



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

FRANCIEL LEOCADIO DO NASCIMENTO

**UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE FRW COM A
CONSTANTE COSMOLÓGICA**

CAMPINA GRANDE - PB
2019

FRANCIEL LEOCADIO DO NASCIMENTO

UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE FRW COM A CONSTANTE
COSMOLÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N244e Nascimento, Franciel Leocadio do.
Um estudo sobre a solução de FRW com a constante cosmológica [manuscrito] / Franciel Leocadio do Nascimento. - 2019.
30 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física - CCT."
1. Espaço-tempo. 2. Constante cosmológica. 3. Energia escura. I. Título
21. ed. CDD 523.1

FRANCIEL LEOCADIO DO NASCIMENTO

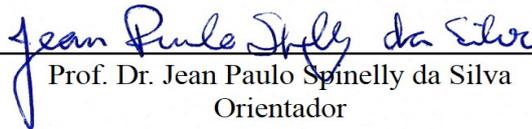
UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE FRW COM A
CONSTANTE COSMOLÓGICA

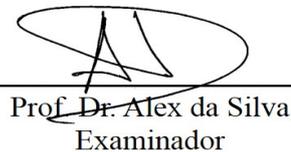
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
em Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção
do grau de Licenciado em Física.

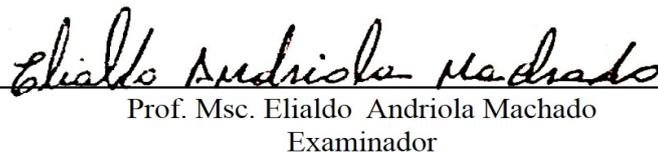
Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva

Aprovado em 04 de julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador


Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador


Prof. Msc. Elialdo Andriola Machado
Examinador

AGRADECIMENTOS

À Deus, o criador de todas as coisas, pela capacidade e iluminação nos estudos.

Aos meus pais e irmãos que sempre me deram apoio em tudo.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, pelo companherismo e disposição em ajudar.

A todos os amigos da universidade por todos os bons momentos que me ajudaram no curso.

UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE FRW COM A CONSTANTE COSMOLÓGICA

Franciel Leocadio do Nascimento ¹

RESUMO

As equações de Einstein, inicialmente apresentadas na relatividade geral, não previam um Universo estático, como se acreditava na época. Devido a isso, Einstein adicionou um novo termo na sua equação, a constante cosmológica Λ , que faria o papel de uma força repulsiva em equilíbrio com a força gravitacional. Com a descoberta de Hubble, não havia mais a necessidade de uma constante cosmológica. Porém, 60 anos mais tarde, estudos realizados por grupos de pesquisa independentes, apontaram para um Universo em expansão acelerada. Esta descoberta não só trouxe relevância à constante cosmológica, como também levou os cosmólogos a especularem a cerca de uma energia desconhecida que causaria esta aceleração, chamada de energia escura. Um dos modelos cosmológicos para o Universo acelerado é a solução de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com a constante cosmológica nas equações de Einstein. O objetivo deste trabalho é deduzir esta solução.

PALAVRAS-CHAVE: Espaço-Tempo, Constante Cosmológica e Energia Escura.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

A STUDY ON THE SOLUTION OF FRW WITH A COSMOLOGICAL CONSTANT

Franciel Leocadio do Nascimento ¹

ABSTRACT

Einstein's equations, initially presented in general relativity, did not predict a static universe, as was believed at the time. Because of this, Einstein added a new term in his equation, the cosmological constant *Lambda*, which would play the role of a repulsive force in equilibrium with the gravitational force. With the discovery of Hubble, there was no longer a need for a cosmological constant. But 60 years later, studies by independent research groups pointed to an accelerating expansion universe. This discovery not only brought relevance to the cosmological constant, but also led cosmologists to speculate about an unknown energy that would cause this acceleration, called dark energy. One of the cosmological models for the accelerated universe is the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) solution with the cosmological constant in the Einstein equations. The purpose of this paper is to deduce this solution.

KEYWORDS: Space-Time, Cosmological Constant and Dark Energy.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Cosmologia Moderna	10
2.1	Princípio Cosmológico	10
2.2	Teoria da Relatividade Geral	11
2.3	Postulado de Weyl	14
3	Energia Escura e Matéria Escura	15
4	A Solução de FRW e a constante cosmológica	19
4.1	A Métrica de Robertson-Walker	19
4.2	Equações de Friedmann	21
4.3	Análise Qualitativa das Equações de Friedmann	23
5	Considerações Finais	28
6	Referências	29

1 Introdução

A partir de 1988 um novo conceito vem tomando cada vez mais espaço na cosmologia moderna para explicar a expansão acelerada do Universo.

Desde a descoberta de Edwin Hubble, em 1929, sabe-se que o Universo está em expansão e que a matéria, pela sua força de atração comum, deveria conter esse efeito. Porém observações feitas mais tarde pareciam contradizer esta especulação teórica, uma vez que apontavam para uma expansão cada vez mais rápida (SILVA, 2018). É neste cenário que surge a necessidade de uma energia desconhecida, denominada de energia escura, que faria este papel de força repulsiva entre a matéria comum.

Nas equações de campo da teoria da relatividade geral (TRG), esta energia é descrita pela constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein em suas equações para estabelecer um limite de distâncias em que a força atrativa daria espaço à força repulsiva (SOARES, 2015). Além da energia escura existe também um outro conceito desconhecido, introduzido nos modelos cosmológicos principalmente para explicar algumas irregularidades na dinâmica das galáxias, trata-se da matéria escura. Esta matéria seria muito mais densa que a matéria comum, porém completamente invisível (WHEELER, 2007). Estes dois conceitos não possuem explicação física até o momento, o que faz com que o surgimento de novas teorias a respeito aconteça de maneira formidável.

