por m^3

Hidrômetro, São Paulo, 2008.

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

a) Quem consome 9 m^3 em um mês paga mais do que quem consome 7 m^3 de água?

b) Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3? E de 27 m^3?

c) No mês em que houve um vazamento de água na casa de Flávia, ela recebeu uma conta de R$ 696,40. Qual foi o consumo de água na casa de Flávia?

Figura 7: Exercício proposto (p. 72)

O exercício proposto 3 (p.73) traz uma tabela explicitando "Número de locações → Preço (em R$)". A expressão "Número de locações" e "Preço" não nos parecem adequadas, por duas razões: os números 1, 2, 3 e 4 referemse às quantidades de DVD locados, uma vez que podemos locar 3 DVD em uma mesma locação. Além disso, o preço (R$ 5,00) diz respeito a locação de um DVD; para quantidades superiores a 1, o correto seria Valor a ser pago. Achamos, então, que a correspondência deveria ser entre o Número de DVD locados → Valor a ser pago. Devemos dar grande importância à linguagem utilizada, tanto nós professores durante as aulas, mas também os livros didáticos precisam abordar uma linguagem correta, sem erros.

3. Observe na tabela o número de locações de DVDs realizadas por uma locadora e o preço total correspondente.

Número de locações	Preço (em R$)
1	5
2	10
3	15
4	20

a) O preço da locação é dado em função de quê?
b) Qual é a variável independente nessa situação?
c) E qual é a variável dependente?
d) Escreva uma lei matemática que associe o número x de locações com o preço y.
e) Qual é o preço de 20 locações de DVDs?
f) Quantas locações correspondem ao preço de R$ 50,00?

Figura 8: Exercício proposto (p. 73)

Ainda observando R2 e os exercícios propostos 1 e 3, vemos que os elementos do contradomínio de cada um deles são valores monetários - "valor a ser pago (R$)", no entanto, as expressões usadas nas tabelas para representar a variável dependente são diferentes: em R2 aparece "valor a ser pago (R$)", no exercício proposto 1 vemos "Valor (R$)" e no exercício proposto 3 temos "Preço (em R$)". Para esses casos, achamos que a expressão "valor a ser pago (R$)" é a mais adequada; a indicação "valor (R$)" parece-nos ser incompleta; a indicação "Preço (em R$)" é inadequada – preço é o valor a ser pago pela compra de uma unidade de qualquer objeto ou de qualquer coisa, valor a ser pago é o total a ser pago a depender do preço por unidade. Segundo Vergnaud, a linguagem é um aspecto fundamental na formação do conceito, por isso ela deve ser precisa e correta para auxiliar o aluno na compreensão clara de significados e na construção da sua própria linguagem.

No exercício 4 (p. 73) é dada a expressão algébrica da "lei matemática" da correspondência a ser usada na sua resolução. Neste caso, diferentemente do exercício 3 no qual o aluno precisa escrever a “lei matemática”, ele vai usar a lei dada. Poderíamos pensar que neste exercício o aluno é levado a criar novo esquema de resolução, entretanto, as perguntas são muito parecidas com as dos outros, as quais não promoverão mudanças.

4. Um fabricante de parafusos verificou que o preço de custo p (em real) de cada parafuso dependia da medida x (em milímetro) do diâmetro da base de cada um e podia ser calculado pela lei matemática $p(x) = 0{,}01x + 0{,}06$.

a) Qual é a variável independente nessa situação? E a dependente?

b) Qual é o preço de custo de 1 parafuso com base de 3 milímetros de diâmetro?

c) Quantos milímetros tem a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11?

d) Qual é o custo de 500 parafusos com base de 3 milímetros de diâmetro?

e) O fabricante vendeu 100 parafusos com base de 4 milímetros de diâmetro por R$ 20,00. Em relação ao preço de custo, qual foi o percentual de lucro nessa venda?

Figura 9: Exercício proposto (p. 73)

A abordagem dos autores exige que o professor faça algumas transformações no texto e explique, detalhadamente, os aspectos implícitos em cada situação. Em nossa opinião, o saber disponibilizado pelo livro didático deve sofrer a interferência do professor adaptando-o para seus alunos.

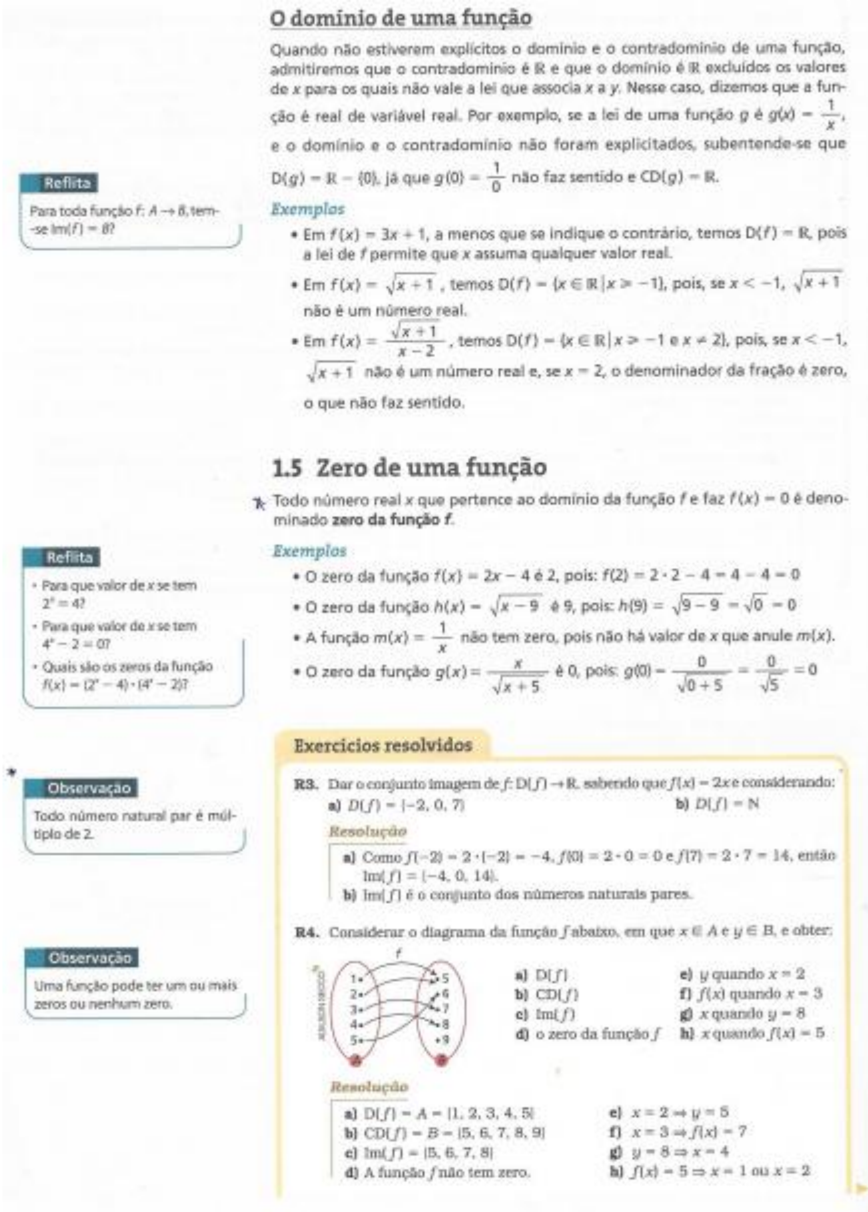
Até a página 73 percebemos que a variação de situações foi limitada, para os alunos foram propostos apenas 5 exercícios, ficando a maior parte do trabalho nas mãos do professor.

Terminada a parte que introduz o conceito de função, tem início a abordagem de mais dois subconteúdos, intitulados “Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função” e “Zero de uma função”.

Em nossa opinião, a parte teórica desses dois subconteúdos está clara e de fácil entendimento para o leitor; é dada maior ênfase ao domínio do que aos outros conjuntos.

Os autores poderiam, antes da formalização, ter retomado alguns dos exercícios anteriores para determinar domínio, contradomínio e o conjunto imagem, uma vez que estes conceitos já foram trabalhados implicitamente. Essa tarefa seria muito oportuna para os alunos, por causa dos aspectos por nós analisados em R2 e no exercício proposto 1, p. 72, por exemplo.

Percebemos que tanto os exemplos como os exercícios (p.74-75) utilizados pelos autores têm predominância do registro simbólico. Isso não é por acaso; foi justamente esse tipo de representação que mais perdurou no desenvolvimento do conceito historicamente.



O domínio de uma função

Quando não estiverem explícitos o domínio e o contradomínio de uma função, admitiremos que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e que o domínio é $\mathbb{R}$ excluídos os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y. Nesse caso, dizemos que a função é real de variável real. Por exemplo, se a lei de uma função g é $g(x) = \frac{1}{x}$, e o domínio e o contradomínio não foram explicitados, subentende-se que $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, já que $g(0) = \frac{1}{0}$ não faz sentido e $CD(g) = \mathbb{R}$.

Reflita

Para toda função $f: A \to B$, tem-se $Im(f) = B$?

