UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RIVÂNIO REICARDO SANTOS SILVA

O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA

CAMPINA GRANDE – PB

2019

RIVÂNIO REICARDO SANTOS SILVA

O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias, na Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau em Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel.

CAMPINA GRANDE – PB

2019

S586u Silva, Rivânio Reicardo Santos.
O uso da Modelagem Matemática no Ensino de Geometria [manuscrito] / Rivanio Reicardo Santos Silva. - 2019.
47 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel , Departamento de Matemática - CCT."

1. Matemática. 2. Modelagem Matemática. 3. Ensino de Geometria. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

RIVÂNIO REICARDO SANTOS SILVA

O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias, na Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do grau em Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 19/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Aníbal de Menezes Maciel

Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profa. Me Maria da Conceição Vieira Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba

Mozart Edson Lopes Guimarães

Prof. Me Mozart Edson Lopes Guimarães
Governo do Estado da Paraíba

CAMPINA GRANDE – PB

2019

Dedico este trabalho à minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. Em especial, à minha mãe e à minha avó que, à sua maneira, sempre me apoiaram incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

À instituição por proporcionar um curso de qualidade, contribuindo dessa forma para a formação de excelentes profissionais e, consequentemente, melhorar a educação brasileira.

Familiares:

À minha avó materna Maria do Rosário;

À minha mãe Marivânia Ferreira;

À minha irmã Rinarya Marianne;

À minha prima Olaisylenne Santos;

E a todos meus outros familiares que não citei aqui. Sintam-se igualmente

Professores:

Ao professor Aníbal de Menezes Maciel, pela orientação, apoio e confiança;

Ao professor Victor Hugo, pelas suas aulas fantásticas com o devido rigor. Sua participação na minha formação foi excepcional, pois me fez abrir os olhos para alguns aspectos da realidade que poucos têm coragem de debater em sala de aula.

Ao professor Vandenberg, pelas suas aulas que dispensam comentários e pela sua maneira de ser. Em síntese, pagar uma disciplina com Vandenbeg é uma mistura de sentimentos. Ora dá vontade de sorrir, ora de chorar. Mas, no final, todos, ou não, saem felizes.

Ao professor Hélio pela sua forma de conduzir as aulas, preocupando-se, realmente, com o aprendizado de seus alunos e não somente em passar o conteúdo. Foi um dos poucos professores que soube passar e cobrar assuntos difíceis de maneira justa e imparcial. Suas aulas foram, sem dúvida, exemplo de como um bom professor deve trabalhar.

A professora Joselma pela sua didática fantástica. Sempre se dedicando ao máximo para que toda a turma possa acompanhar e aprender o conteúdo. Em particular, a professora Joselma muito me inspira, pois é minha conterrânea e mostrou que é possível chegar longe por meio de muito esforço e estudo.

E a todos os outros professores que não citei aqui.

Meus agradecimentos aos amigos e colegas de curso que são muito para citá-los aqui.

Por fim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

A matemática é peça chave no desenvolvimento de uma sociedade mais crítica. A fim de contribuir com melhores práticas de ensino, este trabalho de conclusão de curso objetiva refletir sobre o uso da modelagem matemática como método de ensino de geometria. A Modelagem Matemática pode ajudar os alunos a melhor compreenderem os objetos matemáticos, haja vista que partindo de situações cotidianas e utilizando conceitos matemáticos chega-se a um modelo que representa tal situação matematicamente. No que diz respeito ao ensino de geometria, nota-se uma certa dificuldade por parte de alguns alunos em associar as ideias com suas respectivas representações; a modelagem matemática é uma alternativa que pode ser utilizada para superar essa dificuldade. Além disso, há também muitas possibilidades de se explorar modelações. Escolhemos realizar neste trabalho uma oficina explorando assuntos da geometria plana e da geometria espacial, como cálculo de área e volume. Utilizamos uma das propostas trazidas no livro: Modelagem Matemática no Ensino dos autores BIEMBENGUT e HEIN. Para trabalhar os assuntos acima citados utilizando como base *embalagens*. Dessa forma, buscamos uma prática que envolve sólidos comuns do cotidiano e conteúdos vistos em sala de aula. A oficina foi aplicada em uma turma do 3º ano do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino da cidade de Solânea – PB. Após a apRElicação da oficina, resolvemos várias questões do ENEM as quais abordaram o conteúdo estudado em sala, com o intuito de ajudar com alunos com sua preparação voltada à prova. Como resultado, obtivemos uma boa compreensão sobre os assuntos estudados. Além disso, podemos destacar o nível de interesse dos alunos, que foi muito significativo. Percebemos isso por meio da resolução de questões.

Palavras-chave: Matemática. Modelagem Matemática. Ensino de Geometria.

ABSTRACT

The mathematics is key piece to development of a more critical society. In order to contribute with better teaching practices, this graduation course work aims to reflect on the use of mathematical modeling as a method of teaching geometry. The Mathematical Modeling can help students to better understand mathematical objects, given that starting from everyday situation and using mathematical concepts comes a model that represents this situation mathematically. As regards the teaching of geometry, there is a certain difficulty on the part of some students to associate ideas with their respective representations; mathematical modeling is an alternative that can be used to overcome this difficulty. In addition, there are also many possibilities to explore modeling. We chose to carry out in this graduation course work a workshop exploring topics of flat geometry and spatial geometry, such as area and volume calculation. We used on of the proposals brought in the book: Modelagem Matemática no Ensino of the autors BIEMBENGUT and HEIN. To work on the aforementioned subjects using as packaging basis. In this way, we seek a practice that involves common everyday solids and content seen in the classroom. The workshop was applied in a 3rd grade of middle school class of Solânea city state of PB. After the application of the workshop, we resolved several ENEM questions dealing with the content studied in the classroom, with the intention of helping students with their preparation for the test. As a result, we obtained a good understanding of the subjects studied. In addition, we can highlight the level of interest of the students, which was very significant. We see this through resolution of questions.

Keywords: Mathematics. Mathematical Modeling. Geometry Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 ASPECTOS GERAIS DA PESQUISA

1.1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, com os avanços tecnológicos, a matemática vem sendo aplicada amplamente, como ferramenta, não só os mais diversos campos científicos como também a várias situações cotidianas. Dessa maneira, é preciso superar um desafio: compreender a realidade através da matemática de forma clara, crítica e consciente. Sem deixar de lado, no entanto, o rigor matemático das afirmações e implicações fazendo associações entre o abstrato e o concreto.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais "A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar." (BRASIL, 1997, p. 15). Para superar tal desafio, temos a modelagem, que trata de ajudar a elaborar representações de situações através de conceitos matemáticos a fim de interpretar, compreender e fazer previsões da realidade de uma forma prática, ou seja, a modelagem pode facilitar o entendimento do conteúdo estudado pelo fato de associarmos tais assuntos ao cotidiano por meio dos modelos matemáticos.

Na geometria euclidiana plana e espacial, por exemplo, podemos fazer o uso da modelagem matemática associada aos problemas de área e volume que podem vir a serem utilizados para otimizar embalagens industriais, entre várias outras aplicações. Dessa forma, os alunos poderiam compreender melhor os aspectos abstratos e diferenciar as ideias de área e volume.

Agora, vale a pena destacar que um modelo é uma aproximação da realidade, e não a realidade em si, contudo cada peça que colocamos nesse "quebra-cabeça" torna o modelo mais próximo da realidade, e, no final, o conhecimento que temos do conteúdo estudado é aprimorado, expressado matematicamente.

Percebe-se, portanto, que o ato de modelar envolve não só os conhecimentos matemáticos, mas também aqueles referentes à situação-problema. Além disso, precisa-se de intuição e criatividade para aliar as ferramentas matemáticas ao problema em questão.

Os autores Biembengut e Hein (2009), entendem que a modelagem matemática é como se fosse uma arte, pois os modelos não servem apenas para uma situação particular, mas sim para dar suporte a outras aplicações e teorias. Assim, entendem eles, que a modelagem é um meio de fazer interagir dois conjuntos disjuntos — matemática e realidade.

1.2 JUSTIFICATIVA

A discussão sobre a modelagem matemática é importante, visto que ela tem, dentre outros, o intuito de quebrar paradigmas sociais de que a matemática é apenas para poucos privilegiados que são dotados de uma inteligência fora do comum, quando, na verdade, ela é acessível a todos. Este trabalho visa contribuir para o estabelecimento das relações entre a realidade e a matemática. Ademais, a modelagem é, também, um excelente recurso didático que, se explorado da forma coerente, pode ser bastante eficiente e contribuir para o processo de ensino aprendizagem.

Por outro lado, temos o aspecto científico que se trata de usar os modelos matemáticos como ferramenta para aprimorar estudos e pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento.

Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetivo e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos" (BRASIL, 1997, p.15)

O conhecimento matemático, portanto, está relacionado com todas as áreas do conhecimento, de modo que os alunos possam compreender as ideias. Faz-se necessário utilizar de ferramentas que explorem essas conexões para que, no contexto da modelagem matemática, seja possível a construção de um bom modelo.

Em se tratando do ensino de geometria, falta muitas vezes para os alunos criar a ligação entre abstração e concreto. A intenção é utilizar a modelagem matemática como ponte para fazer essa interligação. Diante da comprovada dificuldade dos alunos em assimilar as ideias desse conteúdo, segundo relatos de experiência de professores de escolas públicas, resolvemos desenvolver um trabalho que colaborasse com o conhecimento dos alunos a fim de melhorar suas percepções sobre a matemática, de modo que lhes tragam melhorias no convívio em sociedade, já que poderão ter uma melhor compreensão do mundo a sua volta.

Quando se extraem os problemas da realidade dos alunos, o desafio é duplo. De um lado, precisa-se mostrar para eles que a matemática pode ser aplicada nas mais diferentes situações vivenciadas por eles próprios, tornando tudo muito mais interessante e motivador. Do outro, busca-se que eles procurem aplicar os conhecimentos matemáticos, até então, já adquiridos para interpretar a situação e o contexto da problemática a fim de construir um modelo viável para resolver o problema ora proposto.

Acreditamos que a compreensão das ideias matemáticas e a percepção de suas aplicações no dia a dia é indispensável para formar um cidadão apto a melhor avaliar e gerir suas escolhas.

1.3 QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Refletir sobre o uso da modelagem matemática como método de ensino de geometria.

1.3.2 Objetivos Específicos

Apresentar diferentes perspectivas sobre o ensino de geometria, a fim de tornar os alunos consciente das possibilidades de aplicação da matemática em suas vidas;

Planejar e promover minicurso para alunos do ensino médio no contexto da modelagem matemática;

Contribuir na melhoria do ensino de geometria no ensino médio, utilizando a modelagem matemática;

Contribuir com a preparação de alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

1.4 METODOLOGIA

A pesquisa aqui a ser desenvolvida será do tipo *exploratória* de modo a buscar compreender a modelagem matemática e aplicá-la como ferramenta para melhorar o ensino. Terá como *fonte* diversos livros, artigos e pesquisas relacionadas ao tema encontradas, bem como o relato de experiência de trabalhos desenvolvidos em sala de aula. Já os resultados serão organizados de forma *qualitativa*, já que serão feitos relato dos trabalhos desenvolvidos em sala de aula, buscando compreender e interpretar as percepções dos alunos em relação aos assuntos estudados. Trabalharemos conceitos de áreas, volumes e unidade de medidas para abordar os seguintes conteúdos matemáticos: geometria plana, geometria espacial e sistema de medidas.

A pesquisa será realizada em turma do 3º ano do ensino médio da Escola Estadual do Ensino Médio "Dr. Alfredo Pessoa de Lima", localizada na cidade de Solânea, Paraíba e terá como intuito revisar os assuntos de geometria plana e espacial a partir de uma oficina na qual será utilizada a modelagem matemática como ferramenta pedagógica e, posteriormente, promover para os alunos da mesma turma uma bateria de resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que abordem os conteúdos estudados anteriormente. Essa resolução de questões se faz essencial, pois poderemos ao mesmo tempo avaliar o nível de aprendizagem dos alunos e perceber o grau de facilidade (ou dificuldade) que eles podem ter em associar os assuntos estudados com outras áreas do conhecimento. Além disso, é uma forma de contribuirmos com a formação de seus conhecimentos voltados à participação no próprio ENEM.

A oficina que utilizaremos foi retirada de uma proposta sobre *embalagens* do livro Modelagem Matemática no Ensino, Biembengut e Hein (2009), e parte do estudo de embalagens para desenvolver conceitos associados à geometria. Por meio da observação e manipulação de embalagens, poderemos compreender alguns conceitos (área e volume) que também serão trabalhados de forma teórica, porém com um diferencial, que é utilização da modelagem matemática, ou seja, pretendemos fazer um link entre a geometria e uma de suas aplicações no cotidiano e, portanto, obter um melhor aproveitamento dos estudos.

Sobre as embalagens, abordaremos inicialmente sua forma geométrica, tipo de material e tamanhos, observando as especificidades de cada uma e sua utilização na indústria e no cotidiano. Ao manusear embalagens, os alunos podem compreender melhor a relação entre, por exemplo, duas retas, reta e planos. Além de observar as propriedades dos polígonos e sólidos geométricos. Nesse momento, revisaremos os *sólidos geométricos* tais quais, prisma, cilindro, pirâmide, cone, esfera, etc. Os sólidos geométricos podem ser classificados em poliedros, corpos redondos e outros. Os *poliedros* têm suas regiões limitadas por *polígonos* (figuras fechadas formadas por segmentos de reta) esses polígonos são chamados de base e face lateral. Já o encontro de dois desses polígonos é chamado de aresta e, por fim, temos os vértices que nada mais é do que o encontro de duas ou mais arestas. São exemplos de corpos redondos, por sua vez, o cilindro, a esfera e o cone. Esses, diferentemente dos poliedros, não possuem faces laterais.

Construímos uma pequena caixinha a partir de uma folha de papel com dimensões de 16 cm x 11cm. E na sequência estudamos *planificações* e o *cálculo de área*, que corresponde a quantidade de material utilizado para produzir a embalagem. Aqui é importante fazer a distinção entre superfície e área. Essa é a medida daquela grandeza. Ou seja, superfície é uma grandeza com duas dimensões ao passo que área é o número que mede tal grandeza.

Conforme vimos na introdução, o ideal é minimizar a área (gastar menos) e maximizar o volume — grandeza física que expressa a extensão de um corpo no espaço — (fazer caber mais). Comparamos a área de um prisma de base retangular com a de um cilindro, supondo que eles têm mesma altura e volume. Em outras palavras, nessas condições, *qual deles possui um menor custo de produção?* Concluímos que a área total do prisma é maior que a área total de um cilindro com o mesmo volume e mesma altura.

Em seguida, mostraremos uma função que expressa o volume de um prisma obtido a partir de um quadrado de $20cm^2$ em função da altura.

Como observação, anote-se que se considerarmos um prisma de base retangular e um cilindro com *áreas iguais* e *mesma altura*, obteremos que o volume do cilindro é maior do que o volume do prisma. Dessa forma, a área total do prisma é tão menor quanto maior for o número de lados do polígono da base. Ou seja, à proporção que o polígono se aproxima de uma circunferência, a área total do prisma é minimizada.

Para finalizar, iremos, em um outro encontro, partir para a resolução das questões do ENEM, totalizando assim dois encontros.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Optamos por estruturar este trabalho em quatro capítulos. O primeiro deles intitulado: *Aspectos gerais da pesquisa* é composto pela introdução, justificativa, questões de pesquisa e objetivos, bem como a metodologia. Nesse capítulo expomos o contexto do trabalho aqui feito, os motivos pelos quais escolhemos trabalhar com modelagem matemática. Ademais, na metodologia, expomos a forma como a pesquisa se sucedeu.

O segundo capítulo, *Reflexões sobre o uso da modelagem na matemática*, traz inicialmente um breve relato dos aspectos históricos da modelagem matemática para, em seguida, expor o referencial teórico adotado. Podemos citar, por exemplo, as etapas do processo de modelagem no ensino de matemática como um subtópico importante no referencial teórico. Argumentamos que a matemática é indispensável para uma boa formação. Nesse sentido, a qualidade do ensino de matemática é de extrema importância para a educação brasileira, e a modelagem matemática pode vir a facilitar a transmissão do conhecimento matemático.

Resultados e discussões é o nome do terceiro capítulo. Nele relatamos os resultados da oficina aplicada em sala de aula.

Por fim, fazemos *Algumas considerações finais* (título do quarto e último capítulo). Ademais, após o quarto capítulo há as referências.

2 REFLEXÕES SOBRE O USO DA MODELAGEM NA MATEMÁTICA

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

A busca por novas abordagens de ensino, as quais facilitem o processo de ensino aprendizagem se deu inicialmente em função das dificuldades relacionadas à ligação entre o abstrato e o concreto. Buscaram-se métodos de ensino que além de passar o conteúdo matemático sem perder seu rigor, também estimulassem os alunos e, com isso, possibilitassem uma maior adesão ao estudo da matemática.

A modelagem matemática surge como uma ponte cuja função é ligar as ideias, *conceitos matemáticos*, com o cotidiano vivenciado pelos alunos, *concreto*. Isto é, considerar o conhecimento deles próprios e a parti disso relacionar com a matemática, observando suas aplicações práticas. Dessa forma, o aluno assume um papel ativo na construção do conhecimento matemático e estimula-se a criatividade, o raciocínio matemático e a motivação para aprender.