A solução de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) para as equações de Einstein com a constante cosmológica, dá origem a um modelo, baseado na hipótese simplificadora do *princípio cosmológico*, denominado *modelo padrão*¹, por se tratar de um modelo simples que concorda com a maioria dos dados observacionais. É neste modelo que o Universo é considerado preenchido com matéria (bariônica e escura) e energia escura, com a energia escura dominando sobre a matéria, tendo como resultado um universo em expansão

¹O modelo padrão não é o único modelo resultante da solução de Friedmann. Pode-se criar outros modelos, como o modelo estático de Einstein variando os valores de k e de Λ nas equações de Friedman (SOARES, 2015).

acelerada.

Com o intuito de compreendermos o papel da constante cosmológica em um modelo que prevê a expansão acelerada do Universo, nosso objetivo é deduzir a solução de FRW.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente, faremos uma breve revisão da cosmologia moderna; em seguida, discutiremos os conceitos de matéria e energia escura, e trataremos dos principais problemas cosmológicos que lhe deram origem; na sequência, deduziremos a solução de Friedmann com a constante cosmológica; e, após essa etapa, encerraremos o trabalho apresentando as considerações finais.

2 Cosmologia Moderna

Nesta seção, apresentaremos, de forma sucinta, os três pilares sobre os quais a cosmologia moderna está fundamentada: o princípio cosmológico; a teoria da relatividade geral; e o postulado de Weyl.

2.1 Princípio Cosmológico

Para estudarmos a evolução do Universo, devemos tomar como base o *princípio cosmológico*, segundo o qual o Universo é homogêneo e isotrópico em alguma escala e em qualquer época².

Existem, pelo menos, duas razões para adotarmos tal princípio. A primeira é que, devido as dimensões do Universo, podemos observar apenas a parte dele em que estamos e, se as regiões distantes forem muito distintas, não conseguiríamos prever como elas são. A segunda é que, se não admitirmos que o Universo é igual em suas diversas regiões, nos depararíamos com equações bastante complexas. Naturalmente, esses aspectos impossibilitariam que fizéssemos uma descrição teórica do universo.

A homogeneidade do Universo foi proposta com base nas observações realizadas por E. P. Hubble em 1924. Ao examinar fotografias que utilizava para estudar as estrelas, Hubble percebeu que a existiam nebulosas fora da nossa galáxia, e com isso notou a existência de muitas outras galáxias e que elas estão distribuídas de maneira aproximadamente uniforme. Por outro lado, a hipótese da isotropia foi confirmada com a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF) por Penzias e Wilson, em 1964 (DURRER, 2015). Essa radiação consiste em uma radiação de microondas originada no Universo primitivo que emana de todas as direções com a mesma forma. Isto mostrou que o Universo aparenta ser da mesma forma de todas as direções, para onde quer que se observe.

Do ponto de vista formal, homogeneidade e isotropia espacial são transformações de simetria que deixam a métrica invariante. Homogeneidade significa simetria, isso é

²Homogêneo pois a distribuição de galáxias é uniforme; isotrópico visto que esta distribuição é igual em todas as direções.

invariância, por translação e isotropia significa simetria por rotações. Muitos modelos cosmológicos tomam esse princípio com base para descrever a estrutura do Universo.

2.2 Teoria da Relatividade Geral

A TRG é considerada como uma generalização da teoria Newtoniana da gravitação para o caso relativístico. Devido a isso, é importante iniciarmos esta seção fazendo uma breve abordagem sobre a gravitação Newtoniana.

Em 1687, Issac Newton, em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, apresentou sua teoria da gravitação, que se trata de uma teoria tridimensional descrita em termos de um campo escalar $\Phi(\vec{r})$, denominado potencial gravitacional, o qual satisfaz a equação de Poisson,

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) , \quad (1)$$

em que $G = 6,67.10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ é a constante newtoniana da gravitação e $\rho(\vec{r})$ é a densidade de massa que gera o campo.

De acordo com a teoria newtoniana, o potencial escalar cria um campo de força, responsável pela atração dos corpos, que é diretamente proporcional ao gradiente do potencial Φ . Desse modo, se uma partícula de massa m for colocada nas presença do potencial Φ , esta sofrerá uma força atrativa

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi . \quad (2)$$

Se o potencial for gerado por uma partícula de massa M , localizada na posição \vec{r}_0 , a solução da equação de Poisson será dada por

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} , \quad (3)$$

e, de acordo com (2), a força sobre outra partícula de massa m , que se encontra no ponto \vec{r} , será

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GmM\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} , \quad (4)$$

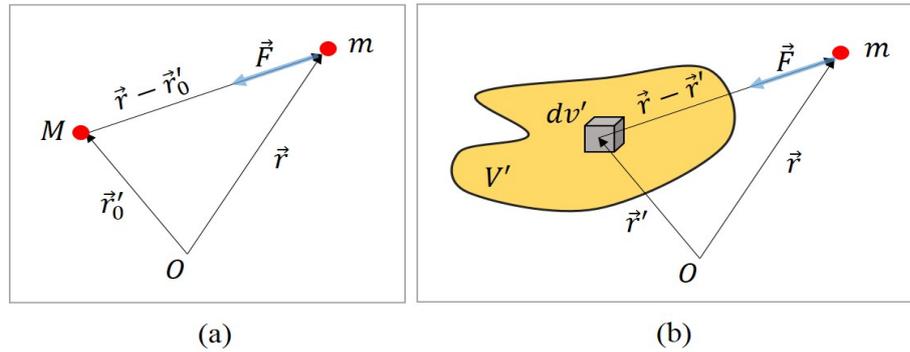


Figura 1: (a) Força realizada por uma partícula de massa M , localizada na posição \vec{r}'_0 , sobre outra de massa m em \vec{r} . (b) Força gerada por um elemento de volume dv' de massa dm' , do corpo extenso, sobre uma partícula de massa m que se encontra em \vec{r} .