Exemplos

- Em $f(x) = 3x + 1$, a menos que se indique o contrário, temos $D(f) = \mathbb{R}$, pois a lei de f permite que x assuma qualquer valor real.
- Em $f(x) = \sqrt{x+1}$, temos $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real.
- Em $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$, temos $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 2\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real e, se $x = 2$, o denominador da fração é zero, o que não faz sentido.

1.5 Zero de uma função

Todo número real x que pertence ao domínio da função f e faz $f(x) = 0$ é denominado **zero da função f**.

Reflita

- Para que valor de x se tem $2^x = 4$?
- Para que valor de x se tem $4^x - 2 = 0$?
- Quais são os zeros da função $f(x) = (2^x - 4) \cdot (4^x - 2)$?

Exemplos

- O zero da função $f(x) = 2x - 4$ é 2, pois: $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$
- O zero da função $h(x) = \sqrt{x-9}$ é 9, pois: $h(9) = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0$
- A função $m(x) = \frac{1}{x}$ não tem zero, pois não há valor de x que anule $m(x)$.
- O zero da função $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+5}}$ é 0, pois: $g(0) = \frac{0}{\sqrt{0+5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$

Exercícios resolvidos

Observação

Todo número natural par é múltiplo de 2.

R3. Dar o conjunto imagem de $f: D(f) \to \mathbb{R}$, sabendo que $f(x) = 2x$ e considerando:

a) $D(f) = \{-2, 0, 7\}$ b) $D(f) = \mathbb{N}$

Resolução

a) Como $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$, então $Im(f) = \{-4, 0, 14\}$.

b) $Im(f)$ é o conjunto dos números naturais pares.

Observação

Uma função pode ter um ou mais zeros ou nenhum zero.

R4. Considerar o diagrama da função f abaixo, em que $x \in A$ e $y \in B$, e obter:

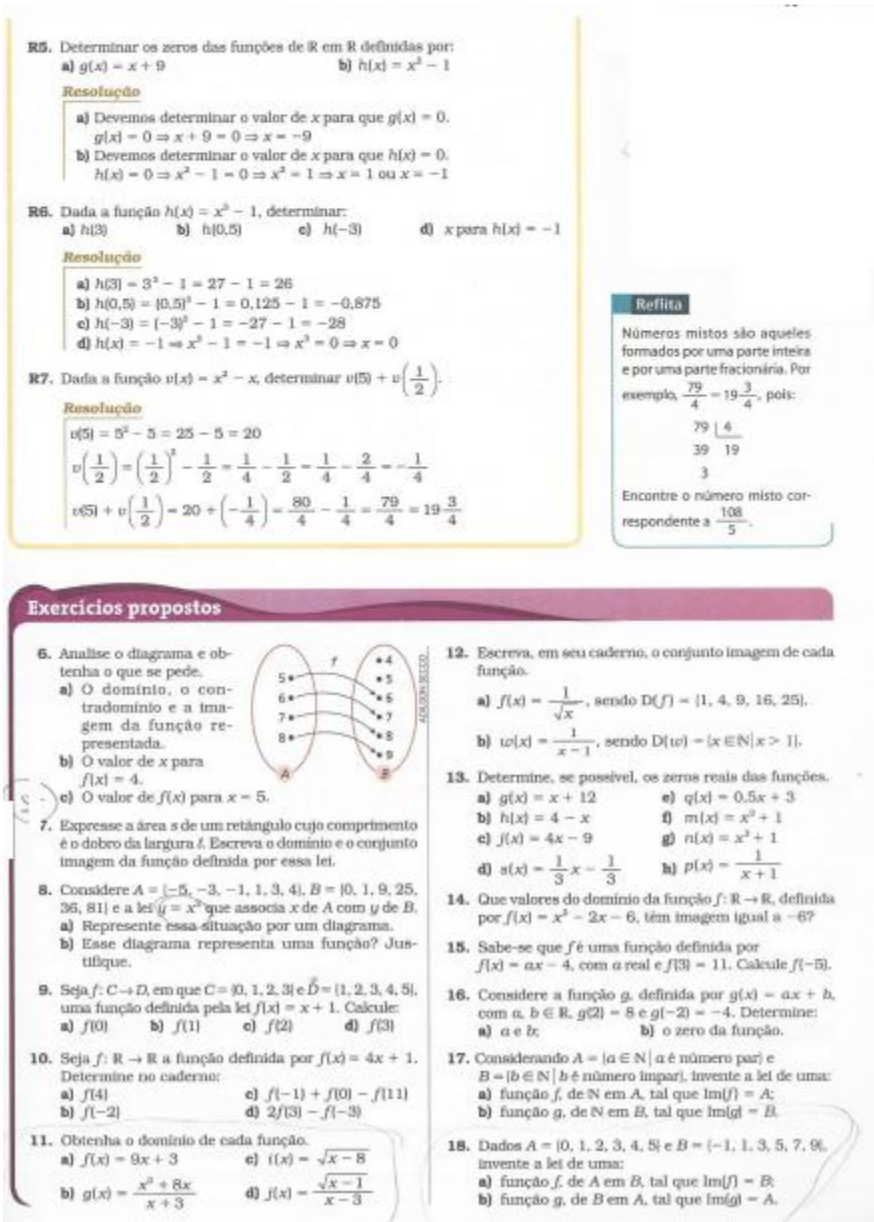
a) $D(f)$
b) $CD(f)$
c) $Im(f)$
d) o zero da função f
e) y quando $x = 2$
f) $f(x)$ quando $x = 3$
g) x quando $y = 8$
h) x quando $f(x) = 5$

Resolução

a) $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $Im(f) = \{5, 6, 7, 8\}$
d) A função f não tem zero.
e) $x = 2 \Rightarrow y = 5$
f) $x = 3 \Rightarrow f(x) = 7$
g) $y = 8 \Rightarrow x = 4$
h) $f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

Figura 10: Abordagem de conteúdo

A resolução da maioria dos 13 exercícios propostos na página 75 não exige muito do aluno que entendeu o que é domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma dada função; as respostas são fáceis de serem obtidas, basta um pouco de atenção. No entanto, os enunciados dos exercícios 7, 11, 12, 13, 17 e 18 (p. 75) podem trazer dificuldade para os alunos, embora ajude-os a perceber detalhes de uma função até então ocultos para eles – para alguns eles podem vir a ser problemas.



R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:
a) $g(x) = x + 9$ **b)** $h(x) = x^2 - 1$

Resolução

a) Devemos determinar o valor de x para que $g(x) = 0$.
$g(x) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$
b) Devemos determinar o valor de x para que $h(x) = 0$.
$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

R6. Dada a função $h(x) = x^3 - 1$, determinar:
a) $h(3)$ **b)** $h(0,5)$ **c)** $h(-3)$ **d)** x para $h(x) = -1$

Resolução

a) $h(3) = 3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$
b) $h(0,5) = (0,5)^3 - 1 = 0,125 - 1 = -0,875$
c) $h(-3) = (-3)^3 - 1 = -27 - 1 = -28$
d) $h(x) = -1 \Rightarrow x^3 - 1 = -1 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

R7. Dada a função $v(x) = x^2 - x$, determinar $v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right)$.

Resolução

$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$
$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$
$v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{80}{4} - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$

Reflita

Números mistos são aqueles formados por uma parte inteira e por uma parte fracionária. Por exemplo, $\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 79 & 4 \\ \hline 39 & 19 \\ 3 & \end{array}$$

Encontre o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$.

Exercícios propostos

6. Analise o diagrama e obtenha o que se pede.
a) O domínio, o contradomínio e a imagem da função representada.
b) O valor de x para $f(x) = 4$.
c) O valor de $f(x)$ para $x = 5$.

7. Expresse a área s de um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura ℓ. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função definida por essa lei.

8. Considere $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 9, 25, 36, 81\}$ e a lei $y = x^2$ que associa x de A com y de B.
a) Represente essa situação por um diagrama.
b) Esse diagrama representa uma função? Justifique.

9. Seja $f: C \to D$, em que $C = \{0, 1, 2, 3\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, uma função definida pela lei $f(x) = x + 1$. Calcule:
a) $f(0)$ **b)** $f(1)$ **c)** $f(2)$ **d)** $f(3)$

10. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine no caderno:
a) $f(4)$ **c)** $f(-1) + f(0) - f(11)$
b) $f(-2)$ **d)** $2f(3) - f(-3)$

11. Obtenha o domínio de cada função.
a) $f(x) = 9x + 3$ **c)** $t(x) = \sqrt{x - 8}$
b) $g(x) = \frac{x^3 + 8x}{x + 3}$ **d)** $j(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$

12. Escreva, em seu caderno, o conjunto imagem de cada função.
a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sendo $D(f) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.
b) $w(x) = \frac{1}{x - 1}$, sendo $D(w) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$.

13. Determine, se possível, os zeros reais das funções.
a) $g(x) = x + 12$ **e)** $q(x) = 0.5x + 3$
b) $h(x) = 4 - x$ **f)** $m(x) = x^2 + 1$
c) $j(x) = 4x - 9$ **g)** $n(x) = x^3 + 1$
d) $s(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ **h)** $p(x) = \frac{1}{x + 1}$

14. Que valores do domínio da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 6$, têm imagem igual a -6?

15. Sabe-se que f é uma função definida por $f(x) = ax - 4$, com a real e $f(3) = 11$. Calcule $f(-5)$.

16. Considere a função g, definida por $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $g(2) = 8$ e $g(-2) = -4$. Determine:
a) a e b; **b)** o zero da função.