O ambiente escolar certamente é influenciado também por fatores externos — como, por exemplo, a condição socioeconômica dos alunos e suas habilidades sociais e emocionais — ignorar esse fato seria um completo disparate.

A proposta de utilizar a modelagem matemática como parte de uma metodologia didática é justamente considerar fatores como esse, já que, partindo da vivência dos alunos com objetivo de chegar ao conhecimento matemático, tais fatores serão levados em conta e isso pode fazer o aluno perceber sua real importância na sociedade e estimular o ensino. É claro que o professor deve saber lidar com essa situação e planejá-la de modo que torne possível a aprendizagem matemática mais efetiva.

Após vários movimentos em âmbito internacional em prol de melhores metodologias para o ensino de matemática, a consolidação da Modelagem Matemática no Brasil se deu no início da década de 70 até o final da década de 90 com o surgimento de trabalhos sobre modelagem matemática no ensino. Segundo Ferreira; Silveira e Silva (2013), destacam-se, entre outros, os professores precursores: *"Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi.* (Ferreira; Silveira e Silva, 2013 apud Biembengut e Hein, 2003*)"*

Com o advento dessa consolidação, a modelagem matemática ganhou destaque e, por consequência, foram surgindo várias pesquisas nessa área, que geraram publicações, dissertações e teses. Inclusive, recentemente, muitos cursos de graduação já estão incluindo a modelagem matemática como componente curricular. Um Grupo de Trabalho (GT) criado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), associação de cunho científico dedicada a produções acadêmicas, em 2007, reúne vários artigos acerca de modelação matemática, publicando num livro chamado *Modelagem Matemática na Educação Matemática: Pesquisas e Práticas Educacionais* cujos organizadores são Jonei Cerqueira Barbosa, Ademir Donizeti Caldeira e Jussara de Loiola Araújo. Essa obra destaca a importância da modelagem matemática para a educação matemática brasileira.

Além disso, há também o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM), que, em conjunto com um GT, disponibiliza material sobre modelação matemática, buscando a integração de professores e pesquisadores. Ademais, conforme Ferreira, Silveira e Silva (2013), existem outros grupos de estudos que defendem a modelagem matemática como metodologia de ensino-aprendizado; destacando-se o Centro Virtual de Modelagem (CVM) cujo objetivo é reunir através da internet pesquisadores interessados em modelagem matemática e desenvolver projetos de forma colaborativa.

Destaca ainda Aragão (2016, p. 7) que "*de acordo com o CREM, no Brasil, um dos precursores e maior disseminador da modelagem no ensino da educação foi Aristides C. Barreto, que se tornou uma referência nas comunidades acadêmica e de ensino.*"

Percebe-se, portanto, que a modelagem matemática tornou-se uma forte ferramenta metodológica para o ensino de matemática, contrapondo o ensino tradicionalista, que muitas vezes são sai do campo das ideias e abstrações, fato esse que desmotiva os alunos em querer aprender matemática.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O sistema educacional brasileiro, há muito tempo, vem enfrentando inúmeras dificuldades, como os desafios de encarar a realidade social vivenciada em diversas regiões do país. Sabemos que é dever do estado garantir a formação educacional das pessoas para que elas possam vir a tornar-se cidadãos conscientes e assim contribuir para o progresso do Brasil.

A educação matemática é peça chave no desenvolvimento de capacidades, como pensar de forma crítica, interpretar e compreender a realidade. A matemática permite o desenvolvimento cognitivo e criativo dos alunos.

É fato que, hoje no Brasil, o nível de analfabetismo funcional — incapacidade demonstrada por uma pessoa no ato de não compreender textos simples e fazer operações matemáticas básicas — é muito alto, o que é alarmante, e, diante de tal fato, fica evidente que o ensino tradicional não está cumprindo com o seu papel e alguma providência deve ser tomada. Somando-se a isso temos as crenças limitantes de que a matemática é muito difícil e só pode ser aprendida por poucos. Para superar essa dificuldade, no campo da Educação Matemática, existem algumas metodologias de ensino que visam proporcionar alternativas ao ensino tradicional, tais como: o uso dos jogos matemáticos, o uso das novas tecnologias, o uso da história da matemática, a etnomatemática, o uso de materiais didáticos manipuláveis e a modelagem, entre outros.

De uma forma específica, a modelagem matemática permite que os alunos associem a abstração matemática com um modelo concreto que é a representação de tais ideias. Para Granger (1969): "o modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções" (Granger, 1969, apud Biembengut e Hein, 2009, p. 11). Dessa forma, cria-se uma ponte que pode facilitar a transmissão do conhecimento e trazer uma melhora para o processo de ensino-aprendizado. Ressaltamos ainda que: se o modelo é uma imagem mental, então o processo de modelagem não obrigatoriamente é uma passagem do abstrato para o concreto.

Os modelos matemáticos se diferenciam, em parte, da ideia geral de um modelo, pois representam, intrinsicamente, a representação de uma situação real obtida através do processo de modelar, ou seja, é o fruto, que, por sua vez, pode ser expressões numéricas e/ou geométricas, fórmulas, diagramas, gráficos, tabelas, etc. a depender da adequabilidade à situação trabalhada. Cabe, ainda, destacar que tais modelos são uma simples representação da realidade. Portanto, trata-se de aproximações que ficam cada vez mais precisa à medida em que adicionamos novas variáveis ao modelo.

Esse processo de modelação é rico em possibilidades de se extrair conhecimento, já que sua elaboração necessita não só dos conhecimentos matemáticos, mas também de intuição e criatividade para interpretar o contexto e saber distinguir o que é adequado e o que não é adequado. Dessa forma, "A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias." (Biembengut e Hein, 2009, p. 13)

Há três etapas, de acordo com Biembengut e Hein (2009), que permitem representar uma situação real como modelo matemático, quais sejam, Interação; Matematização e Modelo matemático. A primeira, *interação*, divide-se em situação e familiarização que pode ser entendida como o pontapé inicial do processo o qual servirá para analisar a situação e, em seguida, ir para a segunda, *matematização*, desta, de fato, faz-se a formulação (hipótese) e a resolução do problema (modelo matemático) que será posteriormente interpretado e validado; por fim, a terceira etapa, *modelo matemático*, consiste basicamente na interpretação da solução, validação e avaliação do modelo. É importante, ainda, ressaltar que essas etapas conversam entre si e pode ser vista de forma cíclica de maneira tal que ao passo que uma delas é desenvolvida a outra é também melhorada, haja vista que a compreensão da situação-problema fica cada vez mais clara.

> No dia a dia, em muitas das atividades é "evocado" o processo de modelagem. Basta para isso ter um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático. Nesse sentido, a modelagem matemática não pode deixar de ser considerada no contexto escolar. (BIEMBENGUT E HEIN, 2009, p. 17)

É importante destacar que o processo de modelar é algo natural do ser humano, isto é, nós costumamos criar representações para aquilo que percebemos através dos nossos sentidos de forma que nos facilite nossa compreensão possibilite explicar tais fenômenos. A partir do momento que acrescentamos o raciocínio matemático e utilizamos modelos matemáticos nasce a modelagem matemática.

Em geral, busca-se modelar uma situação de modo a tornar o problema dessa situação compreensível. O modelador define parâmetros, características e relações que são pertinentes à solução do problema. Dessa forma, é importante destacar que os alunos podem chegar a diferentes representações de um mesmo problema e todos eles serem válidos. Por isso é indispensável deixar claro para os alunos que a modelagem matemática não é um processo engessado, mas sim algo particular e aperfeiçoável.

Nesse sentido, os aspectos da vida fora da sala de aula, ou seja, o cotidiano e o meio profissional dos alunos são ricos em informações relevantes que podem ajudar a melhor modelar um certo problema.

Quanto ao uso da modelagem matemática como método de ensino de matemática, os autores Biembengut e Hein (2009) afirmam que:

> Há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade de utilizá-lo. O que significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e leva-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado. (BIEMBENGUT E HEIN, 2009, p. 18)

Assim, para despertar o interesse do aluno, e, por consequência, fazê-lo apreciar a matemática, pode-se utilizar a modelagem matemática como uma ferramenta de ensino, já que ela propicia uma interação entre abstração (ideias matemáticas) e situações já conhecidas por ele. Evidentemente, dadas as situações particulares de cada instituição de ensino e aos conhecimentos prévios dos alunos pode-se fazer adaptações a fim de tornar possível assimilar a essência da modelação matemática.

Ainda segundo os mesmos autores, a modelação matemática possui como norte o desenvolvimento de um conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e a orientação do aluno na realização do seu próprio modelo matemático.

Vários são os objetivos de se trabalhar com a modelagem matemática, dentre eles, podemos citar: mostrar a importância da matemática e sua aplicabilidade, melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos, estimular a criatividade e o pensamento crítico, e aproximar outras áreas do conhecimento da matemática.

