



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VIII - ARARUNA  
CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE  
DEPARTAMENTO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**REBECA ALVES NEVES**

**ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES COM INCRUSTAÇÕES:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E FATOR DE ATRITO.**

**ARARUNA-PB  
2021**

REBECA ALVES NEVES

**ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES COM INCRUSTAÇÕES:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E FATOR DE ATRITO.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduada em Licenciatura Plena em Física.

**Área de concentração:** Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

**Orientador:** Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior

**ARARUNA-PB  
2021**

N511e Neves, Rebeca Alves.

Escoamento laminar em dutos circulares com incrustações [manuscrito] : análise do perfil de velocidade e fator de atrito / Rebeca Alves Neves. - 2021.

50 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências,  
Tecnologia e Saúde , 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior  
, Coordenação do Curso de Física - CCTS."

1. Mecânica dos fluidos. 2. Dutos. 3. Resíduos. I. Título

21. ed. CDD 532

REBECA ALVES NEVES

ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS CIRCULARES COM INCRUSTAÇÕES:  
ANÁLISE DO PERFIL DE VELOCIDADE E FATOR DE ATRITO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física do Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de graduada em Licenciatura Plena em Física.

Área de concentração: Ciências Exatas e da Terra: Engenharias III; Engenharia Mecânica: Mecânica dos fluidos.

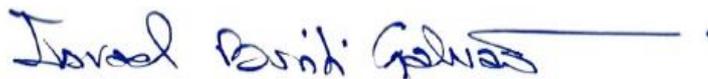
Aprovada em: 02 / 03 / 2021.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. Israel Burití Galvão  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



---

Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico aos meus pais Luis Neves e Gerusa Neves

## **AGRADECIMENTOS**

Externo meus agradecimentos a toda a minha família que sempre me apoiaram nos momentos cruciais da minha vida para chegar até aqui. Aos meus pais por contribuírem de maneira direta nessa conquista, a todos os meus amigos que estiveram ao meu lado e a todos os meus professores que tiveram papel fundamental nessa jornada e em especial ao meu professor/orientador que foi o essencial pilar na construção desse trabalho. Obrigada!

## RESUMO

Diversos fatores influenciam o surgimento de resíduos e depósitos nas paredes de dutos, devido ao acúmulo de materiais orgânicos ou não, quando se realiza o transporte seja na indústria de petróleo ou mesmo na distribuição de água e áreas de saneamento básico. Esses depósitos diminuem a área de passagem do fluido, dificultando assim o transporte no interior destas tubulações. De modo geral, denominamos de incrustações o acúmulo de compostos nas paredes internas dos dutos. Observando essas questões, este trabalho visa apresentar um estudo hidrodinâmico, apresentando perfis de velocidade e número de Poiseuille em dutos circulares com incrustações no seu interior. A geometria da seção transversal do duto é apresentada, ao total de cinco geometrias com seções diferentes, e aproximações das curvas, que compõem as incrustações são parametrizadas para compor um conjunto de funções bases onde as mesmas são utilizadas para aplicação do método integral baseado em Galerkin. A análise hidrodinâmica local é discutida para escoamento laminar completamente desenvolvido no interior das geometrias consideradas e o estudo apresentado amplia a aplicação do método de Galerkin às geometrias arbitrárias, visto que as incrustações simulam geometrias não convencionais e não encontradas na literatura.

**Palavras-Chave:** Incrustações. Perfis de velocidade. Número de Poiseuille. Método integral baseado em Galerkin.

## ABSTRACT

Several factors influence the appearance of residues and deposits on the duct walls, due to the accumulation of organic materials or not when transporting is carried out either in the oil industry or even in the distribution of water and basic sanitation areas. These deposits decrease the fluid flow area, thus making it difficult to transport inside these pipes. In general, we call incrustations the accumulation of compounds on the inner walls of the ducts. Observing these issues, this work aims to present a hydrodynamic study, presenting profiles of speed and number of Poiseuille in circular ducts with inlays inside. The geometry of the cross-section of the duct is presented, with a total of five geometries with different sections, and approximations of the curves, which make up the incrustations, are parameterized to compose a set of base functions where they are used to apply the Galerkin-based integral method. The local hydrodynamic analysis is discussed for completely developed laminar flow within the geometries considered and the presented study expands the application of the Galerkin method to arbitrary geometries since the incrustations simulate unconventional geometries and not found in the literature.

**Keywords:** Incrustations. Velocity profiles. Poiseuille number. Galerkin-based integral method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1– Dutos com incrustações	17
Figura 2 – Comparativos de dutos	18
Figura 3 – Perfis de velocidade	19
Figura 4 – Duto com coordenadas de seção transversal $x$ e $y$ , com eixo longitudinal $z$	21
Figura 5 – Geometria de duas funções bases	27
Figura 6 – Interface da ferramenta software Grapher 8 (plot)	30
Figura 7 – Interface da ferramenta software Grapher 8 (worksheet)	31
Figura 8 – Interface da ferramenta de software Maple 2017 Student Edition com gráficos plotados	32
Figura 9 – (a) geometria do duto circular e (b) parametrização do duto circular	35
Figura 10 – perfil de velocidade adimensional	36
Figura 11 – Geometria 1	37
Figura 12 – (a) ilustração da Geometria 1 e (b) parametrização da Geometria 1	38
Figura 13 – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade	38
Figura 14 - Geometria 2	39
Figura 15 – (a) ilustração da Geometria 2 e (b) parametrização da Geometria 2	40
Figura 16 – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade	40
Figura 17- Geometria 3	41
Figura 18 – (a) ilustração da Geometria 3 e (b) parametrização da Geometria 3	42
Figura 19 – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade	42
Figura 20- Geometria 4	43
Figura 21 – (a) ilustração da geometria 4 e (b) parametrização da geometria 4	44
Figura 22 – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade	44
Figura 23- Geometria 5	45
Figura 24 – (a) ilustração da geometria 5 e (b) parametrização da geometria 5	46
Figura 25 – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade	46

Figura 26- Gráficos de barra (a) área da seção transversal; (b) velocidade média adimensional e (c) número de Poiseuille	47
Figura 27- Perfis de velocidade adimensional $W(X, Y_{max})$	48

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria Circular)	36
Tabela 2 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria 1)	38
Tabela 3 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria 2)	40
Tabela 4 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria 3)	42
Tabela 5 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria 4)	44
Tabela 6 – Valores de parâmetros de interesse (Geometria 5)	46

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	Elemento da matriz $A$ (constantes)
$A, B, C$	Matrizes
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$A_c$	Área da seção transversal dimensional/adimensional que escoo o fluido, (m <sup>2</sup> /adimensional)
$b_j$	Elemento da matriz $B$ (constantes)
$c_i$ 's	Coefficientes constantes, elementos da matriz $C$
$d_h$	Diâmetro hidráulico dimensional, (m)
$\frac{dp}{dz}$	Gradiente de pressão, (Pa/m)
$D_h$	Diâmetro hidráulico adimensional
$f$	Fator de atrito Fanning, (adimensional)
$f_i$	Funções básicas; funções Galerkin
$fRe$	Número de Poiseuille, (adimensional)
$g$	Função de parametrização
$L$	Comprimento característico, (m)
$L_h$	Comprimento hidráulico
$L[ \ ]$	Operador linear
$N$	Número de funções básicas (adimensional)
$p$	Pressão, (Pa)
$P$	Perímetro, (m)
$Re$	Número Reynolds, (adimensional)
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento, (Pa)
$u$	Velocidade axial local, (m/s)
$\bar{u}$	Solução aproximada
$u_m$	Velocidade média, (m/s)
$u _{\Gamma}$	Valor da função $u$
$U$	Velocidade normalizada, (adimensional)
$U_{max}$	Velocidade máxima normalizada domínio $A_c$
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$X, Y, Z$	Coordenadas adimensionais
$X_{max}, Y_{max}$	Valores máximos de $X$ e $Y$ no

$W$	Velocidade adimensional
$W_m$	Velocidade média adimensional
$W_{max}$	Velocidade máxima adimensional
$\rho$	Densidade do fluido
$\varepsilon$	Erro diferente de zero
$\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$	Derivadas parciais (X, Y)
$\Gamma$	Fronteira e $\Omega$
$\Omega$	Domínio de estudo, subconjunto de $\mathbb{R}^n$
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\phi_1, \phi_2$	Parametrização das curvas
$\mu$	Viscosidade do fluido, (Pa·s)

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA</b> .....	17
<b>2.1 Incrustações em dutos</b> .....	17
<b>2.2 Escoamento em dutos</b> .....	18
<b>2.2.1 Camada limite</b> .....	18
<b>2.2.2 Escoamento completamente desenvolvido</b> .....	20
<b>2.2.3 Equação da quantidade de movimento linear</b> .....	20
<b>2.2.4 Parâmetros adimensionais</b> .....	21
<b>2.2.4.1 Adimensionalização da equação de movimento linear</b> .....	21
<b>2.2.5 Diâmetro hidráulico</b> .....	23
<b>2.2.6 Fator de atrito</b> .....	23
<b>2.3 Método integral de Galerkin</b> .....	24
<b>2.3.1 Método integral baseado em Galerkin (GBI)</b> .....	24
<b>2.3.2 Método para encontrar funções bases</b> .....	26
<b>2.3.2.1 condições de contorno para duas funções bases</b> .....	26
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	27
<b>3.1 Modelagem Matemática</b> .....	27
<b>3.1.1 Perfil de velocidade pelo método GBI</b> .....	28
<b>3.2 Procedimento numérico</b> .....	30
<b>3.2.1 Ferramenta de software Grapher 8</b> .....	30
<b>3.2.2 Ferramenta de software Maple 2017</b> .....	31
<b>3.2.3 Algoritmo de cálculo: perfil de velocidade e número de Poiseuille</b> .....	32
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	35
<b>4.1 Duto circular</b> .....	35
<b>4.2 Geometrias com incrustações</b> .....	36
<b>5 CONCLUSÕES</b> .....	48
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	50

## 1 INTRODUÇÃO

Existe em diversas áreas da indústria a necessidade de mecanismos para o transporte de fluidos, seja para saneamento básico, para distribuição de água, produção e passagem de petróleo, e tantas outras modalidades, onde essas vias de transporte se dão por meio de dutos, dos quais variam de acordo com o setor de aplicação.

Nas empresas petrolíferas, gastos para a construção e manutenção desses canais são essenciais para se ter produção e qualquer melhoria sobre diminuição de custos e vida útil de equipamentos é essencial neste setor. Silva (1999), fala que há duas fases nesse processo: a primeira é transportar o petróleo desde o poço até as refinarias e a segunda consiste em conduzir os seus derivados para o consumidor final. Ele afirma ainda que, a fase de construção da rede de dutos é um dos investimentos mais altos na estruturação da capacidade de escoamento de petróleo. Dentro da indústria petrolífera, segundo Soares (2017), o processo de parafinação não depende apenas das características físico-químicas do óleo, mas também da temperatura, da pressão, do regime de escoamento e da composição da parafina.

Aum (2012), retrata que esse processo de deposição de parafinas é um dos principais problemas para a garantia de escoamento, pois restringe o fluxo de petróleo, promovendo o aumento na perda de carga no oleoduto. Este problema segundo Bordalo e Oliveira (2007), ocorre nas diversas etapas de manipulação de óleo. Durante a produção, o transporte e o refino onde, no Brasil, a Petrobras, reconhecida internacionalmente como detentora de tecnologia em exploração e produção em águas profundas e ultra profundas, se depara frequentemente com problemas relativos à formação e deposição de parafinas em suas linhas submarinas.

Porto e Lima (2017), lembram ainda que o desafio de garantir o escoamento nos dutos de produção petrolífera em ambientes frios, face ao problema da precipitação de parafina, continua a impulsionar várias pesquisas que visam entender e reduzir os impactos que esse fenômeno vem trazendo para a produção em reservatórios de todo o mundo. Os mesmos autores estudam o escoamento de óleo em regime laminar completamente desenvolvido em dutos de seção circular e o modelo utilizado foi capaz de descrever o comportamento da espessura da camada de parafina depositada e a sua relação com as demais propriedades do escoamento.