17. Considerando $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a$ é número par$\}$ e $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b$ é número ímpar$\}$, invente a lei de uma:
a) função f, de $\mathbb{N}$ em A, tal que $Im(f) = A$;
b) função g, de $\mathbb{N}$ em B, tal que $Im(g) = B$.

18. Dados $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$, invente a lei de uma:
a) função f, de A em B, tal que $Im(f) = B$;
b) função g, de B em A, tal que $Im(g) = A$.

Figura 11: Exercícios resolvidos e propostos (p.75)

Especialmente, os enunciados dos exercícios 11 e 13 não são claros e podem trazer dúvida ao aluno, uma vez que os autores tratam algumas expressões como sendo função. O enunciado do exercício 11 é “Obtenha o domínio de cada função” e no exercício 13 aparece “Determine, se possível, os zeros reais das funções”, e colocam, em cada um de seus itens, a “lei matemática” da dita função. Embora os autores escrevam que “para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x de D(f) se corresponde com um único y = f(x) de CD(f), em geral dada por uma lei" (p. 73). Nesses dois exercícios é dada, apenas, a "lei matemática" das funções e não a função. Embora os autores tenham chamado a atenção para o fato de que quando o domínio e contradomínio de uma função não estiverem explícitos serão admitidos para ambos o conjunto dos números reais e que para o domínio serão excluídos deste conjunto os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y; achamos que nunca é demais repetir ou reforçar aspectos importantes de um conceito em formação para aluno. No nosso entendimento o enunciado deveria ser algo assim: obtenha o domínio da função cuja "lei matemática" é dada, ou obtenha os valores de $\mathbb{R}$ para os quais a "lei matemática" da função que associa x a f(x) vale.

Os exercícios 17 e 18 podem trazer dificuldade para o aluno entender o que está sendo pedido em cada um – ele pode não estar preparado para a linguagem/representação neles usada. Superada essa etapa, a obtenção da "lei matemática" das funções do exercício 17 é facilitada pelos conjuntos dados para domínio e para contradomínio em cada item. A descoberta da "lei matemática" das funções do exercício 18 pode levar o aluno ao procedimento de "tentativa e erro", o que será bom para o seu processo de aprendizagem.

No próximo item é abordado o subconteúdo intitulado "Gráfico de uma função" (p. 76-88), os autores iniciam dizendo: "Já vimos que é comum encontrarmos gráficos em revistas, jornais, internet, boletins governamentais e em outras fontes de informação" (p. 76). Essa afirmação nos remete ao Capítulo 1 "Organização e apresentação de dados" (p. 10-35) do mesmo livro, onde destacamos a seguinte afirmação dos autores: " Os gráficos estatísticos têm como principais objetivos sintetizar o comportamento de uma ou mais variáveis e facilitar a visualização dos resultados" (p. 24). Os gráficos das páginas 76 e 77 são estatísticos e as conclusões explicitadas em cada um deles ajudam o aluno na análise e interpretação puramente estatística dos mesmos, trabalho já realizado no Capítulo 1. O trabalho de análise e interpretação de gráfico de uma função é feito a partir da página 84, logo, parece-nos que esses gráficos apenas poderiam ajudar o aluno na visualização de pontos no plano cartesiano. Além disso, os comentários feitos a partir deles não contribuem para a compreensão do gráfico de uma função.

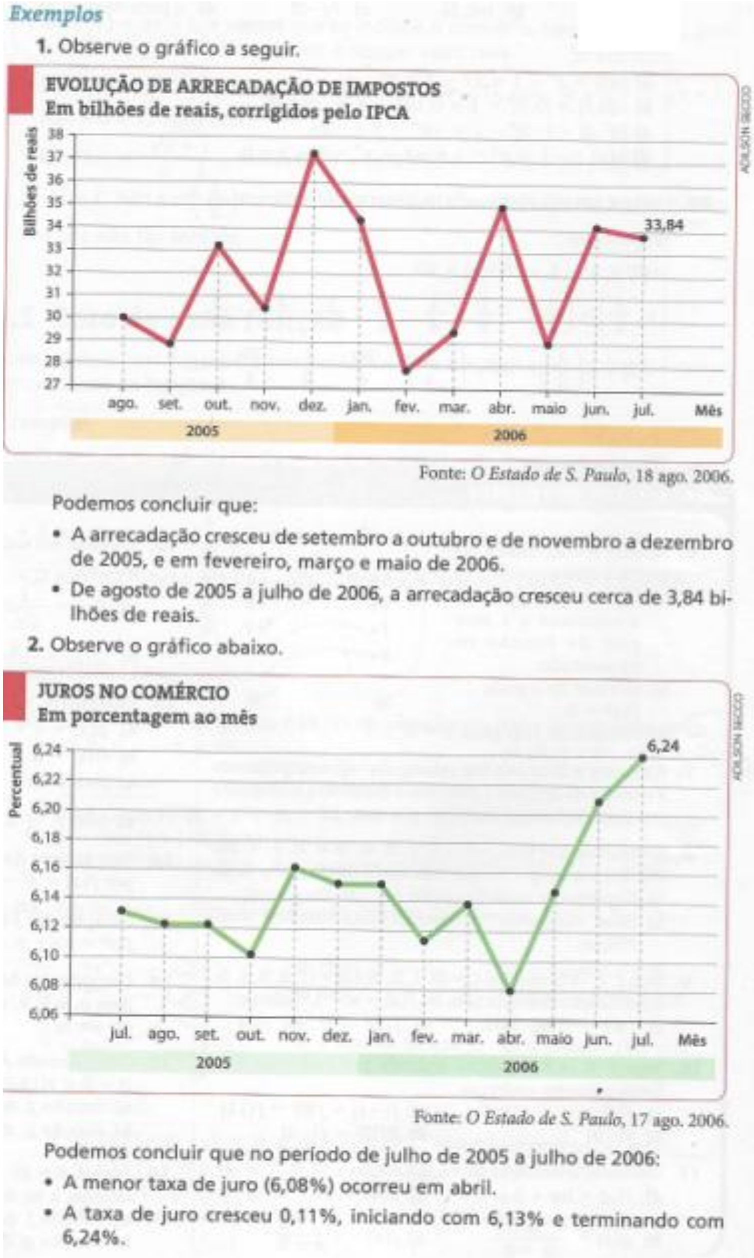


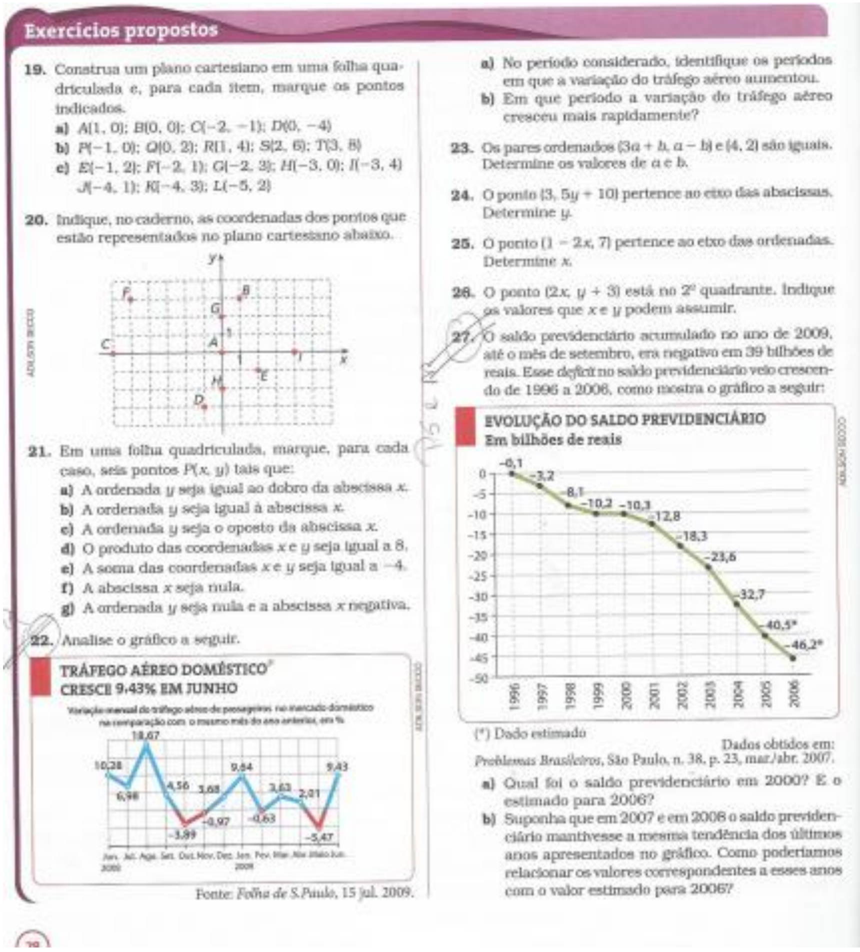
Figura 12: Exemplos de gráficos estatísticos abordados (p. 76)

O item 2.2 aborda o subconteúdo “O plano cartesiano”, um conceito que já deve ter sido estudado em anos anteriores. Mais uma vez o livro começa a discutir sobre o conteúdo apresentando-o formalmente e colocando o aluno como um agente passivo no processo, indo na verdade, trabalhar apenas durante os exercícios propostos, após toda sistematização e formalização feita pelos autores e professor. O aluno não é colocado a pensar, formular nem validar conhecimentos.

