



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROZILANE DA SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: TEORIA QUALITATIVA E
APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE

2019

ROZILANE DA SILVA

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: TEORIA QUALITATIVA E
APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA PURA

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Co - orientadora: Prof. Dr^a. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Rozilane da.
Equações diferenciais ordinárias [manuscrito] : Teoria qualitativa e aplicações / Rozilane da Silva. - 2019.
58 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
"Coorientação: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa
Coelho , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
1. Equação Diferencial Ordinária. 2. Teoria Qualitativa. 3.
Problemas de Valor Inicial. I. Título
21. ed. CDD 515.35

ROZILANE DA SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: TEORIA QUALITATIVA E
APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 06 / 12 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB - Campus I)

Manuel Antolino Milla Miranda

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB - Campus I)

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB - Campus I)

À minha mãe e meu pai, pelo esforço
e apoio, DEDICO.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, sempre e em primeiro lugar, por ter possibilitado mais essa conquista em minha vida. E também por sempre ter me dado forças nas piores situações.

Agradeço a minha mãe Valdilene Rodrigues da Silva, por sempre ter sido uma mulher forte e ter me ensinado tudo o que era necessário para não desistir perante à obstáculo algum. Assim como, a meu pai Rosemiro da Silva que sempre foi minha fortaleza e apoio emocional nos momentos de maior pressão na vida acadêmica. Todo meu esforço, dedicação e resistência é unicamente devido a eles. Além disso, não posso esquecer jamais de minha tia Elinês Rodrigues que mesmo distante sempre me apoiou em todos os aspectos.

Agradeço aos meus professores que ajudaram a moldar meu caráter profissional, e contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial, ao meu orientador Dr. Aldo Lourêdo, a quem tenho enorme apreço e gratidão, pois me aceitou como sua aluna de PIBIC (Projeto de Iniciação Científica) mesmo sem ter nenhum conhecimento sobre minha pessoa ou vida acadêmica. Devido a ele, fiz a escolha mais sensata e arriscada de minha vida, ser uma futura analista.

E ainda, não posso esquecer jamais da minha co-orientadora Dr^a. Emanuela Régia que teve uma grandiosa compreensão e generosidade ao decorrer dos anos finais da minha graduação, sempre auxiliando de todas as maneiras possíveis nos momentos mais necessários. Suas contribuições foram tanto para a vida acadêmica quanto para a vida mesmo.

Agradecimento especial ao meu amigo Luciano Soares que no início do curso foi fundamental para minha inserção nos projetos universitários. E ainda, ao meu querido amigo Newton César que com enorme paciência ensinou sobre o LaTeX e ainda auxiliou nos mo-

mentos mais críticos.

No mais, não poderia esquecer de agradecer aos meus colegas de curso Igor, Yalorisa, Hellen, Renner e Willian que cada um a seu modo foram essenciais para meu desenvolvimento acadêmico.

"[...]Na regata, ele me mata

Me maltrata, me arrebat

Que emoção no coração!

Consagrado no gramado, sempre amado, o mais cotado

No Fla-Flu é o Ai, Jesus! [...] Ele vibra, ele é fibra

Muita libra já pensou

Flamengo até morrer eu sou!"

Hino do Clube de Regatas do Flamengo -

**Bicampeão Libertadores e Heptacampeão Brasileiro
2019.**

Resumo

Neste trabalho abordamos os resultados referentes a Problemas de Valor Inicial (PVI) de Equações Diferenciais Ordinárias, no tocante a existência de soluções e dependência contínua dos dados iniciais. Estudaremos também a existência e singularidade das soluções, suas dependências das condições iniciais e o comportamento nos pontos extremos da existência do intervalo máximo. Além disso, mostramos como as soluções de uma equação autônoma podem dar origem a um fluxo. Para tanto, foi estudado o Teorema de Existência e Unicidade (Teorema de Picard-Lindelöf) quando a função f na equação principal for lipschiziana. Ainda, referente a este problema, foi abordado a dependência contínua dos dados iniciais. Quando a função f não for contínua, foi estudado o Teorema de Peano. Para a prova do Teorema de Picard-Lindelöf foi utilizado o Princípio da Contração, para a dependência contínua dos dados a desigualdade Gronwall e para o Teorema de Peano foi utilizado o Teorema de Arzelà-Ascoli. Por fim, apresentamos uma aplicação sobre Deflexão de Vigas e Cabos Suspensos.

Palavras-chave: Equação Diferencial Ordinária. Teoria Qualitativa. Aplicações.

Abstract

In this work we study results related to Initial Value Problems (PVI) of Ordinary Differential Equations, regarding the existence of solutions and continuous dependence of initial data. We also study existence and uniqueness of solutions, their dependence on the initial conditions and the behavior of them extreme points of the existence of the maximum interval. In addition, we show how the solutions of an autonomous equation can give rise to a flow. For this, the Theorem of Existence and Uniqueness (Picard-Lindelöf Theorem) was studied when the function f in the main equation is lipschiziana. Furthermore, referring to this problem, the continuous dependence of the initial data was addressed. When the function f in the is continuous, Peano's theorem was studied. The Principle of Contraction was used for the proof of the Picard-Lindelöf theorem and fot the continuous dependence of the data we used Gronwall inequality. Moreover, for the proof of Peano's Theorem it was used Arzelà-Ascoli Theorem. Finally, we present an application on the Deflection of beams and suspended cables.

Keywords: Ordinary Differential Equation. Qualitative Theory. Applications.

Lista de Figuras

1.1	Uma solução $x = x(t)$ da equação $x' = f(t, x)$	16
2.1	Diagrama de Tensão-Deformação: Comportamento Elástico	39
2.2	Diagrama de Tensão-Deformação: Comportamento Parcialmente Elástico .	39
2.3	Curva de Deflexão de uma Viga	41
3.1	Viga com eixo de simetria	44
3.2	Viga suspensa nas extremidades	44
3.3	Sistema de viga suspensa nas extremidades	45
3.4	Viga em balanço	47
3.5	Sistema de viga em balanço	48
3.6	Cabo suspenso em ambas extremidades	52
3.7	Estrada suspensa por cabos	53
3.8	Estrada suspensas com valores	54

Sumário

Introdução	12
1 Soluções e Problema de Valor Inicial	14
1.1 Conceitos Preliminares	14
1.1.1 Soluções de Equações Diferenciais e Fluxos	18
1.2 Existência e Unicidade de Soluções	20
1.2.1 Contrações em Espaços Métricos	21
1.2.2 Dependência de Lipschitz nas Condições Iniciais	31
1.3 Intervalo Maximal de Existência	32
1.3.1 Existência de solução para campos contínuos	33
2 Alguns Conceitos de Física	37
2.1 Tensão Normal e Deformação	37
2.2 Elasticidade Linear e Lei de Hooke	38
2.3 Equação diferencial para a curva de deflexão	40
3 Aplicações	43
3.1 A Deflexão de Vigas	43
3.1.1 Viga Simplesmente Apoiada	44
3.1.2 Viga em Balanço	47
3.1.3 Cabos Suspensos	51

Introdução

No presente trabalho buscamos apresentar os resultados de um estudo bibliográfico introdutório da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias utilizando como aporte as referências [1], [7] e [2]. No transcorrer do mesmo notamos que o desenvolvimento histórico das Equações Diferenciais Ordinárias deu-se de forma simultânea ao Cálculo Diferencial e Integral devido as dificuldades para descobrir as soluções das equações. Mais especificamente, no final do século XVII, por obras de Sir Isaac Newton (1647 - 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) inúmeros problemas puderam ser modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais Ordinárias.

Ao decorrer do século XVIII, contribuições importantes vieram suceder o desenvolvimento das equações diferenciais, no entanto, a consolidação e generalização dos métodos para grandes famílias de equações vieram por parte de Leonhard Euler (1707 - 1783) e sua percepção da função e suas estruturas, o que fizeram desse matemático o protagonista da evolução do estudo das EDO's. Diversos matemáticos refinaram a teoria de Euler a medida que estudavam determinadas áreas do conhecimento. Devido a isto, e também por possibilitar o instrumento para descrever os fenômenos evolutivos, a aplicabilidade e contribuições das EDO's estendem-se a termodinâmica, astronomia, magnetismo, mecânica, elasticidade, biologia, etc.

Apesar de todo esse aporte de conhecimento, ao decorrer das décadas, ainda era pequena a quantidade de EDO's que se conhecia as soluções, uma vez que elas eram procuradas de forma explícita. Com isso, no final do século XIX iniciou-se o estudo no plano teórico, o qual teve grande colaboração de Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1831 - 1904) e Henri Poincaré (1854 - 1912), em que desenvolveu-se teoremas de existência para soluções das equações e a unificação da teoria através da área de Análise e da Topologia, isto, conseqüentemente, trouxe o aprimoramento da percepção e entendimento das leis gerais do comportamento das soluções.

Assim, com o intuito de fazer uma introdução a esses resultados e também apresentar algumas aplicações do mesmo, o presente trabalho está organizado da seguinte forma:

Primeiro capítulo: traz uma apresentação de noções básicas da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, incluindo a concepção de solução e de problema de valor inicial (PVI) e, além disso, abordou-se a relação entre soluções de equações autônomas e fluxos. E ainda, apresentamos o Teorema de Existência e Unicidade (Picard - Lindöfd) e o Teorema de Existência para Campos Contínuos (Peano).

Segundo capítulo: abordagem sobre a modelagem matemática através de EDO e, os conceitos físicos necessários para o entedimento das aplicações desenvolvidas nesse trabalho.

Terceiro capítulo: aplicação de EDO através de situação com *vigas simplesmente apoiadas ou biapoiadas, vigas em balanço e cabos flexíveis*. Os referidos exemplos foram extraídos de [5].

Capítulo 1

Soluções e Problema de Valor Inicial

Neste capítulo serão explorados conceitos preliminares e introdutórios à Teoria Qualitativa das EDO's, bem como a demonstração dos principais resultados. Para tanto, foram utilizadas as referências [1], [2], [6] e [7].

1.1 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentamos os conceitos e resultados básicos à prova dos Teoremas de Existência de soluções para uma EDO. Após a formulação dos resultados, fazemos uma breve discussão sobre o material auxiliar que é usado nas provas destes e de outros resultados do trabalho.

Definição 1.1 (Ponto Interior). Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$. Se existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0; \delta) \subset A$, dizemos que x_0 é ponto interior de A . O conjunto dos pontos interiores de A é denotado por $\text{int}(A)$.

Definição 1.2 (Conjunto aberto). Um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $\text{int}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, isto é, todos os pontos de \mathcal{A} são interiores. Quando $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, dizemos que \mathcal{A} é fechado.

Definição 1.3 (Conjunto Fechado). Um subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$ é aberto.

Observação 1.1. Seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto. Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}^1$ de subconjuntos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é dita cobertura de \mathcal{K} se:

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

A cobertura $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é dita finita se L é um conjunto finito. A cobertura $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é dita

¹Aqui, L é um conjunto de índices arbitrário.

aberta se todo A_λ é um conjunto aberto.

Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ e $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ são ambas coberturas de \mathcal{K} e $\{B_\mu\}_{\mu \in M} \subset \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, dizemos que $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ é relativamente a $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma subcobertura de \mathcal{K} .