Ao longo dos anos, soluções analíticas/numéricas para problemas de escoamento em dutos, em particular, em geometrias arbitrárias, vêm sendo apresentadas para modelar

o comportamento do fluido no seu interior. Compreender a forma que o fluido escoar nestas geometrias pode ajudar a identificar parâmetros de interesses fluidodinâmicos que podem contribuir para melhorar o escoamento. Muitos são os trabalhos na literatura que apresentam tanto o entendimento da parte térmica, quanto hidrodinâmica em geometrias diversas, tais como: sinusoidal (FISCHER e MARTIN, 1997), retangulares (SYRJALA, 1998; APARECIDO e LINDQUIST, 1999; MORINI, 1999), hexagonal ou duplo trapezoidal (SADASIVAM, et al. 2001; DAMEAN e REGTIEN, 2001), elíptica (CADÉ, et al. 2010), duplo seno ( DING e MANGLIK, 1996), anulares (LEE e LEE, 2001), e diversas outras (SANTOS JÚNIOR, 2018).

Nos trabalhos de Santos Júnior (2018) e Santos Júnior et al. (2020, 2021), são apresentados estudos analíticos/numéricos, dando parâmetros como perfis de velocidade e fatores de atrito em geometrias com diversas formas. Nestes trabalhos, os autores utilizaram o método integral baseado em Galerkin para a solução da equação de momento linear e energia em dutos com geometrias arbitrárias. O método se mostrou eficaz para o estudo em geometrias não convencionais. Diante disto, o método pode ser utilizado para apresentar perfil de velocidade e fator de atrito em geometrias formadas pelas incrustações em dutos circulares, visto que as curvas que compõem a geometria da seção transversal podem ser parametrizadas formando assim, um conjunto de funções necessárias para a aplicação do método.

Este trabalho não tem o objetivo de apresentar forma de prevenção para incrustações em dutos, mas sim, um estudo numérico do perfil do escoamento neste meio, através do entendimento da forma que o fluido escoar em uma seção interna. Seções arbitrárias, das quais são as formas que as seções dos dutos com parafinas apresentam, pode dar informações importantes de como desenvolver técnicas ou até mesmo formas de bombeio e custos de manutenção com o produto final transportado.

Diante disso, o presente trabalho procurou contribuir com a compreensão e entendimento hidrodinâmico de fluidos ao escoar em geometrias formadas por elementos, sejam eles orgânicos ou não, que se prendem a parede do duto circular. Parametrizações de curvas que compõem o bordo das incrustações são encontradas por aproximações polinomiais, formando assim um conjunto de funções bases e a partir deste conjunto, aplica-se o método integral baseado em Galerkin para obter os perfis de velocidade e números de Poiseuille nessas geometrias.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Incrustações em dutos

As incrustações são formadas por deposição de parafinas ou outros materiais nas paredes das tubulações. Essas parafinas são compostos orgânicos que se classificam por hidrocarbonetos alifáticos dos quais se aderem às paredes dos dutos construindo uma camada grossa que impedem a passagem do fluído. Essas incrustações podem causar diminuição dos diâmetros internos das tubulações por acúmulo dos produtos depositados; perfuração em pontos da tubulação e equipamentos devido a agentes que promovem a corrosão; aumento do consumo de energia em função da redução do rendimento, bem como devido ao aumento da perda de carga ao longo do duto devido à resistência por atrito induzido pelas alterações significativas da rugosidade da superfície interna da tubulação, e diminuição da vida útil dos equipamentos e da instalação (FIORENTIN, 2004 apud BESERRA, 2012).

A precipitação de depósitos de partículas pode ser formada por diversos fatores dos quais têm suas diferentes realidades, uma dessas situações, segundo Candeias (2010), são mudanças, por exemplo, de temperatura, pressão e vazão. No transporte dutoviário, com o passar do tempo, as substâncias vão se depositando nas paredes dos dutos e equipamentos, diminuindo o diâmetro das tubulações, tornando necessárias ações periódicas de manutenção, como trocas de dutos e abertura de equipamentos para limpeza (MARTIN et al. 1996 apud CANDEIAS, 2010). Na Figura 1, pode-se observar o resultado de dutos revestidos internamente por incrustações.

**Figura 1**– Dutos com incrustações



Fonte: SOTOMAYOR, J. C.; LIJÓ, A. GPA Estudios y ServiciosPetroleros SRL, 2010.

O problema das incrustações pode ser encontrado em muitos setores e não somente em empresas petrolíferas, mas também em indústrias químicas, saneamento básico e áreas relacionadas a construção civil. Por isso passa a ser um tema de extrema

relevância no meio industrial, pois, nota-se que essa redução de campo afeta a eficiência da passagem do fluido em uma escala muito significativa e essa realidade acarreta muitos gastos tornando assim o custeio desses serviços elevados.

Nas empresas petrolíferas, as incrustações tomam um papel de grande importância e preocupação, pois sabe-se que na produção de petróleo existem três fatores determinantes para sua formação: variação de pressão, alta temperatura e presença de água com alta salinidade (PETROBRAS, 2011 apud SANTANA, 2017). Esses fatores é crucial, pois eles ajudam nessa construção nas paredes internas dos condutores de petróleo, sendo assim a causa da menor produção e com isso provocando um gasto excessivo em métodos de limpeza desses dutos como também a troca deles. Na Figura 2, temos um exemplo de uma seção de um duto circular, com e sem depósitos incrustados.

**Figura 2** – Comparativo de dutos



Fonte: christiani wassertechnik gmbh, 2017.

Diante de toda essa problemática vê-se que já existem muitos trabalhos nessa perspectiva, onde muitos pesquisadores buscam juntamente sanar ou minimizar situações dessa natureza.

## **2.2 Escoamento em dutos**

Nesta seção aborda-se os conceitos de camada limite hidrodinâmica, escoamento completamente desenvolvido e parâmetros adimensionais. O entendimento destes conceitos são fundamentais para o estudo do problema proposto neste trabalho.

### **2.2.1 Camada limite**

O escoamento de fluidos através de dutos é comumente usado em aplicações de aquecimento e resfriamento. No escoamento interno, o fluido está completamente confinado pelas superfícies do interior do duto, assim existe um limite sobre o qual a camada limite pode crescer. A velocidade do fluido em um duto circular muda de zero na

superfície, em virtude da condição de não deslizamento, até o máximo no centro do duto. Assim, no escoamento de fluidos, é conveniente trabalhar com velocidade média, que se mantém constante quando em regime de escoamento permanente e área da seção transversal é constante (ÇENGEL, 2012 apud SANTOS JÚNIOR, 2018). A velocidade média através de uma seção transversal é definida por:

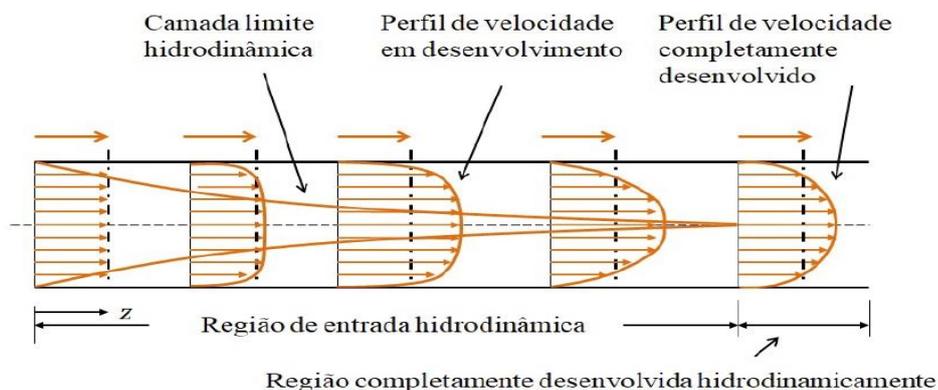
$$u_m = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} u(x, y) dA_c \quad (2.1)$$

onde  $u(x, y)$  é a velocidade local e  $A_c$  é a área da seção do qual se escoo o fluido.

A região do escoamento em que os efeitos da força de cisalhamento viscoso, causados pela viscosidade do fluido, proporcionam gradientes de velocidade induzindo a formação da camada limite hidrodinâmica ou apenas camada limite. A região a partir da entrada do duto até o ponto onde a camada limite funde-se na parte central é chamada região de entrada hidrodinâmica e o seu comprimento é chamado comprimento hidrodinâmico de entrada,  $L_h$ . O escoamento na região de entrada é chamado escoamento em desenvolvimento hidrodinâmico, a região além da entrada, em que o perfil de velocidade está completamente desenvolvido, mantendo-se inalterado, é chamada região completamente desenvolvida hidrodinamicamente (ÇENGEL, 2012 apud SANTOS JÚNIOR, 2018).

O perfil de velocidade na região completamente desenvolvida é parabólico para escoamento laminar em dutos de seção transversal circular. O mesmo não ocorre para dutos com seções transversais diferentes. Na Figura 3, são apresentados perfis de velocidade transitórios, assim como a camada limite hidrodinâmica e as regiões de entrada em desenvolvimento e completamente desenvolvida:

**Figura 3 – Perfis de velocidade**



Fonte: Santos Júnior, 2018. p. 47.

### 2.2.2 Escoamento completamente desenvolvido

Como resultado do desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica, quatro tipos de escoamento laminar ocorrem em dutos, normalmente, hidrodinamicamente em desenvolvimento, simultaneamente em desenvolvimento (hidrodinâmica em desenvolvimento) e completamente desenvolvido (hidrodinâmica desenvolvidos) (SHAH e LONDON, 1978).

Quando se considera o escoamento completamente desenvolvido o perfil de velocidade não depende da distância axial  $z$ , pois é constante na direção do escoamento, assim como o fator de atrito também se mantém constante. Desta forma tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} u(x, y) = 0 \quad (2.2)$$

Assim tem-se que  $u(x, y, z) = u(x, y)$ .

### 2.2.3 Equação da quantidade de movimento linear

A equação da quantidade de movimento linear ou momento linear, para escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos retos de seção transversal constante ao longo do eixo  $z$ , com propriedades do fluido constantes, pode ser escrita como sendo:

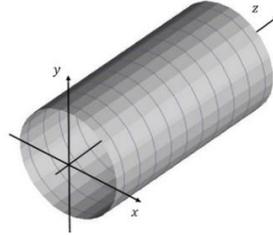
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = c_1 \quad (2.3)$$

onde  $u = u(x, y)$  é a velocidade local do fluido,  $p$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade do fluido, com condição de fronteira,

$$u(x, y) = 0 \text{ em } (x, y) \in \Gamma. \quad (2.4)$$

É considerado  $x$  e  $y$  as coordenadas da seção transversal do duto com a direção do escoamento do fluido ao longo do eixo  $z$ , Figura 4, e  $c_1 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$ , constante, que é independente de  $x$  e  $y$ .

**Figura 4** – Duto com coordenadas de seção transversal  $x$  e  $y$ , com eixo longitudinal  $z$ .



Fonte: A autora (2021)

### 2.2.4 Parâmetros adimensionais

Em análise dimensional, uma grandeza adimensional ou número adimensional é um número desprovido de qualquer unidade física que o defina. Os números adimensionais se definem como produtos ou quocientes de quantidades cujas unidade se cancelam. Dependendo do seu valor, estes números têm um significado físico que caracteriza determinadas propriedades para alguns sistemas (WHITE, 2010, apud SANTOS JUNIOR, 2018 ).

#### 2.2.4.1 Adimensionalização da equação de movimento linear

Considere as seguintes variáveis em coordenadas adimensionais:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad W(X, Y) = -\frac{u(X, Y)}{\frac{L^2 dp(z)}{\mu dz}} \quad e \quad U = \frac{u}{u_m} = \frac{W}{W_m}, \quad (2.5)$$

onde  $L$  é o comprimento característico,  $u_m$  é a velocidade média do fluido,  $W$  é a velocidade adimensional local,  $W_m$  é a velocidade média adimensional e  $U$  é a velocidade adimensional normalizada. Observe que  $u = u(x, y) = u(x(X), y(Y))$  e  $W = W(X, Y)$ .

Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X} &= -\frac{1}{\frac{L^2 dp}{\mu dz}} \frac{\partial u}{\partial X} \\ &= -\frac{1}{\frac{L^2 dp}{\mu dz}} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right] \\ &= -\frac{1}{\frac{L^2 dp}{\mu dz}} L \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\frac{L}{dz} \frac{dp}{dx}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\frac{L}{dz}} \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\frac{L}{dz}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right] \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\frac{L}{dz}} L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\frac{dz}{dp}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogamente tem-se:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\frac{dz}{dp}}. \tag{2.8}$$

Substituindo as Equações (2.6), (2.7) e (2.8) na Equação (2.3), tem-se:

$$-\left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \tag{2.9}$$

que nos dá,

$$\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} = -1. \tag{2.10}$$

com  $W(X, Y) = 0$  em  $(X, Y) \in \Gamma$ .