Vimos no desenvolvimento do conceito de função que o embrião para a sua representação gráfica surgiu na Idade Média relacionando tempo e velocidade sem explicitar medidas relativas a essas grandezas. Oresme representou a correspondência entre as duas grandezas pelo comprimento dos segmentos verticais; as medidas foram incluídas depois por Galileu. O trabalho com a representação gráfica da função no plano cartesiano veio depois do uso da representação algébrica. No entanto, hoje para o trabalho com gráficos cartesianos, queremos que o aluno conheça bem o plano cartesiano. Isso de certa forma mostra que, em geral, a abordagem didática dos conteúdos não reflete fatos e experiências que ocorreram na sua construção.

Sabemos que a ideia de fazer corresponder pontos de um plano a pares de números reais e vice-versa não é algo fácil de ser entendido. Quando olhamos a estrutura do conjunto dos números reais e a reta real, vemos, por exemplo, que se uma das coordenadas do par ordenado for um número irracional fica difícil localizar o seu correspondente ponto no plano. Esses aspectos em geral não são discutidos nem considerados.

Em nossa opinião, todos os exercícios propostos na página 78 visam fazer com que o aluno entenda a correspondência “par ordenado ↔ ponto do plano”.



Exercícios propostos

19. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e, para cada item, marque os pontos indicados.

a) $A(1, 0)$; $B(0, 0)$; $C(-2, -1)$; $D(0, -4)$

b) $P(-1, 0)$; $Q(0, 2)$; $R(1, 4)$; $S(2, 6)$; $T(3, 8)$

c) $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$ $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$

20. Indique, no caderno, as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano abaixo.

21. Em uma folha quadriculada, marque, para cada caso, seis pontos $P(x, y)$ tais que:

a) A ordenada y seja igual ao dobro da abscissa x.

b) A ordenada y seja igual à abscissa x.

c) A ordenada y seja o oposto da abscissa x.

d) O produto das coordenadas x e y seja igual a 8.

e) A soma das coordenadas x e y seja igual a -4.

f) A abscissa x seja nula.

g) A ordenada y seja nula e a abscissa x negativa.

22. Analise o gráfico a seguir.

TRÁFEGO AÉREO DOMÉSTICO CRESCE 9,43% EM JUNHO

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 15 jul. 2009.

a) No período considerado, identifique os períodos em que a variação do tráfego aéreo aumentou.

b) Em que período a variação do tráfego aéreo cresceu mais rapidamente?

23. Os pares ordenados $(3a + b, a - b)$ e $(4, 2)$ são iguais. Determine os valores de a e b.

24. O ponto $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine y.

25. O ponto $(1 - 2x, 7)$ pertence ao eixo das ordenadas. Determine x.

26. O ponto $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que x e y podem assumir.

27. O saldo previdenciário acumulado no ano de 2009, até o mês de setembro, era negativo em 39 bilhões de reais. Esse *déficit* no saldo previdenciário veio crescendo de 1996 a 2006, como mostra o gráfico a seguir:

EVOLUÇÃO DO SALDO PREVIDENCIÁRIO
Em bilhões de reais

(*) Dado estimado

Dados obtidos em: *Problemas Brasileiros*, São Paulo, n. 38, p. 23, mar./abr. 2007.

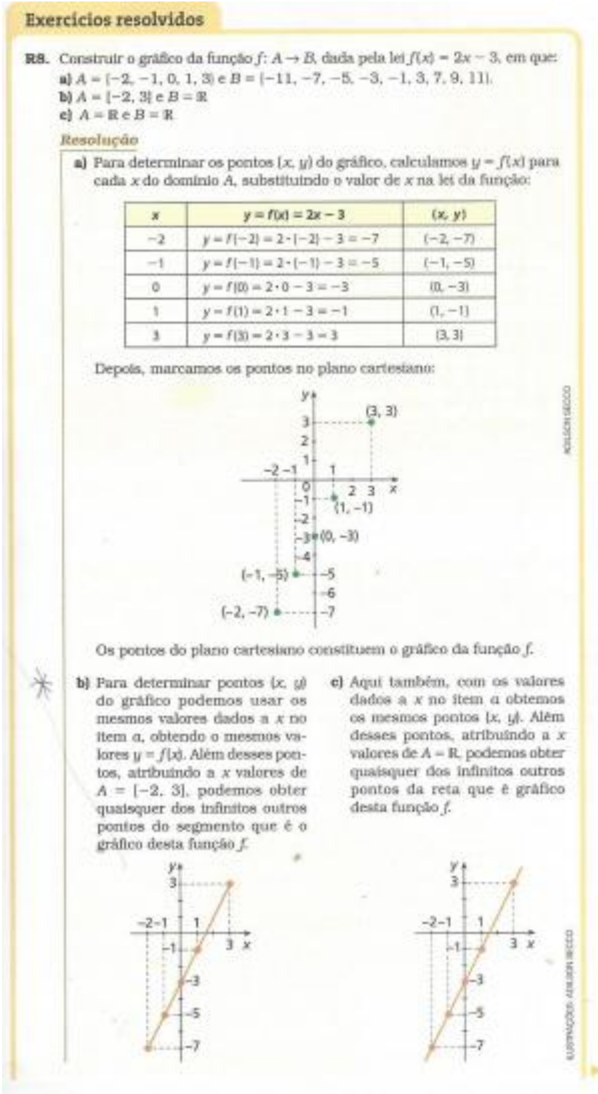
a) Qual foi o saldo previdenciário em 2000? E o estimado para 2006?

b) Suponha que em 2007 e em 2008 o saldo previdenciário mantivesse a mesma tendência dos últimos anos apresentados no gráfico. Como poderíamos relacionar os valores correspondentes a esses anos com o valor estimado para 2006?

Figura 13: Exercício proposto (p. 78)

O subitem seguinte é intitulado "Construção do gráfico de uma função" tem como objetivo fazer com que o aluno compreenda como é feita a representação gráfica de uma função, para tanto o livro traz três exercícios resolvidos, R8, R9 e R10 (p.79-81).

Em R8 é dada a "lei matemática" da correspondência x ↔ f(x), em seguida aparecem três itens, em cada item são dados dois conjuntos, conjunto A e conjunto B e pede-se para construir o gráfico da função f definida no conjunto A e tomando valores no conjunto B. Neste exercício, a partir das construções dos gráficos, o aluno é levado a perceber que uma mesma expressão matemática pode ser a "lei matemática" de mais de uma função, para isso basta mudar o conjunto ao qual a variável independente pertence.



Exercícios resolvidos

R8. Construir o gráfico da função $f: A \to B$, dada pela lei $f(x) = 2x - 3$, em que:

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$.
b) $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$
c) $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

Resolução

a) Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função:

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$

Depois, marcamos os pontos no plano cartesiano:

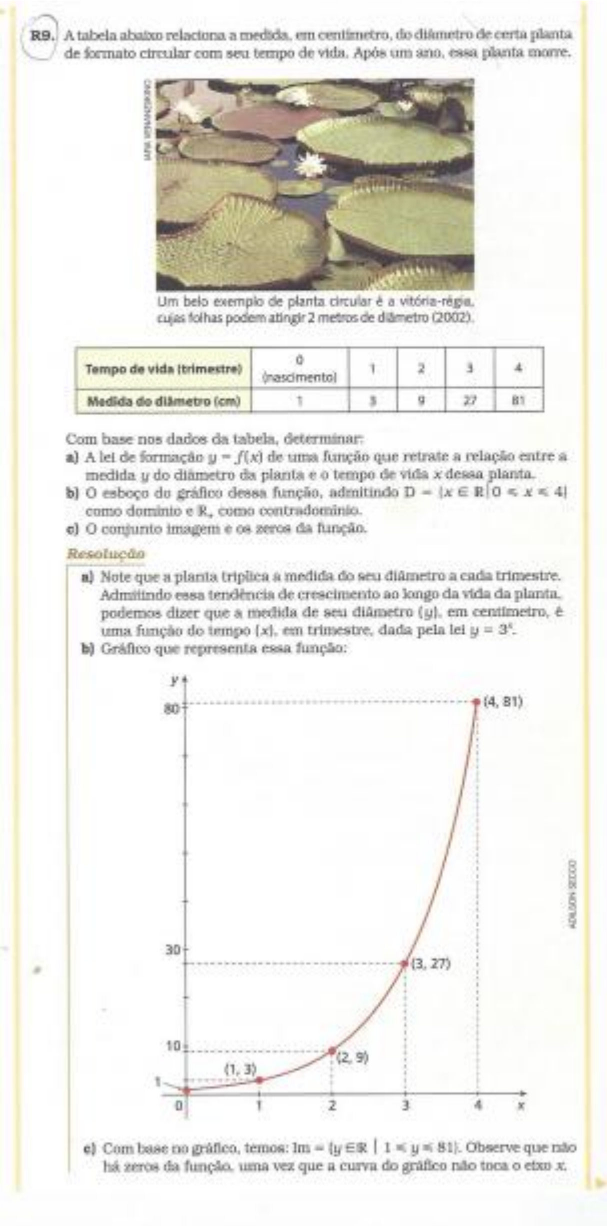
Os pontos do plano cartesiano constituem o gráfico da função f.

b) Para determinar pontos (x, y) do gráfico podemos usar os mesmos valores dados a x no item a, obtendo o mesmos valores $y = f(x)$. Além desses pontos, atribuindo a x valores de $A = [-2, 3]$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos do segmento que é o gráfico desta função f.

c) Aqui também, com os valores dados a x no item a obtemos os mesmos pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x valores de $A = \mathbb{R}$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos da reta que é gráfico desta função f.

