UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I – CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÀTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAYRTON HENRIQUE GOMES COSTA

MATEMÁTICA FINANCEIRA E INFLAÇÃO

Campina Grande - PB

2020

MAYRTON HENRIQUE GOMES COSTA

MATEMÁTICA FINANCEIRA E INFLAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientador(a): Profª Ms. Joselma Soares dos Santos

Campina Grande - PB
2020

C837m Costa, Mayrton Henrique Gomes.
Matemática financeira e inflação [manuscrito] / Mayrton Henrique Gomes Costa. - 2020.
54 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Inflação. 2. Matemática financeira. 3. Moeda. 4. Capitalização composta. I. Título

21. ed. CDD 658.403 3

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

MATEMÁTICA FINANCEIRA E INFLAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Aprovada em: 04/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Isabella Silva Duarte

Profª. Ms. Isabella Silva Duarte
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana medeiros Graciano

Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde, força e disposição para realizar esse trabalho.

A minha família e meus amigos por todo carinho e força. Em especial à minha mãe Rosangela Gomes Costa, meus irmãos e Ingrid Djanira pela paciência e por estar sempre comigo nos momentos difíceis.

A todos os professores, em especial a Profª Ms. Joselma Soares dos Santos, pela disponibilidade, competência e contribuição para a realização desse trabalho.

A minha da banca examinadora Profª Ms. Isabella Silva Duarte e Profª Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano pela disponibilidade e indispensáveis sugestões dadas para o aprimoramento desse trabalho.

A todos os envolvidos diretamente e indiretamente.

"Posso calcular o movimento das estrelas,

mas não a loucura dos homens."

Isaac Newton (1643-1727)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo estudar a Inflação e observar alguns de seus impactos no cotidiano. Para isso, foi abordado inicialmente os principais conceitos do regime de capitalização composta, a fim de estudarmos a inflação e suas principais características, dentre elas o seu comportamento exponencial e o comportamento dos valores monetários em ambientes inflacionados, que tanto aparecem nas operações financeiras do nosso cotidiano. Aplicando as formulas de inflação, mostramos na prática que o salário mínimo só tem um aumento real se for dado um aumento acima da taxa de inflação e com isso podemos observar que a moeda se desvaloriza com o tempo, perdendo seu valor no curto ou a longo prazo e que é importante que a população em geral saiba os impactos que a inflação pode gerar e que utilize os conhecimentos de matemática financeira para se proteger.

Palavras-Chave: Inflação. Matemática Financeira. Moeda. Capitalização Composta.

ABSTRACT

This presentation has as the main goal to study about inflation and analyse some of its daily impacts. To do so, it was firstly approached the main concepts of compound capitalization regime so we can study inflation and its main characteristics, such as its exponential behavior and the behavior of the monetary values in inflated environments that usually show up in our daily financial operations. Applying the inflation formulas, we show, in a practical way, that the minimum wage just has a real increase if it increases above inflation rate and with that we can observe that the currency devalues as time passes, losing its value on the short or long term and that it is important that the population is aware of the impacts the inflation can generate and uses its financial mathematics knowledge to protect itself.

Keywords: Inflation. Financial Mathematics. Currency. Composed Capitalization.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.a. ao ano

a.m. ao mês

a.s. ao semestre

BCB – Banco Central do Brasil

C – Capital

FV – Valor Futuro

i – Taxa de Juros

I – Inflação

IGP-M – Índice Geral Preços do Mercado

INPC – Índice Nacional de Preços ao Consumidor

IPCA – Índice de Preços ao Consumidor Amplo

J – Juro

M - Montante

n – Período

P.A. – Progressão Aritmética

P.G. – Progressão Geométrica

PV – Valor Presente

r – Taxa Real

TDM – Taxa de Desvalorização da Moeda

TR – Taxa Referencial

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática financeira historicamente esteve muito ligada ao conceito e o significado de comércio. Um dos conceitos mais antigos relacionados à matemática financeira é o de juros, que existe desde a época dos primeiros registros de civilizações, mesmo não existindo moedas em circulação. Esse conceito surgiu quando o homem percebeu a relação entre o dinheiro e o tempo. Um dos primeiros indícios apareceu na Babilônia no ano de 2000 a.C. em que os povos antigos faziam empréstimos de sementes e na colheita pagavam as sementes emprestadas mais uma determinada parte da colheita ou com outros bens.