Definição 1.4 (Conjunto Compacto). Um conjunto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ é dito compacto se, dada uma cobertura aberta de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de \mathcal{K} , existe uma subcobertura finita, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in I$ tais que $\bigcup_{i=1}^N U_{\alpha_i} \supset \mathcal{K}$.

Definição 1.5 (Denso). Diz-se que um subconjunto S de X é denso em X se, qualquer vizinhança de qualquer ponto de X , contém um elemento de S .

Definição 1.6 (Localmente Lipschitz). Uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, é dita localmente Lipschitz em $x \in \mathcal{D}$ se, para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$, existe $L = L(\mathcal{K}) > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (1.1)$$

para todo $(t, x), (t, y) \in \mathcal{K}$.

Definição 1.7 (Função Contínua). Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e $x_0 \in \mathcal{D}$. Dizemos que f é contínua em x_0 se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ satisfazendo

$$x \in \mathcal{D} \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad (1.2)$$

Ademais, f é dita contínua se for contínua em todos os pontos de \mathcal{D} .

Definição 1.8 (Funções de Classe \mathcal{C}^1). Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Se as derivadas parciais $D_i f_i(x)$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, das funções componentes de f existem e são contínuas, a função f é dita *continuamente diferenciável* ou de classe \mathcal{C}^1 sobre A .

Dada uma função contínua $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, considere a equação diferencial na forma reduzida

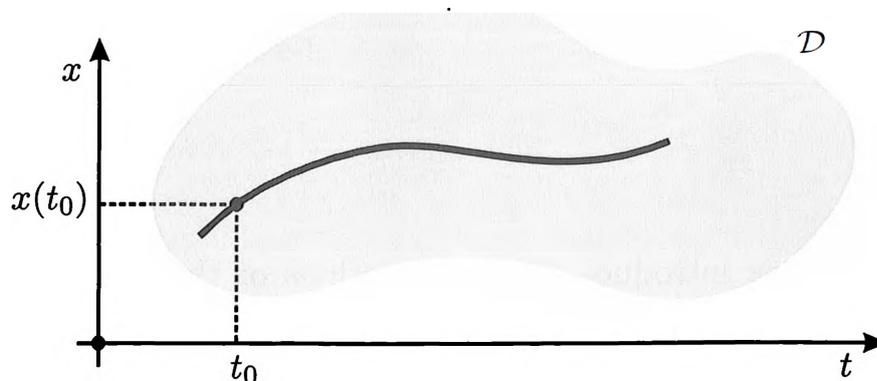
$$x' = f(t, x). \quad (1.3)$$

A incógnita da equação é a função $x = x(t)$.

Definição 1.9 (Solução de EDO). Dizemos que uma função $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe \mathcal{C}^1 , (com $a \geq -\infty$ e $b \leq +\infty$) é uma Solução da Equação Diferencial (1.3) em (a, b) , se

- a) $(t, x(t)) \in \mathcal{D}$ para cada $t \in (a, b)$;
 b) $x'(t) = f(t, x(t))$ para cada $t \in (a, b)$.

Figura 1.1: Uma solução $x = x(t)$ da equação $x' = f(t, x)$



Fonte: Barreira, 2010

Exemplo 1.1. Considere a equação

$$x' = -x + t \quad (1.4)$$

Supondo $x = x(t)$ uma solução de (1.4) em (a, b) , então x satisfaz (1.4) e multiplicando por e^t , com $t \in (a, b)$, obtemos

$$(e^t x)' = e^t x + e^t x' = e^t t.$$

a primeira igualdade segue do fato de a primitiva de $e^t(t - 1)$ ser uma primitiva de $e^t t$. Assim, integrando a equação acima em t , obtemos

$$e^t x(t) = e^t(t - 1) + c$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é constante. Portanto, as soluções da equação (1.4), são dadas por

$$x(t) = t - 1 + ce^t, t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Definição 1.10. Dado $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, chamamos de Problema de Valor Inicial - PVI, um problema da forma

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Considerar um PVI, consiste encontrar um intervalo (a, b) contendo t_0 e uma solução $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ da equação (1.3) com $x(t_0) = x_0$. A condição $x(t_0) = x_0$ é chamada de condição inicial.

Exemplo 1.2. Considere o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = -x + t \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Fazendo $t = 0$ em (1.5), obtemos $x(0) = -1 + c$ e por (1.7) é o resultado quando $c = 1$.
Dai, a solução do PVI (1.7) é dada por

$$x(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.1. *Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $f(\mathcal{D}) \subset U$. Se f é contínua em $x_0 \in \mathcal{D}$ e g é contínua em $y_0 = f(x_0) \in U$, então $h = g \circ f$ é contínua em x_0 .*

Demonstração: Para prova ver [6]. ■

Proposição 1.1. *Seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dado $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, uma função contínua $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ num intervalo aberto (a, b) contendo t_0 é uma solução do PVI (1.6) se, e somente se*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in (a, b) \quad (1.8)$$

Demonstração: Primeiro, notamos que a função $t \mapsto f(t, x(t))$ é contínua, porque é uma composição de funções contínuas. Em particular, é também integrável em cada intervalo limitado. Agora, vamos supor que $x = x(t)$ é uma solução do PVI (1.6). Para cada $t \in (a, b)$, da 2ª condição de (1.6), temos

$$x(t) - x_0 = 0.$$

Como $x_0 = x(t_0)$, então

$$x(t) - x(t_0).$$

E mais, o Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C) nos diz que, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (1.9)$$

Considerando o T.F.C, tem-se

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Daí,

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

o que prova (1.8). Agora, supondo (1.8) válido, vamos mostrar que x é solução do PVI. Derivando (1.6) com relação a t , obtemos

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.10)$$

Sendo a função $t \mapsto f(t, x(t))$ contínua, segue-se de (1.10) que x é da classe \mathcal{C}^1 . Como $x(t_0) = x_0$ resulta que x é uma solução do PVI (1.6). ■

1.1.1 Soluções de Equações Diferenciais e Fluxos

Nesta seção consideramos o caso particular de EDO's em que o segundo membro da equação não depende explicitamente do tempo t e mostraremos que naturalmente dão origem a noção de fluxo.

Definição 1.11. A equação (1.3) é dita autônoma se f não depende explicitamente de t . Em outras palavras, uma equação autônoma tem a forma

$$x' = f(x),$$

onde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua no conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 1.2 (Ponto de Equilíbrio). Um ponto $t_0 \in (a, b)$ é dito Ponto de Equilíbrio quando a primeira derivada de x em relação a t se anula em t_0 , ou seja, t_0 é de equilíbrio se $x'(t_0) = 0$.

Definição 1.12 (Fluxo). Uma família de aplicações $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, em que $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e

$$\varphi_0 = \text{Id}, \quad (1.11)$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \text{ para } t, s \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

é chamado um fluxo

Exemplo 1.3. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, a família de transformações $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi_t(x) = x + ty, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

é um fluxo.

De fato, observe que, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_0(x) = x + 0y = x = \text{Id},$$

portanto, $\varphi_0 = \text{Id}$. Agora, para $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_t(x + sy) = (x + sy) + ty = x + (s + t)y = \varphi_{t+s}.$$

Logo, $\varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um fluxo.

A proposição a seguir mostra que várias equações autônomas dão origem a um fluxo. E ainda, para o que segue a solução x do PVI, com condição inicial x_0 , será denotada por $x(t, x_0)$.

Proposição 1.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que, cada PVI*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

tem uma única solução $x(t, x_0)$ definida para $t \in \mathbb{R}$. Então, a família de aplicações, $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \text{ para } x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.14)$$

é um fluxo.

Demonstração: Dado $s \in \mathbb{R}$, considere a função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$y(t) = x(t + s, x_0). \quad (1.15)$$

Tem-se $y(0) = x(s, x_0)$ e, derivando (1.15) em relação a t , obtemos

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t))$$

para $t \in \mathbb{R}$. Logo, y é uma solução do PVI $x' = f(x)$ com $x(0) = x(s, x_0)$. Por hipótese, cada PVI (1.13) tem uma única solução e, portanto

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0))$$

ou, equivalentemente,

$$x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

ou ainda,

$$\varphi_{t+s}(x_0) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0), \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Por outro lado, por (1.13) temos $\varphi_0(x_0) = x(0, x_0) = x_0 = \text{Id}(x_0)$.

Logo, $\varphi_0 = \text{Id}$ e a família de aplicações $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um fluxo. ■

1.2 Existência e Unicidade de Soluções

As seguintes definições e resultados foram extraídos de [6].

Definição 1.13 (Matriz Jacobiana). Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Se as derivadas parciais das funções componentes f_i de f existem em a , então podemos formar uma matriz que tem $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ como entradas, isto é,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

Essa matriz é chamada *matriz jacobiana* de f no ponto a .

Teorema 1.2 (Desigualdade do Valor Médio). Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e S um subconjunto convexo de A . Se a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos de S e $\|Df(x)\|$ é limitada para $x \in S$, então

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{z \in S} \|Df(z)\| \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S$$

Demonstração: Para a prova, ver [6]. ■

Proposição 1.3. Se $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, é de classe \mathcal{C}^1 , então f é localmente Lipschitz.

Demonstração: Observemos que é suficiente considerar a família \mathcal{K} de subconjuntos compactos de \mathcal{D} da forma $K_p = I \times J \subset \mathcal{D}$, em que $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto e

$$J = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| \leq r\}$$

para algum $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

De fato, seja $K \subset \mathcal{D}$ um conjunto compacto. Para cada $(t_0, p) \in K$, tome $K_p \in \mathcal{K}$ tal que $(t_0, p) \in \text{int}K_p$. Assim, $K \subset \bigcup_{(t_0, p) \in K} \text{int}K_p$ é uma cobertura aberta para K e mais, sendo K compacto, existem $N \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_N \in K$ tais que, $K \subset \bigcup_{i=1}^N \text{int}K_{p_i}$. Dai, $K \subset \bigcup_{i=1}^N K_{p_i}$ e, portanto, se o resultado é válido para cada K_{p_i} , então pode ser estendido para K .

Consideremos, então $K_p = I \times J$, como acima e definamos a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ dada por

$$g(s) = f(t, y + s(x - y)).$$

g é de classe \mathcal{C}^1 , porque é uma composição de funções de classe \mathcal{C}^1 . Além disso, utilizando Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C), obtemos:

$$f(t, x) - f(t, y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + s(x - y))(x - y) ds,$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a matrix jacobiana. Assim, utilizando a Desigualdade do Valor Médio

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq \sup_{s \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + s(x - y)) \right\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \sup_{q \in J} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\| \cdot \|x - y\| \end{aligned} \quad (1.16)$$

pois, o segmento de reta entre x e y está contido em J . Devido ao fato de f ser de classe \mathcal{C}^1 , a função

$$(t, q) \mapsto \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\|.$$

é contínua. Pelo Teorema de Weierstrass, toda função contínua definida em conjunto compacto assume máximo e mínimo e, portanto,

$$L = \max_{(t,q) \in I \times J} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\|. \quad (1.17)$$

Segue de (1.16) e de (1.17) que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

para todo $(t, x), (t, y) \in I \times J$. Isso mostra que f é Localmente Lipschitz em x . ■

Teorema 1.3. *Se $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe \mathcal{C}^1 em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, existe uma única solução do PVI (1.6) em algum intervalo aberto contendo t_0 .*

Demonstração: O resultado segue imediatamente da Proposição anterior, junto com o teorema de de Picard - Lindelöf que veremos mais a frente nesse mesmo trabalho. ■

1.2.1 Contrações em Espaços Métricos

Definição 1.14 (Distância). Dado um conjunto X , uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é dito ser uma distância em X se as seguintes condições são verificadas

- a) $d(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ para cada $x, y \in X$;
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cada $x, y, z \in X$

Nessas condições, dizemos que o par (X, d) é um **Espaço Métrico** (X é um espaço métrico com métrica d).