Figura 14: Exercício resolvido (p. 79)

O exercício R9 (p. 80) trata da medida do diâmetro de uma planta de formato circular em dependência do seu tempo de vida. É pedida a expressão da lei matemática da função, sendo este o único trabalho que o aluno teria no exercício, uma vez que determinar a lei que representa esta situação não é algo simples. Já no item b) onde é pedido para esboçar o gráfico, é só observar a tabela já dada e colocar os pares ordenados em seus respectivos pontos do gráfico, assim como foi feito na resolução. No item c) chama a atenção que apesar de pedir os zeros da função, não foi feita nenhuma discussão, justificando que é possível encontra-los através do gráfico; um detalhe importante é que a função tratada não possui zeros.



R9. A tabela abaixo relaciona a medida, em centímetro, do diâmetro de certa planta de formato circular com seu tempo de vida. Após um ano, essa planta morre.

Um belo exemplo de planta circular é a vitória-régia, cujas folhas podem atingir 2 metros de diâmetro (2002).

Tempo de vida (trimestre)	0 (nascimento)	1	2	3	4
Medida do diâmetro (cm)	1	3	9	27	81

Com base nos dados da tabela, determinar:

a) A lei de formação $y = f(x)$ de uma função que retrate a relação entre a medida y do diâmetro da planta e o tempo de vida x dessa planta.

b) O esboço do gráfico dessa função, admitindo $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ como domínio e $\mathbb{R}_+$ como contradomínio.

c) O conjunto imagem e os zeros da função.

Resolução

a) Note que a planta triplica a medida do seu diâmetro a cada trimestre. Admitindo essa tendência de crescimento ao longo da vida da planta, podemos dizer que a medida de seu diâmetro (y), em centímetro, é uma função do tempo (x), em trimestre, dada pela lei $y = 3^x$.

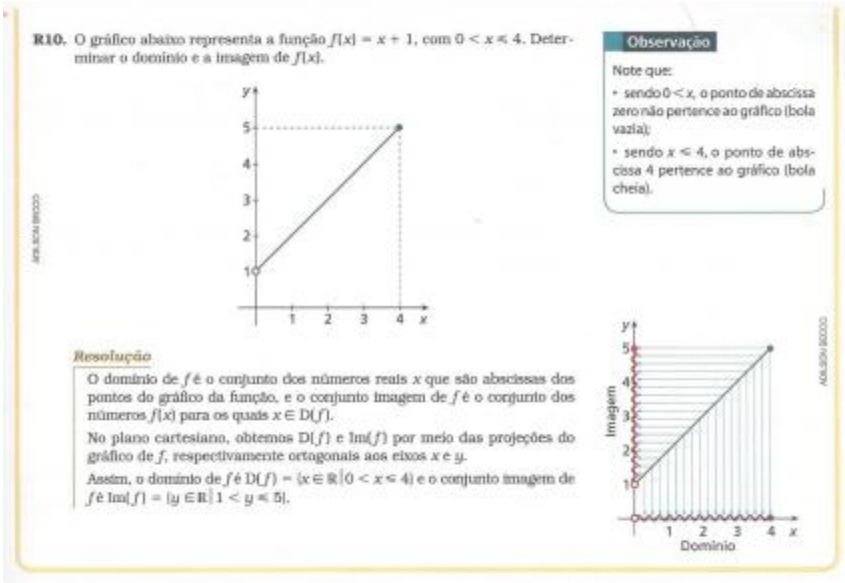
b) Gráfico que representa essa função:

c) Com base no gráfico, temos: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 81\}$. Observe que não há zeros da função, uma vez que a curva do gráfico não toca o eixo x.

Figura 15: Exercício resolvido (p. 80)

Percebemos que não há uma preocupação com a forma com que a contextualização é feita, sabemos que as plantas não são perfeitas em seu crescimento, sendo este dependente de diversas fatores, podendo umas crescerem mais ou menos que outras. Acreditamos que o gráfico usado, o qual representa uma função exponencial, não seja fácil para o aluno, nesta parte do livro, compreender sua construção.

O exercício R10 traz a representação gráfica e algébrica de uma função e pede que seja determinado o domínio e a imagem da função. Não entendemos porque os autores pediram para determinar o domínio da função uma vez que o mesmo já é dado no enunciado do exercício, vejam o enunciado e nosso grifo “O gráfico abaixo representa a função f(x) = x + 1, com $\underline{0 < x \leq 4}$. Determinar o domínio e a imagem de $\underline{f(x)}$”. (p. 81.). Neste caso, bastava que os autores apresentassem apenas o gráfico, o qual permitiria que o aluno percebesse que para encontrar o domínio e o conjunto imagem da função bastava fazer as projeções.



R10. O gráfico abaixo representa a função $f(x) = x + 1$, com $0 < x \leq 4$. Determinar o domínio e a imagem de $f(x)$.

Observação

Note que:

- sendo $0 < x$, o ponto de abscissa zero não pertence ao gráfico (bola vazia);
- sendo $x \leq 4$, o ponto de abscissa 4 pertence ao gráfico (bola cheia).

Resolução

O domínio de f é o conjunto dos números reais x que são abscissas dos pontos do gráfico da função, e o conjunto imagem de f é o conjunto dos números $f(x)$ para os quais $x \in D(f)$.

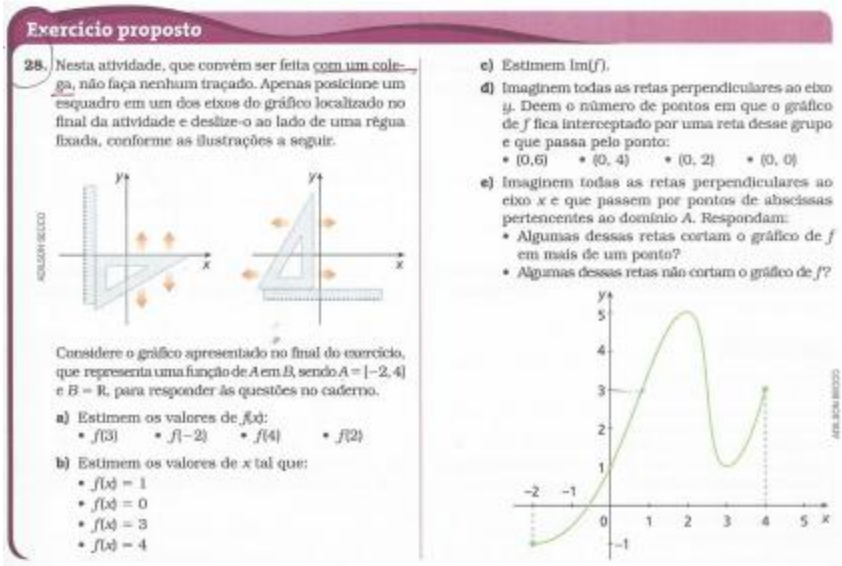
No plano cartesiano, obtemos $D(f)$ e $Im(f)$ por meio das projeções do gráfico de f, respectivamente ortogonais aos eixos x e y.

Assim, o domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4\}$ e o conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leq 5\}$.

Figura 16: Exercício resolvido (p. 81)

Outro equivoco encontrado neste enunciado é com relação à escrita “imagem de f(x)” – os autores querem que o estudante determine o conjunto imagem da função f ou a imagem de um específico número real x? Uma vez que f representa a função e f(x) representa o valor da função f em um dado x, são coisas diferentes; f(x) representada um número do conjunto imagem e não a função.

No enunciado do exercício proposto 28 (p. 81) vem a sugestão de que sua resolução seja feita em dupla e propõe o uso de materiais concretos – régua e esquadro para identificar as coordenadas de um ponto do gráfico. Gostamos deste tipo de abordagem, pois permite que o aluno manuseie os esquadros identificando as coordenadas de diferentes pontos do gráfico e discuta com seus pares. O exercício partiu da representação gráfica para obter informações de natureza algébrica sobre a função, o aluno está mais acostumado a fazer o contrário. O exercício faz com que o aluno use conhecimentos de geometria que foram estudados em anos anteriores.



Exercício proposto

28. Nesta atividade, que convém ser feita com um colega, não faça nenhum traçado. Apenas posicione um esquadro em um dos eixos do gráfico localizado no final da atividade e deslize-o ao lado de uma régua fixada, conforme as ilustrações a seguir.

Considere o gráfico apresentado no final do exercício, que representa uma função de A em B, sendo $A = [-2, 4]$ e $B = \mathbb{R}$, para responder às questões no caderno.

a) Estimem os valores de $f(x)$:
- $f(3)$ • $f(-2)$ • $f(4)$ • $f(2)$

b) Estimem os valores de x tal que:
- $f(x) = 1$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = 3$
- $f(x) = 4$

c) Estimem $Im(f)$.