Pode-se considerar, o valor para o comprimento característico como  $L = 1$ . Desta forma, sem perda de generalidade, pode-se considerar que os parâmetros dimensionais de área, diâmetro hidráulico e perímetro,  $A_c, d_h$  e  $P$ , coincidem com os parâmetros adimensionais  $A_c, D_h$  e  $P$ . Utilizando assim a mesma nomenclatura, quando for necessário, sem existir confusão de valores entre os mesmos.

### 2.2.5 Diâmetro hidráulico

As correlações empíricas para escoamento em tubos também podem ser empregadas para cálculos que envolvem dutos não circulares, desde que suas seções transversais não sejam demasiadamente grandes (FOX et al., 2000, apud SANTOS JÚNIOR, 2018). Desta forma, para geometrias não circulares, introduz-se o conceito de diâmetro hidráulico, definido como:

$$d_h = \frac{4A_c}{P}, \quad (2.11)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal do duto,  $P$  é o perímetro molhado, que é definido como sendo o comprimento de parede em contato com o fluido escoando em qualquer seção transversal (EBADIAN, 1998 apud SANTOS JÚNIOR, 2018). O fator 4 é introduzido para que o diâmetro hidráulico seja igual ao diâmetro do duto para uma seção circular (ÇENGEL, 2012 apud SANTOS JÚNIOR, 2018).

### 2.2.6 Fator de atrito

Um dos parâmetros de escoamento comumente utilizado na prática é o fator de atrito de Fanning,  $f$ , definido por,

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{u_m^2}{2}} \quad (2.12)$$

onde  $\tau_w = -\frac{d_h}{4} \frac{dp}{dz}$  representa a tensão de cisalhamento,  $u_m$  é a velocidade média e  $\rho$  é a densidade do fluido (EBADIAN, 1998, apud SANTOS JÚNIOR, 2018).

O número de Reynolds,  $Re$ , em homenagem ao engenheiro e físico inglês *Osborne Reynolds*, é a razão das forças de inércias para as forças viscosas do fluido (ÇENGEL, 2012, apud SANTOS JÚNIOR, 2018), e é definido da forma,

$$Re = \frac{\rho d_h u_m}{\mu}. \quad (2.13)$$

Churchill (1988), aponta que o número de Reynolds, para fluxo não acelerado, é inadequado, uma vez que a densidade não desempenha papel no escoamento. Assim, desta forma, é sugerido utilizar na região completamente desenvolvida o número de Poiseuille, com a definição:

$$fRe = -\frac{c_1 d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2u_m} \quad (2.14)$$

onde  $c_1$  é a constante da Equação (2.3).

Assim, tem mais sentido, em escoamento laminar em dutos, o olhar para o número de Poiseuille do que para o fator de atrito de Fanning, pois o mesmo é uma constante independente das propriedades do fluido ou tamanho do duto, mas apenas do formato geométrico do duto, como reportado por Shah e London (1978).

Observe na Equação (2.14), que o número de Poiseuille é uma constante de proporcionalidade entre o gradiente de pressão e a velocidade média. Desta forma, se considera-se um determinado fluido escoando com velocidade invariante em dutos de mesmo diâmetro hidráulico, o gradiente de pressão aumenta se o número de Poiseuille aumentar.

### 2.3 Método integral de Galerkin

O método integral baseado em Galerkin vem ao longo dos anos sendo utilizado em diversas áreas, tais como: nos campos das equações diferenciais (COURANT, 1953; PETROVSKY, 1954), em Análise (BROWDER, 1966), Mecânica, Termodinâmica, Hidrodinâmica (DAUTRAY, 1998) e principalmente em desenvolvimento de métodos numéricos (ASSAN, 1999; COOPER, 1998; THOMAS, 1999). Apresenta-se o método de Galerkin em um contexto que pode ser aplicado ao nosso trabalho, considerando somente o estudo específico para as geometrias abordadas. A mesma abordagem pode ser encontrada nos trabalhos de Santos Júnior (2018) e Santos Júnior et al. (2020, 2021).

#### 2.3.1 Método integral baseado em Galerkin (GBI)

Considere um caso geral de uma equação diferencial da forma

$$L[u(x)] = g(x), \quad x \in \Omega; \quad (2.16)$$

$$u(\Gamma) = u|_{\Gamma}, \text{ com } \Gamma \text{ fronteira de } \Omega. \quad (2.17)$$

onde  $L[ ]$  é um operador linear,  $g$  uma função qualquer de  $x$  e  $u|_{\Gamma}$  é o valor da função  $u$  na fronteira de  $\Omega$ . Desta forma procura-se uma solução aproximada para o problema na forma,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \quad (2.18)$$

onde  $f_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), é um sistema de funções, escolhido antecipadamente e satisfazendo as condições de fronteira, e os  $c_i$ 's são coeficientes constantes a determinar.

Para que  $\bar{u}(x)$  seja uma solução aproximada da Equação (2.16), é necessário que

$$L(\bar{u}) - g(x) = \varepsilon \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon$  é um erro diferente de zero. Quanto mais próximo de zero for o erro  $\varepsilon$ , mais aproximada é a função  $\bar{u}$  da função  $u$ .

Assim, o método diz que a integral do erro sobre a região de interesse juntamente com as funções bases  $\{f_i(x)\}$  deve ser zero, ou seja,

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varepsilon dx = 0 \quad \text{com } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (2.20)$$

Desta forma tem-se que,

$$\int_{\Omega} f_i(x) \{L[\bar{u}(x)] - g(x)\} dx = 0, \quad \text{com } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (2.21)$$

Assim, chega-se ao sistema de equações,

$$\int_{\Omega} f_i(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right] - g(x) \right\} dx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

que possibilita encontrar os coeficientes  $c_i$ 's.

Por motivo de observação, considere  $n = 2$ , assim tem-se o conjunto de funções bases  $\{f_1(x), f_2(x)\}$ . E assim tem-se as equações

$$\int_{\Omega} f_1(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^2 c_i f_i(x) \right] - g(x) \right\} dx = 0 \quad (2.23)$$

e

$$\int_{\Omega} f_2(x) \left\{ L \left[ \sum_{i=1}^2 c_i f_i(x) \right] - g(x) \right\} dx = 0, \quad (2.24)$$

que conduz a:

$$c_1 \int_{\Omega} f_1(x) L[f_1(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} f_1(x) L[f_2(x)] dx = \int_{\Omega} f_1(x) g(x) dx \quad (2.25)$$

e

$$c_1 \int_{\Omega} f_2(x) L[f_1(x)] dx + c_2 \int_{\Omega} f_2(x) L[f_2(x)] dx = \int_{\Omega} f_2(x) g(x) dx, \quad (2.26)$$

que, na forma matricial assume a forma:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1(x) L[f_1(x)] dx & \int_{\Omega} f_1(x) L[f_2(x)] dx \\ \int_{\Omega} f_2(x) L[f_1(x)] dx & \int_{\Omega} f_2(x) L[f_2(x)] dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1(x) g(x) dx \\ \int_{\Omega} f_2(x) g(x) dx \end{bmatrix}; \quad (2.27)$$

ou ainda,

$$AC = B, \quad (2.28)$$

com os coeficientes das matrizes  $A$  e  $B$  dados respectivamente por:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} f_i(x) L[f_j(x)] dx \quad (2.29)$$

e

$$b_i = \int_{\Omega} f_i(x) g(x) dx, \quad \text{com } i, j = 1, 2 \quad (2.30)$$

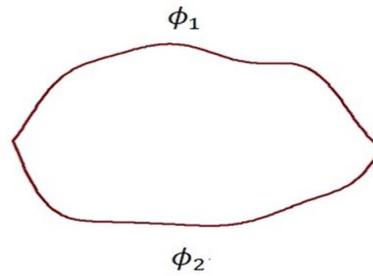
Logo, descobrindo os  $c_i$ 's para este sistema,  $C = A^{-1}B$ , e substituindo então a expressão para  $\bar{u}$ , chegamos a solução aproximada desejada. Este método pode ser aplicado para diversos tipos de equações como elípticas, hiperbólicas e parabólicas.

### 2.3.2 Método para encontrar funções bases

Um conjunto de funções bases é um conjunto onde os seus elementos são linearmente independentes, e cada função satisfaz as mesmas condições de contorno homogêneas dadas.

#### 2.3.2.1 Condições de contorno para duas funções bases

Considere uma região limitada por duas curvas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , como ilustrada na Figura 5. Dentro do nosso estudo, nos limitaremos a geometrias com esta mesma característica.

**Figura 5** – Geometria de duas funções bases

Fonte: A autora (2021)

O primeiro elemento do conjunto de funções bases pode ser definido como,

$$f_1 = \phi_1 \phi_2 \quad (2.31)$$

Assim, cada elemento subsequente do conjunto de funções bases é obtido multiplicando-se  $f_1$  por potências dos elementos do sistema de coordenadas, por exemplo, no sistema de coordenadas cartesianas, os elementos do conjunto de funções bases se tornam:

$$\begin{array}{lll} f_2 = f_1 x & f_5 = f_1 y^2 & f_8 = f_1 x y^2 \\ f_3 = f_1 y & f_6 = f_1 x y & f_9 = f_1 x^2 y^2 \quad \dots \\ f_4 = f_1 x^2 & f_7 = f_1 x^2 y & f_{10} = f_1 x^3 \end{array} \quad (2.32)$$

Exige-se apenas que cada função base se anule na fronteira do domínio considerado. Algumas, mas não todas, podem anular-se em algum ponto interior. Isto pode ser assegurado se  $f_1$  nunca se anula dentro da região. Sempre que todas as funções bases anulem-se em um ponto interior, a região pode ser subdividida em diferentes subseções.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Modelagem Matemática

O método integral baseado em Galerkin foi aplicado para resolver a equação de momento linear para obtenção do perfil de velocidade, assim como o número de Poiseuille em dutos retos de seções transversais simulando incrustação.

Neste trabalho considera-se um escoamento laminar completamente desenvolvido hidrodinamicamente, em regime permanente, Newtoniano, com condução axial e dissipação viscosa negligenciadas e com propriedades físico-químicas constantes.

### 3.1.1 Perfil de velocidade pelo método GBI

Considere a Equação (2.10) e uma solução da forma

$$W = \sum_{n=1}^N c_n f_n(X, Y) \quad (3.1)$$

com  $f_n \in \{f_j\}_{j=1 \dots N}$  um conjunto de funções base e os  $c'_n$ s são constantes a serem avaliadas. Substituindo a Equação (3.1) na Equação (2.10) chega-se a:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \sum_{j=1}^N c_j f_j(X, Y) \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \sum_{j=1}^N c_j f_j(X, Y) \right) = -1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j \left( \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) = -1. \quad (3.3)$$

Ou na forma compacta:

$$\sum_{j=1}^N c_j \nabla^2 f_j(X, Y) = -1, \quad (3.4)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}. \quad (3.5)$$

Aplicando o método GBI na Equação (3.4), obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[ \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_j \nabla^2 f_j dA_c \right] = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_j dA_c \quad (3.6)$$

Assim a Equação (3.6) pode ser escrita na forma matricial como:

$$AC = B, \quad (3.7)$$

onde as matrizes  $A$  e  $B$  têm elementos:

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i \nabla^2 f_j(X, Y) dA_c \quad (3.8)$$

e

$$b_i = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i(X, Y) dA_c \quad (3.9)$$

sendo  $A_c$  a área adimensional da seção transversal do duto. Assim, a matriz de coeficientes  $c_n$  é encontrada da seguinte forma,

$$C = A^{-1}B \quad (3.10)$$

onde  $A^{-1}$  é a inversa da matriz  $A$ . A multiplicação por  $\frac{1}{A_c}$  é acrescentada somente para fins de computação numérica.