2.2.1 Etapas do processo de modelagem no ensino de Matemática

Um trabalho efetivo, utilizando modelagem matemática como método de ensino de matemática, exige do professor conhecimento sobre seus alunos para que ele possa planejar os trabalhos a serem desenvolvidos e que estes não sejam demasiadamente difíceis ou fáceis demais.

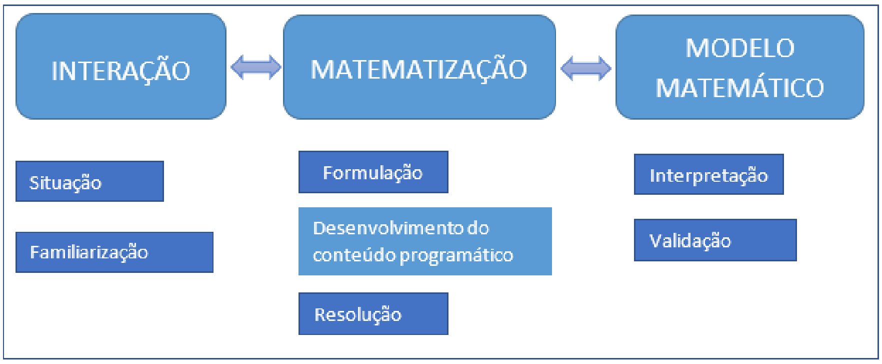
Os autores Biembengut e Hein (2009) sugerem cinco passos para implementar a modelagem matemática como método de ensino de matemática, a saber: (1) Diagnóstico, (2) Escolha do tema ou modelo matemático, (3) Desenvolvimento do conteúdo programático, (4) Orientação de modelagem e, por fim, (5) Avaliação do processo.

No primeiro passo, *diagnóstico*, diz respeito, por exemplo, a conhecer a realidade socioeconômica dos alunos e seus interesses. Isso torna possível escolher melhor o tema a ser trabalhado. Há outros fatores que também fazem parte desse diagnóstico inicial, como saber o grau de conhecimento matemático dos alunos, pois só assim o professor poderá escolher os conteúdos matemáticos e no que deve enfatizar. Além de questões de logística, tais quais, número de alunos, tempo de cada aula, disponibilidade dos alunos. Munido de todas essas informações o professor pode planejar um trabalho efetivo fazendo o uso da modelagem matemática.

No segundo passo, *escolha do tema ou modelo matemático*, escolhe-se um tema que posteriormente virará um modelo matemático. É preciso que este tema seja interessante suficiente para cativar os alunos e ao mesmo tempo abrangente para desenvolver o conteúdo programático; ou seja, deve-se alinhar o conhecimento exigido com as expectativas dos alunos.

Quanto ao terceiro passo, *desenvolvimento do conteúdo programático*, segue-se as três etapas do processo de modelagem, quais seja, Interação, Matematização e Modelo matemático. Porém, acrescenta-se o *desenvolvimento do conteúdo programático* na etapa *matematização*, como vemos na figura 1.

Figura 1 — Esquema de Processo de modelagem matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2009, p.15)

Na interação, inicialmente se faz uma exposição sobre o tema. Aqui o professor estabelece um primeiro contato do tema com os alunos. É o momento em que o professor objetiva despertar o interesse dos alunos. Em seguida, levanta-se questionamentos, instigando os alunos a proporem sugestões.

Já na matematização, deve-se selecionar uma questão que vai servir de norte para iniciar a formulação do modelo. Destaca-se, nessa etapa, a importância de estimular a participação e a criatividade individual dos alunos. Muitas vezes, faz-se necessário que os alunos pesquisem sobre o assunto para proporem melhores questões. Eis um grande diferencial de se trabalhar com a modelagem matemática: o assunto é estudado visando uma aplicação pratica no contexto da vivência dos alunos, embora seja possível que o contexto não seja o dos alunos. Isso pode motivar os alunos a buscar cada vez mais conhecimento, pois as diversas áreas do conhecimento estão interligadas e todas possuem uma coisa em comum, utilizam-se da matemática como ferramenta.

Ao passo que se formula a questão, o professor desenvolve o conteúdo programático a fim de continuar o processo e, ao final, um resultado. Uma desvantagem é que, se o professor não for cuidadoso em explicar a generalidade do tema, os alunos podem pensar que os assuntos se restringem a situação-problema em questão. Para superar esse desafio, é importante trabalhar com situações análogas, mostrando outros exemplos de aplicação, ampliando assim as possibilidades de aplicação da matemática. Por fim, deve-se propor uma solução para a questão antes escolhida, retornando ao problema e verificando a aplicação da matemática.

O modelo matemático, por sua vez, é fruto da questão formulada que permitiu a solução da situação selecionada e outras análogas. Avalia-se, ademais, a validade de tal modelo e sua importância. Cabe ainda destacar que esse modelo pode ser melhorado caso haja interesse em aprofundar o tema proposto, tomando outra questão.

O quarto passo para implementar a modelagem matemática como método de ensino de matemática é a *orientação de modelagem*. Nele criamos as condições para desenvolver o modelo matemático. Cabe ao professor realizar a orientação dos alunos no que diz respeito ao direcionamento do trabalho desenvolvidos por eles. Assim, promovemos incentivo à pesquisa e ao mesmo tempo a habilidade de lidar com situações adversas nas quais serão necessárias aplicar conteúdos matemáticos para chegar a uma solução.

Percebemos que trabalhar com modelagem matemática não é tão simples quanto parece e exige um planejamento prévio para que possa resultar em efetivas melhorias no aprendizado dos alunos. Por isso que é necessário saber de antemão as reais condições de trabalho, sobretudo quanto à disponibilidade de horas-aula destinadas a atividade a ser feita.

Dessa forma, em síntese, temos: A escolha e interação com o tema; o planejamento do trabalho; o conteúdo programático e a validação do trabalho desenvolvido.

Por fim, no quinto passo, *avaliação do processo*, devemos analisar se o objetivo inicial foi alcançado, ou seja, verifica-se se os alunos conseguiram compreender as ideais do assunto estudado e abstrai-las para demais situações análogas. Essa avaliação pode ser feita considerando tanto aspectos subjetivos quanto objetivos, isto é, em relação àquele temos a observação do professor ao passo que neste podemos citar exercícios e provas realizadas.

Nos aspectos subjetivos o professor observa, por exemplo, a participação e o cumprimento das tarefas. Nos objetivos observa o conhecimento matemático absorvido e a capacidade de compreender as aplicações do assunto estudado no cotidiano.

Outro fato interessante que podemos notar é que ao se trabalhar com a modelagem matemática, observa-se uma grande transdisciplinaridade entre vários campos do saber. Com isso, às vezes é necessário ter conhecimentos de outras áreas, como, por exemplo, biologia, economia, história, etc. para se construir um modelo mais preciso. Conforme Bassanezi: “A modelagem pressupõe multidisciplinariedade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas da pesquisa” (2002, p. 16).

Ainda conforme as ideias de Bassanezi, o autor argumenta que a física, a astrofísica e a química estão matematizadas e que a biologia também segue essa tendência e embora com intensidade menor, até as ciências sociais estão sendo direcionadas pela estatística. O mesmo ocorre, segundo ele, com a economia que utiliza de um sofisticado conjunto de ferramentas matemáticas a fim de estabelecer teorias e harmonias de mercado.

No contexto escolar, entretanto, observa-se um trabalho extremamente fragmentado de modo que pouco se vê abordagens que incentive os alunos a extrapolar uma disciplina específica associando-a às demais. Dessa forma, dificulta-se a real compreensão dos assuntos estudados bem como de suas aplicações. A modelagem matemática permite, com a devida orientação feita pelo professor, abordar interseções entre a matemática e outras áreas, já que à medida que se estuda os assuntos, verifica-se também tais relações entre a matemática e suas aplicações.

Um ponto em comum, entre os mais conceituados dos autores, acerca do conceito de modelagem matemática é a característica de pegar problemas da realidade e transformá-lo em problemas matemáticos e a parir disso resolvê-lo, encontrando um modelo matemático que solucione o problema inicial. E, diante da impossibilidade de representar a realidade como de fato ela é, fazemos aproximações, que simplificam o problema para que seja mais “fácil” obter um modelo matemático satisfatório. Nessa perspectiva, afirma Bean (2001, p 53)

> a essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento. (BEAN, 2001, P.53)

Ao modelar, fazemos apenas um recorte da realidade e nosso modelo melhora sempre que conseguimos extrair informações mais precisas sobre a situação problema de forma que melhore sua representação através do modelo matemático obtido.