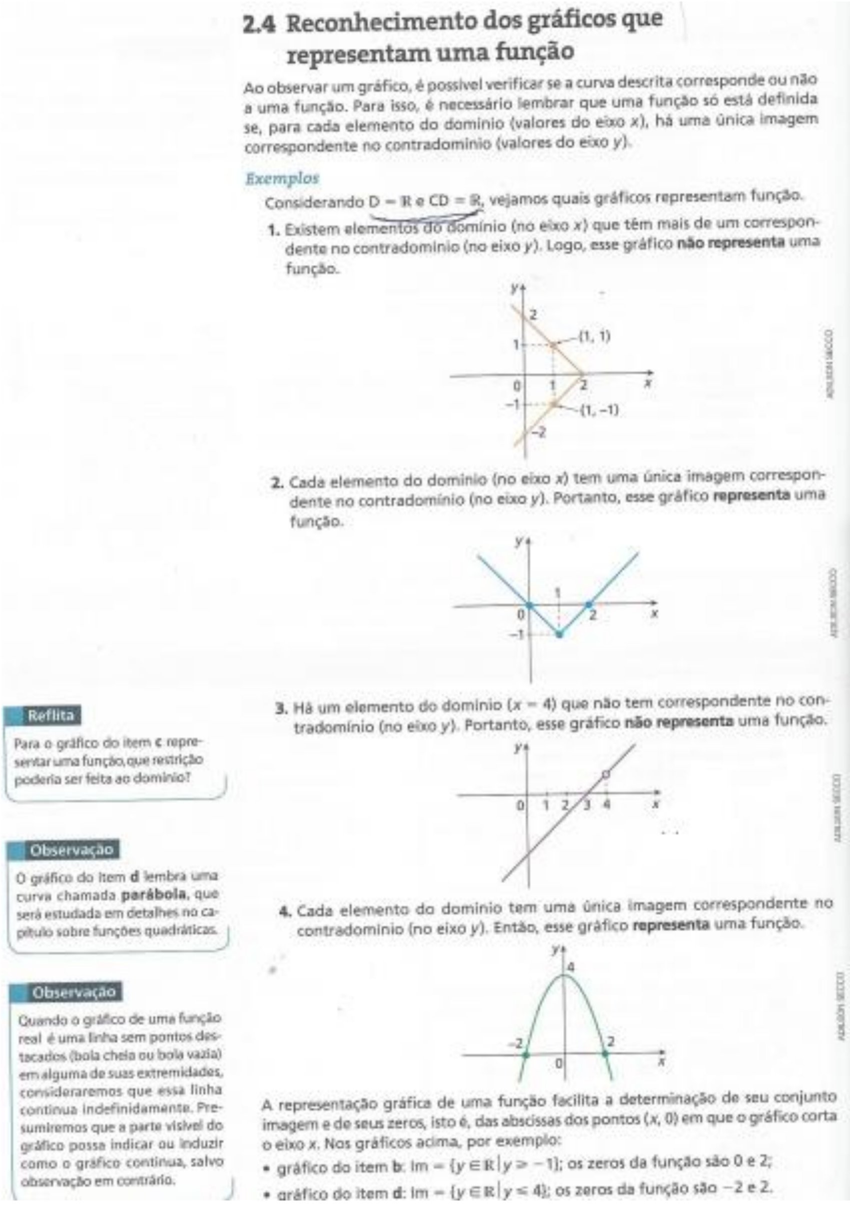
d) Imaginem todas as retas perpendiculares ao eixo y. Deem o número de pontos em que o gráfico de f fica interceptado por uma reta desse grupo e que passa pelo ponto:
- (0,6) • (0, 4) • (0, 2) • (0, 0)

e) Imaginem todas as retas perpendiculares ao eixo x e que passem por pontos de abscissas pertencentes ao domínio A. Respondam:
- Algumas dessas retas cortam o gráfico de f em mais de um ponto?
- Algumas dessas retas não cortam o gráfico de f?

Figura 17: Exercício proposto (p. 81)

O próximo subitem aborda o subconteúdo “Reconhecimento dos gráficos que representam uma função”.

Nesse item os autores começam escrevendo que “ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função” (p.82). Isso é tratado através de quatro exemplos. Logo após a palavra exemplos aparece a frase “Considerando D = R e CD = R, vejamos quais gráficos representam função” (p.82). Apesar de os autores afirmarem isto, o exemplo 3, nós o consideramos como sendo uma função com uma descontinuidade em x=4. Os exemplos são numerados de 1 a 4, mas, nas observações os autores referem-nos por letras de a até d, um equivoco. Acreditamos que a partir desses exemplos os alunos conseguiriam visualizar que através da representação gráfica poderiam encontrar os zeros da função. As observações desses gráficos, ao considerar encontrar os zeros da função por meio da representação, poderiam ter sido mais exploradas, porém, a respeito disso na página 82, eles fazem apenas um breve comentário.



2.4 Reconhecimento dos gráficos que representam uma função

Ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso, é necessário lembrar que uma função só está definida se, para cada elemento do domínio (valores do eixo x), há uma única imagem correspondente no contradomínio (valores do eixo y).

Exemplos

Considerando $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$, vejamos quais gráficos representam função.

1. Existem elementos do domínio (no eixo x) que têm mais de um correspondente no contradomínio (no eixo y). Logo, esse gráfico **não representa** uma função.

2. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y). Portanto, esse gráfico **representa** uma função.

3. Há um elemento do domínio ($x = 4$) que não tem correspondente no contradomínio (no eixo y). Portanto, esse gráfico **não representa** uma função.

4. Cada elemento do domínio tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y). Então, esse gráfico **representa** uma função.

A representação gráfica de uma função facilita a determinação de seu conjunto imagem e de seus zeros, isto é, das abscissas dos pontos $(x, 0)$ em que o gráfico corta o eixo x. Nos gráficos acima, por exemplo:

- gráfico do item **b**: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$; os zeros da função são 0 e 2;
- gráfico do item **d**: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$; os zeros da função são -2 e 2.

Reflita

Para o gráfico do item **c** representar uma função, que restrição poderia ser feita ao domínio?

Observação

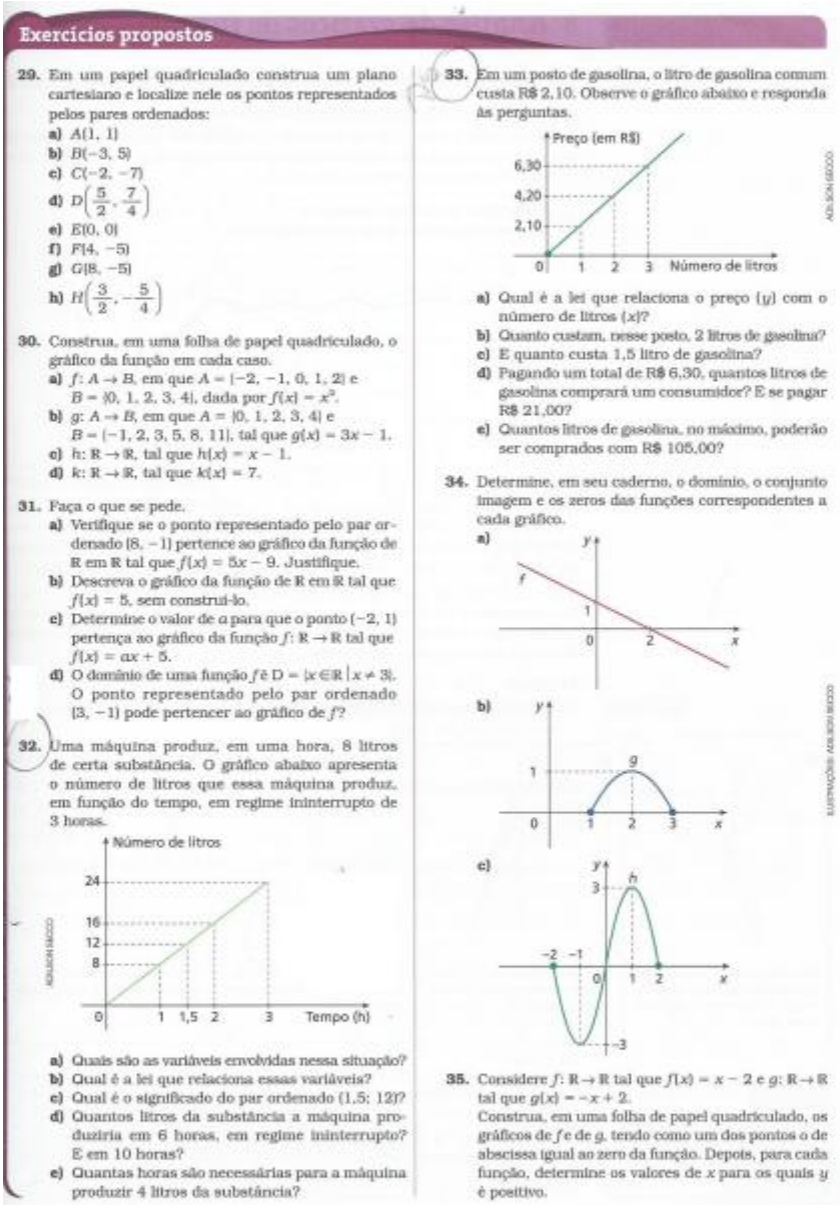
O gráfico do item **d** lembra uma curva chamada **parábola**, que será estudada em detalhes no capítulo sobre funções quadráticas.