A definição padrão para a velocidade média é usada para calcular  $W_m$ , assim:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{A_c} \int_{A_c} W dA_c \\ &= \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \sum_{j=1}^N c_j f_j dA_c \\ &= \sum_{j=1}^N c_j \frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_j dA_c. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, pode-se escrever,

$$W_m = \sum_{j=1}^N c_j b_j. \quad (3.12)$$

Desta forma, a velocidade adimensional normalizada  $U$ , pode ser dada na forma:

$$U = \frac{W}{W_m} = \frac{u}{u_m} = \frac{C_f Re}{2 \frac{d_h^2}{L^2}} \sum_{j=1}^N d_j f_j. \quad (3.13)$$

Observe que o número de Poiseuille, definido na Equação (2.14), agora torna-se

$$fRe = -\frac{c_1 d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2u_m} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{d_h^2}{2 \left( -\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz} W_m \right)} = \frac{D_h^2}{2W_m}. \quad (3.14)$$

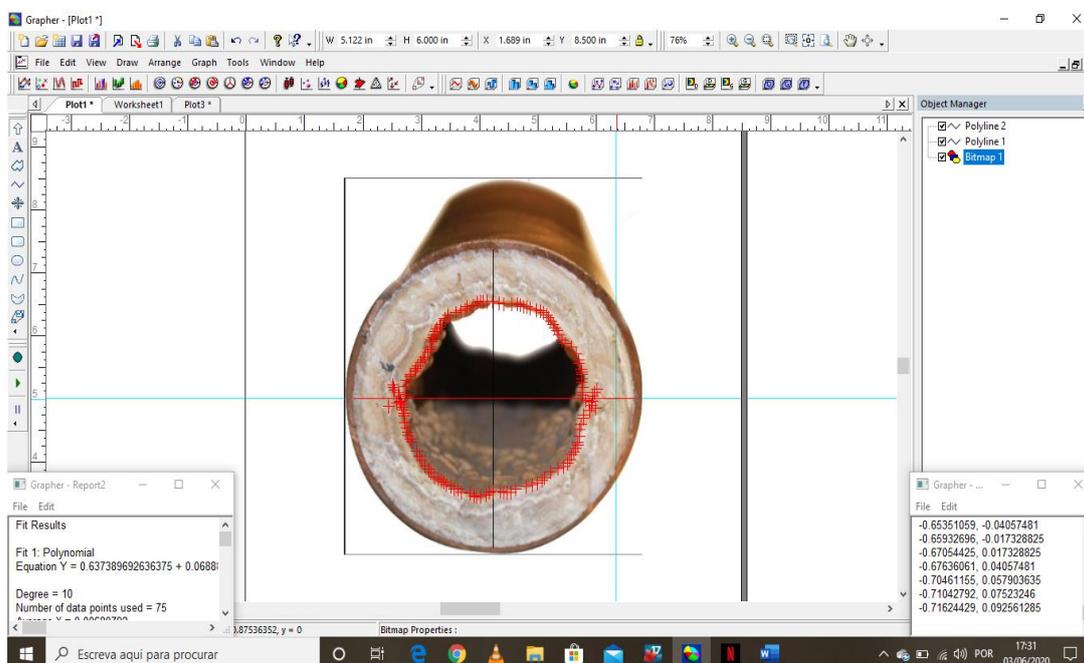
## 3.2 Procedimento numérico

Nesta seção ilustra-se a ferramenta de software Grapher 8 e Maple 2017 junto a sua forma esquemática das simulações realizadas para obter os resultados das geometrias utilizadas nesse trabalho.

### 3.2.1 Ferramenta de software Grapher 8

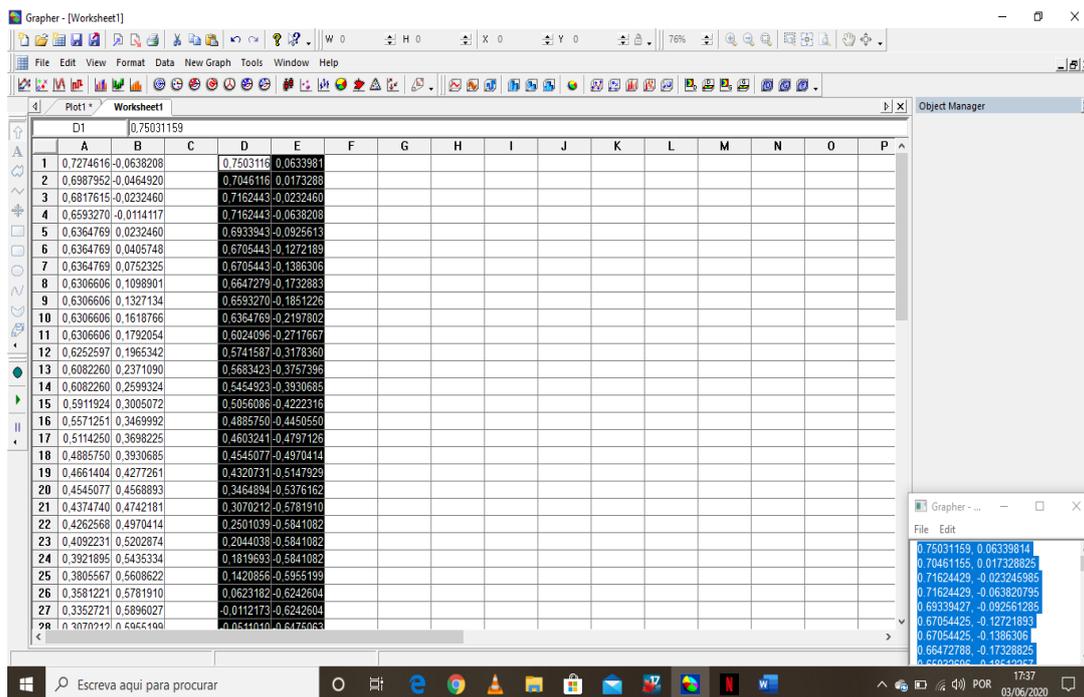
A ferramenta *Grapher 8* teve papel fundamental neste trabalho, pois foi através dela que se encontra as parametrizações das curvas que compõem as geometrias estudadas. O procedimento se deu da seguinte forma: Realizou-se as escolhas das curvas, dutos com incrustações; criou-se um sistema de coordenadas do qual todos os dutos circulares tivessem o mesmo raio, 1 unidade de comprimento; pontos sobre as linhas que compõem as incrustações foram caracterizados e posteriormente as parametrizações das curvas foram encontradas por aproximações polinomiais com ordem até dez. Dessa forma este programa teve sua parcela importante de contribuição para uma boa desenvoltura dos resultados que foram trabalhados. Nas Figuras 6 e 7 apresenta-se a interface do programa:

**Figura 6** – Interface da ferramenta software Grapher 8 (plot).



Fonte: A autora (2021)

**Figura 7** – Interface da ferramenta software Grapher 8 (worksheet)

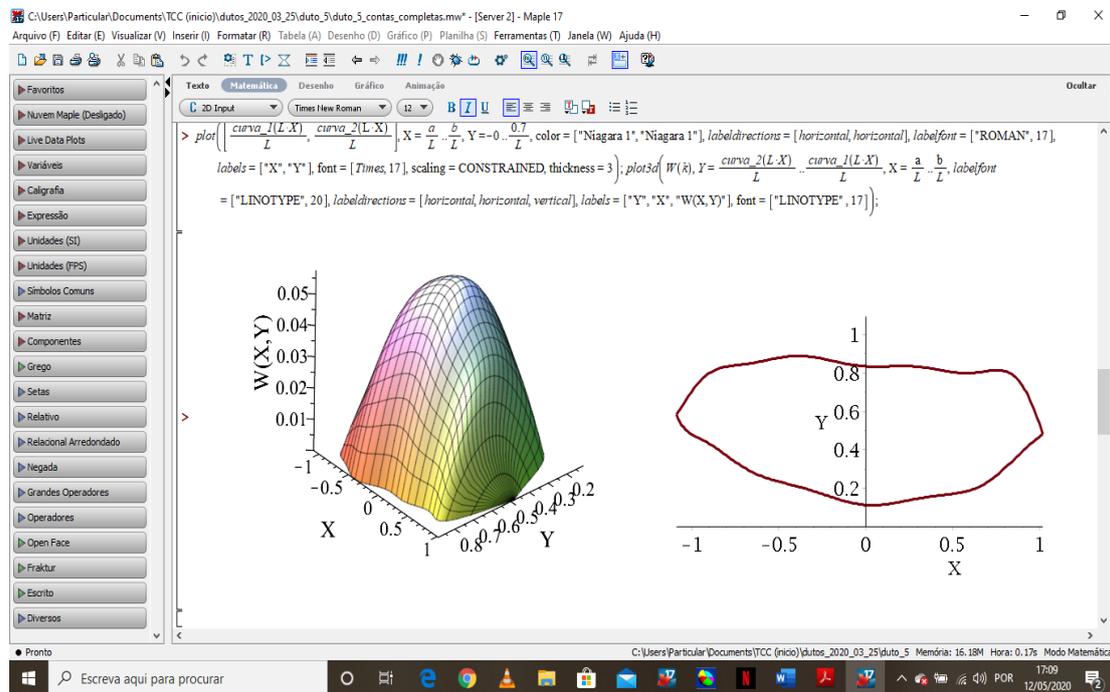


Fonte: A autora (2021)

### 3.2.2 Ferramenta de software Maple 2017

O Maple é um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui de um ambiente para a computação de expressões algébricas e simbólicas, permitindo a visualização de gráficos de duas ou três dimensões. A versão utilizada neste trabalho é a *Maple 2017 Student Edition*. Nesta ferramenta, a partir das curvas encontradas pudemos plotar os perfis de velocidade adimensionais como também outros valores importantes, a exemplo, o número de Poiseuille. Esses valores foram encontrados para todas as geometrias com base nos mesmos cálculos. A interface intuitiva do Software Maple 17 pode ser observada na Figura 8:

**Figura 8** – Interface da ferramenta de software Maple 2017 Student Edition com gráficos plotados.



Fonte: A autora (2021)

### 3.2.3 Algoritmo de cálculo: perfil de velocidade e número de Poiseuille

```

> #PACOTES:
> restart : with(student) : with(Optimization) : with(plots) : with(PDEtools) : with(LinearAlgebra) :
with(powseries) : with(plottools) :
> Digits := 15 :
> # PARAMETRIZAÇÕES DAS CURVAS:
> curva_1 := X → 0.426257214852211 - 0.248951350795592 X - 2.01478985851394 X2
+ 13.0155768683426 X3 + 34.1562775194944 X4 - 218.160261271976 X5 - 434.594088247468 X6
+ 1122.36597801433 X7 + 1931.70086681534 X8 - 1805.76082536036 X9 - 2888.1513163221 X10 :
> curva_2 := X → -0.555827782530524 + 0.288430991405453 X + 0.222699184296641 X2
- 12.2559782925155 X3 + 38.1585907820783 X4 + 153.704421443192 X5 - 321.594230841426 X6
- 612.240802210995 X7 + 1288.47718031581 X8 + 740.521784019136 X9 - 1919.05194098604 X10 :
> # PONTOS DE INTERSEÇÃO:
> solve(curva_1(X) - curva_2(X) = 0, X) :
> X_1 := -0.5196745396 :
> X_2 := 0.4315284220 :
> Y_1 := curva_1(X_1) :
> Y_2 := curva_1(X_2) :
> # PLOT - CURVA DIMENSIONAL:
> plot([ curva_1(X), curva_2(X) ], X = X_1..X_2, Y = -0.6..0.5, color = ["Niagara 1", "Niagara 1"],
labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 20], labels = ["x", "y"], font = [Times,
17], scaling = CONSTRAINED, thickness = 3) :