que é a lei do inverso do quadrado das distâncias da gravitação de Newton [Ver fig. 1(a)]. Conseqüentemente, admitindo que a força gravitacional satisfaz ao princípio da superposição, temos que a força gerada por um corpo extenso sobre a partícula de massa m é

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' , \quad (5)$$

onde dv' é o elemento de volume na posição definida pelo vetor \vec{r}' de uma origem (arbitrária) até um ponto dentro da distribuição de massa [Ver fig. 1(b)]. É importante destacarmos que a expressão (4) é um caso particular da equação (5). De fato, na situação em que a força é realizada por massa M situada em $\vec{r}' = \vec{r}'_0$, isto é, $\rho(\vec{r}') = M\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_0)$, essas equações concordam.

Diferente da gravitação Newtoniana, em que a gravidade tem sua origem em uma força atrativa entre corpos massivos, na relatividade geral a gravidade é justificada como uma curvatura no espaço-tempo, uma entidade geométrica com três dimensões espaciais e uma temporal. Esta nova teoria da gravitação foi possível devido as semelhanças existentes entre o campo gravitacional e um sistema de referência acelerado, possibilitando a descrição da gravidade em termos do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual é solução de um conjunto de equações denominado equações de Einstein.

Uma vez que a TRG é a teoria relativística da gravitação, as equações de Einstein

devem, no limite de campo fraco, recair na equação de Poisson. Sendo assim, o lado esquerdo dessas equações deve conter derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico, em analogia ao operador Laplaciano no campo de potencial Φ . Já o lado direito deve conter um objeto que descreva a quantidade de matéria e energia presentes, de forma análoga à densidade ρ .

A matéria e energia são definidas, na relatividade geral, pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ o qual, devido a conservação da energia e momento, possui divergência nula:

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 . \quad (6)$$

Por conta disso, o tensor relacionado às propriedades do espaço-tempo também deve possuir divergência nula.

Após inúmeras tentativas, Einstein construiu um objeto matemático que satisfaz todas as propriedades exigidas, e concluiu que as equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a quantidade de matéria e energia presentes são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (7)$$

em que κ é a constante de Einstein, cujo valor é dado por:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,08.10^{48} \text{ cm}^{-1}\text{g}^{-1}\text{s}^2 \quad (8)$$

Nessas equações, o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e escalar de Ricci, R , são definidos por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (9)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (10)$$

onde

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right) , \quad (11)$$

são os símbolos de Christoffel.

Diz-se equações do campo de Einstein porque as 10 componentes do tensor métrico dá origem a dez equações. Como consequência temos 10 potenciais que definem a gravitação na relatividade geral.

2.3 Postulado de Weyl

Certamente o que se consegue enxergar do nosso Universo, não corresponde ao Universo como um todo. Logo, surge o seguinte questionamento: como é possível relacionar as propriedades, observadas localmente, com regiões distantes não observadas? H. Weyl, em 1923, resolveu este problema atribuindo ao Universo um fluido perfeito preenchendo todo o espaço. Desta forma, em larga escala, as galáxias podem ser comparadas a partículas em um fluido.

Em geral, a descrição de um fluido envolve outros parâmetros como viscosidade, condução de calor e resistividade. Entretanto, fluidos perfeitos necessitam apenas de dois parâmetros para sua descrição: a densidade de energia $\rho(x^\mu)$ e pressão $p(x^\mu)$. Desta forma o postulado de Weyl facilita a construção de modelos cosmológicos para o Universo.

O tensor energia-momento envolve os parâmetros de um fluido perfeito através da relação

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} , \quad (12)$$

em que p e ρ dependem apenas do tempo e u^μ é a 4-velocidade do fluido dada por:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} , \quad (13)$$

onde s é o intervalo próprio (LANDAU e LIFSHITZ, 1974).

3 Energia Escura e Matéria Escura

Existe muitos fenômenos observáveis no Universo que não possuem explicação considerando apenas a matéria bariônica, isto é, aquilo que conseguimos observar. Para isto, deve-se introduzir nos modelos cosmológicos dois conceitos cuja a natureza é ainda desconhecida. São eles a matéria escura e a energia escura. Estes dois conceitos serão tratados nesta seção.

- **Matéria escura**

A matéria bariônica ou ordinária foi considerada, durante muito tempo, como o único tipo de matéria existente. Ela é encontrada no Universo principalmente a partir da sua interação com a radiação eletromagnética. De fato, não havia qualquer razão para se considerar como matéria qualquer outra coisa que não possua essa propriedade. Entretanto, há algumas irregularidades observadas, principalmente em galáxias, em que não é possível estabelecer uma explicação física a partir da matéria comum. Por exemplo, a velocidade de rotação da parte externa de uma galáxia é tão elevada que deveria fazer com que seus objetos fossem arremessados no espaço. Entretanto não é isto que acontece [Fig. 2]. É como se algo a mais estivesse afetando este movimento. Em alguns

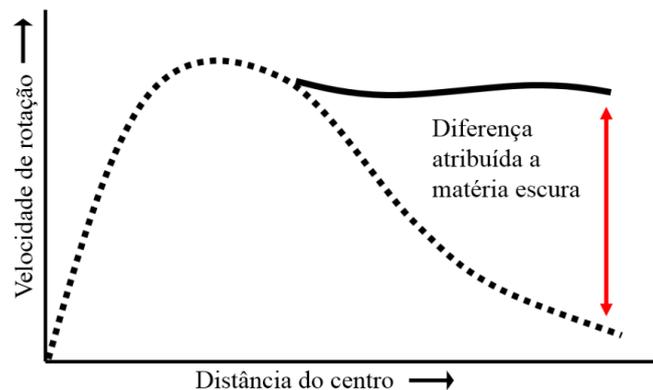


Figura 2: Relação aproximada entre a velocidade de rotação de uma galáxia e a distância a partir do centro. Os resultados teóricos estão representados pela linha pontilhada e os observados; pela escura.

casos, a velocidade de rotação das galáxias é tão grande que estas nem deveriam existir.