Observação

Quando o gráfico de uma função real é uma linha sem pontos destacados (bola cheia ou bola vazia) em alguma de suas extremidades, consideraremos que essa linha continua indefinidamente. Presumiremos que a parte visível do gráfico possa indicar ou induzir como o gráfico continua, salvo observação em contrário.

Figura 18: Abordagem de conteúdo (p. 82)

No item “Construção do gráfico de uma função” são resolvidos três exercícios e em seguida é proposto apenas um exercício que pede a identificação das coordenadas de pontos de um dado gráfico. No entanto, no item “Reconhecimento dos gráficos que representam uma função” aparecem sete exercícios propostos (p. 83), envolvendo conhecimentos tratados em itens anteriores, mas nenhum pede reconhecimento de gráfico de uma função, isto poderia ser feito no exercício proposto 34 já que apresentou alguns gráficos; apenas dois deles, o 30 e 35, pede a construção de gráficos. Além disso, os exercícios propostos 19 (p.78) e 29 (p.82) pedem as mesmas coisas, diferindo somente quanto aos pares ordenados. Parece-nos que os exercícios não são trazidos numa ordem adequada.



Exercícios propostos

29. Em um papel quadriculado construa um plano cartesiano e localize nele os pontos representados pelos pares ordenados:

a) $A(1, 1)$
b) $B(-3, 5)$
c) $C(-2, -7)$
d) $D\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$
e) $E(0, 0)$
f) $F(4, -5)$
g) $G(8, -5)$
h) $H\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

30. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico da função em cada caso.

a) $f: A \to B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.
b) $g: A \to B$, em que $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 2, 3, 5, 8, 11\}$, tal que $g(x) = 3x - 1$.
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x - 1$.
d) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $k(x) = 7$.

31. Faça o que se pede.

a) Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique.
b) Descreva o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5$, sem construí-lo.
c) Determine o valor de a para que o ponto $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$.
d) O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f?

32. Uma máquina produz, em uma hora, 8 litros de certa substância. O gráfico abaixo apresenta o número de litros que essa máquina produz, em função do tempo, em regime ininterrupto de 3 horas.

a) Quais são as variáveis envolvidas nessa situação?
b) Qual é a lei que relaciona essas variáveis?
c) Qual é o significado do par ordenado (1,5; 12)?
d) Quantos litros da substância a máquina produziria em 6 horas, em regime ininterrupto? E em 10 horas?
e) Quantas horas são necessárias para a máquina produzir 4 litros da substância?

33. Em um posto de gasolina, o litro de gasolina comum custa R$ 2,10. Observe o gráfico abaixo e responda às perguntas.

a) Qual é a lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x)?
b) Quanto custam, nesse posto, 2 litros de gasolina?
c) E quanto custa 1,5 litro de gasolina?
d) Pagando um total de R$ 6,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R$ 21,00?
e) Quantos litros de gasolina, no máximo, poderão ser comprados com R$ 105,00?

34. Determine, em seu caderno, o domínio, o conjunto imagem e os zeros das funções correspondentes a cada gráfico.

a)

b)

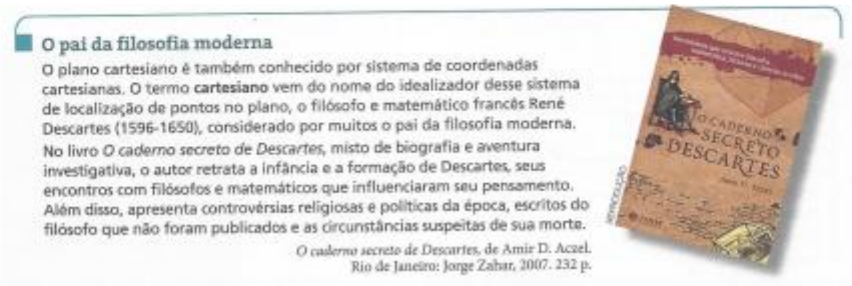
c)

35. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 2$.
Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos de f e de g, tendo como um dos pontos o de abscissa igual ao zero da função. Depois, para cada função, determine os valores de x para os quais y é positivo.

Figura 19: Exercícios propostos (p. 83)

Gostamos das abordagens feitas pelos exercícios propostos 32 e 33 (p. 83). O exercício 32 trata de uma situação em que uma máquina produz em determinado tempo (em hora) certa quantidade de litros de uma determinada substância; o exercício 33 aborda o preço da gasolina em relação à quantidade de litros. Esses exercícios permitem que o aluno justifique o que está fazendo, em especial no item c) o aluno tem a oportunidade de usar a linguagem verbal para responde-lo. Enxergamos isto como sendo uma situação de formulação e validação descrita por Brousseau. Os dois exercícios partem da representação gráfica para a algébrica e exige o uso de representações diferentes, a algébrica, a gráfica e a verbal, este tipo de abordagem deveria ser utilizado mais pelos autores. Além disso, esses dois exercícios são contextualizados, o 32 traz aspectos da química e da física e o 33 envolve uma relação de preço por unidade de litro de gasolina.

Na página 78 encontramos em destaque o texto sob o título “O pai da filosofia moderna” que explica o surgimento do termo cartesiano, porém não há nenhuma descrição de como surgiu a ideia de plano cartesiano. A ênfase é dada a René Descartes e uma de suas obras. Esse é o único comentário feito no livro que poderíamos classificá-lo como relativo à história, no entanto, não há nenhum desdobramento dele, nenhum processo do desenvolvimento do conceito de função é explicitado nas páginas por nós analisadas.



O pai da filosofia moderna

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da filosofia moderna.

No livro *O caderno secreto de Descartes*, misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes, seus encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos do filósofo que não foram publicados e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

O caderno secreto de Descartes, de Amir D. Aczel.
Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007. 232 p.

Figura 20: Trecho em destaque (p.78)

De acordo com nossa análise entendemos que os autores para introduzir o conceito de função abordaram conceitos de maneira superficial e sem trazer uma discussão de aspectos importantes e essenciais para a sua compreensão, fazendo com que, provavelmente, o aluno não os percebam.

Podemos fazer um resumo desta abordagem: inicialmente os autores trouxeram a representação tabular enfatizando que para cada número da primeira coluna da tabela existia um único número correspondente na segunda coluna sem a discussão dos conceitos de dependência entre quantidades e de correspondência. Em seguida tratam sobre variáveis, mencionando somente sobre variáveis dependentes e independentes sem discutir diretamente sobre a variação de grandezas. Logo depois apresentam a definição de função e sua representação simbólica. Representam as funções através de diagramas. Explicitam domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função.

Trabalham com plano cartesiano e finalmente com a representação gráfica de uma função.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa pesquisa objetivou analisar a abordagem introdutória do conceito de função em um livro didático e verificar se ela favorece ao aluno a compreensão deste conceito e ao professor no planejamento didático e na gestão de suas aulas.

Para tal análise, buscamos nos fundamentar em teorias da Didática Francesa – Campos Conceituais, Transposição Didática e Situações Didáticas, em aspectos relativos ao processo de construção do conceito de função, ao papel e importância do livro didático e à contextualização de conteúdos matemáticos em livros didáticos.

Com base na teoria dos Campos Conceituais percebemos que os autores não abordam de maneira satisfatória uma quantidade significativa e variada de situações (na forma de exemplos e exercícios) que deem sentido ao conceito de função e permitam ao aluno compreendê-lo. A resolução de situações variadas ajuda o aluno a alterar e construir novos esquemas.

Notamos que o que é solicitado ao aluno nos exercícios propostos e os esquemas que ele vai usar para resolvê-los não é diferente do que ocorre nos exemplos e exercícios resolvidos. O capítulo traz uma quantidade significativa de exercícios resolvidos e propostos. No entanto, estes últimos levam o aluno ao uso direto de definições dadas na explanação teórica e a repetição de formas de resolução utilizadas em exemplos e exercícios resolvidos, contribuindo somente para fixação do conteúdo.

O livro didático precisa desafiar os estudantes, oferecendo situações que o estimulem, tornando-os hábeis e competentes na tarefa de desenvolver esquemas ao resolver os problemas e em suas interações com novas situações. Isto é fundamental para favorecer a formação do conceito.

A maioria das contextualizações é feita envolvendo práticas sociais, poucas são feitas com a própria matemática e com outras ciências. Há contextualização com práticas sociais interessantes que fazem parte do cotidiano do aluno, outras trazem informações que deixam dúvidas se são reais, por exemplo, sobre o desenvolvimento de uma planta circular como foi explicitado (p.80). É possível que muitos exercícios do livro estejam na contramão da devolução de problema sugerida por Brousseau. Os exercícios em contextos da própria matemática, não trazem dificuldade para o aluno, geralmente envolvem conteúdo da geometria elementar do seu conhecimento.

A única abordagem relativa à história é feita com intuito informativo, não há um desdobramento que possa influenciar no processo de produção do conhecimento do aluno.