```

```

> # PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DIMENSIONAIS:
> solve({curva_2(X) = 0, X > X_1, X < X_2}, X) :
> c_1 := -0.515706260307833 :
> solve({curva_1(X) = 0, X > a, X < b}, X) :
> c_2 := 0.412739929851420 :
> Area_di_1 := ∫X_1c_2 curva_1(X) dX - ∫X_1c_1 curva_2(X) dX:
> Area_di_2 := - ⎛ ∫c_1X_2 curva_2(X) dX - ∫c_2X_2 curva_1(X) dX ⎞ :
> Area_di := Area_di_1 + Area_di_2 :
> Perimetro_di := int(√(1 + (diff(curva_1(X), X))^2), X = X_1 .. X_2)
+ int(√(1 + (diff(curva_2(X), X))^2), X = X_1 .. X_2) :
> De_di := evalf( (4·Area_di) / Perimetro_di ) :
> # COMPRIMENTO CARACTERÍSTICO:
> L := 1 :
> # PLOT - CURVA ADIMENSIONAL:
> plot( [ (curva_1(L·X) / L, curva_2(L·X) / L), X = X_1 / L .. X_2 / L, Y = -0.6 / L .. 0.5 / L, color = ["Niagara 1",
"Niagara 1"], labeldirections = [horizontal, horizontal], labelfont = ["ROMAN", 17], labels = ["X",
"Y"], font = [Times, 17], scaling = CONSTRAINED, thickness = 3) :
> g := (X, Y) → (curva_1(L·X) - L·Y) · (curva_2(L·X) - L·Y) :
> # FUNÇÕES BASES:
> f := [g(X, Y), g(X, Y)·X2, g(X, Y)·Y2, g(X, Y)·X4, g(X, Y)·X2·Y2, g(X, Y)·Y4, g(X, Y)·X6, g(X, Y)·X4
·Y2, g(X, Y)·X2·Y4, g(X, Y)·Y6, g(X, Y)·X8, g(X, Y)·X6·Y2, g(X, Y)·X4·Y4, g(X, Y)·X2·Y6, g(X, Y)
·X10, g(X, Y)·X8·Y2, g(X, Y)·X6·Y4, g(X, Y)·X4·Y6, g(X, Y)·X2·Y8, g(X, Y)·X4·Y6, g(X, Y)·X2
·Y8, g(X, Y)·Y10, g(X, Y)·X12, g(X, Y)·X10·Y2, g(X, Y)·X8·Y4, g(X, Y)·X6·Y6, g(X, Y)·X4·Y8,
g(X, Y)·X2·Y10, g(X, Y)·Y12, g(X, Y)·X14, g(X, Y)·X12·Y2, g(X, Y)·X10·Y4, g(X, Y)·X8·Y6, g(X,
Y)·X6·Y8, g(X, Y)·X4·Y10, g(X, Y)·X2·Y12, g(X, Y)·Y14, g(X, Y)·X14·Y2, g(X, Y)·X12·Y4, g(X, Y)
·X10·Y6, g(X, Y)·X8·Y8, g(X, Y)·X6·Y10, g(X, Y)·X4·Y12, g(X, Y)·X2·Y14, g(X, Y)·X14·Y4, g(X, Y)
·X12·Y6, g(X, Y)·X10·Y8, g(X, Y)·X8·Y10, g(X, Y)·X6·Y12, g(X, Y)·X4·Y14, g(X, Y)·X14·Y6] :
> # PARÂMETROS GEOMÉTRICOS ADIMENSIONAIS:
> curva_2_ad := X → (curva_2(L·X) / L) :
> solve({curva_2_ad(X) = 0, X > X_1 / L, X < X_2 / L}, X) :
> c_1_ad := -0.560164728155319 :
> curva_1_ad := X → (curva_1(L·X) / L) :
> solve({curva_1_ad(X) = 0, X > X_1 / L, X < X_2 / L}, X) :
> c_2_ad := 0.448321783928049 :
> Area_ad_1 := ∫X_1 / Lc_2_ad curva_1_ad(X) dX - ∫X_1 / Lc_1_ad curva_2_ad(X) dX:
> Area_ad_2 := - ⎛ ∫c_1_adX_2 / L curva_2_ad(X) dX - ∫c_2_adX_2 / L curva_1_ad(X) dX ⎞ :
> Area := Area_ad_1 + Area_ad_2 :
> Perimetro := int(√(1 + (diff((curva_1(L·X) / L), X))^2), X = X_1 / L .. X_2 / L)
+ int(√(1 + (diff((curva_2(L·X) / L), X))^2), X = X_1 / L .. X_2 / L) :
> De := evalf( (4·Area) / Perimetro ) :
> # NÚMERO DE FUNÇÕES BASES:
> k := 15 :

```

```

> # PERFIL DE VELOCIDADE:
> # MATRIZES:
> Bj := j → -1/Area ∫_{X_1/L}^{X_2/L} ∫_{curva_2(L·X)/L}^{curva_1(L·X)/L} f[j] dYdX:
> B := Re(Matrix(k, 1, Bj)) :
> evalf(B) :
> Aij := (i, j) → -1/Area ∫_{X_1/L}^{X_2/L} ∫_{curva_2(L·X)/L}^{curva_1(L·X)/L} (d/dX f[i]) · (d/dX f[j]) + (d/dY f[i]) · (d/dY f[j]) dY dX:
> A := Re(Matrix(k, k, Aij)) :
> evalf(A) :
> evalf(A⁻¹) :
> # MATRIZ DOS COEFICIENTES :
> C_i := evalf(evalf(A⁻¹).evalf(B)) :
> l := j → evalf(C_i[j, 1]) :
> # PERFIL DE VELOCIDADE ADIMENSIONAL:
> W := k → sum('l(j) · f[j]', j = 1 ..k) :
> W(k) :
> plot3d(W(k), Y = curva_2(L·X)/L .. curva_1(L·X)/L, X = X_1/L .. X_2/L, labelfont = ["LINOTYPE", 20],
labeldirections = [horizontal, horizontal, vertical], labels = ["Y", "X", "W(X,Y)"], font = ["LINOTYPE",
17]) :
> # CÁLCULO DE VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE MÁXIMA ADIMENSIONAL:
> Wm := 1/Area int(int(W(k), Y = curva_2(L·X)/L .. curva_1(L·X)/L), X = X_1/L .. X_2/L) :
> # VALOR MÁXIMO DO PERIL DE VELOCIDADE:
> Maximize(W(k), Y = -0.6 .. 0.6, X = X_1/L .. X_2/L) :
> # CURVAS DE NÍVEL:
> cm := contourplot(W(k), X = X_1/L .. X_2/L, Y = -0.6 .. 0.6, contours = [0.01, 0.03, 0.05, 0.06], labelfont
= ["ROMAN", 17], labels = ["x", "y"], scaling = CONSTRAINED, font = [Times, 15]) :
> text1 := textplot([-0.05, 0.43, 'typeset'(0.01)], 'align' = 'above') :
> text2 := textplot([-0.05, 0.32, 'typeset'(0.03)], 'align' = 'above') :
> text3 := textplot([-0.05, 0.18, 'typeset'(0.05)], 'align' = 'above') :
> text4 := textplot([-0.05, 0.042, 'typeset'(0.06)], 'align' = 'above') :
> #text5 := textplot([0, 0.01, 'typeset'(0.002)], 'align' = 'above') :
> # text6 := textplot([0, -1, 'typeset'(0.065)], 'align' = 'above') :
> display({cm, text1, text2, text3, text4}, 'view' = [-0.6 .. 0.4, -0.6 .. 0.5], scaling = CONSTRAINED, font
= [Times, 20], thickness = 4) :
> # NÚMERO DE POISEUILLE
> fRe := (De)² / (2 · evalf(Wm)) :

```

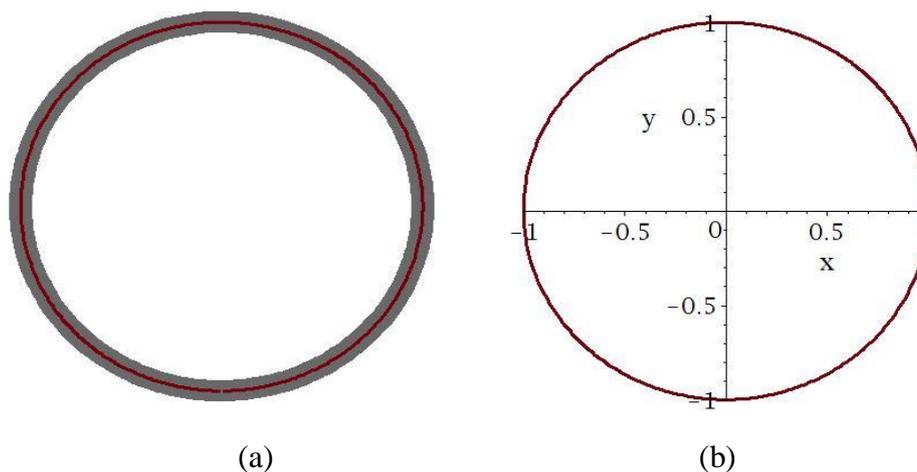
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, discute-se os resultados obtidos de acordo com o objetivo em questão nesse trabalho. Foram escolhidos cinco dutos circulares, com incrustações em suas paredes internas que apresentam geometrias diferenciadas, a partir dessa escolha, utilizamos a ferramenta computacional *Grapher 8* para conseguir os pontos sobre um eixo limitado de zero a um. Na construção dos gráficos foi possível obter as parametrizações das curvas. Por meio deste resultado, com a ferramenta *Maple 2017*, consegue-se obter os pontos de interseções, os gráficos das curvas, os parâmetros geométricos, dimensionais e adimensionais, como área, perímetro e diâmetro hidráulico, velocidade média e velocidade máxima adimensionais e o número de Poiseuille. E assim, consegue-se apresentar o perfil de velocidade para cada geometria, dando o melhor entendimento sobre o comportamento do fluido ao escoar nas regiões escolhidas.

### 4.1 Duto circular

Para uma melhor análise dos resultados ilustra-se os valores de área, perímetro, diâmetro hidráulico, velocidade média e o número de Poiseuille em um duto circular de raio um. A finalidade é realizar um estudo hidrodinâmico do duto sem incrustações e posteriormente realizar o comparativo com as seções incrustadas.

**Figura 9** – (a) geometria do duto circular e (b) parametrização do duto circular.

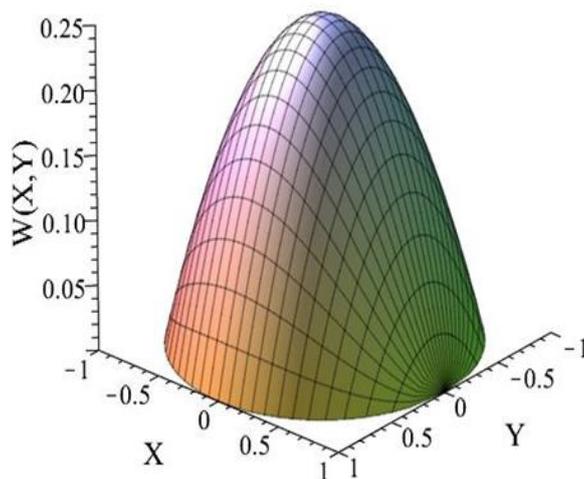


Fonte: A autora (2021)

Na Figura 10, observa-se o perfil de velocidade em um duto circular. Tal perfil é parabólico e possui sua velocidade máxima no centro do duto, ponto  $(0; 0)$ , como é de

se esperar para a geometria circular. Na Tabela 1, apresenta-se os valores para a área, perímetro, diâmetro hidráulico, velocidade média, velocidade mínima e máxima e o número de Poiseuille. Todo os valores correspondem aos encontrados na literatura para este tipo de geometria.

**Figura 10** – Perfil de velocidade adimensional.



Fonte: A autora (2021)

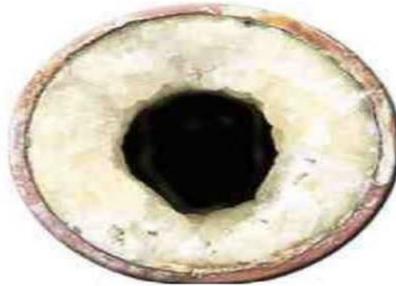
**Tabela 1** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria Circular).

Parâmetros	Valores
$A_c$	3,14159
$P$	6,28318
$D_h$	2,00000
$W_m$	0,12499
$W_{max}$	0,24999
$(X_{max}, Y_{max})$	(0 , 0)
$fRe$	16,00000

Fonte: A autora (2021)

## 4.2 Geometrias com incrustações

Teve-se como base de estudo escolhas de geometrias de dutos com paredes internas incrustadas com materiais sólidos dos quais são desconhecidos. Neste estudo, o material não é considerado relevante, mas sim a geometria do qual o mesmo forma nas paredes do duto. Esta escolha foi a mais diversa possível para obtermos comparações com geometrias reais.

**Figura 11 – Geometria 1.**

Fonte: Capital Green, 2012.