Antes da criação da moeda, "o primeiro tipo de troca comercial foi o *escambo*, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto, sem a intervenção de uma "moeda" no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade." (Ifrah, 1997, p. 145). Praticava-se a simples troca de mercadorias por mercadorias, mas nesse método ocorriam dificuldades, já que não desfrutavam de uma medida comum de valor entre os elementos que estão sendo trocados. Algumas mercadorias por serem mais procuradas que outras assumiram a função de "moeda-mercadoria", duas das mais conhecidas foram o gado que apresentava uma vantagem de locomoção, reprodução, trabalhos forçados e seus derivados (leite e carne) e o sal por ser muito difícil de ser encontrado na época e também muito utilizado na conservação de alimentos. Segundo Ifrah,

> a primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VIII a.C., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), uma mulher hábil para mil trabalhos é assim avaliada em 4 bois, a armadura em bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois; ademais, numa lista de recompensas, veem-se suceder-se, na ordem dos valores decrescentes, uma copa de prata cinzelada, um boi e um meio talento de ouro. (1997, p. 146).

Esse sistema de troca direta durou por vários séculos, e deu origem aos vocábulos como "salário", que tem como origem a utilização do "sal" na Roma antiga como o pagamento de serviços prestados, "pecúnia" (dinheiro) e pecúlio (dinheiro acumulado) que são derivadas das palavras pecus (gado). Com o decorrer do tempo, as trocas de mercadorias se tornaram inconvenientes às transações comerciais, pela abertura de novas rotas comerciais com outras culturas também pelo fato de não serem fracionáveis e por serem facilmente perecíveis, não permitindo o acúmulo de riquezas.

O metal (Ouro, Prata, Cobre, Bronze entre outros metais) por sua divisibilidade, raridade, facilidade de transporte e beleza, se elegeu como principal padrão de valor. Eram trocados de diversas formas. A princípio eram utilizados no seu estado puro, depois sob forma de barras e também sob a forma de objetos como anéis, braceletes e etc. Pela sua valorização cada vez maior, os objetos metálicos circulavam como dinheiro. Surge no século VII a.C. na Lídia (atual Turquia) as primeiras moedas e em razão da sua praticidade e vantagens, seu uso se espalhou rapidamente por diversos países. As moedas eram fabricadas em processo manual muito rudimentar e irregular, na Grécia as moedas eram confeccionadas em liga de prata e na Lídia em ouro e prata.

O valor da moeda se dava pela quantidade de metal nela contida, as moedas cunhadas em ouro retinham o maior valor por sua raridade e as moedas de prata e cobre menor valor por ser encontrada com mais abundância. Os primeiros bancos teriam sido criados pelos sacerdotes, por um costume dos cidadãos de confiar suas quantias de ouro e prata aos templos, os mesmos emprestavam certas quantias que depois de certo tempo eram devolvidos com juros, pagos em prata e ouro. A igreja católica criou então o Banco do Espírito Santo, com o objetivo de facilitar a cobrança de juros e impostos. O primeiro banco privado foi fundado pelo duque Vitali em 1157, em Veneza. Logo após, nos séculos XIII, XIV e XV toda uma rede bancária foi criada.

Sobre a relação e o desenvolvimento dos bancos com a utilização da matemática comercial e financeira, Gonçalves (2007, p. 6) apresenta claramente que:

> O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da Matemática Comercial e Financeira, de modo geral. Na época em que o comércio começava a chegar ao auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Nos diversos países eram cunhadas moedas de ouro e prata. (p. 4). Assim os bancos foram um dos grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos X até XV. Pois sem essa motivação para o aprimoramento dos cálculos, talvez, essa área de Matemática não estivesse tão avançada nos dias atuais.

Com a criação dos bancos e sua evolução no decorrer do tempo a matemática financeira ficou cada vez mais aprimorada como a que dispomos nos dias atuais. Os países mantiveram esse sistema com ouro, prata e cobre até final do século XIX, quando começou a se introduzir outros metais na sua fabricação, então, os valores das moedas começaram a circular pelo seu valor superficial, isto é, não pelo valor do metal contido na fabricação da moeda, mas no valor gravado em sua face. A origem do papel-moeda se deu por uma prática utilizada na Idade Média em que a população guardava ouro e prata nas oficinas dos ourives (Negociadores de ouro e prata) por terem guardas a seu serviço e como garantia, emitiam recibos (conhecidos como "goldsmith´s notes") onde se obrigavam a devolução do ouro e prata recebidos. Com o tempo, esses recibos passaram a servir como forma de pagamentos por seus possuidores, por serem mais seguros e práticos do que o dinheiro vivo. Dando assim origem as primeiras cédulas de papel-moeda.