Existe outros fenômenos como este, sem explicação a partir da matéria comum, como o movimento das galáxias nos aglomerados e o fenômeno de lentes gravitacionais. A solução mais consistente que os cosmólogos encontraram até o momento para estas situações é considerar a existência de uma matéria invisível cujos efeitos gravitacionais são claros. Este tipo de matéria é dito invisível porque, diferente da matéria comum, só é encontrada a partir de sua interação gravitacional, não possuindo qualquer interação com a luz. Devido a isto foi denominada de *matéria escura*.

Apesar de sua natureza ser ainda desconhecida, existe alguns candidatos para ela como os buracos negros, anãs marrons e neutrinos. Em particular os axions ³ é um forte candidato para a matéria escura, por apresentar falhas na teoria de física de partículas como acontece na matéria escura. Entretanto, apesar dos esforços, não foi possível detectar esta partícula (MARSH *et al*, 2017). Mesmo sem explicação física para a natureza da matéria escura, muitos trabalhos consideram inquestionável sua existência. Recentemente, PAOLO *et al* (2019), com um estudo rigoroso, considerando os detalhes morfológicos de galáxias de baixo brilho (LSB) e galáxias anãs, observaram a relação entre a aceleração da galáxia e a componente bariônica de matéria [Fig. 3]. De forma geral, a conclusão foi que, devido a irregularidade na relação entre a aceleração radial e a componente bariônica, não há como negar a existência da matéria escura.

• Energia escura

Um outro conceito ainda desconhecido, mas necessário para explicar a expansão acelerada do Universo, é a energia escura. Mesmo que ela só tenha sido descoberta em 1988, é muito provável que alguns físicos, como o próprio Einstein, tenham previsto sua existência.

A primeira concepção, na relatividade geral, de uma força repulsiva no Universo, ocorreu a partir da solução inicial apresentada por Einstein para sua equação, que não

³Partícula elementar hipotética criada para explicar a violação de requisitos básicos em certas reações químicas, como a simetria do tempo. Para mais detalhes ver: Axions e monopolos, Evolução e Interiores Estelares. Departamento de Astronomia - Instituto de Física Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

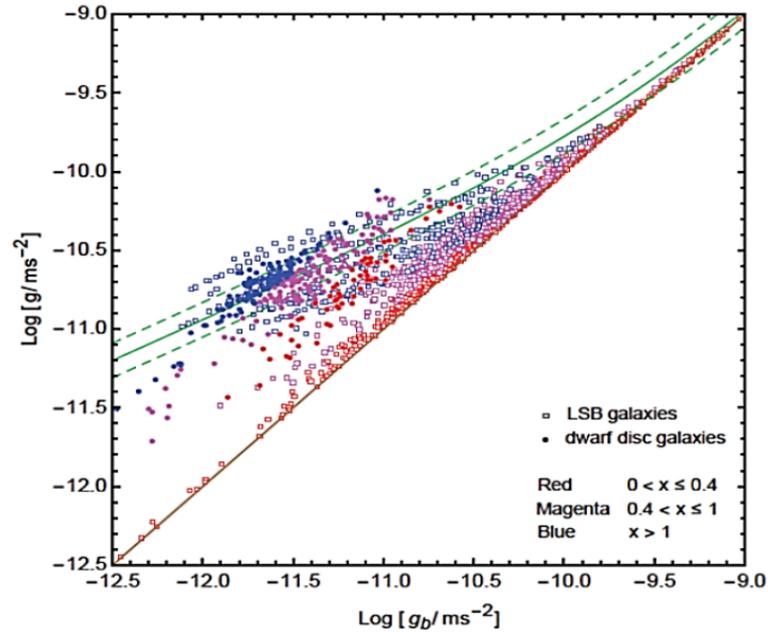


Figura 3: Relação entre a aceleração radial e a componente de matéria bariônica. As diferentes cores são devido a morfologia de cada galáxia. As linhas verdes não são interessantes para este trabalho. Fonte: (PAOLO *et al*, 2019).

correspondia a um Universo estático, como se acreditava na época. De fato, com o propósito de ajustar sua equação para um Universo estático, isto é, de introduzir um efeito de “antigravidade” para equilibrar a atração da matéria comum, Einstein adicionou um termo na equação (7), Λ (lâmbda), e a rescreveu como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (14)$$

Porém, em 1929 Edwin Hubble, pelo efeito doppler ótico ⁴, descobriu que as galáxias estão se afastando uma das outras. Uma vez que a expansão do universo foi atribuída, por Hubble, a explosão do “big-bang” e não a um efeito antigravitacional enigmático, a ideia de universo estático foi extinta junto com a necessidade de uma constante cosmológica. Acontece que, por volta de 1988, alguns estudos realizados por grupos de pesquisa independentes⁵ apontaram para um resultado que deu início a uma nova fase

⁴No efeito doppler ótico a radiação emitida sofre desvios no espectro devido a velocidade da fonte em relação a um observador. No caso do afastamento uma fonte, a radiação sofrerá desvio para o vermelho. De acordo com as observações de Hubble, a maioria das galáxias apresentam um desvio espectral para o vermelho

⁵Como exemplo o grupo Supernova Cosmology Project (SCP) que, baseado nos dados obtidos pela

na cosmologia contemporânea: o Universo estaria em expansão acelerada. Este resultado, completamente inesperado, trouxe à tona relevância para a constante cosmológica de Einstein, que desempenha um papel de força repulsiva.