Para a geometria da Figura 11, encontra-se as seguintes parametrizações:

$$\begin{aligned}
 c_1(X) = & 0.426257214852211 - 0.248951350795592X \\
 & - 2.01478985851394X^2 + 13.0155768683426X^3 \\
 & + 34.15627775194944X^4 - 218.160261271976X^5 \\
 & - 434.594088247468X^6 + 1122.36597801433X^7 \\
 & + 1931.70086681534X^8 - 1805.76082536036X^9 \\
 & - 2888.1513163221X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

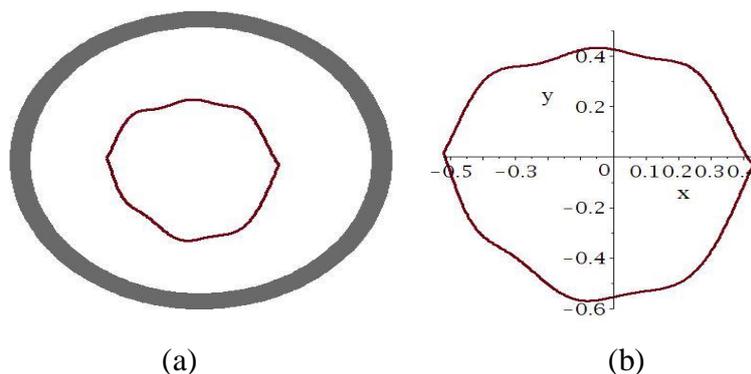
e

$$\begin{aligned}
 c_2(X) = & -0.555827782530524 + 0.288430991405453X \\
 & + 0.222699184296641X^2 - 12.2559782925155X^3 \\
 & + 38.1585907820783X^4 + 153.704421443192X^5 \\
 & - 321.594230841426X^6 - 612.240802210995X^7 \\
 & + 1288.47718031581X^8 + 740.521784019136X^9 \\
 & - 1919.05194098604X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

As curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$ , representam as parametrizações das linhas superior e inferior, respectivamente, que compõem a curva que representa a incrustação do duto. Como ponto de interseção das curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$  temos os pontos,  $(-0,5196; 0,0143)$  e  $(0,43152; -0,0303033)$ .

Assim, pode-se representar a geometria incrustada como na Figura 12.

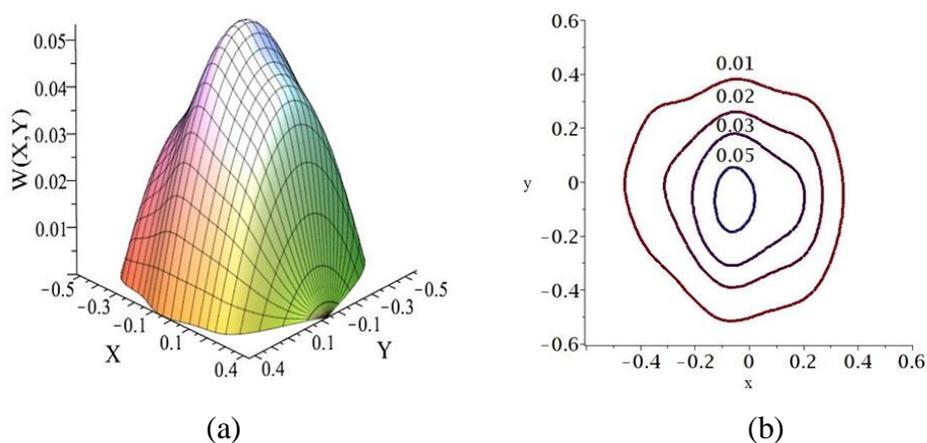
**Figura 12** – (a) ilustração da Geometria 1 e (b) parametrização da Geometria 1.



Fonte: A autora (2021)

Na Tabela 2, junto a Figura 13, são apresentados os valores encontrados para cada passo referente a Geometria 1.

**Figura 13** – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade.



Fonte: A autora (2021)

**Tabela 2** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria 1).

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,69487
$P$	3,01913
$D_h$	0,92063
$W_m$	0,02521
$W_{max}$	0,05327
$(X_{max}, Y_{max})$	(-0,05960; -0,06536)
$fRe$	16,80909

Fonte: A autora (2021)

Comparando os valores do duto circular, Tabela 1, com os da Geometria 1, Tabela 2, pode-se observar que a área teve uma diminuição de 77,89%, uma redução de velocidade média de 79,83% e um aumento no fator de atrito de 5,056%.

Agora consideremos a geometria da Figura 14:

**Figura 14 - Geometria 2.**



Fonte: Parafos, 2020.

Nesta geometria encontramos as seguintes parametrizações para as curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$ :

$$\begin{aligned}
 c_1(X) = & 0.6300092051422075 + 0.163370391156991X \\
 & - 0.260587962267299X^2 - 5.39629435483293X^3 \\
 & - 6.52797063044572X^4 + 40.5088820605923X^5 \\
 & + 27.2608361950861X^6 - 106.811540282925X^7 \\
 & - 68.2206553477035X^8 + 90.2341214553668X^9 \\
 & + 62.9349083062244X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

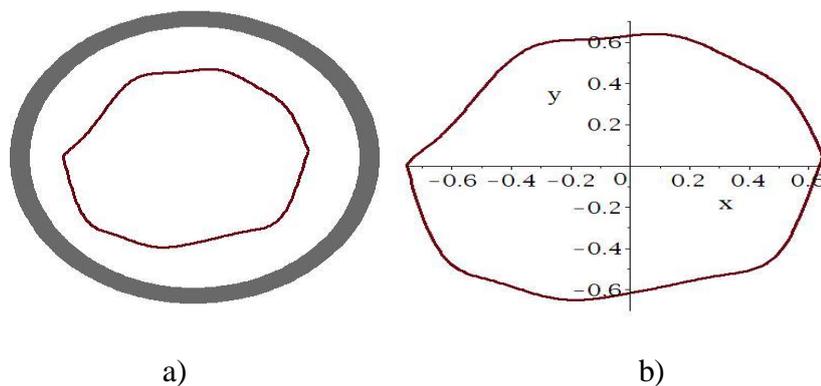
e

$$\begin{aligned}
 c_2(X) = & -0.618008512617697 + 0.265359965018094X \\
 & + 0.162729796480899X^2 - 0.691016828278369X^3 \\
 & + 5.72871173407762X^4 - 10.5115685661964X^5 \\
 & - 44.0304574142861X^6 + 63.8695193282422X^7 \\
 & + 143.836148170769X^8 - 80.8864730967025X^9 \\
 & - 141.787822726343X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Os pontos de interseções são  $(-0,75117; 0,00575)$  e  $(0,64932; 0,04350)$ , respectivamente.

Na Figura 15 tem-se ilustrada, com representação das curvas encontradas, a parametrização da Geometria 2.

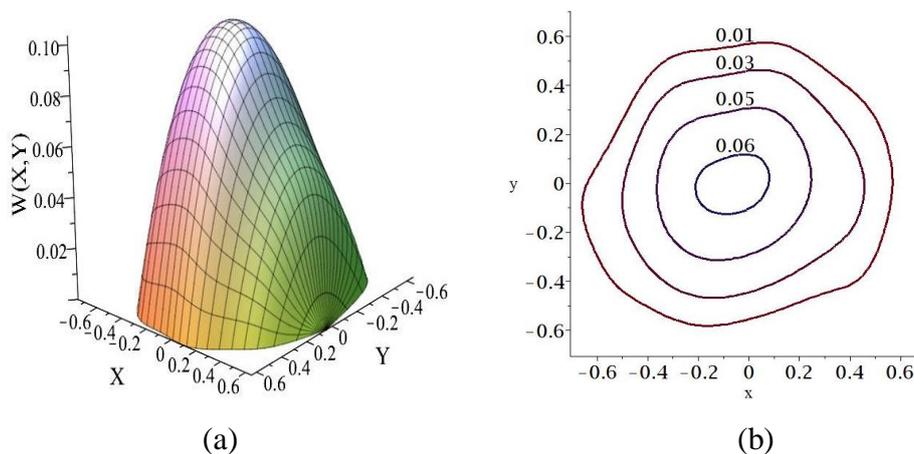
**Figura 15** – (a) ilustração da Geometria 2 e (b) parametrização da Geometria 2.



Fonte: A autora (2021)

Na Figura 16 e Tabela 3, pode-se observar os valores encontrados referentes a Geometria 2.

**Figura 16** – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade.



Fonte: A autora (2021)

**Tabela 3** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria 2).

Parâmetros	Valores
$A_c$	1,35337
$P$	4,20510
$D_h$	1,28735
$W_m$	0,05103
$W_{max}$	0,10363
$(X_{max}, Y_{max})$	(-0,04915; -0,00437)
$fRe$	16,23545

Fonte: A autora (2021)

Os dados da Geometria 2, Tabela 3, quando comparados com a geometria sem incrustação, Tabela 1, observa-se uma diminuição de 56,921% na área da seção transversal, uma diminuição de 59,17% na velocidade média e um aumento de 1,471% no fator de atrito.

Considerando, para análise, a geometria da Figura 17:

**Figura 17-** Geometria 3.



Fonte: Corrosion Doctors, 2020.

Observa-se que para a Geometria 3, as parametrizações correspondentes as curvas são dadas pelas funções:

$$\begin{aligned}
 c_1(X) = & 0.396402808096326 + 0.0628840392384978X \\
 & + 2.15854530988585X^2 + 0.772343336732365X^3 \\
 & - 20.8373123751835X^4 - 19.8083304033209X^5 \\
 & + 40.0074049598162X^6 + 54.3073047533162X^7 \\
 & - 15.0890587075972X^8 - 41.7742363953621X^9 \\
 & - 13.0629570075902X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

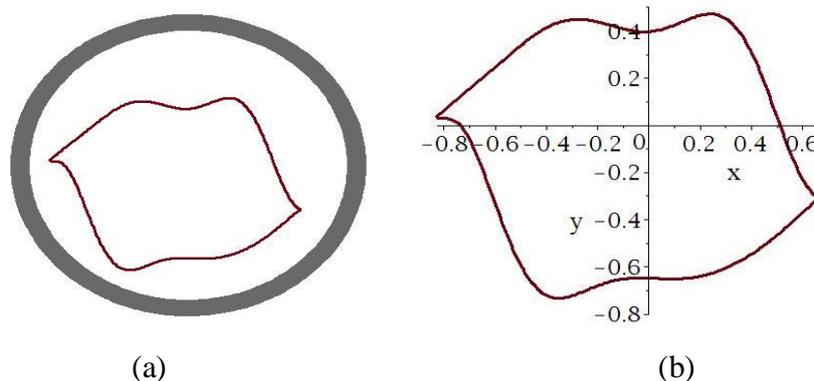
e

$$\begin{aligned}
 c_2(X) = & -0.648764832147286 - 0.0383133933705182X \\
 & - 0.398621101500784X^2 + 4.3888539255232X^3 \\
 & + 0.569381928588213X^4 - 23.0618562484267X^5 \\
 & + 23.096932158591X^6 + 37.2839475631873X^7 \\
 & - 54.591458553165X^8 - 19.4983238878727X^9 \\
 & + 34.1372154633067X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

As curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$  possuem interseções nos pontos  $(-0,82766; 0,03251)$  e  $(0,66816; -0,30976)$ .

Na Figura 18, apresenta-se a melhor aproximação para a Geometria 3. Para esta geometria também foi realizada a escolha das curvas com aproximações de polinômios de ordem dez, visto que as mesmas foram as que mais se aproximaram do bordo.

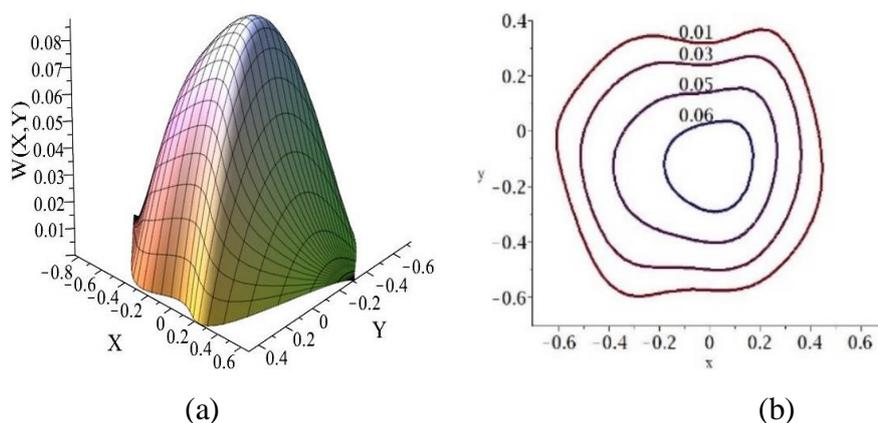
**Figura 18** – (a) ilustração da Geometria 3 e (b) parametrização da Geometria 3.