Por exemplo, pode-se definir uma distância em \mathbb{R}^n por:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1.18)$$

ou,

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max \{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}, \quad (1.19)$$

com $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entre várias outras possibilidades.

Definição 1.15 (Bola Aberta e Fechada). Seja (X, d) um Espaço Métrico. Dados $x \in X$ e $r > 0$, definimos a bola aberta de raio r centrada em x por

$$B(x; r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}.$$

E a bola fechada de raio r centrada em x por

$$B[(x; r)] = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

Uma classe particular de distância é obtida a partir da noção de **norma**. Recordemos que

Definição 1.16. Seja X um espaço vetorial (sobre \mathbb{R}). A função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é dita uma norma em X se:

- a) $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$;
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in X$ (desigualdade triangular).

O par $(X, \|\cdot\|)$ é dito **Espaço Normado**.

Por exemplo, pode-se definir uma norma em \mathbb{R}^n por

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.20)$$

ou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max \{|x_i| : i = 1, \dots, n\}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.21)$$

Proposição 1.4. Se o par $(X, \|\cdot\|)$ é um Espaço Normado, então a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma distância em X .

Demonstração: Para tanto, basta provar que são válidas todas as condições de distância na definição anterior.

Para o 1º axioma de distância, é suficiente observar que

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

em que usamos a primeira propriedade da definição de norma. Daí, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

Para a 2ª propriedade, notamos que

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Daí, $d(x, y) = d(y, x)$.

Finalmente, para a última propriedade observa-se que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Portanto, a função $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ é uma métrica em X . ■

Definição 1.17. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência num espaço métrico (X, d) . Dizemos que

a) $(x_n)_n$ é uma sequência convergente se existe $x \in X$, tal que

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

b) $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ para cada } n, m > p.$$

Observação 1.3. Mostra-se que qualquer sequência convergente é uma sequência de Cauchy. Para a prova ver [6].

Definição 1.18 (Espaço Métrico Completo). Um espaço métrico (X, d) é dito completo se qualquer sequência de Cauchy em X é convergente.

Proposição 1.5. O conjunto $X = \mathcal{C}(I)$ de todas as funções limitadas contínuas $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, em um conjunto $I \subset \mathbb{R}^k$ compacto, é um espaço métrico completo com a distância

$$d(x, y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in I\}. \quad (1.22)$$

Demonstração: Notamos que (1.22) é realmente uma distância, pois cumpre todas as condições da Definição (1.14). A fim de mostrar que X é um espaço métrico completo, seja $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X . Para cada $t \in I$, temos

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq d(x_p, x_q). \quad (1.23)$$

e, assim, $(x_p(t))_p$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R}^n . Daí, é convergente (porque toda sequência de Cauchy em \mathbb{R}^n é convergente) e existe o limite

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} x_p(t). \quad (1.24)$$

Isto produz uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para cada $t, s \in I$, pela desigualdade triangular, temos

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \|x(t) - x_p(t)\| + \|x_p(t) - x_p(s)\| + \|x_p(s) - x(s)\|. \quad (1.25)$$

Em outras palavras, por (1.23) (e o fato que $(x_p)_p$ ser uma sequência de Cauchy) dado $\varepsilon > 0$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_p(t) - x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in I, \quad p \geq r. \quad (1.26)$$

Daí, por (1.25) (considerando $p = r$)

$$\|x(t) - x(s)\| \leq 2\varepsilon + \|x_r(t) - x_r(s)\|, \quad \forall t, s \in I. \quad (1.27)$$

Desde que a função x_r é contínua, dado $t \in I$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|x_r(t) - x_r(s)\| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad \|t - s\| < \delta.$$

Daí, seguindo por (1.27) tem-se

$$\|x(t) - x(s)\| < 3\varepsilon \quad \text{quando} \quad \|t - s\| < \delta.$$

e a função x é contínua. Além disso, por (1.26) dado $\varepsilon > 0$, existe $r \in \mathbb{N}$ para cada $p \geq r$, tal que,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_p(t) - x(t)\| + \|x_p(t)\| \\ &\leq \varepsilon + \sup\{\|x_p(t)\| : t \in I\} \leq \varepsilon + c, \end{aligned}$$

e daí $x \in X$. Além disso, também por (1.26)

$$d(x_p, x) = \sup\{\|x_p(t) - x(t)\| : t \in I\} \leq \varepsilon$$

para todo $p \geq r$, e assim $d(x_p, x) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$. Isto mostra que X é um espaço métrico completo. ■

Definição 1.19. Uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um conjunto $I \subset \mathbb{R}^k$ é dita ser Lipschitz se existe $L > 0$, tal que

$$\|x(t) - x(s)\| \leq L\|t - s\| \quad (1.28)$$

para todo $t, s \in I$.

Definição 1.20 (Contração). Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ em um espaço métrico (X, d) é dito ser uma contração se existe $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

para todo $x, y \in X$.

Exemplo 1.4. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear definida como $T(x) = Ax$. Considere a distância d em (1.18), obtida com a norma

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n$$

Temos,

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \\ &\leq \|A\| \cdot d(x, y), \end{aligned}$$

em que,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Em particular, se $\|A\| \leq 1$, então a transformação T é uma contração.

Definição 1.21 (Ponto Fixo). Um elemento $x_0 \in X$ é dito ponto fixo de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ se $T(x_0) = x_0$.

As contrações satisfazem o Teorema do Ponto Fixo, visto a seguir, em que T^n é definida recursivamente por $T^{n+1} = T \circ T^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.4 (Ponto Fixo de Banach). *Se $T : X \rightarrow X$ é uma contração em um espaço métrico completo (X, d) , então T tem um único ponto fixo. Além disso, para cada $x \in X$ a sequência $(T^n(x))_n$ converge para o único ponto fixo de T .*

Demonstração: Dado $x \in X$, considere a sequência

$$x_n = T^n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Pela Desigualdade Triangular, considere $m = n + p$ com $p \in 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, temos (usando a definição de contração)

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+p} + \lambda^{n+p-1} + \dots + \lambda^n) d(T(x), x) \\ &= \lambda^n (\lambda^p + \lambda^{p-1} + \dots + 1) d(T(x), x) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Observe que $(\lambda^p + \lambda^{p-1} + \dots + 1)$ é uma soma de P.G finita, com a razão dada por $r = \lambda$ e $S_n = \frac{1}{1-r}$, daí

$$\lambda^n \cdot \frac{1}{1-\lambda} \cdot d(T(x), x) = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(T(x), x).$$

Assim,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(T(x), x) \quad (1.31)$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$. E, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} = 0$. Daí, $d(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Logo, quando $n \rightarrow \infty$, por (1.31), resulta que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, conseqüentemente, (x_n) é convergente e existe

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (1.32)$$

Assim, de (1.29) e (1.32), tem-se

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x).$$

Ainda,

$$d(T(x_0), T^n(x)) \leq \lambda d(x_0, T^{n-1}(x)) = d(x_0, x_{n-1}) \rightarrow 0,$$

portanto, $T^n(x) \rightarrow T(x_0)$, pela unicidade do limite, temos

$$T(x_0) = x_0.$$

Unicidade Vamos supor que existe $y_0 \in X$ que também é ponto fixo, logo,

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq \lambda d(x_0, y_0). \quad (1.33)$$

Daí,

$$d(x_0, y_0) - \lambda d(x_0, y_0) \leq 0 \Rightarrow d(x_0, y_0) \cdot (1 - \lambda) \leq 0.$$

Como $(1 - \lambda) > 0$, pois $0 \leq \lambda < 1$, resulta que $d(x_0, y_0) \leq 0$, por d ser métrica, então $d \geq 0$ e portanto, $d(x_0, y_0) = 0$ ($d < 0$ é um absurdo). Resta $d = 0$,

$$d(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \|x_0 - y_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = y_0.$$

Assim, x_0 é único. ■

Observação 1.4. Decorre do Teorema anterior que, se $x_0 \in X$ é o único ponto fixo da contração $T : X \rightarrow X$, então

$$d(T^n(x), x_0) = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(T(x), x)$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.22 (Ponto Atrator). Um ponto fixo $x_0 \in X$ de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é dito ser atrator, se para cada $x \in X$ temos $T^n(x) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.5 (Fibra). Sejam espaços métricos X e Y (não necessariamente completos). Considere uma aplicação $S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ de forma

$$S(x, y) = (T(x), A(x, y)). \quad (1.34)$$

onde $T : X \rightarrow X$ e $A : X \times Y \rightarrow Y$. Cada conjunto $\{x\} \times Y$ é chamado de fibra de $X \times Y$.

Definição 1.23. A aplicação S em (1.34) é dito ser uma contração nas fibras se existir $\lambda \in (0, 1)$, tal que

$$d_y(A(x, y), A(x, \bar{y})) \leq \lambda d_y(y, \bar{y}), \quad \forall x \in X \text{ e } y, \bar{y} \in Y. \quad (1.35)$$

Teorema 1.5 (Contração nas Fibras). *Para uma contração nas fibras continua S , se $x_0 \in X$ é um ponto fixo atrator de T e $y_0 \in Y$ é um ponto fixo de $y \mapsto A(x_0, y)$, então (x_0, y_0) é um ponto fixo atrator de S .*

Demonstração: Seja d_x e d_y , respectivamente, as distâncias em X e Y . Definimos uma distância d em $X \times Y$ por

$$d((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) = d_x(x, \bar{x}) + d_y(y, \bar{y}).$$

Resulta da desigualdade triangular que:

$$d(S^n(x, y), (x_0, y_0)) \leq d(S^n(x, y), S^n(x, y_0)) + d(S^n(x, y_0), (x_0, y_0)). \quad (1.36)$$

Queremos mostrar que ambos os lados de (1.36) tende para zero quando $n \rightarrow \infty$. Dado $x \in X$, defina uma transformação $A_x : Y \rightarrow T$ por $A_x(y) = A(x, y)$. Por (1.34), temos

$$S(x, y) = (T(x), A_x(y)).$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$S^n(x, y) = (T^n(x), A_{x,n}(y)). \quad (1.37)$$

onde

$$A_{x,n} = A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T(x)} \circ A_x$$

Para o primeiro termo em (1.36), decorre de (1.35) e (1.37) que

$$d(S^n(x, y), S^n(x, y_0)) = d_Y(A_{x,n}(y), A_{x,n}(y_0)) \leq \lambda^n d_Y(y, y_0) \longrightarrow 0 \quad (1.38)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Para o segundo termo, notamos que

$$d(S^n(x, y_0), (x_0, y_0)) \leq d_X(T^n(x), x_0) + d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0). \quad (1.39)$$