Para que houvesse esta aceleração, deveria haver algum tipo de energia imperceptível responsável por uma força repulsiva mais intensa que a atração gravitacional. Até então, não foi detectado qualquer tipo de energia com esse efeito. Diante disto, existem duas alternativas: não existe energia escura ou existe, mas não interage com radiação, porque é invisível.

O posicionamento de admitir a existência da energia escura parece ser o mais adequado, visto que é a uma explicação imediata para a aceleração do Universo que não modifica a teoria da relatividade geral. Contudo, ao considerar a existência desta deve-se entender que sua natureza será de um tipo completamente novo e desconhecido, sendo considerada um dos maiores enigmas da física. Esta é a principal razão pelo qual é chamada de energia escura. Apesar da matéria e energia escura terem surgido devido a necessidade de explicar fenômenos diferentes, já existem trabalhos, como exemplo, o de J. S. Farnes (2018), propondo que estes dois conceitos se unem para formar uma espécie de massa negativa que permeia todo o Universo.

SNe Ia e considerando o Universo plano ($\Omega_k = 0$), obtiveram o valor para o parâmetro de desaceleração $q_0 = -0,58$, o que indica que o universo esta se expandindo.

4 A Solução de FRW e a constante cosmológica

A solução de Friedmann-Robertson-Walker, com a constante cosmológica, descreve a dinâmica da evolução do Universo considerando-o em expansão acelerada. Para obtermos esta solução, devemos resolver as equações de Einstein levando em conta que a métrica que descreve o Universo é aquela que satisfaz o princípio cosmológico, a qual é denominada métrica de Robertson-Walker, e que o conteúdo de matéria-energia do Universo é representado pelo o tensor-energia momento de um fluido perfeito, conforme previsto pelo postulado de Weyl. Tudo isso será abordado nesta seção.

4.1 A Métrica de Robertson-Walker

Conforme argumentamos, a isotropia implica em simetria por rotação. Dito de outra forma, essa característica garante que a métrica que descreve o Universo deve ser invariante por rotações. Levando isso em conta, o elemento de linha do Universo assume a seguinte forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] , \quad (15)$$

onde t é o tempo medido por um observador co-móvel e x^i são as coordenadas espaciais (ISLAM, 2004).

Para que o espaço seja esfericamente simétrico em todos os pontos, a curvatura em cada ponto deve ser constante. O espaço nestas condições, em três dimensões, é caracterizado pela seguinte equação:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{ij}g_{kl}) , \quad (16)$$

sendo K uma constante conhecida como curvatura (ISLAM, 2004).

Contraindo a equação (16) com a métrica g^{ik} , obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = R_{jkl}^k = 2K g_{jl} , \quad (17)$$

o que mostra que, em um espaço de curvatura constante, o tensor de Ricci é diretamente proporcional a métrica desse espaço. Por outro lado, usando a definição (9), temos que

as componentes 11 e 22 do tensor de Ricci, associado ao espaço tridimensional, são:

$$R_{11} = \frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} \quad \text{e} \quad R_{22} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} - e^{-\lambda(r)}. \quad (18)$$

Logo, comparando (17) com (18), chegamos ao seguinte conjunto de equações:

$$\frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} = 2K e^{\lambda(r)} \quad (19)$$

e

$$1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} - e^{-\lambda(r)} = 2K r^2. \quad (20)$$

Então, isolando $d\lambda/dr$ em (19) e substituindo em (20), encontramos

$$e^{-\lambda} = 1 - K r^2. \quad (21)$$

Desta forma o elemento de linha (15) torna-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (22)$$

Como o universo é homogêneo e isotrópico, sua expansão deve ocorrer de acordo com um parâmetro S que depende unicamente o tempo. Desse modo, devemos reescrever o elemento de linha (22) como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (23)$$

Uma vez que a constante K pode ser positiva, negativa ou nula, temos a possibilidade de reescrevê-la como $K = |K|k$, onde k pode assumir os valores $+1$, -1 e 0 . Então, fazendo isto, redefinindo a variável r por $r \equiv \sqrt{|K|}r$ e tomando

$$a(t) = S(t)/\sqrt{|K|}, \quad \text{se } K \neq 0$$

e

$$a(t) = S(t), \quad \text{se } K = 0, \quad (24)$$

a expressão (23) toma a forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (25)$$

a qual é conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

Nesta métrica, o valor de k determina as seguintes geometrias espaciais:

i. Geometria esférica ($k = 1$): Este tipo de geometria pode ser chamado também de Universo fechado. Tem por característica ser finito e ilimitado. Finito, por seu volume espacial ser finito; ilimitado, por não apresentar limites ou barreiras. Essa geometria apresenta uma fase de expansão, seguido de uma contração.

ii. Geometria hiperbólica ($k = -1$): Também chamado de Universo aberto, ele é infinito, ilimitado e se expande indefinidamente.

iii. Geometria plana ($k = 0$): Este tipo de geometria diz que o Universo se expande para sempre com velocidade cada vez menor e possui volume espacial infinito. (VILENKIN e SHELLARD, 1994; ISLAM, 2001)

4.2 Equações de Friedmann

Um modelo cosmológico consiste na solução das equações de campo Einstein, pela qual se obtém a equação do fator de escala $a(t)$, que determina a evolução do Universo. Nesta seção, utilizando a métrica (25) nas equações de Einstein, obteremos as equações de Friedmann para $a(t)$. Entendendo que a constante cosmológica descreve o papel da energia escura, as equações de Friedmann com a constante cosmológica são soluções das equações (14).