Ademais, destaca Silveira e Ribas (2004, p.4):

> Acreditamos que, sempre quando for possível, devemos trabalhar os conceitos matemáticos a partir da realidade do meio em que vivem nossos alunos, deste modo, a Matemática passa à ser mais interessante e sedutora aos olhos de

> nossos alunos, pois eles são capazes de contribuir na própria construção do saber ao qual estão tendo contato, e a escola deixa de ser algo fora da sua realidade social e começa a fazer parte do seu cotidiano. (SILVEIRA E RIBAS, 2004, p.4)

Dessa forma, trabalhar os conteúdos matemáticos fazendo uso da modelagem matemática pode ser um meio utilizado de superar inúmeros desafios, como, por exemplo, a desmotivação por parte dos alunos em aprender matemática.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A proposta apresentada na metodologia foi aplicada em uma turma do 3º ano da Escola Estadual do Ensino Médio Inovador "Dr. Alfredo Pessoa de Lima" localizada na cidade de Solânea, Paraíba. O professor da turma, Josiel, estava trabalhando o assunto de Geometria Analítica. Dessa forma, os alunos tiveram uma visão das três facetas da geometria (plana, espacial e analítica) em um curto período de tempo, possibilitando uma compreensão não só mais geral da geometria, mas também das suas nuances específicas de suas ramificações.

É importante destacar que a escola passava por uma reforma (figuras 2 e 3) e, por consequência de tal reforma, a administração da escola se viu forçada a juntar as duas turmas do terceiro ano (3º A e 3º B), totalizando aproximadamente 60 alunos em uma sala de aula que não foi projetada para comportar essa quantidade de alunos simultaneamente. O barulho da obra mais a superlotação da sala de aula estavam atrapalhando um pouco as aulas do professor Josiel sem, contudo, comprometê-las.

Primeiramente, participei de duas aulas de observação a fim de perceber a dinâmica da turma e fazer, se necessário, algumas adaptações na proposta de aplicação. Além disso, as observações serviram também para perceber o nível da turma. Na primeira aula de observação, após me apresentar, falei um pouco sobre modelagem matemática, diferenciando-a de um modelo matemático e discutimos também sobre a proposta de utilizar embalagens para estudar geometria. Os alunos ficaram bem animados com isso, pois seria uma aula diferente daquela que eles estavam tendo. O professor também gostou bastante da proposta e ressaltou que durante sua formação não teve oportunidade de estudar modelagem, embora tenha conseguido estudá-la por conta própria.

Como motivação, fiz o seguinte questionamento: porque os alvéolos da colmeia de uma abelha possuem formato hexagonal? Na explicação enfatizei que há diversas modelações obtidas a partir de observações da natureza. Aliás, na biomatemática, ramo da biologia que utiliza de análises matemáticas, modelos matemáticos e abstrações dos organismos para estuda-los, a modelagem matemática é amplamente utilizada.

Sobre a turma, pelo fato de haver um número elevado de alunos em um pequeno espaço, já era esperado que ocorresse certa agitação. De fato, foi o que aconteceu durante as observações, mas o professor soube conduzir suas aulas e prender a atenção da maioria da turma. Alguns alunos estavam se distraindo com conversas paralelas e outros ficavam mexendo no celular. De modo geral, os alunos já estavam familiarizados com minha presença em sala.

No dia da aplicação da proposta, iniciei a aula recapitulando o que foi falado sobre Modelagem Matemática, deixando claro que a essência da modelagem é descrever matematicamente um fenômeno a partir de situações reais e que os modelos surgem naturalmente ao final desse processo para representar a modelação feita. Destaquei também que um modelo é tão somente uma representação aproximada de uma coisa real ou imaginária, isto é, trata-se de uma aproximação que fica mais precisa à medida que consideramos mais informações; além disso, o modelo pode ser em forma de gráfico, tabela, função, fórmula e até mesmo um desenho. A título de exemplo, mencionei as fórmulas estudadas em Física, mais especificamente, na cinemática - ramo da física que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com sua causa. A fórmula da velocidade média, por exemplo, é um modelo matemático. Dividindo o espaço total percorrido pelo tempo gasto, obtemos a velocidade média naquele percurso considerado. Outro exemplo mencionado foi uma função que modela uma bomba de gasolina, ou seja, uma $f(x) = cx$, em que c é uma constante que representa o preço do litro de gasolina e x é a quantidade de combustível, assim, $f(x)$ é a representação do valor a ser pago.

Após as devidas considerações teóricas sobre Modelagem Matemática, dei início ao estudo da geometria a partir de embalagens. Inicialmente falamos sobre fatores de mercado a serem considerados na produção de embalagens em larga escala, ou seja, não é só o custo de produção que influencia a escolha de uma determinada embalagem, há outros fatores, como por exemplo, a aparência da embalagem, facilidade no manuseio, o transporte e a proteção do produto. Portanto, abordamos a *forma (sólidos geométricos)*, *tipo (materiais utilizados)*, e *tamanho* das embalagens.

Sobre a *forma* estudamos os sólidos geométricos, figuras geométricas que possuem três dimensões, por consequência, definidas no espaço. Deixei claro a classificação dos sólidos em *Poliedros* (prismas, pirâmides, etc.), *Corpos redondos* (cone, cilindro, esfera) e *outros*.

Destacando os aspectos teóricos importantes como conceitos sobre face, vértice, aresta, bem como cálculo de áreas e volumes.

Nesse momento, os próprios alunos perceberam que os sólidos geométricos servem de modelo para a embalagem, dando inclusive exemplos de embalagem em diversos formatos.

Figura 2 — Caixa em formato de um prisma de base hexagonal e outro de base retang.

Fonte: Google.

Figura 3 — Caixa em formato de coração e sacolinha de papel

Fonte: Google.

Figura 4 — Antiga e nova embal. de óleo e dois tipos de embal. de leite condensado

Fonte: Google.

Além dessas ilustradas acima, os alunos mencionaram que um copo tem a forma similar a um cilindro. Lembrei-lhes que uma casquinha de sorvete tem a forma de um cone.

A partir do manuseio de embalagens, os alunos podem compreender mais facilmente relações entre: duas retas, reta e plano, propriedades gerais de polígonos e sólidos. Além disso, trabalhar com embalagens pode ajudar a desenvolver inteligência espacial.

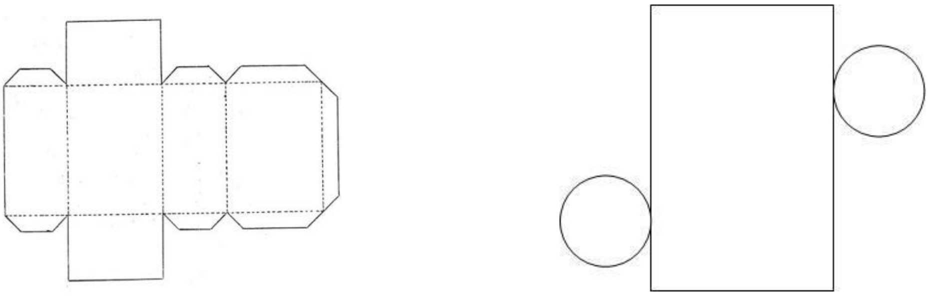
Mostrei-lhes como fazer uma caixinha a partir de metade de uma folha de papel A4:

Figura 5 — Planificação e caixinha de papel

Fonte: produção própria.

Estudamos planificações cuja importância é tamanha no cálculo de área total de diversos sólidos. É importante destacar que: *a quantidade de material utilizado na produção de uma embalagem corresponde à sua área total.*

Figura 6 — Planificação do prisma e planificação do cilindro

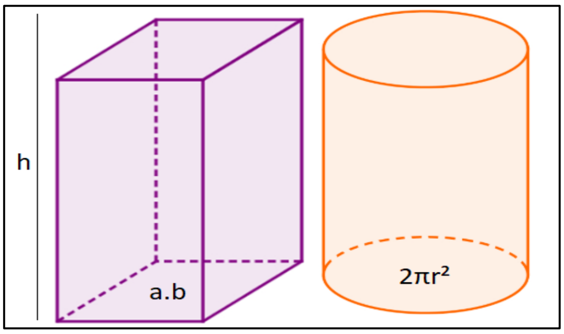


Fonte: Google.

Destacamos que as partes referentes às dobraduras do prisma estão sendo desconsideradas nesta modelação.

Agora, supondo dois sólidos geométricos (um prisma de base retangular e um cilindro — representando as embalagens de leite condensado da figura 7.) de mesma *altura* e *volume*, façamos o seguinte questionamento: *Qual deles possui um menor custo de produção?*

Figura 7 — Prisma e Cilindro de mesma altura e mesmo volume.



Fonte: Google.

Estamos em busca de uma otimização, ou seja, queremos minimizar a área total e assim reduzir o custo de produção e ao mesmo tempo maximizar o volume para aumentar a capacidade da embalagem.