Desde que x_0 é um ponto fixo atrator de T (hipótese), temos $d_X(T^n(x), x_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que o segundo termo do lado direito de (1.39) tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. De fato, usando a definição de contração nas fibras, temos

$$\begin{aligned} d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d_Y(A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^i(x)}(y_0), (A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^{i+1}(x)})(y_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i-1} d_Y(A_{T^i(x)}(y_0), y_0), \end{aligned}$$

onde $A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^{i+1}(x)} = \text{Id}$ para $i = n - 1$. Como que y_0 é um ponto fixo de A_{x_0} (hipótese), temos

$$c_i := d_Y(A_{T^i(x)}(y_0), y_0) = d_Y(A(T^i(x), y_0), A(x_0, y_0)). \quad (1.40)$$

Em outras palavras, a aplicação A é contínua (porque S é contínua) e x_0 é um ponto fixo atrator de T , decorrendo de (1.40) que a sequência c_i converge para zero quando $i \rightarrow \infty$. Em particular, existe $c > 0$ tal que $0 \leq c_i < c$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \lambda^{n-1} c_i &= \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n-1} c_i + \sum_{i=k}^n \lambda^{n-1} c_i \\ &\leq c \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n-1} + \sup_{j \geq k} c_j \sum_{i=k}^n \lambda^{n-1} c_i \\ &\leq c \frac{\lambda^{n-k+1}}{1-\lambda} + \sup_{j \geq k} c_j \frac{1}{1-\lambda} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Portanto, aplicando limite em (1.41) e utilizando (1.40), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=0}^n \lambda^{n-1} c_i \leq \sup_{j \geq k} c_j \frac{1}{1-\lambda} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Isto mostra que

$$d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

E, por (1.36), (1.38) e (1.39) que (x_0, y_0) é um ponto fixo atrator de S . ■

Teorema 1.6 (Picard-Lindelöf). *Se $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente lipschitziana em x num conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe uma e só uma solução do PVI (1.6) em algum intervalo aberto contendo t_0 .*

Demonstração: Pela Proposição 1.3, o PVI (1.6) consiste encontrar uma solução para $x \in \mathcal{C}(a, b)$ em um intervalo aberto (a, b) contendo t_0 , tal que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.42)$$

para todo $t \in (a, b)$, em que $\mathcal{C}(a, b)$ é o conjunto de todas as funções contínuas $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere x como ponto fixo de uma contração. Tome constantes $a < t_0 < b$ e $\beta > 0$, tais que

$$K := [a, b] \times \overline{B(x_0, \beta)} \subset \mathcal{D}, \quad (1.43)$$

em que,

$$\overline{B(x_0, \beta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| \leq \beta\}.$$

Além disso, seja $X \subset \mathcal{C}(a, b)$ o conjunto das funções contínuas $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

$$\|x(t) - x_0\| \leq \beta \text{ para } t \in (a, b).$$

Primeiro vamos mostrar que X é um espaço métrico completo com a distância em (1.22). Dado uma sequência de Cauchy $(x_p)_p$ em X . Pela Proposição 1.5 sabemos que x_p converge, digamos para uma função $x \in C(a, b)$. A fim de mostrar que $x \in X$, notamos que (o limite está bem definido, pois a sequência é de Cauchy)

$$\|x(t) - x_0\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_p(t) - x_0\| \leq \beta \text{ para } t \in (a, b).$$

Como $\|x_p(t) - x_0\| \leq \beta$ para $t \in (a, b)$ e $p \in \mathbb{N}$. Além disso, não há perda de generalidade na procura de pontos fixos em X e não em $C(a, b)$. Na verdade, se $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma

função contínua satisfazendo (1.42), então, utilizando o Teo. do Valor Médio

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| M \leq (b - a)M, \end{aligned}$$

em que,

$$M = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in K\}. \quad (1.44)$$

Porque f é contínua e K é compacto e qualquer função contínua com valores em \mathbb{R} , tal que $(t, x) \mapsto \|f(t, x)\|$, tem um máximo em cada conjunto compacto e também como a função $(t, x) \mapsto \|f(t, x)\|$ é contínua e o conjunto $[a, b] \times \overline{B(x_0, \beta)}$ compacto, resulta do Teorema de Weiestrass que M é finito. Isto mostra que se $x \in \mathcal{C}(a, b)$ satisfaz (1.42), então ele pertence a X para algum β .

Agora, considere a aplicação T definida por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall x \in X.$$

Note que $t \mapsto T(x)(t)$ é contínua, por ser uma composição de funções contínuas, e

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq (b - a)M.$$

Para $(b - a)$ suficientemente pequeno, temos $(b - a)M \leq \beta$ e, portanto, $T(X) \subset X$. Além disso, dado $x, y \in X$, utilizando a Proposição 1.3 e a Definição 1.6, temos

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \\ &\leq (b - a)Ld(x, y), \end{aligned}$$

onde L é a constante de (1.1) para o conjunto compacto K em (1.43) e d é a distância de (1.22) para $I = (a, b)$. Daí, obtemos

$$d(T(x), T(y)) \leq (b - a)Ld(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

para todo $x, y \in X$. Para $(b - a)$ suficientemente pequeno, temos $(b - a)L < 1$ além de

$(b - a)M \leq \beta$, e T é uma contração no espaço métrico completo X . Pelo Teorema 1.4, conclui-se que T tem um único ponto fixo $x \in X$. Esta é a única função contíua em (a, b) satisfazendo (1.42). ■

1.2.2 Dependência de Lipschitz nas Condições Iniciais

Estudaremos algumas propriedades adicionais das Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária.

Proposição 1.6 (Lema de Gronwall). *Sejam $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com $v \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Se*

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds \quad (1.45)$$

para todo $t \in [a, b]$, então

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right), \quad \forall t \in [a, b]$$

Demonstração: Considere as funções

$$R(t) = \int_a^t u(s)v(s)ds \quad \text{e} \quad V(t) = \int_a^t v(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Note que $R(a) = 0$, derivando R e usando (1.45), obtemos

$$R'(t) = u(t)v(t) \leq (c + R(t))v(t), \quad (1.46)$$

portanto,

$$R'(t) - v(t)R(t) \leq cv(t), \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.47)$$

Multiplicando (1.47) por $e^{-V(t)}$, usando a derivada do produto e (1.46), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-V(t)}R(t)) &= e^{-V(t)}(R'(t) - v(t)R(t)) \\ &\leq cv(t)e^{-V(t)}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Integrando (1.48) de a a t e usando o fato que $R(a) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{-V(t)}R(t) &\leq \int_a^t cv(\tau)e^{-V(\tau)}d(\tau) \\ &= -ce^{-V(\tau)}\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = c(1 - e^{-V(t)}). \end{aligned}$$

Daí,

$$R(t) \leq ce^{V(t)} - c. \quad (1.49)$$

A partir de (1.49), da definição de $R(a)$ e por (1.41), obtemos

$$u(t) \leq c + R(t) \leq ce^{V(t)}, \quad \forall t \in [a, b].$$

■

1.3 Intervalo Maximal de Existência

Nesta seção estudaremos o intervalo maximal de existência do PVI (1.6). No que segue o intervalo de existência da solução do PVI (1.6) será todo por I_x

Teorema 1.7. *Se a função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e localmente Lipschitz em um conjunto aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, existe uma única solução $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (1.6), tal que para qualquer solução $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ do mesmo problema, temos $I_x \subset (a, b)$ e $x(t) = \varphi(t)$ para $t \in I_x$.*

Demonstração: Notamos que $J = \bigcup_x I_x$ é um intervalo aberto, porque a união de uma família de conjuntos abertos, ainda é um conjunto aberto e, J é intervalo pois todo I_x tem, ao menos, um ponto em comum, t_0 .

Considere a função $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para cada $t \in I_x$ tem-se $\varphi(t) = x(t)$. Mostraremos que a função φ está bem definida, isto é, φ não depende da função x . Sendo $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluções do PVI (1.6) e sendo I o maior intervalo contendo t_0 satisfazendo $x = y$ em I . Queremos mostrar que $I = I_x \cap I_y$.

De outra forma, existiria uma extremidade de $I_x \cap I_y$. Pela continuidade de x e y no intervalo $I_x \cap I_y$, teríamos

$$p := \lim_{t \rightarrow s} x(t) = \lim_{t \rightarrow s} y(t).$$

Em outras palavras, pelo Teorema 1.6 com (t_0, x_0) substituindo por (s, p) , além disso, existiria um intervalo aberto $(s-\alpha, s+\alpha) \subset I_x \cap I_y$ quando $x = y$. Desde $(s-\alpha, s+\alpha) \setminus I \neq \emptyset$, isto contraria o fato que I ser o maior intervalo, pois algum intervalo que ultrapassaria I .

Portanto, $I = I_x \cap I_y$ e $x = y$ em $I_x \cap I_y$. Com isso, a função $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do PVI (1.6) (a garantia da existência vem por Picard). ■

1.3.1 Existência de solução para campos contínuos

Para a função contínua f o PVI (1.6) sempre tem solução. No entanto, essas não necessariamente são únicas.

Proposição 1.7 (Arzelá-Ascoli). *Seja $\varphi_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sequência de funções e suponha*

a) *Existe $c > 0$ tal que*

$$\sup\{\|\varphi_k(t)\| : t \in (a, b)\} < c \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

b) *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)\| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t, s \in (a, b)$ com $|t - s| < \delta$.*

Então, existe uma subsequência de $(\varphi_k)_k$ convergindo uniformemente para uma função contínua em (a, b) .

Demonstração: Considere uma sequência $(t_m)_m \subset [a, b]$ densa nesse intervalo. Desde que $(\varphi_k(t_1))_k$ é limitada, existe uma subsequência convergente $(\varphi_{p_k^1}(t_1))$. Da mesma forma, desde $(\varphi_{p_k^1}(t_2))_k$ é limitada, logo existe uma subsequência convergente $(\varphi_{p_k^2}(t_2))_k$. Continuando sempre desde forma, depois de m passos obtemos uma subsequência $(\varphi_{p_k^m}(t_m))_k$ da sequência limitada $(\varphi_{p_k^{m-1}}(t_m))_k$.