As componentes covariantes da métrica (25) são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

Por sua vez, as componentes contravariantes são

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - kr^2)/a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (27)$$

Levando isso em conta, vemos que as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= c^{-1}a\dot{a}/(1 - kr^2), & \Gamma_{22}^0 &= c^{-1}r^2a\dot{a}, & \Gamma_{33}^0 &= c^{-1}r^2\text{sen}^2\theta a\dot{a}, & \Gamma_{01}^1 &= c^{-1}\dot{a}/a, \\ \Gamma_{11}^1 &= kr/(1 - kr^2), & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2)\text{sen}^2(\theta), & \Gamma_{02}^2 &= c^{-1}\dot{a}/a, \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta\cos\theta, & \Gamma_{03}^3 &= c^{-1}\dot{a}/a, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta, \end{aligned}$$

onde o “ponto” representa a derivada com relação a t .

Substituindo os símbolos de Christoffel na definição do tensor de Ricci, dada pela equação (9), podemos encontrar as componentes não nulas desse tensor, as quais são dadas por:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k}{c^2(1 - kr^2)}, \quad (28)$$

$$R_{22} = \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k), \quad (29)$$

$$R_{33} = \frac{r^2 \text{sen}^2(\theta)}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k). \quad (30)$$

Consequentemente, o escalar de curvatura de Ricci que é

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{6}{c^2 a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2k). \quad (31)$$

De acordo com o postulado de Weyl, o conteúdo físico do Universo, formado pelas galáxias que se supõe preencher todo o espaço, se comporta como um fluido perfeito. Diante disso, o tensor energia momento que descreve o conteúdo de matéria no Universo é dado pela equação (12). Porém com estamos tratando com um referencial co-móvel, devemos usar $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ⁶. Fazendo isso, vemos que as componentes não-nulas do

⁶No referencial co-móvel, temos que $dx^i = 0$. Além disso, de acordo com a métrica (25), nesse referencial, o intervalo próprio infinitesimal é $ds = cdt$. Isso garante que a quadrivelocidade seja dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$

tensor $T_{\mu\nu}$ são:

$$T_{00} = \sum_i \rho_i, \quad T_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \sum_i p_i, \quad T_{22} = r^2 a^2 \sum_i p_i \quad \text{e} \quad T_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \sum_i p_i, \quad (32)$$

onde o somatório indica que estamos considerando todos os constituintes do Universo.

Finalmente, com os resultados obtidos até aqui, vemos que as componentes 00 e 11 das equações de Einstein, na métrica de Robertson-Walker, são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\sum_i \rho_i + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) \quad (33)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(\sum_i p_i - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right), \quad (34)$$

que são as equações de Friedmann com a constante cosmológica⁷.

Vale salientar que não conseguiremos descrever a dinâmica do Universo se nos basearmos apenas nessas equações. Na verdade, para resolvermo o problema da evolução, além das equações de Friedmann, necessitamos das equações de estado das quantidades que constituem o Universo. De acordo com (CARROL, 2004), a maioria dos constituintes relevantes para a cosmologia obedece à seguinte equação de estado:

$$p_i = \omega_i \rho_i, \quad (35)$$

onde ω_i é uma constante. Para a matéria não relativística (matéria bariônica e matéria escura), a qual tem como característica possuir pressão nula, essa constante é igual a zero. Já para a matéria relativística ou radiação, o valor da constante é 1/3 (FERRARO, 2007).

4.3 Análise Qualitativa das Equações de Friedmann

Na seção anterior, obtivemos as equações de Einstein, com a constante cosmológica, para a métrica de Robertson-Walker, considerando o tensor energia-momento como o de

⁷Como podemos observar, a presença da constante cosmológica nas equações de Einstein é equivalente a considerarmos sem essa constante e admitirmos que, além da matéria comum e da radiação, existe um novo constituinte (energia escura) cujas densidade e pressão são, respectivamente, $\rho = \Lambda c^4 / 8\pi G$ e $p = -\Lambda c^4 / 8\pi G$.

um fluido perfeito visto por um observador co-móvel. Nesta seção, a partir das equações (33) e (34), faremos uma análise qualitativa sobre a dinâmica do Universo.

Derivando (33) e substituindo o termo \ddot{a} da equação (34) no resultado, obtemos

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0, \quad (36)$$

que é a equação relativística da conservação da energia em uma geometria de Robertson-Walker; algo semelhante à equação de continuidade, mas para o fluido cósmico. Logo, substituindo (35) em (36), encontramos:

$$\rho_i = \rho_{i0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega_i)}, \quad (37)$$

onde o índice “0” indica que a quantidade foi medida no tempo presente $t = t_0$.

Subtraindo (34) de (33), obtemos a seguinte equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{c^2} \sum_i \left(p_i + \frac{1}{3}\rho_i \right). \quad (38)$$

Uma vez que as densidade de matéria ($\omega^{mat} = 0$) e radiação ($\omega^{rad} = 1/3$) se comportam, respectivamente, como $\rho^{mat} \propto a^{-3}$ e $\rho^{rad} \propto a^{-4}$, a equação (38) nos permite concluir que, no Universo primordial ($a \rightarrow 0$), quando este era preenchido por matéria ordinária e radiação, a constante não teve nenhuma influência na dinâmica e houve uma expansão desacelerada. Por outro lado, se, atualmente, o “termo Λ ” dominasse a equação (38), a expansão seria acelerada. Dessa forma, podemos afirmar que a constante cosmológica positiva faz o papel de uma “força repulsiva” que acelera a expansão.