Como seus volumes e alturas são iguais, obtemos a seguinte relação (I):

$$V_{PRISMA} = V_{CILINDRO}$$
$$(a.b).h = (\pi r^2).h$$
$$a.b = (\pi r^2)$$
$$r = \sqrt{\left(\frac{a.b}{\pi}\right)} (I)$$

A partir das planificações do prisma de base retangular e do cilindro, chegamos as fórmulas de suas áreas totais, isto é:

$$A_{total(prisma)} = 2[(a.b)+(a.h)+(b.h)]$$
$$A_{total(cilindro)} = 2\pi r(h+r)$$

Cabe destacar que tais equações são modelos, pois permitem obter a área de qualquer objeto que tenham os respectivos formatos, mudando apenas as medidas.

Considerando a = 6 cm, b = 9 cm e h = 16 cm, temos:

$$A_{total(prisma)}=2[(6.9)+(6.16)+(9.16)]$$
$$A_{total(prisma)}=2(54+96+144)$$
$$A_{total(prisma)}=2(294)$$
$$A_{total(prisma)}=588\,cm^2$$

Substituindo a = 6 cm e b = 9 cm em (I), obtemos:

$$r=\sqrt{\left(\frac{a.b}{\pi}\right)}\Rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{6.9}{\pi}\right)}\Rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{54}{\pi}\right)}\Rightarrow r\approx 4{,}15\,cm$$

Agora, munido do valor de r vamos substituir na fórmula da área total do cilindro, então:

$$A_{total(cilindro)}=2\pi r(h+r)$$
$$A_{total(cilindro)}=2\pi\, 4{,}15(16+4{,}15)$$
$$A_{total(cilindro)}=8{,}3\pi(16+4{,}15)$$
$$A_{total(cilindro)}=8{,}3\pi(20{,}15)$$
$$A_{total(cilindro)}=167{,}245\pi$$
$$A_{total(cilindro)}\approx 525{,}41\,cm^2$$

Dessa forma,

$$A_{total(pisma)}=588\,cm^2>A_{total(cilindro)}\approx 525{,}41\,cm^2$$

Podemos concluir, portanto, que a área de um prisma de base retangular é maior que a área total de um cilindro com o mesmo volume e a mesma altura.

Obtemos uma diferença de 62,59 cm^2 por embalagem. Essa diferença pode, a princípio, parecer pequena, mas pensando em produção em larga escala essa economia pode gerar uma grande economia.

Um outro ponto de destaque foi a relação: Área x Volume (para prismas de mesma altura). Em síntese, temos que: à medida que o polígono da base do prisma se aproxima de um círculo, menor será a área total do prisma. Ou seja, se fixarmos o parâmetro altura, obteremos uma relação inversamente proporcional do número de lados do polígono com sua área total. Por exemplo, dados um prisma de base retangular e um cilindro ambos de mesma altura, o cilindro terá uma área menor para a mesma capacidade.

Observe que, embora o cilindro, possua um maior volume e menor área total, no transporte ele ocuparia mais espaço do que o prisma de base retangular. Isso se deve ao fato de que para agrupar os cilindros sobraria um espaço vazio entre eles, o mesmo não ocorre quando agrupamos os prismas de base retangular.

Em outro encontro, passamos a resolver questões do ENEM e colocar em prática os conhecimentos assimilados. Os alunos não apresentaram grandes dificuldades para conseguir resolvê-las em um tempo satisfatório. Alguns inclusive conseguiram explicar exatamente o raciocínio utilizado para se elaborar a questão. Outros apenas conseguiram resolver e compreender, mas sem conseguir verbalizar uma explicação. Isso nos leva a crer que o aluno nessa situação ou não possui vocabulário suficiente para conseguir se expressar ou compreendeu a ideia, mas não conseguiu ainda associá-la com sua representação no cotidiano. O fato é que se observou uma melhora no entendimento dos assuntos estudados, mas apenas uma oficina não é suficiente para gerar grandes mudanças no aproveitamento geral do ano letivo.

Houve questões que requeriam uma simples visão espacial, ou seja, bastava uma simples noção de espaço que o aluno já conseguia chegar à alternativa correta. Para resolver outras questões foi necessário realizar alguns cálculos, como calcular volumes, áreas e perímetros.

A aplicação totalizou 8 aulas de 40 minutos. Duas para observações, duas para a oficina e, por fim, mais duas para a resolução de questões.

4. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de matemática é, em geral, tido como um “bicho de sete cabeças” por diversos alunos, talvez pelo simples fato desta ser apresentada de modo ineficiente. Os alunos não veem motivos para estudá-la, pois não percebem as diversas aplicações da matemática no seu cotidiano. A modelagem matemática tem como premissa básica partir da observação da realidade e matematizar uma situação real a fim de obter um modelo que represente o fenômeno em estudo.

Ao utilizar a modelagem matemática em sala de aula, percebemos que o nível de interesse pela disciplina como um todo foi significativo, embora tenhamos trabalhado com geometria plana e espacial.

Em particular, apresentar essa aplicação na escola acima citada foi, para mim, muito significativa, pois nela estudei todo o ensino médio e pude recordar bons momentos, assim como compartilhar experiências pessoais com os alunos da turma. Acredito que isso pode, de algum modo, inspirá-los nos estudos.

O objetivo geral deste trabalho foi refletir sobre o uso da modelagem matemática como método de ensino de matemática. Entendemos que o nosso objetivo foi cumprido, pois pudemos perceber, na prática, a diferença que uma abordagem mais didática do assunto - em particular, utilizando a modelagem matemática - faz em relação à uma simples aula expositiva.

A assimilação de ideias, como conceitos de volume e área foi facilitada devido à manipulação das embalagens, já que dessa forma há a utilização dos sentidos; com isso, desenvolve-se uma melhor noção espacial.

Podemos citar que durante a resolução de questões alguns alunos conseguiram compreender a parte abstrata, mas não conseguiram formalizar, em palavras, seu raciocínio. Ou seja, a modelagem matemática não substitui o estudo teórico do assunto através de livros e aulas tradicionais, mas sim serve de auxílio para suprir eventuais lacunas no processo de construção de conhecimento.

A ideia de resolver questões do ENEM foi uma estratégia coerente, pois percebemos outras modelações de situações cotidianas utilizando geometria e mais especificamente utilizando as próprias embalagens. Como a oficina foi aplicada em uma turma do 3º Ano, essas questões ajudaram na preparação dos alunos para enfrentar prova.

Ademais, ressaltamos que a utilização da modelagem matemática como método de ensino não se restringe aos assuntos de geometria. Em verdade, podemos utilizar a modelagem matemática para ensinar qualquer conteúdo; para isso, basta uma boa dose de criatividade.

A partir deste trabalho esperamos contribuir com alunos, professores e pesquisadores de educação matemática no que tange à utilização da modelagem matemática em sala de aula.

Concluímos, assim, que diante do que foi exposto, a modelagem matemática, se bem utilizada, pode ser uma poderosa aliada na formação matemática dos alunos e, por consequência, na formação de alunos mais críticos, criativos e autônomos.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Maria de F. A. **A história da modelagem matemática:** uma perspectiva de didática no Ensino Básico**.** IX Encontro Paraibano de Educação Matemática – EPBEM, 2016.

BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D.; ARAÚJO, Jussara de L. **Modelagem matemática na educação matemática brasileira:** pesquisa práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. **O que é Modelagem Matemática?** Educação Matemática em Revista. São Paulo, ano 8, n. 9/10, 2001.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

FERREIRA, Gessé P.; SILVEIRA, Alexis; DA SILVA, Leonardo A. **A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no Brasil.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 2013.

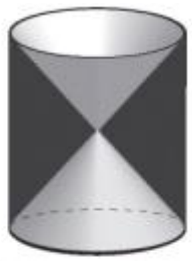
SILVEIRA, Jean C.; RIBAS, João L. D. **Discussões sobre modelagem matemática e o ensino aprendizagem**. 2004. Disponível em:< http://www.somatematica.com.br/artigos/a8>. Acesso em 07 de abril de 2019.

ANEXO 1 – Questões ENEM

LISTA DE QUESTÕES (GEOMETRIA ESPACIAL)

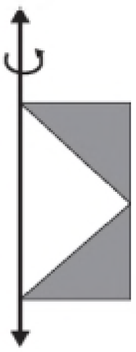
Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

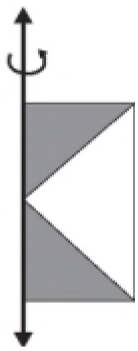
A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

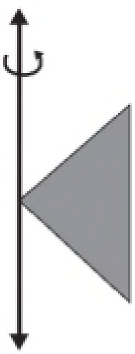


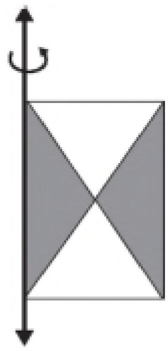
Disponível em: www.klickeducacao.com.br. Acesso em: 12 dez. 2012 (adaptado).