Agora, definimos $\psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $k \in \mathbb{N}$ por

$$\psi_k(t) = \varphi_{p_k^k}(t).$$

Notamos que a sequência $(\psi(t_m))_k$ é convergente para cada $m \in \mathbb{N}$, porque, com a exceção dos m primeiros termos, é uma subsequência da sequência convergente $(\varphi_{p_k^m}(t_m))_k$. Em

outras palavras, por hipótese, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\|\psi_k(t) - \psi_k(s)\| = \|\varepsilon_{p_k^k}(t) - \varepsilon_{p_k^k}(s)\| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } t, s \in (a, b) \text{ com } |t - s| < \delta. \quad (1.50)$$

Dados $t, t_m \in (a, b)$ com $|t - t_m| < \delta$ e $p, q \in \mathbb{N}$, pela desigualdade triangular e por (1.50), obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| &\leq \|\psi_p(t) - \psi_p(t_m)\| + \|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\| + \|\psi_q(t_m) - \psi_q(t)\| \\ &< 2\varepsilon + \|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\|. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Uma vez que a sequência $(\psi_k(t_m))_k$ é convergente, existe $p_m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\| < \varepsilon, \quad \text{para cada } p, q \geq p_m. \quad (1.52)$$

Além disso, uma vez que o intervalo (a, b) pode ser coberto por um número finito N de intervalos de comprimento 2δ e, sem perda de generalidade, centrada nos pontos t_1, t_2, \dots, t_N , por (1.52) e (1.52), obtemos

$$\|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| < 3\varepsilon, \quad \text{para cada } t \in (a, b) \text{ e } p, q \geq \max\{p_1, \dots, p_N\}.$$

Isto mostra que $(\psi_p)_p$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo $\mathcal{C}(a, b)$ com a distância (1.22). Assim, a sequência converge uniformemente para uma função contínua em (a, b) . ■

Exemplo 1.5. Sejam $\varphi_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\varphi_k(t) = \text{sen}(\frac{t}{k})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $t \in (a, b)$, tem - se:

- a) $|\varphi_k(t)| = |\text{sen}(\frac{t}{k})| \leq 1$ e $\sup\{|\varphi_k(t)| : t \in (a, b)\} \leq d, \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
- b) $|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| = |\text{sen}(\frac{t}{k}) - \text{sen}(\frac{s}{k})| \leq |\frac{t}{k} - \frac{s}{k}| \leq \frac{1}{k}|t - s| \leq |t - s| < \varepsilon = \delta$.

Se $|t - s| < \delta$ então $|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| < |t - s| = \varepsilon$ com $\delta = \varepsilon > 0, \quad \forall t, s \in (a, b)$.

Teorema 1.8 (Peano). *Se $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua em um conjunto fechado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ existe pelo menos uma solução do PVI (1.6) em algum intervalo aberto contendo t_0 .*

Demonstração: Consideremos novamente o problema (1.42), e tomando $a < t_0 < b$ e $\beta > 0$ tal que a condição (1.43) e $(b - a)M \leq \beta$, onde M é uma constante em (1.44).

Dado $\alpha > 0$, definimos recursivamente uma função contínua $x_\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_0 - \int_t^{t_0+\alpha} f(s, x_\alpha(s+\alpha))ds, & t \in (a, t_0 - \alpha), \\ x_0, & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \\ x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_\alpha(s-\alpha))ds, & t \in [t_0 + \alpha, b). \end{cases} \quad (1.53)$$

Por exemplo,

$$x_\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_0(s-\alpha))ds = x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_0)ds$$

para $t \in [t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha]$, e

$$x_\alpha(t) = x_0 - \int_t^{t_0-\alpha} f(s, x_\alpha(s+\alpha))ds = x_0 + \int_{t_0-\alpha}^t f(s, x_0)ds$$

para $t \in [t_0 - 2\alpha, t_0 - \alpha]$. Somando as integrais e tomando o módulo, tem-se

$$\|x_\alpha(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0 \pm \alpha}^t \|f(s, x_\alpha(s \mp \alpha))\| ds \right| \leq (b-a)M \leq \beta$$

e, assim somando e subtraindo e, também pela desigualdade triangular, temos

$$\|x_\alpha(t)\| \leq \|x_0\| + \beta$$

Além disso,

$$\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f(u, x_\alpha(u \mp \alpha))\| du \right| \leq M|t-s|. \quad (1.54)$$

Isto mostra que as duas condições em Proposição 1.7 são satisfeitas para toda a sequência de funções $(x_{\alpha_m})_m$, onde $(\alpha_m)_m \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência arbitrária, tal que α_m tende a zero pela esquerda quando $m \rightarrow \infty$. Portanto, existe uma subsequência $(\beta_m)_m$ de $(\alpha_m)_m$, tal que $(x_{\beta_m})_m$ converge uniformemente para uma função contínua $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. x é uma solução do PVI (1.6) Por (1.54), temos

$$\begin{aligned} \|x_{\beta_m}(s - \beta_m) - x(s)\| &\leq \|x_{\beta_m}(s - \beta_m) - x_{\beta_m}\| + \|x_{\beta_m}(s) - x(s)\| \\ &\leq M|\beta_m| + \|x_{\beta_m} - x(s)\|. \end{aligned}$$

E assim, a sequência de funções $s \mapsto x_{\beta_m}(s - \beta_m)$ converge uniformemente para x . Pode-se mostrar de forma semelhante que a sequência de funções $s \mapsto x_{\beta_m}(s + \beta_m)$ também converge uniformemente para x . Em outras palavras, seguindo por (1.53) tem-se

$$x_{\beta_m}(t) = x_0 + \int_{t_0 + \beta_m}^t f(s, x_{\beta_m}(s - \beta_m)) ds,$$

para $t \in [t_0, b)$, e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (1.55)$$

para $t \in [t_0, b)$. E por (1.53) temos que

$$x_{\beta_m}(t) = x_0 - \int_t^{t_0 - \beta_m} f(s, x_{\beta_m}(s, +\beta_m)) ds$$

para $t \in (a, t_0]$, e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos a identidade (1.55) para $t \in (a, t_0]$. Por fim, pela Proposição 1.1 resulta que x é uma solução para o PVI (1.6). ■

Capítulo 2

Alguns Conceitos de Física

No capítulo anterior pudemos observar uma parte introdutória sobre EDO e a garantia de existência de sua solução. Devido sua vasta aplicabilidade, faz-se necessário o conhecimento básico da área em questão que irá utilizá-la. No caso deste trabalho, iremos analisar a equação para vigas e cabos suspensos, para tanto, será exposto alguns conceitos sobre Física, mais especificamente, mecânica dos materiais para compreender, em seguida, as aplicações.

No entanto, do que trata essa parte da Física? Quando algum material sofre deformação, deslocamento ou tensão devido uma carga exercida sobre ele é essa parte da mecânica aplicada que estuda o comportamento dessas estruturas de acordo com suas propriedades físicas.

O desenvolvimento dessa área teve diversas contribuições para determinar, por exemplo, a resistência de fios, barras e vigas e até mesmo a teoria matemática para colunas, em que podemos citar Leonardo Da Vinci (1452 - 1519), Galileu Galilei (1564 - 1642) e Leonhard Euler. Os conceitos apresentados a seguir foram retirados de [4] e [3].

2.1 Tensão Normal e Deformação

Definição 2.1 (Barra Prismática). Membro estrutural reto tendo a mesma seção transversal ao longo de seu comprimento.

Definição 2.2 (Força Axial). Carga direcionada ao longo do eixo do membro, resultando em tração ou compressão da barra.

Definição 2.3 (Tensão). Intensidade da força por unidade de área. Denotada por σ .

Pode ser de três tipos:

- a) **tensão de tração**: a barra é esticada pelas forças P ;
- b) **tensão de compressão**: quando as forças são reversas em direção fazendo com que a barra seja comprimida;
- c) **tensão normal**: tensões que agem em direção perpendicular a superfície de corte.

Considerando que as tensões sejam uniformemente distribuídas (P agir através do centróide da área da seção transversal) podemos obter a seguinte equação para magnitude das tensões:

$$\sigma = \frac{P}{A}.$$

em que P =força axial e A = área da seção transversal.

Observação 2.1. Convenção de sinais: se necessário, as tensões de trações podem ser consideradas como positivas e as de compressão como negativas, ou seja, dependerá de como deformam o material.

Definição 2.4. [Deformação] O alongamento/deformação (δ) por unidade de comprimento (L) é denotado por ϵ . E pode ser calculado com a seguinte fórmula

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}.$$

Por ser uma razão entre dois comprimentos, a deformação não tem unidade, ou seja, é uma quantidade adimensional.

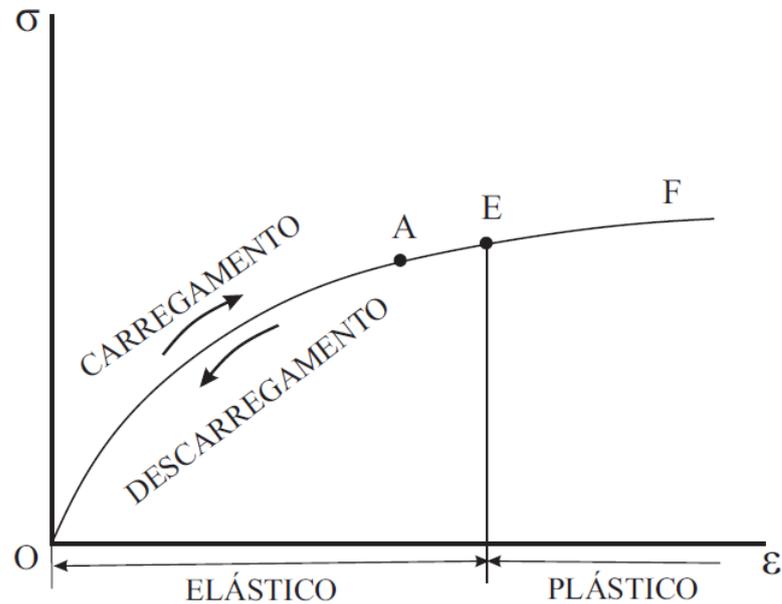
Resultante de Tensões: Tensões distribuídas sobre a seção transversal. Podemos incluir nessa resultante o: **momento fletor** M , que é perpendicular ao plano da viga ao passarmos uma seção transversal, em que provocará esforços internos para manter uma condição de equilíbrio. Ou seja, é provocado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo em relação ao eixo localizado no plano da área; **força de cisalhamento** V , ocorre quando as cargas externas tendem a provocar deslizamento das duas partes do corpo, uma sobre a outra e está localizado no plano da área.

2.2 Elasticidade Linear e Lei de Hooke

Elasticidade: propriedade ao qual o material retorna as suas dimensões originais (faz o mesmo caminho de volta a origem O) durante o descarregamento. O material que tem

essa propriedade é conhecido como *elástico*.

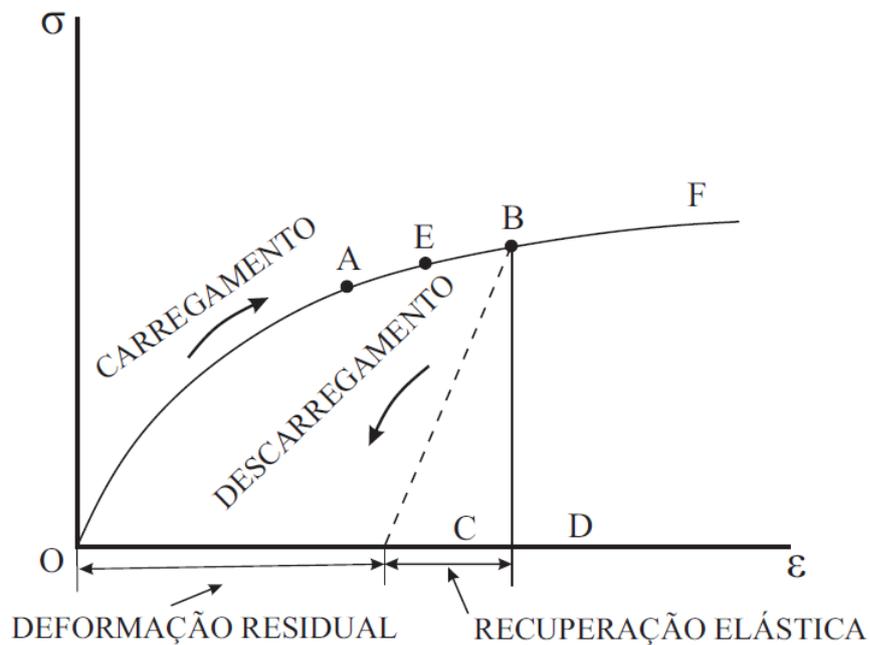
Figura 2.1: Diagrama de Tensão-Deformação: Comportamento Elástico



Fonte: Gere, 2003.