Embora a equação (38) indique que a presença da constante cosmológica (energia escura) nas equações de Einstein leva a uma solução que prevê uma expansão acelerada do Universo, para uma melhor compreensão desse aspecto, analisaremos diretamente a primeira equação de Friedmann [Eq. (33)].

É conveniente medir as diferentes contribuições de matéria e energia do Universo como uma fração da densidade crítica, $\rho_c(t) \equiv 3c^2 H(t)^2 / 8\pi G$, onde $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ é o

parâmetro de Hubble. Para isto, definimos o parâmetro densidade:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (39)$$

Como consequência, podemos escrever

$$\rho_i(t) = \frac{3c^2 H(t)^2 \Omega_i(t)}{8\pi G}. \quad (40)$$

Substituindo esta equação em (33), vemos que a constante k pode ser expressa por:

$$kc^2 = a(t)^2 H(t)^2 \left[-1 + \sum_i \Omega_i(t) + \Omega^\Lambda(t) \right] = a_0^2 H_0^2 \left[-1 + \sum_i \Omega_{i0} + \Omega_0^\Lambda \right], \quad (41)$$

⁸em que

$$\Omega^\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H(t)^2}. \quad (42)$$

Mas, levando em conta que Λ é uma constante, da equação acima segue que $\Lambda = 3H_0^2 \Omega_0^\Lambda / c^2$. Com isso, podemos escrever

$$\Omega^\Lambda(t) = \frac{H_0^2}{H(t)^2} \Omega_0^\Lambda. \quad (43)$$

Por outro lado, utilizando (40) em (37), segue que

$$\Omega_i(t) = \frac{\Omega_{i0} H_0^2 a_0^{3(1+\omega_i)}}{H(t)^2 a(t)^{3(1+\omega_i)}}. \quad (44)$$

Logo, substituindo (43) e (44) em (41), e considerando que o Universo é dominado pela matéria não relativística ($\omega_i = 0$) e pela energia escura ($\Lambda \neq 0$), chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + V = H_0^2 (1 - \Omega_0^\Lambda - \Omega_0^{mat}), \quad (45)$$

sendo

$$V = -H_0 \left(\Omega_0^\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} + \Omega_0^{mat} \frac{a_0}{a} \right). \quad (46)$$

⁸A equação (41) mostra que o Universo é fechado ou aberto, se $\sum_i \Omega_i + \Omega^\Lambda$ for maior ou menor que 1.

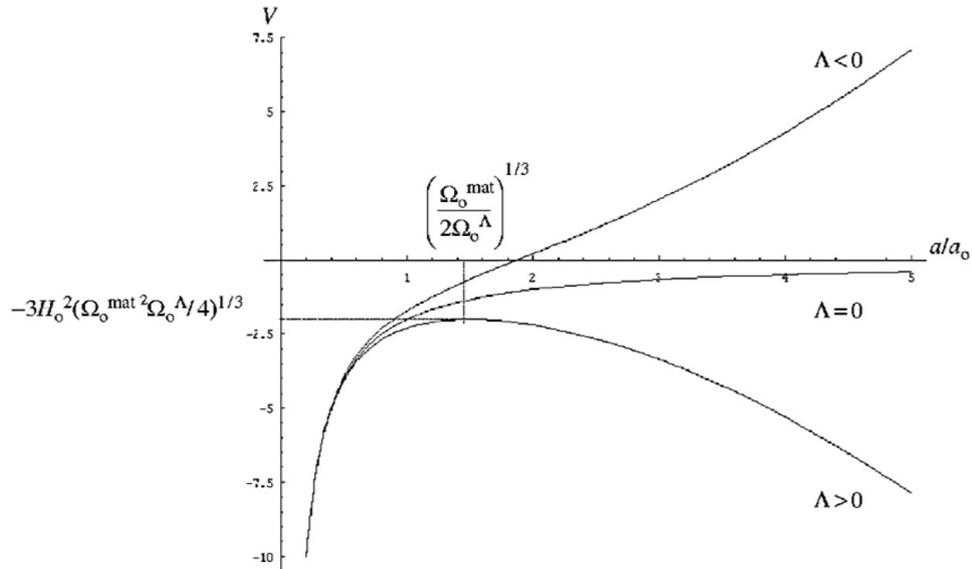


Figura 4: Comportamentos do “potencial” (46) para os casos em que $\Lambda > 0$, $\Lambda = 0$ e $\Lambda < 0$ (FERRARO, 2017).

Como podemos observar, a equação (45) é semelhante à equação de conservação da energia da mecânica clássica. Dessa forma, analisaremos qualitativamente o fator de escala, a , de forma análoga àquela que é feita na teoria clássica (SYMON, 1996).

De acordo com a figura 4, se $\Lambda < 0$, o “potencial”, V , apresentará um ponto de retorno, seja qual for o valor do lado direito da equação (45). Isso significa que, caso Λ fosse negativo, o Universo não poderia se expandir para sempre. O fator de escala deveria atingir um valor máximo e então começaria a decrescer até seu volume voltar a se anular, originando outra singularidade, o *Big Crunch*. Ao invés disso, se $\Lambda = 0$, temos duas possibilidades. O lado direito da equação (45) ser menor do que zero, caso em que o universo se expandiria desaceleradamente até atingir um ponto de retorno e recolapsar; ou o lado direito da equação ser maior ou igual a zero, caso em que o universo se expandiria indefinidamente em uma expansão desacelerada. Por fim, se $\Lambda > 0$, o potencial terá um ponto de equilíbrio instável em $a/a_0 = (\Omega_0^{mat}/2\Omega_0^\Lambda)^{1/3}$, o qual corresponde ao modelo de Universo estático proposto por Einstein. Desse modo, se o lado direito de (45) fosse superior ao máximo do potencial, isto é, $-3H_0^2(\Omega_0^{mat}{}^2\Omega_0^\Lambda/4)^{1/3}$, o Universo se expandiria para sempre. Por outro lado, caso esse lado fosse menor que o valor máximo,

ou o Universo não viria de um *Big Bang* e se expandiria para sempre, ou seria originado de um *Big Bang* e se colapsaria.