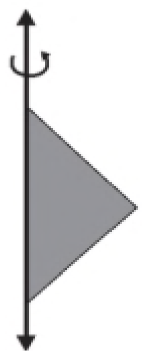
A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é:

a) 

c) 

b) 

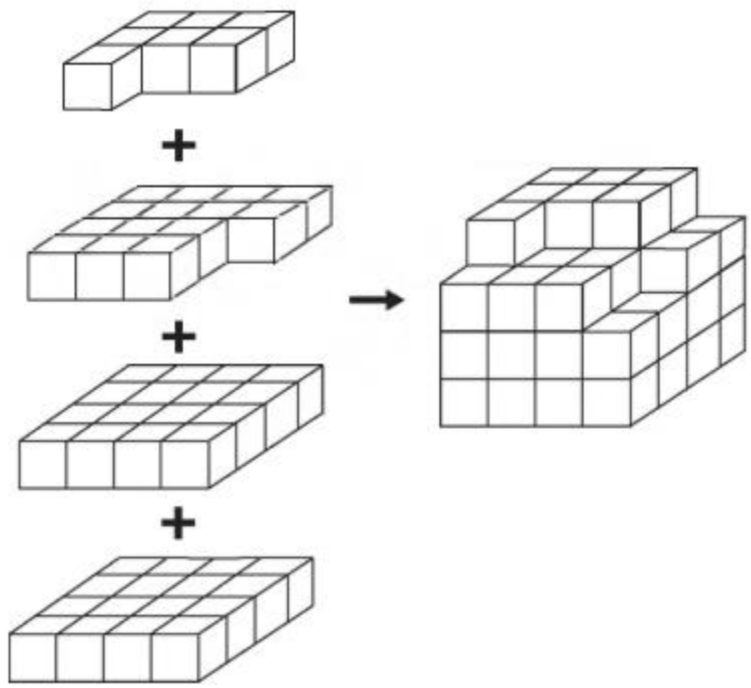
d) 


e)

Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

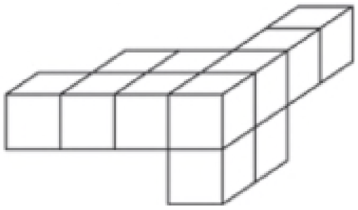
Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões 4 x 4 x 4. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

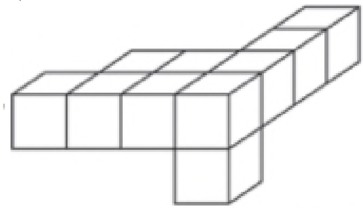


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.

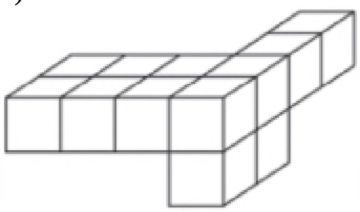
O formato da peça capaz de completar o cubo 4 x 4 x 4 é a)



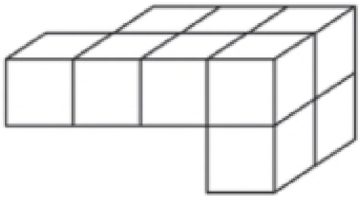
b)



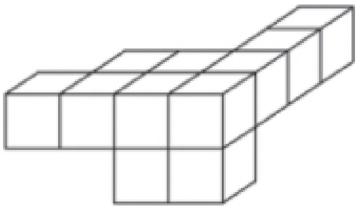
c)



d)



e)



Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

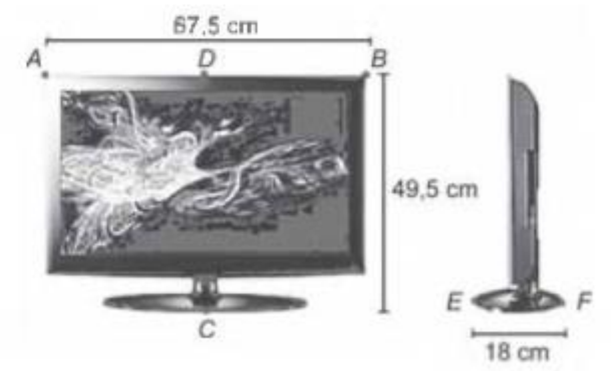
Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

a) I
b) II

c) III
d) IV
e) V

Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Uma empresa especializada em embalagem de papelão recebeu uma encomenda para fabricar caixas para um determinado modelo de televisor, como o da figura.



A embalagem deve deixar uma folga de 5 cm em cada uma das dimensões. Esta folga será utilizada para proteger a televisão com isopor. O papelão utilizado na confecção das caixas possui uma espessura de 0,5 cm.

A empresa possui 5 protótipos de caixa de papelão, na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas externas: comprimento, altura e largura, em centímetro, são respectivamente iguais a:

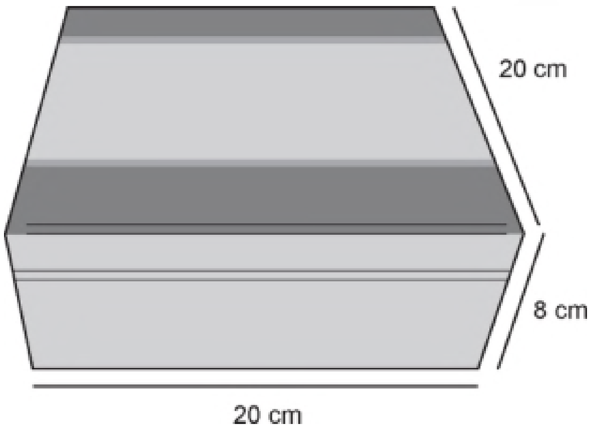
Caixa 1: 68,0 x 50,0 x 18,5
Caixa 2: 68,5 x 50,5 x 19,0
Caixa 3: 72,5 x 54,5 x 23,0
Caixa 4: 73,0 x 55,0 x 23,5
Caixa 5: 73,5 x 55,5 x 24,0

O modelo de caixa de papelão que atende exatamente as medidas das dimensões especificadas é a

a) caixa 1.
b) caixa 2.
c) caixa 3.
d) caixa 4.
e) caixa 5.

Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.



A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe-se também que a espessura da madeira, em todas as suas faces, é de 0,5 cm.

Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetro cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar os chocolates?

a) 666
b) 666
c) 673
d) 681
e) 693

6) Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

a) 11,25.
b) 27,00.
c) 28,80.
d) 32,25.
e) 49,50.

Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

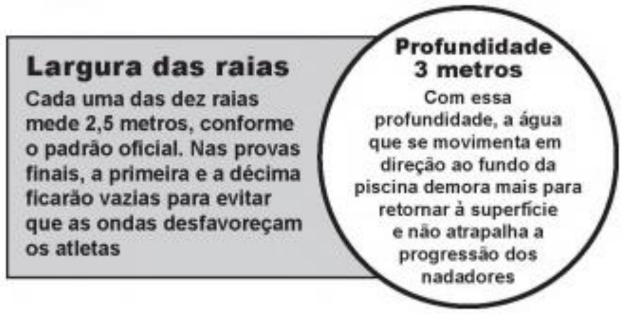
Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

a) 100 .
b) 400.
c) 1600.
d) 6 250.
e) 10000 .

Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:



Veja, n. 2 278, jul. 2012 (adaptado).

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

a) 3 750.
b) 1 500.
c) 1 250.
d) 375.
e) 150.

Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

• Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
• Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
• Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

Figura 1

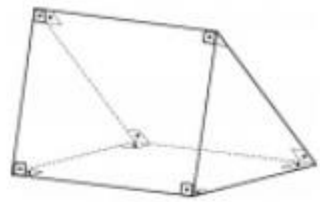


Figura 2

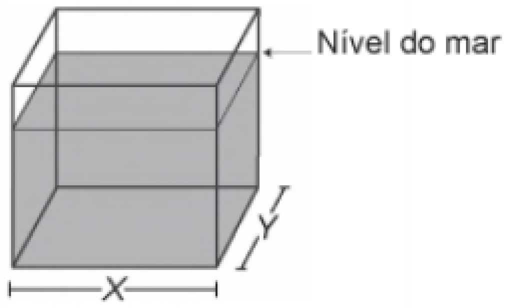
ROMERO, L. Tendências. **Superinteressante**, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

Ano: 2017 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2017 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

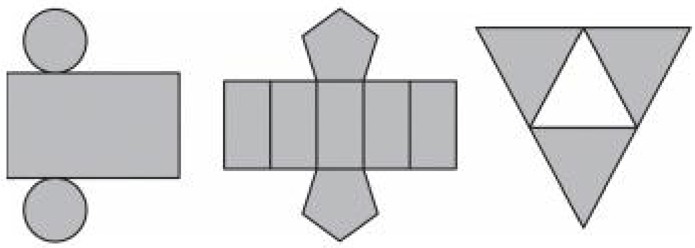


Quais devem ser os valores de *X* e de *Y*, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49
b) 1 e 99
c) 10 e 10
d) 25 e 25
e) 50 e 50

Ano: 2012 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2012 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

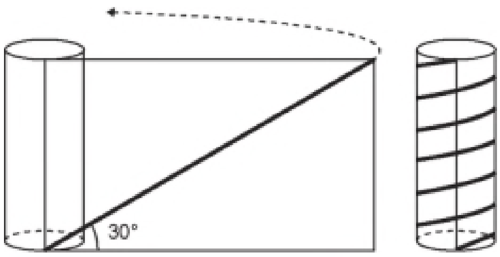
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

LISTA DE QUESTÕES (GEOMETRIA PLANA)

1) **Ano:** 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia

Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilinc $6/\pi$ cm, e ao n enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

a) $36\sqrt{3}$
b) $24\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{3}$
d) 36
e) 72

2) **Ano:** 2016 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2016 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Na reforma e estilização de um instrumento de percussão, em formato cilíndrico (bumbo), será col faixa decorativa retangular, como a indicada na Figura 1, suficiente para cobrir integralmente, e se toda a superfície lateral do instrumento.