Fonte: A autora (2021)

Na Tabela 4 e na Figura 19 apresenta-se os valores adimensionais da área da seção transversal, perímetro, diâmetro hidráulico como também o perfil de velocidade e as curvas de nível da Geometria 3.

**Figura 19** – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade.



Fonte: A autora (2021)

**Tabela 4** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria 3).

Parâmetros	Valores
$A_c$	1,20260
$P$	4,26665
$D_h$	1,12744
$W_m$	0,04198
$W_{max}$	0,08814
$(X_{max}, Y_{max})$	(0,03229; -0,12789)
$fRe$	15,13962

Fonte: A autora (2021)

Para a Geometria 3, a análise dos resultados, pode-se observar que a área, comparado ao duto circular, teve uma perda de 61,73%, a sua velocidade média reduziu para 66,414% como também o fator de atrito do qual teve uma diminuição de 5,378%.

Na Figura 20, observa-se um duto circular com incrustação significativa. Esta configuração foi escolhida para que tivéssemos, tanto dutos com pequenos resíduos, quanto com sua área quase toda comprometida.

**Figura 20-** Geometria 4.



Fonte: Wikimedia Commons, 2014.

Para a Geometria 4, obtêm-se as seguintes curvas parametrizadas:

$$\begin{aligned}
 c_1(X) = & 0.534521587140446 - 0.570830698765003X \\
 & + 0.815439720294261 X^2 - 1.14886330681297 X^3 \\
 & - 14.4791649058479 X^4 + 13.6302376056617 X^5 \\
 & + 88.84842477029 X^6 - 43.6949993445127 X^7 \\
 & - 225.058878227255 X^8 + 41.1367961796201 X^9 \\
 & + 189.572030867926 X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

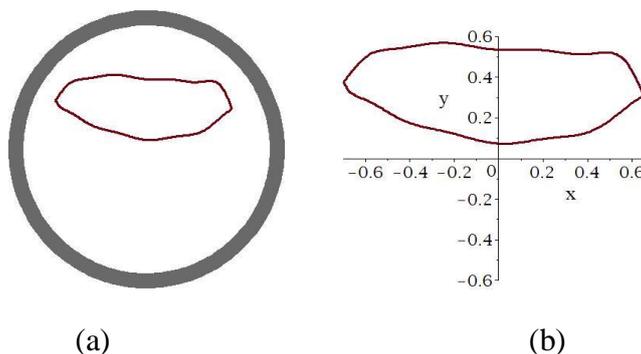
e

$$\begin{aligned}
 c_2(X) = & 0.724262254765895 - 0.652375822873201X \\
 & + 1.31510515849469 X^2 + 0.0323404692529514 X^3 \\
 & - 13.6352339690279 X^4 - 0.691411739291353 X^5 \\
 & + 77.715213803174 X^6 + 5.55360855900475 X^7 \\
 & - 178.457116333352 X^8 - 7.81551374122976 X^9 \\
 & + 144.211240966079 X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

As curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$  teve como pontos de interseções,  $(-0,69760; 0,37514)$  e  $(0,65236; 0,30876)$ .

Após ter os resultados das curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$  observa-se a parametrização da geometria 4.

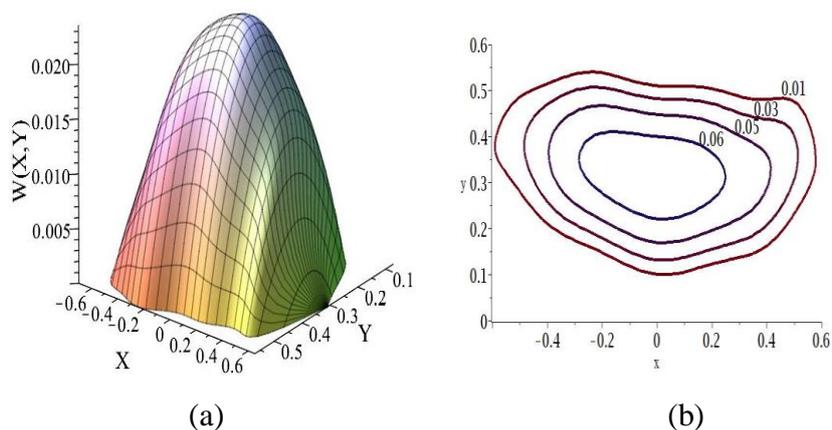
**Figura 21** – (a) ilustração da geometria 4 e (b) parametrização da geometria 4.



Fonte: A autora (2021)

Na Tabela 5, junto a Figura 22, são apresentados valores relevantes para o nosso estudo dos quais refere-se a geometria 4.

**Figura 22** – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade.



Fonte: A autora (2021)

**Tabela 5** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria 4).

Parâmetros	Valores
$A_c$	0,48686
$P$	3,04129
$D_h$	0,64034
$W_m$	0,01179
$W_{max}$	0,02353
$(X_{max}, Y_{max})$	(0,00386; 0,31186)
$fRe$	17,38516

Fonte: A autora (2021)

Ao analisar os dados da Geometria 4, observa-se uma redução significativa de área, sendo o valor percentual de 84,503%. Fazendo uma análise da velocidade média,

existiu uma diminuição bastante relevante, 90,567%, juntamente a um aumento no fator de atrito de 8,657%.

**Figura 23-** Geometria 5.



Fonte: Weidner Wassertechnik GmbH, 2020.

As curvas parametrizadas para a Geometria 5 são dadas por:

$$\begin{aligned}
 c_1(X) = & 0.867514833092233 + 0.0331334268463161X \\
 & - 0.407891067929208X^2 - 1.30454524230374X^3 \\
 & - 1.75981382852599X^4 + 7.11374683495674X^5 \\
 & + 7.15982134696517X^6 - 13.3995818853305X^7 \\
 & - 13.9136174075666X^8 + 7.89916425287349X^9 \\
 & + 8.63393100383964X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

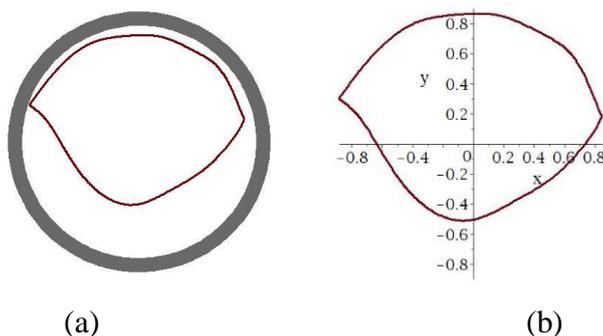
e

$$\begin{aligned}
 c_2(X) = & -0.503838392982828 + 0.197821817917792X \\
 & + 1.40099907163968X^2 - 1.1924463704796X^3 \\
 & - 3.27786481553598X^4 + 1.2631374318383X^5 \\
 & + 12.502053257903X^6 - .450142976738602X^7 \\
 & - 19.6756257344406X^8 + .452461538705322X^9 \\
 & + 10.5683231775982X^{10}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

E seus respectivos pontos de interseções:  $(-0,88110; 0,30247)$  e  $(0,84813; 0,18391)$ .

A partir das parametrizações das curvas  $c_1(X)$  e  $c_2(X)$ , referentes a Geometria 5, Figura 24, pode-se observar a representação geométrica da incrustação considerada.

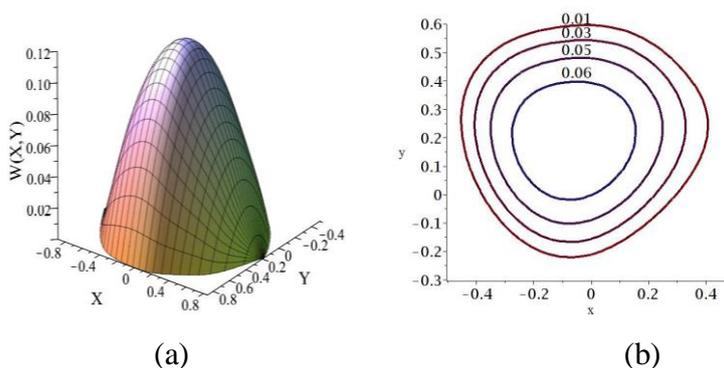
**Figura 24** – (a) ilustração da geometria 5 e (b) parametrização da Geometria 5.



Fonte: A autora (2021)

A partir das parametrizações das curvas da Geometria 5, os valores para área, diâmetro hidráulico, perímetro, velocidade média e velocidade máxima adimensional, perfil de velocidade adimensional e o número de Poiseuille são apresentados na Figura 25 e Tabela 5:

**Figura 25** – (a) Curva de superfície do perfil de velocidade adimensional e (b) curvas de nível do perfil de velocidade.



Fonte: A autora (2021)

**Tabela 6** – Valores de parâmetros de interesses (Geometria 5).

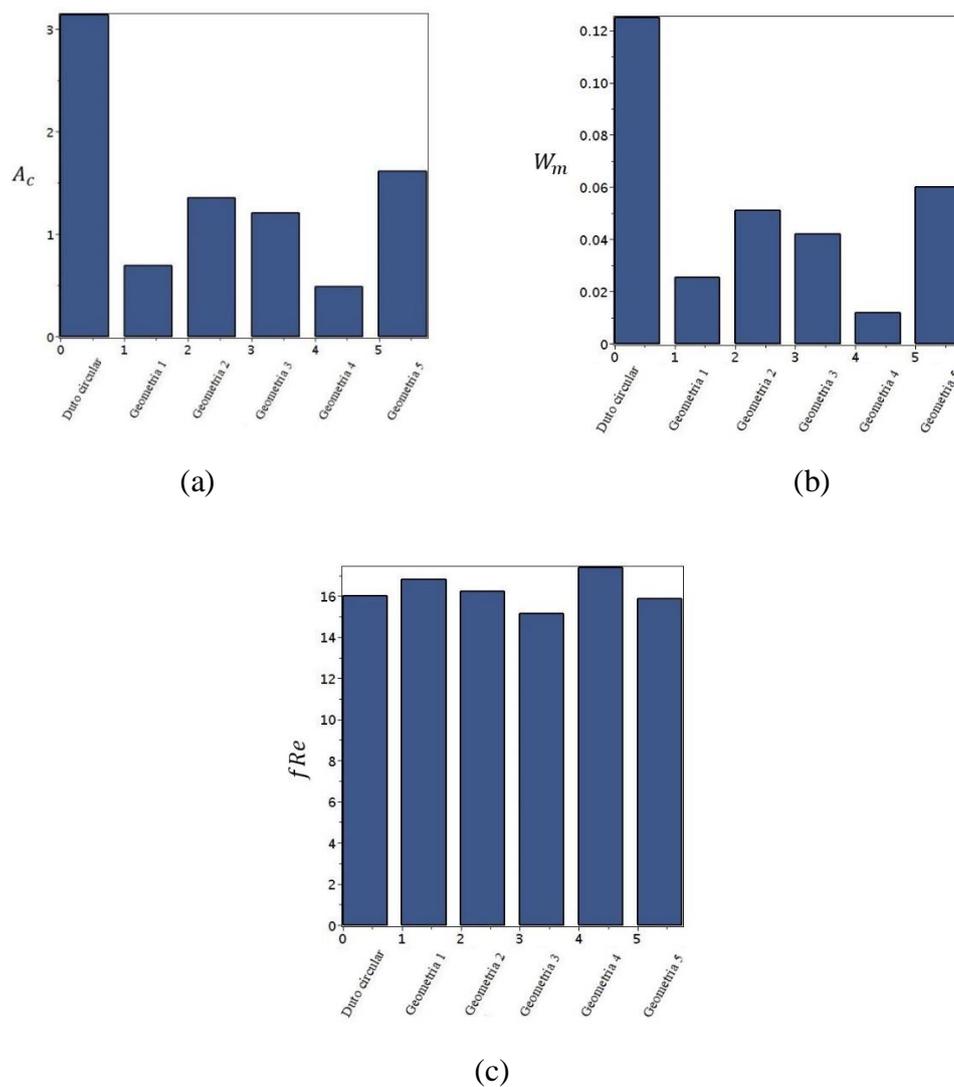
Parâmetros	Valores
$A_c$	1,60966
$P$	4,66546
$D_h$	1,38006
$W_m$	0,05997
$W_{max}$	0,12028
$(X_{max}, Y_{max})$	(-0,07137; 0,18898)
$fRe$	15,87907

Fonte: A autora (2021)

O comparativo com os dados da geometria circular nos retorna que: a área teve redução de 48,763%; a velocidade média teve diminuição em 52,02% e seu fator de atrito teve uma redução num percentual de 0,756%.