5 Considerações Finais

Considerar a existência da matéria e energia escura para explicar as diversas irregularidades observadas não é o único caminho. Há outros meios de explicar tais problemas como a Modified Newtonian Dynamics, MOND, ou dinâmica newtoniana modificada, proposta por Moti Milgrom, em 1983. Trata-se de uma teoria alternativa à matéria escura para explicar a velocidade de rotação das galáxias (VELTEN, 2008). Apesar de funcionar para um número significativo de galáxias, a MOND não consegue explicar irregularidades para estruturas maiores.

Atualmente, a solução de Friedmann-Roberson-Walker, para as equações de Einstein com a constante cosmológica, é considerada como o modelo padrão da cosmologia, tratando-se de um universo preenchido com matéria e energia escura, pois além de se tratar de uma solução simples por estar baseada na hipótese simplificadora do princípio cosmológico, está de acordo com a maioria das observações cósmicas realizadas.

Além disto, esta solução, juntamente com a equação de estado, (35), mostra que a constante cosmológica não exerceu nenhuma influência no universo primitivo, resultando em uma expansão desacelerada neste período inicial.

A equações de Friedmann em termos Ω_0^Λ e Ω_0^{mat} , (45), também conduzem a uma análise qualitativa bastante familiar do fator de escala do universo, por se tratar de uma equação muito semelhante a equação de conservação de energia do fator de escala.

Atualmente o valor de Ω^Λ é de 0.72 ± 0.22 , e $\Omega^\Lambda = 0.28 \pm 0.22$ (NETO, 2018) com uma pequena fração desta sendo a matéria bariônica. Isto significa que o universo é constituído, em sua maioria por um conteúdo cuja natureza é completamente desconhecida. Significa também que a energia escura domina o universo, fazendo a força repulsiva prevalecer sobre a força atrativa. Isto também aponta que vivemos em uma época privilegiada do universo, em que podemos obter informações de galáxias, supernovas e outros objetos, pois em um futuro distante, estes objetos se afastarão, tornando o universo escuro e deserto.

6 Referências

CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**, New York, John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. **Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity**. Chicago. Addison Wesley. University of Chicago. 2004.

DURRER, R. **The Cosmic Microwave Background: The history of its experimental investigation and its significance for cosmology**. Arxiv [astro-ph. CO.], 2015.

FARNES, J. S. **A unifying theory of dark energy and dark matter: Negative masses and matter creation within a modified λ CDM framework**, Oxford, Oxford e-Research Centre (OeRC)- Department of Engineering Science - University of Oxford, 2018.

FERRARO, R. **Einstein's Space-Time**. An Introduction to Special and General Relativity. Buenos Aires. Springer. Universidad de Buenos Aires. 2007.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira. Axions e monopolos. **Evolução e Interiores Estelares**. Departamento de Astronomia - Instituto de Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. Disponível em:
<<http://astro.if.ufrgs.br/evol/node1.htm>>. Acesso em: 17 de maio de 2019.

ISLAM, J. N. **An Introduction to Mathematical Cosmology**. 2 Ed. Cambridge, 2004.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **The Classical Theory of Fields**, Minnesota, Perga-

mon Press Ltd, 1971.

MARSH M. C. D. *et al*, **A New Bound on Axion-Like Particles**, Arxiv [hep-ph.], 2017.

NETO, G. P. da S. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. **Revista Brasileira do Ensino de Física**, Natal, vol. 40, n° 2, nov. 2017.

PAOLO, C. Di. SALUCCI, P. and FONTAINE, J. P. **The Radial Acceleration Relation (RAR):**The Crucial Cases Of Dwarf Discs And Of Low Surface Brightness Galaxies, Trieste, Arxiv [astro-ph. Ga.], 2019.

PEREIRA, S. L. **Modelos Cosmológicos Escalares Tensoriais**, Dissertação - UnB, Brasília, 2006.

SILVA, K. V. R. de A. **Brilho Superficial em Raio-x de Aglomerados de Galaxias, Opacidade Cósmica e Limites no Parâmetro de Densidade de Matéria**, Dissertação - UFCG, Campina Grande, 2018.

SOARES, Domingos. **Textos e notícias**. Universos com constante cosmológica. Universidade Federal de Minas Gerais. 2015. Disponível em:

<<http://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/unilamb/unilamb.htm>>. Acesso em 3 de junho de 2019.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Massachusetts. Addison Wesley. 3° edição. 1971.

VELTEN, H.E.S. MOND: Uma alternativa à mecânica newtoniana, **Revista Brasileira**

do **Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 3314.1-3314.5, set. 2008.

VILENKIN, A. e SHELLARD, E. P. S., *Cosmic String And Other Topological Defects*, Cambridge: Cambridge University Press. 1994.

WHEELER, J. C. **Cosmic Catastrophes** Exploding Stars, Black Holes, and Mapping the Universe, 2 Ed, New York, Cambridge University Press, 2007.

WUENSCHÉ, C. A. **Cosmologia Observacional**. Modelo Cosmológico Padrão. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Jun.2005. Disponível em:

< [http : //www.das.inpe.br/cosmo/intro – cosmo/node2.html](http://www.das.inpe.br/cosmo/intro-cosmo/node2.html) >. Acesso em: 30 de jun. de 2019.