Existiam diversos bancos que emitiam suas próprias notas de dinheiro e cada nota era emitida para uma determinada pessoa, tinha um valor único e era assinada pelo funcionário do caixa que a emitia. Foi apenas em 1759 que o Banco da Inglaterra começou a emitir notas de denominações fixas (10 libras) e foi só em 1853 que notas totalmente impressas começaram a serem emitidas, sem o nome do beneficiário e sem a assinatura do caixa emissor. Mas os valores das notas eram vinculados a metais preciosos como o ouro ou a prata, que o banco emissor possuía. Isso se chama *padrão-ouro*.

O padrão-ouro foi adotado pela primeira vez na Grã-Bretanha em 1717. E quem determinou a quantidade de ouro equivalente para uma libra esterlina foi Isaac Newton chefe do Royal Mint (Casa da Moeda).

Com o passar do tempo os países criaram seus bancos centrais e começaram a conduzir a emissão de cédulas e moedas, formando assim o sistema monetário que conhecemos hoje.

O padrão-ouro clássico foi deixado em 1914 e um novo modelo foi restaurado depois de 1929. O padrão-ouro foi totalmente removido em 15 de agosto de 1971.

É comum ouvirmos falar sobre inflação no nosso cotidiano, porém um dos primeiros registros de inflação na história foi antes de Roma se tornar um império. A primeira moeda romana foi o "ás" um disco de bronze que pesava cerca de 350 gramas. Em 264 a.C. após 20 anos da introdução do ás, Roma entrou na sua primeira de suas 3 guerras contra Cartago, conhecidas como guerras púnicas.

Para financiar essa guerra a república romana desvalorizou o ás. Depois de 17 anos de conflito Roma venceu a guerra, mas a moeda romana só tinha um quinto de seu peso original. Em 218 a. C. começou a segunda guerra púnica, após sete anos de conflito a moeda romana estava tão desvalorizada que segundo Versignassi (2011, p. 33) “a população perdeu a confiança no ás e só usava coisas que tivessem valor intrínseco como moeda de troca – ouro, prata, sal, escravos...”. A república romana tomou uma providência, instituiu uma nova moeda, chamada “denário” (de “dez” por que valia o equivalente a dez asses), moeda que era 73% prata pura. Em 146 a.C. após a terceira guerra púnica a república romana desvalorizou tanto sua moeda que o denário só continha 5% de prata e o ás ficou tão fino que a efígie era cunhada em um único lado da moeda.

Pelo aumento do território entre outros fatores o império romano não sofria um problema grave de inflação. Mas durante a crise política entre 234 d.C e 284 d.C. foram 26 soberanos diferentes em 50 anos. “O governo perdeu boa parte de sua maior fonte de receita: os impostos dos territórios conquistados. Sucessão de grupos no poder tornava impossível a tarefa de coletar ouro dos “contribuintes” e fazê-lo chegar ao governo central” (VERSIGNASSI, 2011, p. 39). O ouro servia para a compra de produtos essenciais não produzidos no território romano como o trigo do Egito e azeite da Grécia. Com pouca mercadoria e muita moeda circulando o preço da saca de trigo subiu cerca de 200 vezes entre os séculos II e III. Não existiam índices de inflação na época, mas alguns registros mostram um aumento de 20.000% do trigo.

Outro exemplo de inflação na história foi a chamada revolução dos preços que afetou a Europa dos anos 1540 até os anos 1640, segundo Ferguson (2009, p. 24) “o custo da comida – que não mostrara uma tendência de aumento sustentado durante trezentos anos – subiu acentuadamente. Na Inglaterra o custo de vida subiu por um fator de sete no mesmo período”. Não foi um alto índice de inflação, mas que ficou em média de 2% ao ano, para a época foi um aumento revolucionário no preço. Uma das causas da inflação nesse período foi aumento da prata no território europeu. Gerado pelo descobrimento do Cerro Rico (montanha rica), uma montanha de sólido minério de prata descoberto pelos espanhóis na América do Sul. Entre 1556 e 1783 a “montanha rica” produziu 45.000 toneladas de prata pura, que foram transformados em barras e moedas e embarcados para Sevilha. A moeda de prata espanhola o “duro” da época “se tornou a primeira moeda verdadeiramente global do mundo, e financiou não somente as prolongadas guerras que a Espanha lutou na Europa, mas também a rápida expansão do comercio da Europa com a Ásia" (FERGUSON, 2009, p.22).