Deformação Residual: Deformação permanente no material devido a um longo carregamento, com isso, o material testado fica com tamanho mais longo, ou seja, nem toda deformação é recuperada.

Figura 2.2: Diagrama de Tensão-Deformação: Comportamento Parcialmente Elástico



Fonte: Gere, 2003.

Limite Elástico: Limite superior da tensão elástica como, por exemplo, o ponto E

Elástico Linear: O material comporta-se elasticamente e também exibe uma relação linear entre tensão e deformação. Esta relação para uma barra/viga em deformação ou compressão pode ser representada por

$$\sigma = E\epsilon. \quad (2.1)$$

Em que E é a constante de proporcionalidade ou módulo de elasticidade.

Definição 2.5 (Módulo de Elasticidade). Inclinação do diagrama de tensão-deformação na região elástica linear.

A equação 2.1 também é conhecida como **Lei de Hooke** em homenagem ao cientista inglês Robert Hooke (1635 - 1703), o qual foi o pioneiro na investigação científica das propriedades elásticas dos materiais estabelecendo a relação linear das cargas aplicadas e o alongamento resultante.

Por razão semelhante, o módulo de elasticidade (E) também é conhecido como **Módulo de Young** também em homenagem ao inglês Thomas Young (1773 - 1829) que em meio a investigação de compressão e tração de barras prismáticas utilizou tal constante. Vale salientar, que para materiais mais rígidos este módulo tem valores elevados.

Definição 2.6 (Rigidez de flexão). Medida de resistência da viga ao momento. Quanto maior for a rigidez de flexão, menor será a curvatura para um dado momento fletor. É denotada por EI .

2.3 Equação diferencial para a curva de deflexão

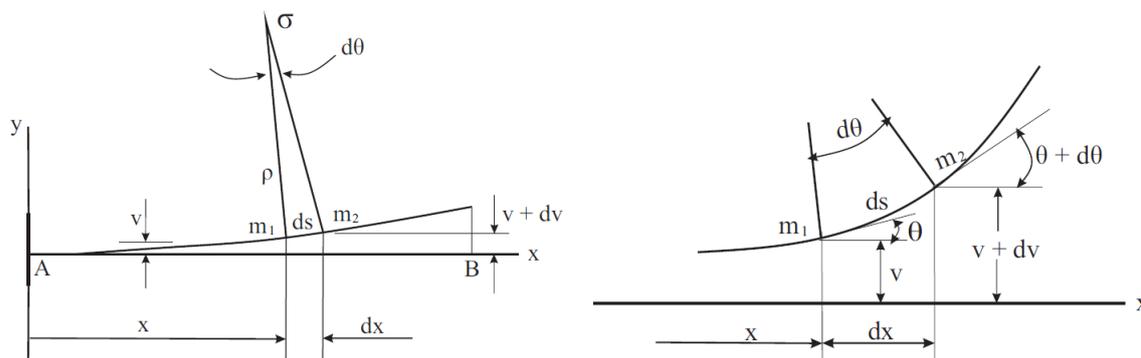
Definição 2.7 (Deflexão). A **deflexão** v de uma viga em qualquer ponto ao longo de seu eixo é o deslocamento desse ponto em relação a sua posição original, medida na direção de y .

Para descobrir sua equação é necessário expressá-la como função da coordenada x .

A deflexão no ponto m_2 é $v + dv$, em que dv é o incremento na deflexão. Quando a viga é flexionada também gera uma rotação a qual é o ângulo θ e o ângulo de rotação em m_2 é $\theta + d\theta$. E mais, o **centro de curvatura** dessas normais é O' . Dai,

$$\rho d\theta = ds \quad (2.2)$$

Figura 2.3: Curva de Deflexão de uma Viga



Fonte: Gere, 2003.

E, a **curvatura** k é dada por

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (2.3)$$

Observe que,

$$d\theta \approx \text{sen}\theta = \frac{ds}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

A curvatura de deflexão é dada por $\frac{dv}{dx}$ de (2.3), ou seja, é igual a tangente do ângulo de rotação θ . Assim,

$$\frac{dv}{dx} = \text{tg } \theta \text{ e } \theta = \text{arctg } \frac{dv}{dx}. \quad (2.4)$$

De modo similar, obtemos também

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} \text{ e } \text{sen}\theta = \frac{dv}{ds}. \quad (2.5)$$

Considere o ângulo de rotação θ tão pequeno quanto se queira, daí

$$ds \approx dx.$$

Com isso, (2.3) pode ser escrita na forma

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{dx}. \quad (2.6)$$

Seja $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ quando θ é pequeno, então

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{dv}{dx}. \quad (2.7)$$

Sendo as rotações da viga pequenas, podemos assumir que o ângulo de rotação θ e a inclinação $\frac{dv}{dx}$ como iguais. Tomando a derivada de θ com relação a x em (2.7), tem-se

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (2.8)$$

De (2.3) e (2.7), obtemos

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (2.9)$$

Cumprindo a condição que as rotações sejam pequenas, a equação (2.9) é válida para viga de qualquer material. Caso o material seja elástico linear, então segue a Lei de Hooke e a curvatura (2.9) é

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), tem-se

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}. \quad (2.11)$$

Caso, o momento fletor (M) e a rigidez de flexão (EI) sejam conhecido, então podemos integrar para encontrar na primeira integração a inclinação $v' = \frac{dv}{dx}$ e na segunda a deflexão v .

Capítulo 3

Aplicações

No primeiro capítulo vimos a parte teórica que garante a existência de Solução de uma EDO e, em alguns casos, também sua unicidade no \mathbb{R}^n dada uma condição inicial. Podemos aplicar tal teoria em diversas situações e em várias dimensões, já que os resultados são garantidos para o \mathbb{R}^n , logo, no presente capítulo, iremos observar e modelar em \mathbb{R}^2 a deflexão de vigas sendo ela biapoiada ou em balanço e, também cabos suspensos. Tais aplicações foram extraídas de [5].

Vale salientar, que os conceitos físicos necessários para compreensão foram apresentados no capítulo anterior e que no presente, iremos modelar determinadas situações em busca da equação que represente a deformação das *vigas* estando sujeitas ao próprio peso (equação da curva elástica) e dos *cabos suspensos* quando estão sustentando algo.

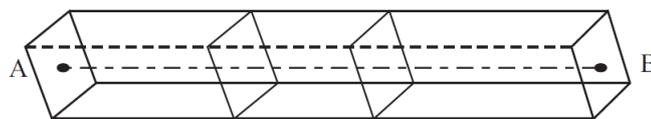
3.1 A Deflexão de Vigas

Nas duas próximas aplicações trabalharemos com vigas, mas o que seriam necessariamente elas? De acordo com Hibbeler (2006, p.199) são “Elementos estreitos que suportam cargas aplicadas perpendicularmente a seu eixo longitudinal. [...] são barras compridas e retas com área da seção transversal constante”. Estas são classificadas de acordo com o tipo de apoio que tem sendo simplesmente apoiada, em balanço ou apoiada com extremidade em balanço.

3.1.1 Viga Simplesmente Apoiada

Vamos considerar o modelo de viga em questão como sendo constituída de material homogêneo com eixo de simetria AB ao longo de seu comprimento, em que todo plano perpendicular a esse eixo terá a mesma seção reta. E mais, ainda suponhamos que a esse eixo exista um plano vertical.

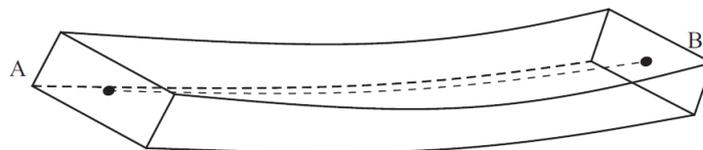
Figura 3.1: Viga com eixo de simetria



Fonte: Leighton, 1970.

Vamos dizer que essa viga seja um pedaço de tábua que quando levantada pelas suas extremidades irá curva-se e, dependendo de quanto é suspensa e do seu peso, a deflexão poderá chegar ao seu máximo até partir a viga. Observe na figura a seguir que o eixo de simetria (linha pontilhada) é onde encontra-se a equação que procuramos

Figura 3.2: Viga suspensa nas extremidades



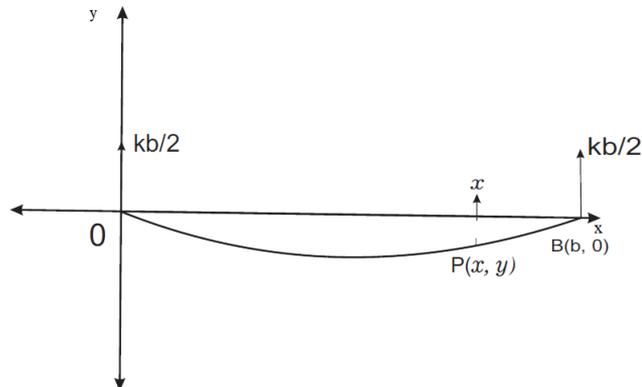
Fonte: Leighton, 1970.

Para encontrarmos a equação desejada, colaremos em um sistema de coordenadas tendo a origem em A e o eixo de simetria da viga sendo o do x

Note que na figura acima foi marcado um ponto x ($0 < x < b$) sobre OB e o correspondente $P(x, y)$, isto possibilita calcular os momentos em relação à esquerda de x . Para tanto, seja k o comprimento unitário da viga (lembrando que a mesma foi considerada uniforme) e b o comprimento total.

Como ela está suspensa nos dois extremos, com toda razão há uma força de $\frac{kb}{2}$ no sentido positivo do eixo do y em O e em B . E ainda, em O temos um momento $\frac{kb}{2}x$, como é notável pela fig. (3.3) o peso de Ox é kx e o seu momento é $kx\frac{x}{2}$. Somando os

Figura 3.3: Sistema de viga suspensa nas extremidades



Fonte: Leighton, 1970.

momentos, obtemos:

$$M(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kbx}{2}. \quad (3.1)$$

Os momentos dirigidos para baixo tem sinal positivo e os para cima com sinal negativo, isto porque o movimento e a força realizado para cima estão retirando a viga de seu estado natural.

Um dos resultados da teoria da resistência dos materiais estabelece

$$M(x) = EIy''. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2), temos

$$EIy'' = \frac{kx^2}{2} - \frac{kbx}{2}. \quad (3.3)$$

Nosso objetivo agora é encontrar uma solução $y(x)$ para a equação (3.3), a qual sabemos que existe através do **teorema de Picard-Lindelöf**, pois a função $F(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kbx}{2}$ é contínua (devido ser um polinômio) e tomando como condição inicial $y(0) = y(b) = 0$ garantimos ainda a unicidade da mesma.