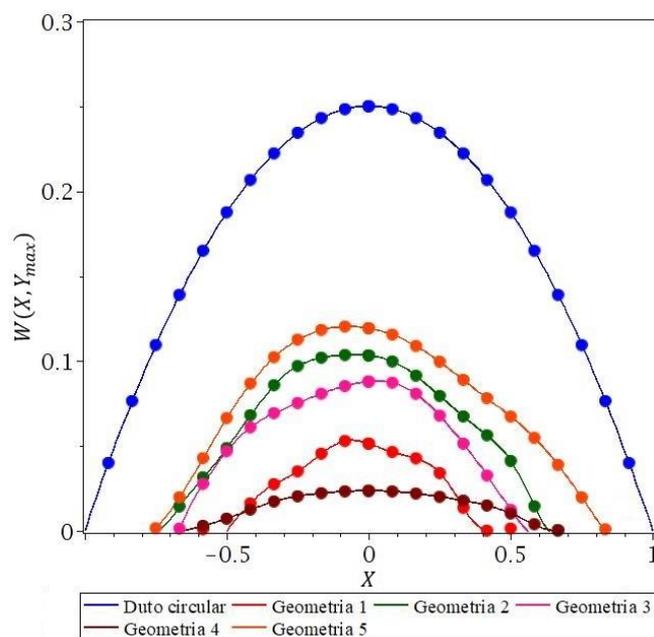
Na Figura 26, podemos apresentar, em forma de gráfico de barras, os valores da área da seção transversal,  $A_c$ , velocidade média adimensional,  $W_m$  e número de Poiseuille,  $fRe$ , para cada geometria estudada. Já na Figura 27, observa-se o comportamento da curva correspondente ao perfil de velocidade adimensional para variações do eixo horizontal adimensional  $X$  e valores fixos para  $Y_{max}$ , para cada geometria. Fica evidente a mudança brusca no perfil de velocidade devido as incrustações.

**Figura 26** – Gráficos de barras (a) área da seção transversal; (b) velocidade média adimensional e (c) número de Poiseuille.



Fonte: A autora (2021)

**Figura 27** – Perfis de velocidade adimensional  $W(X, Y_{max})$ .



Fonte: A autora (2021)

A partir das Figuras 26(a) e 26(b), podemos observar que o comportamento dos valores da velocidade média e da área são semelhantes. Este fato se dá por estes parâmetros estarem estritamente ligados. O mesmo não acontece para a Figura 26(c). O gráfico não tem um comportamento similar de proporcionalidade com a área ou a velocidade média. Este fato se dá devido ao número de Poiseuille não estar ligado a estes entes, ou seja, as propriedades do fluido, mas sim a geometria/forma da seção transversal. Quanto mais semelhante da geometria circular, mais próximos são os valores de 16. Isto pode ser observado, por exemplo, para a Geometria 2 que possuem número de Poiseuille, 16,23545.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho visou apresentar uma análise hidrodinâmica em dutos circulares com formação de incrustações em sua parede interior. Para a análise, foram consideradas geometrias com a maior diversificação possível, para que se pudesse chegar o mais próximo de dutos aplicáveis na indústria, tanto petrolífera quanto em outros setores industriais.

Para este fim, o escoamento foi considerado: laminar, Newtoniano, hidrodinamicamente desenvolvido e parâmetros como densidade, viscosidade e gradiente de pressão constantes. E o estudo foi realizado somente em uma seção transversal do duto, onde os parâmetros encontrados corresponde à aquela seção em particular.

O método integral baseado em Galerkin se mostrou eficaz na obtenção dos perfis de velocidade e número de Poiseuille, mesmo em geometrias tão generalizadas. Todos os parâmetros tiveram comportamento esperado dentro das simulações computacionais, nos dois softwares *Grapher 8* e *Maple 17*. As parametrizações das curvas que compõem a geometria foram aproximadas com polinômios de ordem dez, visto que esta potência foi a melhor aproximação dentre as potências anteriores testadas.

Observou-se uma redução significativa das velocidades médias, para cada geometria, indicando como as incrustações podem desfavorecer o transporte de um determinado fluido. Observou-se reduções pequenas na área da seção do duto circular, como na Geometria 5, cerca de 48%, nos dá uma redução de velocidade média de até 52%, e uma redução maior, como é o caso da Geometria 4, cerca de 84,5%, atingindo valores inferiores a 10% de velocidade média quando comparada ao duto sem incrustação.

## REFERÊNCIAS

- APARECIDO, J. B.; LINDQUIST, C. **Laminar Forced Convection Through Rectangular Ducts with Uniform Axial and Peripheral Heat Flux**. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 22-26 de Novembro, Águas de Lindóia, São Paulo, 1999.
- ASSAN A. E. **Métodos dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. UNICAMP, Campinas, 1999.
- AUM, Yanne Katiussy Pereira Gurgel. **Modelagem e Simulação da Deposição de Parafinas em Escoamento Turbulento**. Dissertação (Mestre em Engenharia Química)- Pós-Graduação em Engenharia Química, PPGEQ - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2012.
- BESERRA, Marcela Tatiana Fernandes. **Avaliação da Espessura de Incrustação em Dutos de Extração de Petróleo**. Dissertação (Mestre em Radioproteção e Dosimetria) - Instituto de Radioproteção e Dosimetria- Comissão Nacional de Energia Nuclear. Rio de Janeiro, p.16. 2012.
- BORDALO, Sérgio N.; OLIVEIRA, Rafael de Castro. **Escoamento Bifásico Óleo-Água com Precipitação de Parafinas em Dutos Submarinos de Produção de Petróleo**. Unicamp. Campinas-SP, 2007.
- BROWDER, F. E. **problèmes non-linéaires**. Les Presses de L'Université de Montréal, Montréal, 1966.
- CADÉ, M. A.; LIMA, W. C. P. B.; FARIAS NETO, S. R.; LIMA, A. G. B. **Natural Gas Laminar Flow in Elliptic Cylindrical Pipes: A Numerical Study**. Brazilian Journal of Petroleum and Gas. v. 4, n. 1, p. 19-33, 2010.
- CANDEIAS, J.P. **Análise de Incrustações por Técnicas Atômicas/Nucleares**. Tese D.C., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.
- Capital Green**, 2012. Disponível em: <<https://greensg.files.wordpress.com/2012/03/pipe.jpg>>. Acesso em: 15 de maio de 2020.
- CHURCHILL, S. W. **Viscous Flows & The Practical Use of Theory**, Butterworths, Stoneham, 1988.
- christiani wassertechnik gmbh**, 2017. disponível em: <[https://cwtpartners.co.uk/wp-content/uploads/2017/11/pipes\\_effect2\\_400.jpg](https://cwtpartners.co.uk/wp-content/uploads/2017/11/pipes_effect2_400.jpg)>. acesso em: 03 de junho de 2020.
- COOPER, J. M. **Introduction to Partial Differential Equations with Matlab**. Birkhauser, 1998.
- COURANT, R.; Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics**. v. 1, p. 174, Wiley-Interscience, 1953.

**Corrosion Doctors**, 2020. Disponível em: <<https://www.corrosion-doctors.org/Experiments/images/tubercle.jpg>>. Acesso em: 04 de agosto de 2020.

DAMEAN, N.; REGTIEN, P. P. L. **Velocity field of the fully developed laminar flow in a hexagonal duct**. Sensors and Actuators A, v. 92. p. 144-151, 2001.

DAUTRAY R.; Lions J.-L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. v. 1, Springer-Verlag, 1998.

DING, J.; MANGLIK, R. M. **Analytical Solutions for Laminar Fully Developed Flows in Double-sine Shaped Ducts**. Heat and Mass Transfer 31, 269-277, 1996.

FISCHER, L.; MARTIN, H. **Friction factors for fully developed laminar flow in ducts confined by corrugated parallel walls**. Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 40. n. 3. p. 635-639, 1997.

LEE, Y. M.; LEE, P. C. **Laminar flow in elliptic ducts with and without central circular cores for constant wall temperature**. Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 28. n. 8. p. 1115-1124, 2001.

MORINI, G. L. **Analytical determination of the temperature distribution and Nusselt numbers in rectangular ducts with constant axial heat flux**. Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 43. p. 741-755, 1999.

**Parafos**, 2020. Disponível em:< [http://www.parafos.com/?ww\\_pageid=90D9D217-0120-6053-7176878A2A845F52](http://www.parafos.com/?ww_pageid=90D9D217-0120-6053-7176878A2A845F52)>. Acesso em: 28 de junho de 2020.

PETROVSKY, I. G. **Lectures on Partial Differential Equations**. Interscience Publishers, N. Y., 1954.

PORTO, T.R.N; LIMA, A.G.B. **Escoamento Transiente de Óleo Parafínico em Duto de Seção Circular: Modelagem e Simulação**. Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2017.

SADASIVAM, R.; MANGLIK, R. M.; JOG, M. A. **Fully developed forced convection through trapezoidal and hexagonal ducts**. Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 42. p. 4321-4331, 1999.

SANTANA, C. J.; MANZELA, A. A. **Incrustações Inorgânicas em Campos do Pré-Sal**. Revista de Engenharias da Faculdade Salesiana n.4, pp. 22-31, 2017. Disponível em : <http://www.fsma.edu.br/RESA>. Acesso em: março de 2020.

SANTOS JÚNIOR, V. A. **Escoamento de Fluido em Dutos de Seção Arbitrária Utilizando o Método Integral Baseado em Galerkin. Estudo de Caso: Óleo Pesado**. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, p. 46, 50-52,56,63,65,76-77. 2018.

SANTOS JÚNIOR, V.A.; FARIAS NETO, S.R.; LIMA, A.G.B.; GOMES, I.F.; GALVÃO, I.B.; FRANCO, C.M.R.; CARMO, J.E.F. **Heavy Oil Laminar Flow in Corrugated Ducts: A Numerical Study Using the Galerkin-Based Integral Method**. Energies, 13, 1363. 2020.

SHAH, R. K and LONDON, A.L. **Laminar Flow Forced Convection in Ducts**, Academic Press, New York, 1978.

SILVA, Adriano Cavalcanti. **Otimização do Transporte em Oleodutos Utilizando Algoritmos Genéticos e Programação Linear**. Dissertação (Mestre em Engenharia Elétrica)- Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Campina, 1999. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/259405/1/Silva\\_AdrianoCavalcanti\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/259405/1/Silva_AdrianoCavalcanti_M.pdf). Acesso em 04 de janeiro de 2021.

SYRJALA, S. **Laminar Flow of Viscoelastic Fluids in Rectangular Ducts with Heat Transfer: A finite Element Analysis**. Int. Comm. Heat Mass Transfer, v. 25. n. 2. p. 191-204, 1998.

SOARES, Lorena Leal de Oliveira. **Determinação do início da deposição de parafina em dutos de produção e transporte de petróleo utilizando sensor multipontos de temperatura (SMpT)**. 112 f. il. 2017. Dissertação (Mestrado) – Pós-graduação em Engenharia Industrial, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

SOTOMAYOR, J. C.; LIJÓ, A. **GPA Estudios y Servicios Petroleros SRL**, 2010. Disponível em: <http://oilproduction.net/reservorios/caracterizaciondefluidos/item/1645-las-parafinas-y-los-asfaltenos-parte-n-1-que-son-y-cuales-son-sus-propiedades-mas-importantes.html>. Acesso em 06 de maio de 2020.

THOMAS J. W. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. Springer-Verlag, New York, 1999.

**Weidner Wassertechnik GmbH**, 2020. Disponível em: <https://www.wasserchemie.de/anwendungen/behandlungsprodukte/technische-reiniger>. Acesso em: 18 de julho de 2020.

**Wikimedia Commons**, 2014. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boiler\\_scale\\_3.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boiler_scale_3.JPG). Acesso em: 17 de julho de 2020.