Do século XX ao XXI, temos muitos exemplos históricos de inflação o maior deles já registrado foi o da Hungria, que em janeiro de 1946 o dólar valia um milhão de pengos (moeda da Hungria na época) e no mês de julho do mesmo ano "a moeda americana estava cotada a $4.600.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ de pengos." (VERSIGNASSI, 2011, p.50). O Brasil também teve uma inflação constante de pelo menos dois dígitos em todos os anos entre 1953 e 1995, com um valor acumulado maior que 50% durante cada ano de 1979 a 1994. Chegando ao seu valor mais alto no ano de 1993 com incríveis 2.477%. Segundo Miriam Leitão (2008, p. 23) "de julho de 1964 a julho de 1994, data do Plano Real, a inflação acumulada, medida pelo IGP-DI, foi de $1.302.442.989.947.180\%$". Depois da implantação do Plano Real o Brasil não teve nenhum problema grave com a inflação, poucas vezes chegou a ter uma inflação de dois dígitos.

Neste trabalho estudamos o Regime de Capitalização Composta tendo como principal objetivo estudar a Inflação e observar alguns dos seus impactos no cotidiano. Para isto, o mesmo está dividido em três Capítulos. No Capítulo 1, fizemos uma revisão bibliográfica dos principais conceitos do regime de capitalização composta necessários para a continuidade do trabalho, bem como as principais fórmulas do regime. No Capítulo 2 estudamos a inflação, bem como as principais características de ambientes inflacionados, para isto definimos inicialmente um índices de preços e taxas de inflação, em seguida vimos como se comportam os valores monetários em inflação e que a taxa de inflação se comporta de maneira exponencial, assim como a taxa de juros no regime de capitalização composta, definimos também a taxa de desvalorização da moeda que mede a queda do poder de compra da moeda causada pelo aumento de preços gerados pela inflação o que ocorre com as taxas de juros, a desvalorização da moeda e a Taxa referencial, que é utilizada por exemplo na caderneta de poupança. Finalmente, no Capitulo 3 usamos e aplicamos os assuntos abordados nos capítulos anteriores em algumas situações do nosso cotidiano, em especial, na desvalorização do Plano Real desde sua criação e no ganho real do salário mínimo de 1994 a 2019.

2. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Os critérios (regimes) de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Neste conceito podem ser identificados dois regimes de capitalização dos juros: o regime de capitalização simples (ou linear) e o regime de capitalização composto (ou exponencial).

O regime de capitalização simples comporta-se como uma progressão aritmética (P.A), crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Neste critério, os juros somente incidem sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo).

Já o regime de capitalização composta incorpora ao capital não somente os juros referentes a cada período, mas também o juro sobre os juros acumulados até o momento anterior, comporta-se como uma progressão geométrica (P.G.), crescendo os juros de forma exponencial ao longo do tempo.

Sendo o regime de capitalização composta, reconhecidamente adotado por todo o mercado financeiro e de capitais, enquanto que o regime de capitalização simples tem aplicações práticas bastante limitadas.

Neste Capítulo, estudaremos o Regime de Capitalização Composta, que será de suma importância no desenvolvimento deste trabalho em especial para o entendimento do comportamento exponencial da inflação. Inicialmente apresentaremos as definições de capital, juro, taxa de juros, montante, valor nominal e taxas equivalentes, que são aplicados tanto nos juros simples como nos juros compostos, e em seguida estudaremos alguns dos principais conceitos e fórmulas utilizadas no Regime de Capitalização Composta, para isto, foram utilizadas às referências [1] e [10].

2.1. Conceitos Preliminares

No geral, trataremos de situações do tipo: Alguém dispõe de um Capital (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital de volta, acrescido de uma remuneração pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de Juro. Assim, utilizaremos os seguintes conceitos:

I. O capital (C) é o valor aplicado através de alguma operação financeira.

II. Juros (J) representa a remuneração do Capital empregado por período em atividades produtivas. Os juros geram um lucro ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por um determinado período.