De fato, de (3.3) isolando y'' e colando os termos em comum em evidência ficamos com

$$y''(x) = \frac{k}{2EI}(x^2 - bx). \quad (3.4)$$

Para encontrar a solução iremos integrar duas vezes e para tanto, considere o intervalo

$[0, t] \in \mathbb{R}$ qualquer

$$\int_0^t y''(x) dx = \frac{k}{2EI} \int_0^t (x^2 - bx) dx . \quad (3.5)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$y'(t) - y'(0) = \frac{k}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \right] \Big|_0^t = \frac{k}{2EI} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{bt^2}{2} \right] \quad (3.6)$$

Repetindo o procedimento anterior agora considerando o intervalo $[0, x]$, $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\int_0^x y'(t) dt = \frac{k}{2EI} \int_0^x \left[\frac{t^3}{3} - \frac{bt^2}{2} \right] dx + \int_0^x y'(0) dx. \quad (3.7)$$

Logo,

$$y(x) - y(0) = \frac{k}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{bx^3}{6} \right] + xy'(0).$$

Pela condição inicial, $y(0) = 0$, então

$$y(x) = \frac{k}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{bx^3}{6} \right] + xy'(0). \quad (3.8)$$

Fazendo $x = b$ (já que x foi escolhido de forma arbitrário para o intervalo).

$$y(b) = \frac{k}{2EI} \left[\frac{b^4}{12} - \frac{bb^3}{6} \right] + by'(0) .$$

Como, por hipótese da condição inicial $y(b) = 0$ e fazendo manipulações algébricas, então

$$0 = \frac{k}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{b^4}{6} \right] + xy'(0) \Rightarrow y'(0) = -\frac{kb^4}{24EI}.$$

Substituindo o valor de $y'(0)$ em (3.8), obtemos a solução y de (3.3), a qual é dada por:

$$y(x) = \frac{k}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{bx^3}{6} \right] + \frac{kb^3x}{24EI} = \frac{k}{24EI} (x^4 - 2bx^3 + b^3x). \quad (3.9)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0, & y(b) &= 0, \\
 y'(0) &= 0, & y'(b) &= \frac{k}{24EI}b^3, \\
 y''(0) &= 0, & y''(b) &= 0.
 \end{aligned}$$

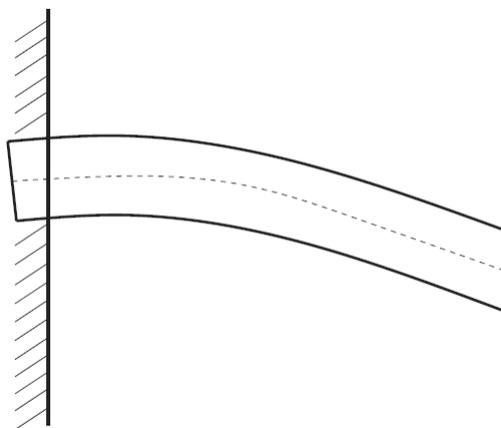
A deflexão máxima da viga ocorre quando $x = \frac{b}{2}$, pois seria o máximo suportado pela viga antes de partir ao meio.

$$\begin{aligned}
 y\left(\frac{b}{2}\right) &= \frac{k}{24EI} \left[\left(\frac{b}{2}\right)^4 - 2b \left(\frac{b}{2}\right)^3 + b^3 \frac{b}{2} \right] = \frac{k}{24EI} \left(\frac{b^4 - 4b^4 + 8b^4}{16} \right) \quad (3.10) \\
 &= \frac{5kb^4}{384EI}.
 \end{aligned}$$

3.1.2 Viga em Balanço

Nessa parte iremos trabalhar com a viga a qual tem somente uma das extremidades suspensa/apoiada. Levaremos em consideração todas as características trabalhadas na aplicação anterior.

Figura 3.4: Viga em balanço



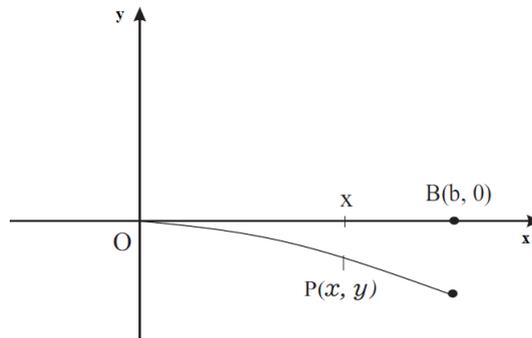
Fonte: Leighton, 1970.

Colocando em um sistema de coordenadas de modo que o eixo do x coincida com o eixo de simetria ficamos com a seguinte figura

Assim como na viga simplesmente apoiada, consideremos um ponto x ($0 < x < b$) e calculemos seu momento à direita de x . Na presente situação o peso da viga será $k(b-x)$, devido esta apoiada somente em um dos extremos, e seu momento para baixo

$$k(b-x) \frac{(b-x)}{2}. \quad (3.11)$$

Figura 3.5: Sistema de viga em balanço



Fonte: Leighton, 1970.

Substituindo (3.11) em (3.3), obtemos

$$EIy'' = \frac{k}{2}(b-x)^2. \quad (3.12)$$

Pelo mesmo motivo da aplicação anterior, garantimos que existe solução para a equação (3.12). Para tanto, considere como condição inicial

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Vamos integrar (3.12) para encontrar sua solução de acordo com a condição inicial. Primeiro organizando-a, temos

$$y'' = \frac{k}{2EI}(b-x)^2.$$

E ainda,

$$\int_0^t y''(x) dx = \frac{k}{2EI} \int_0^t (b-x)^2 dx = \frac{k}{2EI} \int_0^t (b^2 - 2bx + x^2) dx. \quad (3.13)$$

o que implica,

$$y'(t) - y'(0) = \frac{k}{2EI} \left[b^2(x) \Big|_0^t - 2b \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^t + \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^t \right].$$

Utilizando a condição inicial, tem-se

$$y'(0) = \frac{k}{2EI} \left[b^2t - bt^2 + \frac{t^3}{3} \right]. \quad (3.14)$$

Integrando novamente, tem-se:

$$\int_0^x y'(t) dt = \frac{k}{2EI} \int_0^x \left[b^2 t - bt^2 + \frac{t^3}{3} \right] dt. \quad (3.15)$$

A partir de (3.15), temos

$$y(x) - y(0) = \frac{k}{2EI} \left[b^2 \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x - b \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x + \frac{t^4}{12} \Big|_0^x \right] = \frac{k}{2EI} \left[\frac{b^2 x^2}{2} - \frac{bx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right].$$

Usando novamente a hipótese da condição inicial de $y(0) = 0$, obtemos:

$$y(x) = \frac{k}{24EI} (x^4 - 4bx^3 + 6b^2x^2). \quad (3.16)$$

Ou seja,

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \text{ e } y''(0) = c12b^2.$$

$$y(b) = cb^4, \quad y'(b) = c4b^3 \text{ e } y''(b) = 0.$$

Ao fazer $x = b$ na extremidade livre obtemos que a deflexão é dada por:

$$\frac{kb^4}{8EI}.$$

Exemplo 3.1 (Viga em Balanço com Peso Desprezível). Considere uma viga com um extremo fixo e outro livre, de peso desprezível. Suponha um peso de w quilogramas pendurado no extremo livre.

De fato, como o peso da viga é considerado desprezível, então podemos desconsiderar o peso da viga em balanço ($k(b-x)$), com isso, ficamos somente com o momento para baixo e o peso w , logo

$$M(x) = w \frac{(b-x)}{2}. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.3), teremos a seguinte equação da curva elástica

$$EIy'' = w \frac{(b-x)}{2}. \quad (3.18)$$

Para encontrar a solução, considere como condição inicial

$$y'(0) = y(0) = 0$$

Vamos encontrar a solução para este PVI (o procedimento é exatamente o mesmo utilizado até o momento nas aplicações anteriores). Integrando (3.18), tem-se

$$\int_0^t y''(x) dx = \frac{w}{2EI} \int_0^t (b-x) dx. \quad (3.19)$$

A partir de (3.15), obtemos

$$y'(t) - y'(0) = \frac{w}{2EI} \left[b(x) \Big|_0^t - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^t \right] = \frac{w}{2EI} \left[bt - \frac{t^2}{2} \right].$$

E ainda, considerando a condição inicial

$$y'(t) = \frac{w}{2EI} \left[bt - \frac{t^2}{2} \right].$$

Integrando novamente, temos

$$\int_0^x y'(t) dt = \frac{w}{2EI} \int_0^x \left[bt - \frac{t^2}{2} \right] dt.$$

E ainda,

$$y(x) - y(0) = \frac{w}{2EI} \left[b \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x - \left(\frac{t^3}{6} \right) \Big|_0^x \right].$$

Pela condição inicial, tem-se

$$y(x) = \frac{w}{2EI} \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Por manipulação algébrica e fazendo $\frac{w}{2} = w_1$, obtemos

$$y(x) = \frac{w_1 x^2}{6EI} (3b - x). \quad (3.20)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, \\y'(b) &= \frac{1}{2} \frac{w_1}{EI} b^2, & y''(b) &= 0.\end{aligned}$$

A deflexão do extremo livre da viga ocorrerá quando $x = b$, a qual é dada por:

$$\frac{wb^3}{3EI}.$$

Exemplo 3.2. Considere agora que a viga pese k quilogramas por unidade de comprimento. Nesse caso, a equação na extremidade livre será a soma da curva com peso desprezível e com k quilogramas, ou seja,

$$EIy'' = w \frac{(b-x)}{2} + \frac{k}{2}(b-x)^2.$$

Como já fizemos a solução de cada equação de forma separada anteriormente, então a solução será

$$y(x) = \frac{w_1 x^2}{6EI} (3b-x) + \frac{k}{24EI} (x^4 - 4bx^3 + 6b^2x^2). \quad (3.21)$$

E a deflexão ocorre quando $x = b$,

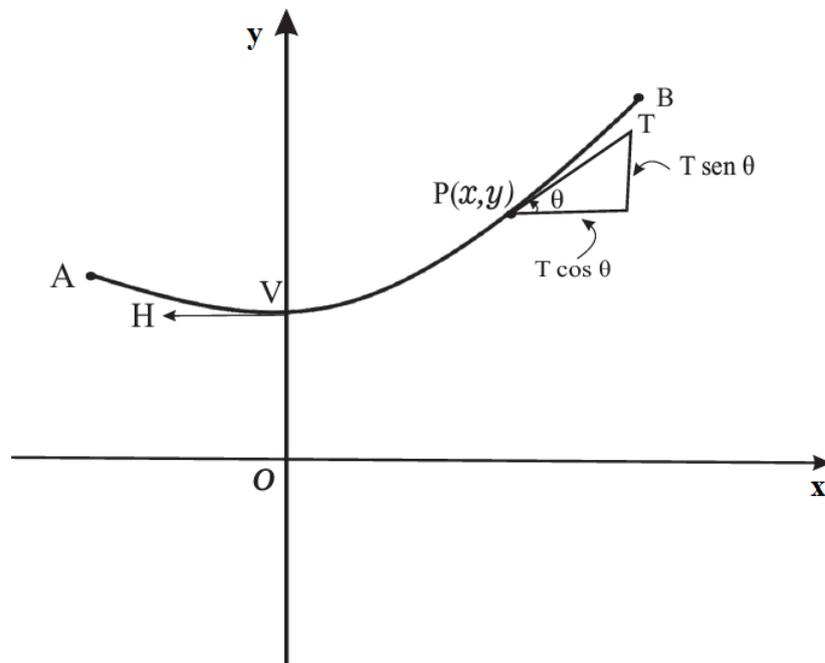
$$\frac{wb^3}{3EI} + \frac{kb^4}{8EI}.$$

3.1.3 Cabos Suspensos

Nesta aplicação continuamos a considerar um material flexível, homogêneo e suspenso por suas extremidades as quais chamaremos de A e B, a principal diferença em comparação com as vigas é que esses extremos não estão necessariamente no mesmo nível e que os cabos são inextensíveis. Observe a seguir

Na curva AB, temos o ponto de mínimo V e um ponto genérico $P(x, y)$ de modo a deixar o arco (VP) em equilíbrio (está sujeito a força de tração de T em P , de H em V e a carga vertical W sobre (VP)). A tração P e a força horizontal H atuam ao longo das tangentes a curva P e V , respectivamente. Em toda essa situação, o W se comporta como a carga vertical em (VP) devido ao peso do cabo além de outros pesos suportados pelo mesmo. Nosso interesse é justamente encontrar a equação da curva AB de modo a

Figura 3.6: Cabo suspenso em ambas extremidades



Fonte: Leighton, 1970.

dependem de W .