A linguagem usada no livro didático, em alguns casos, não é uma linguagem acessível aos alunos. Na página 70, por exemplo, os autores usam os termos aplicação e transformação para substituir a palavra função, tais termos os alunos só vão utilizar em nível superior, para aqueles que vão fazer o curso na área de exatas. Acreditamos que deva haver uma padronização nos termos quando se refere a uma mesma coisa, detectamos que para expressar o valor a ser pago na compra de certo produto, os autores usam “valor a ser pago”, o que nos parece ser o correto, mas usam também simplesmente a palavra “valor” e a palavra “preço”.

Vimos que a linguagem tem um papel importante na construção do conhecimento. O livro didático deve utilizar uma linguagem clara e correta, que possa ser compreendida pelo aluno. A linguagem é de extrema importância para o cotidiano escolar, seja pela sua abordagem no livro didático, seja pelo uso dos professores.

A sequência de situações didáticas para abordagem de um conteúdo sugerida por Brousseau em sua teoria não é seguida pelos autores, encontramos poucas situações de ação, raríssimas situações de formulação e validação, há predominância de situações de institucionalização, esta última é tratada sempre antes das demais. As situações propostas não levam o aluno a se envolver em suas resoluções, em tomá-las para si. Não é dada ao aluno a oportunidade de agir, falar, refletir e evoluir no conceito de forma autônoma.

São raras as situações em que o aluno é questionado e solicitado a defender, argumentar e justificar suas ideias. Uma dessas abordagens é feita no exercício proposto 32 (p. 83) aonde é solicitado que o aluno diga o que significa um par ordenado. Questões assim são raras neste livro, no entanto, são importantes, pois permitem que o aluno reflita e escreva o que pensa realmente; a participação do aluno, na maior parte das vezes, ocorre apenas nos exercícios propostos.

A abordagem dos autores exige que o professor faça certas transformações no texto para auxiliar mais o aluno na compreensão do conteúdo, que explique detalhadamente os aspectos implícitos em cada situação, o saber disponibilizado pelo livro didático certamente precisa da interferência do professor.

No caso em que o professor tem uma grande carga de trabalho, ele pode não ter tempo para preparar o material didático necessário para suas aulas; se o livro tem muitas transformações para serem feitas pelo professor isto acabará atrapalhando o planejamento e a preparação de suas aulas e, consequentemente, a gestão das aulas.

Olhando o resumo que fizemos na página 73 sobre a abordagem dos autores para introduzir o conceito de função, vemos que houve a omissão de discussões sobre aspectos do conceito, os quais acreditamos ser essenciais para o aluno entender o que é uma função, a saber: o conceito de correspondência na matemática, observação de regularidade ou não na variação das quantidades associadas às grandezas, a necessidade de generalização da lei da correspondência, o conceito de variável, a reta real e a construção do plano cartesiano a partir disso.

O uso destes conceitos ajudaria na compreensão e na construção mental pelo aluno do que é o objeto função em termos matemáticos. Vimos que eles estiveram presentes no desenvolvimento histórico do conceito de função, portanto tiveram e têm sua importância.

A abordagem trazida pelo livro didático analisado não estimula o aluno a uma participação ativa no seu processo de aprendizagem, o aluno é colocado como alguém que apenas recebe e assimila conhecimento. Acreditamos que o enfoque dado não favorece a aquisição do conhecimento pelo aluno. O livro didático deve abordar em seu eixo situações que façam o aluno pensar, refletir e compreender o que está sendo proposto.

Parece-nos que nem sempre o livro didático de matemática garante que o aluno tenha uma aprendizagem satisfatória. Os professores podem, por alguma razão, não escolher um bom livro, mas compete aos mesmos fazerem as devidas adequações, transformações e/ou complementações para que esse material didático tão fundamental no ambiente escolar possa cumprir o seu papel.

Temos a convicção de que poderíamos ter ido além das páginas analisadas, ou melhor, deveríamos ter analisado todo o capítulo o até mesmo todo o volume 1 da coleção. No entanto, durante a realização deste trabalho tivemos algumas dificuldades:

1. Apesar de função ser um tema de nosso interesse, sentimos que precisávamos ir além do que sabíamos, ou seja, necessitávamos de um melhor aprofundamento.
2. Encontramos poucas pesquisas sobre o tema análise de livro didático de matemática; as pesquisas encontradas não faziam uma análise de forma detalhada, sentimos muito em não ter algo para nos subsidiar.
3. Por ser uma análise de livro didático e que deveria ser algo minucioso, precisaríamos de mais tempo, e nossa rotina de trabalho, estudo e família atrapalharam neste sentido.

Sentimos que avançamos muito em relação ao explicitado no item 1; agora sabemos coisas relativas ao conceito de função que não dávamos conta antes de fazer esse estudo. Porém, temos a certeza que novas pesquisas estão por vir, ficando aqui o desafio.

Em nossa pesquisa de mestrado vamos continuar trabalhando com o conceito de função; certamente, vamos ampliar e aprofundar o aprendizado aqui obtido.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Izabel M. B. de. **O conceito de grupo:** sua formação por alunos de Matemática. Tese (Doutorado em Educação). UFCE: Fortaleza, 2005, 343f.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.

BARROSO, Juliana Matsubara (Ed.). **Conexões com a matemática.** 1º ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BOYER, Carl B. ***História da Matemática***. 2. ed. Trad. Elza Furtado Gomide. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL. Decreto, nº 91542, de 19 de agosto de 1985. Institui o Programa Nacional do Livro Didático, dispões sobre sua execução e da outras providências. Brasília, 1985.

BRASIL. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2012: Matemática/ Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio: Matemática – Brasília : MEC, 3º Ed.,1997.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio: Matemática – Brasília : MEC/SEF, 1999.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. Programa Nacional do Livro Didático. **Guia de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série**. Brasília MEC/SEF, 2008.

BRASIL, MEC. Guia de Livros Didáticos – PNLD 2010 - Matemática. Brasília: 2010.

BRASIL, MEC. Guia de Livros Didáticos – PNLD 2011 - Matemática. Brasília: 2012a.

BRASIL, MEC. Guia de Livros Didáticos – PNLD 2012 - Matemática. Brasília: 2012b.

CAMPITELI, Heliana Cioccia. CONEY, Vicente. **Funções.** Ponta Grossa: Editora: UEPG, 2006.

CEMIN, Kelen L.. **Ensino de combinatória:** problemas de divisão, teoria de Vergnaud e Metodologia da engenharia didática. TCC (Licenciatura em Matemática). UFRS: 2008, 93f.

COSTA, Manoel dos S.; ALLEVATO, Norma S. G. Livro didático de Matemática: análise de professores polivalentes em relação ao ensino de Geometria. **Revista Vidya**, Santa Maria, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Livro Didático de Matemática: Uso ou Abuso? In: **Em aberto**. Brasília, v.26, n.69, p.52-58, jan/mar. 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de An introduction to the history of mathematics. Ed. UNICAMP: Campinas, SP, 2004.

FREITAS, José Luiz M. de. Situações Didáticas. In: Machado, Silvia D. A. et al.(org). **Didática da Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. P. 65 – 87.

FREITAS, Neli Klix; RODRIGUES, Melissa Haag. **O livro didático ao longo do tempo:** a forma do conteúdo. CEART-UDESC, Santa Catarina, 2007. Disponível em: http://www.ceart.udesc.br/revista_dapesquisa/volume3/numero1/plasticas/melissa-neli.pdf. Acesso 21/10/2013.

JÒFILI, Zélia. et al. **As teorias de Guy Brousseau e Gerard Vergnaud como auxílio em uma intervenção matemática.** In. IV Colóquio Internacional e Educação e Contemporaneidade. Laranjeira, SE: 2010.

LOPES, Silvio J. **A noção de infinito em livros didáticos do Ensino Básico.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, SP, 2011.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

MACIEL, Paulo R. C.. **A construção do conceito de função através da história da matemática.** 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática). CEFET, RJ, 2011.

MAIOLI, Marcia. **A contextualização na matemática do Ensino Médio.** 2012. 211 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, SP, 2012.

MEDICI, Michéle. **A construção do pensamento estatístico:** organização, representação e interpretação de dados por alunos da 5º serie do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, SP, 2007.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciência e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências.** Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7 – 29, mar. 2002.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de Função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). PUC, SP, 1997.

PACCA, Jesuína Lopes de Almeida; ZUFFI, Edna Maura. **O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências.** Ciência e Educação, Bauru, vol. 8, n. 1, p. 1 – 12, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influencia francesa. Belo Horizonte: Autentica, 2001.

PELHO, Edelweiss B. B.. **Introdução ao conceito de função:** a importância da compreensão das variáveis. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, SP, 2003.

PINTO, José B.. **Sequência didática no aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de licenciatura em matemática.** 103f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNB, SP, 2010.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema Função:** uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC, SP, 2006.

VASCONCELOS, Maria B. F.. **A *contextualização* e o ensino de matemática**: um estudo de caso. Dissertação (mestrado em Educação). UFPB, João Pessoa, 2008.

VIEIRA, Gláucia . **Estratégias de "contextualização" nos livros didáticos de matemática dos ciclos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação). UFMG, Belo Horizonte, 2004.

ZÚÑIGA, Nora O. C.. **Uma análise das repercussões do Programa Nacional do Livro Didático no livro didático de matemática.** Tese (Doutorado em Educação). UFMG: Belo Horizonte, 2007.