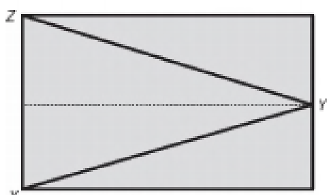
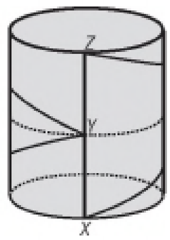
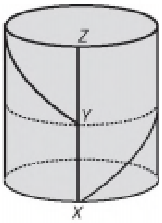


Figura 1

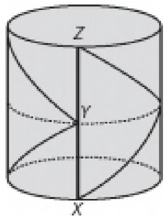
Como ficará o instrumento após a colagem?

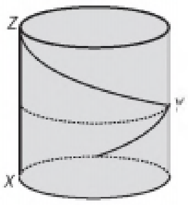
a)





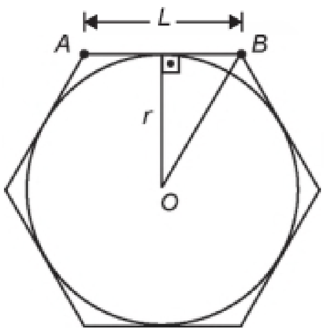
)

e) 

d) 

1) **Ano:** 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Um brinquedo chamado pula-pula, quando visto de cima, consiste de uma cama elástica com con formato de um hexágono regular.

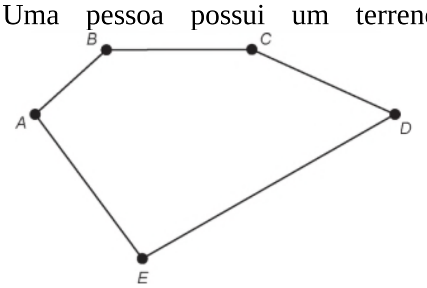


Se a área do círculo inscrito no hexágono é 3π metros quadrados, então a área do hexágono, e quadrado, é

a) 9
b) $6\sqrt{3}$
c) $9\sqrt{2}$
d) 12
e) $12\sqrt{3}$

2) **Ano:** 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na



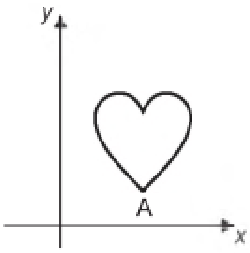
Sabe-se que a diagonal *AD* mede 50 m e é paralela ao lado *BC*, que mede 29m. A distá
ponto *B* a *AD* é de 8 mea distância do ponto *E* a *AD* é de 20 m.

A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

a) 658.
b) 700.
c) 816.
d) 1 132.
e) 1 632.

1) Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional d
Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entr
Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de
chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transforr
rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofr
transformações isométricas, nessa ordem:



1ª) Reflexão no eixo x;
2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;
3ª) Reflexão no eixo y;
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;
5ª) Reflexão no eixo x.
Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

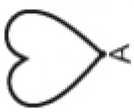
Qual a posição final da figura?

a) 

b) 

c) 

d) 

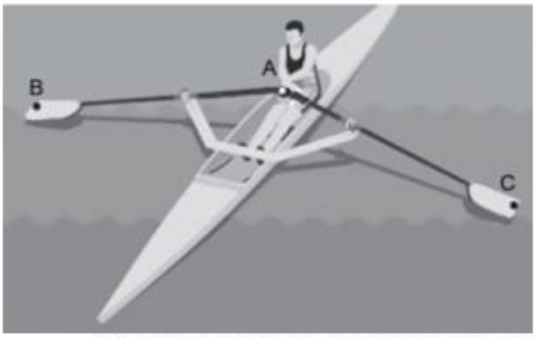
e) 

1) Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC*cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de 170°.



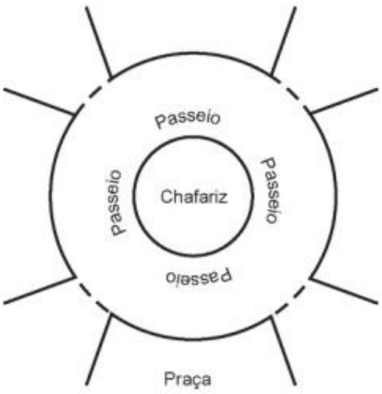
Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A*, *B* e *C*, no momento em que o remador está nessa posição, é

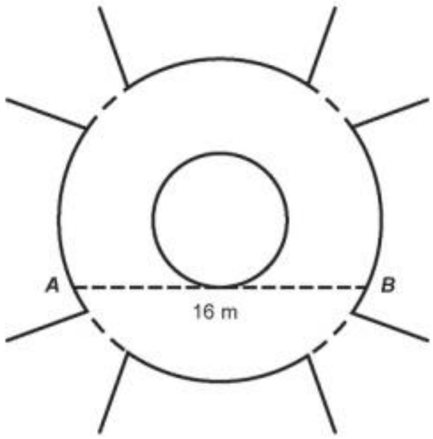
a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

2) Ano: 2018 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2018 - ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - Primeiro e Segundo Dia

A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos *A* e *B*, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta *AB*: 16 m.



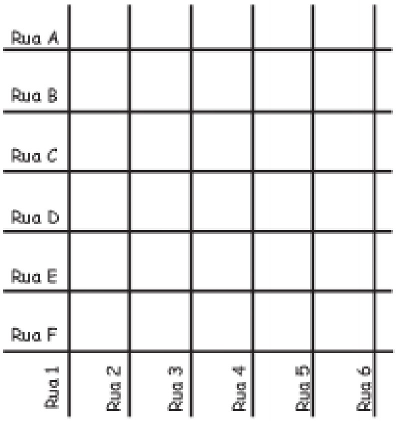
Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

a) 4π
b) 8π
c) 48π
d) 64π
e) 192π

1) **Ano:** 2016 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2016 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia

Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As r nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. T quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, pe caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



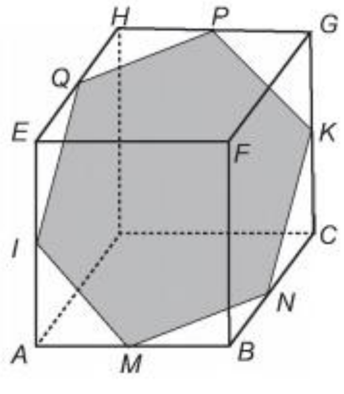
A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das criança 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões d deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

2) **Ano:** 2016 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2016 - ENEM - Exame Nacional d Médio - Primeiro e Segundo Dia - PPL

Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em um polígono *IMNKPQ*, no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vérti polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa. Um esboço da sua obra pode ser figura.

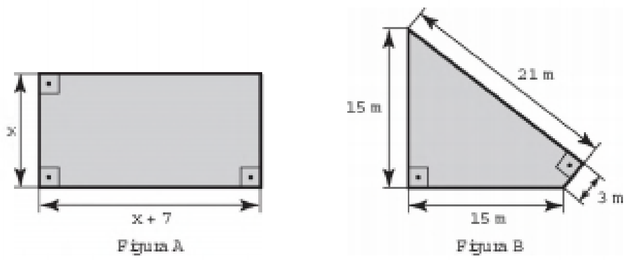


Considerando as diagonais do hexágono, distintas de *IK*, quant mesmo comprimento de *IK*?

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 9

1) **Ano:** 2016 **Banca:** INEP **Órgão:** ENEM **Prova:** INEP - 2016 - ENEM - Exame Nacional d
Médio - Primeiro e Segundo Dia

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um p
filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencion
se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais nov
um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno
retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas med
metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 16,3.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.