Seja $\delta(x)$ a taxa de carregamento, então a taxa W será (sendo a taxa de carregamento dada por derivada devido ser variação)

$$W = \int_0^x \delta(t) dt. \quad (3.22)$$

A soma das forças horizontais e verticais sobre VP é igual a zero, pois o mesmo por hipótese está em equilíbrio. Logo, podemos escrever

$$T \cos \theta - H = 0,$$

$$T \sin \theta - W = 0.$$

Ou ainda, eliminando o T e usando as forças horizontais e verticais

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{W}{H}$$

Sendo $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$, daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \quad (3.23)$$

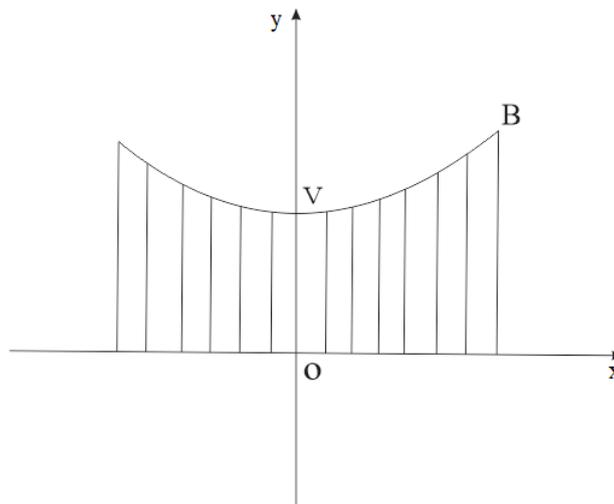
que é justamente a equação da curva AB no ponto C , como H é constante e W é em função de x ainda podemos diferenciar ambos os lados de (3.23), obtendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dW}{dx}. \quad (3.24)$$

O seguinte exemplo é uma situação bastante comum quando pretendesse determinar a forma de um cabo para suspender pontes, principalmente quando os pesos do cabo e suportes verticais são pequenos.

Exemplo 3.3 (Cabo com Peso Desprezível). Considere um cabo suspenso, de peso desprezível, suportando uma estrada uniforme como indicado na fig. (3.7).

Figura 3.7: Estrada suspensa por cabos



Fonte: Leighton, 1970.

Como a estrada é uniforme, então $\delta(x)$ é uma constante δ , pois o peso por unidade de comprimento é constante. Dai, (3.22) se resume a

$$\frac{dW}{dx} = \delta.$$

E a equação (3.24):

$$y'' = \frac{\delta}{H}. \quad (3.25)$$

Considere as coordenadas de V como $(0, c)$ e como condição inicial

$$y(0) = c, \quad y'(0) = 0.$$

Integrando (3.25), tem-se

$$\int_0^t y''(x) dx = \int_0^t \frac{\delta}{H} dx \Rightarrow y'(t) - y'(0) = \frac{\delta}{H}t.$$

Utilizando a condição inicial e integrando novamente o resultado, tem-se

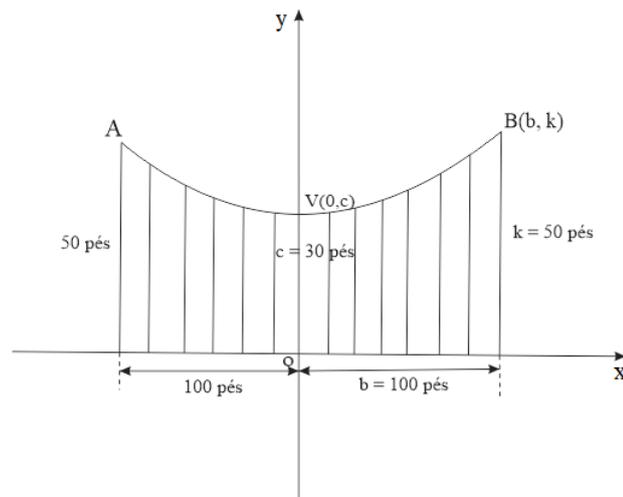
$$\int_0^x y'(t) dt = \frac{\delta}{H} \int_0^x t dt \Rightarrow y(x) - y(0) = \frac{\delta}{H} \frac{x^2}{2}.$$

Ou ainda, usando novamente a hipótese da condição inicial, temos

$$y(x) = \frac{\delta}{2H}x^2 + c. \quad (3.26)$$

Logo, chegamos que a equação buscada é justamente (3.26), mas e se (3.7) tivesse valores para as coordenadas? Vamos supor que sejam os seguintes valores:

Figura 3.8: Estrada suspensas com valores



Fonte: Leighton, 1970.

Observamos pela figura que quando $x = 0, y = 30$ e quando $x = 100, y = 50$, nisso a equação (3.26) fica com

$$y = 0,002x^2 + 30.$$

Exemplo 3.4 (Cabo Suspenso). Suponhamos a seção reta do cabo em (3.6) uniforme e que a única carga sobre ele é seu próprio peso. Neste caso, a variação de peso por unidade de arco é constante, isto é

$$\frac{dW}{ds} = k. \quad (3.27)$$

Assim como nas vigas, k é o peso por unidade de comprimento.

Sendo

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dx} \frac{dx}{ds}. \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28) resulta (isola $\frac{dW}{dx}$ com isso fica fração de fração)

$$\frac{dW}{dx} = k \frac{ds}{dx}. \quad (3.29)$$

Observando o triângulo da fig. (3.6), podemos notar que

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta. \quad (3.30)$$

Das relações trigonométricas $(\sec)^2\theta = 1 + (tg)^2\theta \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{1 + tg^2}$. Dai, substituindo (3.30) em (3.29) resulta que

$$\frac{dW}{dx} = k\sqrt{1 + tg^2}.$$

Usando o fato de $tg\theta = \frac{dy}{dx}$, temos

$$\frac{dW}{dx} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Com isso, a equação (3.24) se transforma em

$$y'' = \frac{k}{H}\sqrt{1 + y'^2}. \quad (3.31)$$

Fazendo $p = y'$, tem-se

$$p' = \frac{k}{H}\sqrt{1 + p^2}. \quad (3.32)$$

Separando a equação para que as variáveis iguais fiquem no mesmo lado e fazendo $m = \frac{k}{H}$, temos

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = m \, dx. \quad (3.33)$$

Integrando, ficamos com

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int m \, dx \Rightarrow \ln(p + \sqrt{1+p^2}) = mx + c_1. \quad (3.34)$$

Fazendo $y = c$ e $p = y'$ quando $x = 0$ assim $c_1 = 0$ e aplicando exponencial, tem-se

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{mx}.$$

Passando o quadrado em ambos os lados e organizando a equação, obtemos

$$1 + p^2 = (e^{mx} - p)^2 = e^{2mx} - 2pe^{mx} + p^2.$$

o que implica

$$2pe^{mx} = e^{2mx} - 1 \Rightarrow p = \frac{e^{2mx} - 1}{2e^{mx}} = \frac{e^{2mx}}{2e^{mx}} - \frac{1}{2e^{mx}} = \frac{1}{2}(e^{mx} - e^{-mx}).$$

Logo,

$$p = \frac{1}{2}(e^{mx} - e^{-mx}). \quad (3.35)$$

Como anteriormente fizemos $p = \frac{dy}{dx}$ para encontrar a solução em y integramos uma vez (3.35), daí

$$y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx}) + \left(c - \frac{1}{m}\right). \quad (3.36)$$

Se escolhermos o eixo dos x de modo que

$$c = \frac{1}{m}.$$

então, ficamos com

$$y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx}) \quad , \quad \left(m = \frac{k}{H}\right). \quad (3.37)$$

Ou ainda, utilizando o cosseno hiperbólico $\left(\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$, podemos escrever (3.37) na forma

$$y = \frac{1}{m} \cosh mx.$$

A equação de (3.37) é conhecida como catenária e tem bastante utilização nas engenharias em geral, pois tem grande resistência a ventos fortes e são muito leves e estáveis devido conseguir o equilíbrio das tensões internas com seu próprio peso.

Considerações Finais

Diante de tudo que foi exposto, notamos que o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias teve sua consolidação na parte teórica ao analisar e formular os fenômenos naturais e situações reais. Com isso, ao decorrer dos séculos os resultados tiveram mais enfoque na garantia de existência de soluções e, em alguns casos, sua unicidade. Pois, em determinadas circunstâncias é inviável a resolução explícita das EDO's.

A Física destaca-se dentre as várias áreas que utilizam das equações diferenciais para descrever e/ou modelar determinadas situações. Para tanto, é necessário um conhecimento básico de alguns conceitos dessa área. E, em relação a este trabalho, os principais conceitos foram em torno das transformações ocorridas em material homogêneo quando expostos a cargas em suas extremidades.

A depender da intensidade da carga, os materiais podem retornar ou não a seus estados iniciais, podendo em algumas situações permanecerem com resíduo do processo sofrido e, conseqüentemente, ficam com a deformação permanente. De acordo com a tensão da carga o material sofre tração ou compressão, ou seja, comprime-se ou alonga-se, respectivamente.

A verificação para as soluções das referidas aplicações foi garantida através do Teorema de Existência e Unicidade 1.6, devido as equações serem com funções contínuas. Ou seja, antes mesmo da solução explícita já tínhamos a garantia de sua existência.

Referências Bibliográficas

- [1] BARREIRA, L.; VALLS , C. **Ordinary Differential Equation: Qualitative Theory**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [2] FIGUEIREDO, D. G; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.
- [3] GERE, J. **Mecânica dos Materiais**. Tradução Luiz Fernando de Castro Paiva. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [4] HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Pearson Pretice Hall, 5^a. Ed., 2006.
- [5] LEIGHTON, W. **Equações Diferencias Ordinárias**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1970.
- [6] LOURÊDO, A. T; OLIVEIRA A. M.; Osmundo, A. L **Cálculo Avançado**. Campina Grande: EDUEPB, 2010.
- [7] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.