III. Taxa de juros $(\boldsymbol{i})$ representa o percentual de ganho realizado durante certo período de tempo na aplicação de um capital em alguma operação de empréstimo ou aplicação. A taxa pode ser representada na forma percentual ou unitária.

   i. A taxa **percentual** refere-se ao valor dos juros para cada centésima parte do capital, ou seja, os juros são obtidos dividindo-se o capital por 100.

   ii. A taxa **unitária** reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo. (A transformação da taxa percentual em taxa unitária se dá simplesmente pela divisão da notação percentual por cem).

Exemplo 2.1.1: Qual o juro que rende um capital de \$ 2.000,00 aplicado por 1 ano à taxa de juros de 15% ao ano?

Solução1: Usando a taxa percentual, como o capital de \$ 2.000,00 tem vinte centos e cada um deles rende 15, temos que o valor dos juros é:

$$Juro = \frac{2.000,00}{100} \times 15$$

$$\Rightarrow Juro = 20,00 \times 15$$

$$\Rightarrow Juro = \$\,300,00.$$

Solução 2: Usando a taxa unitária, temos que 15% ao ano indica um rendimento de 0,15 (15/100) por unidade de capital aplicado, ou seja, o valor dos juros é:

$$Juro = 2.000{,}00 \times \frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow Juro = 2.000{,}00 \times 0{,}15$$

$$\Rightarrow \text{Juro} = \$\ 300{,}00.$$

Observação 2.1.1:

- A transformação percentual em unitária se dá pelo valor do percentual dividido por 100. Para a operação inversa, basta multiplicar a taxa unitária por 100.
- Na resolução dos exercícios deste trabalho, iremos utilizar a taxa na forma unitária.
- Ao utilizar as fórmulas de matemática financeira, a taxa de juros e o prazo devem estar na mesma unidade de tempo.

IV. Montante (M) é constituído do capital mais o valor do acumulado dos juros. Quando se aplica um capital a uma taxa periódica de juros por um determinado período, isto produz um acumulado que é denominado de *montante*, ou seja,

$$M = C + J.$$

V. Dizemos que duas taxas são equivalentes se, considerados o mesmo prazo de aplicação e o mesmo capital, for indiferente aplicar em uma ou em outra. Ou seja, considerando-se um mesmo capital aplicado por um mesmo intervalo de tempo a cada uma das taxas, ambas produzirão um mesmo montante se forem equivalentes.

VI. Valor Nominal é quanto vale um compromisso na data do seu vencimento.

2.2. Regime de Capitalização Composta

Conforme está mencionado, no regime de capitalização composta, ao final de cada período os juros são capitalizados, e o montante constituído é base para o cálculo de juros do período seguinte e assim sucessivamente, formando o chamado “juros sobre juros”. É um comportamento equivalente a uma progressão geométrica

(PG) no qual os juros incidem sempre sobre o saldo apurado no início do período correspondente.

2.2.1. Valor Futuro e Valor Presente

O valor futuro, representado pelas letras FV, corresponde ao valor do título em qualquer data que estamos considerando no momento. É o mesmo que montante, quando a data considerada for a do vencimento aplicado.

O valor presente, representado pelas iniciais PV, é o valor que um compromisso tem em uma data que antecede o seu vencimento. No período zero representa o capital inicial.

2.2.2. Fórmulas para determinar o Valor Futuro e o Valor Presente

No regime de juros compostos, por definição, os juros de cada período são obtidos pela aplicação dos juros, $\boldsymbol{i}$, sobre o valor do capital inicial do período de capitalização (ou sobre o capital acumulado no período imediatamente anterior). Assim, usando as definições apresentadas anteriormente de valor futuro (FV) e valor presente (PV), temos:

I. No 1º período de capitalização $(n = 1)$, temos:

- Capital no início do período = PV
- Juros do período = $PV \times i$
- Capital no final do período= $FV = PV + PV \times i = PV(1 + i)$.

II. No 2º período de capitalização $(n = 2)$, temos:

- Capital no início do período = $PV(1 + i)$
- Juros do período = $PV(1 + i) \times i$
- Capital no final do período= $FV = PV(1 + i) + PV(1 + i) \times i$

Colocando $PV(1 + i)$ em evidência, obtemos:

$$FV = PV(1 + i) \times (1 + i)$$

$$\Rightarrow FV = PV(1 + i)^2.$$

III. No 3º período de capitalização ($n = 3$), temos:

- Capital no início do período = $PV(1+i)^{2}$
- Juros do período = $PV(1+i)^{2} \times i$
- Capital no final do período= $FV = PV(1+i)^{2} + PV(1+i)^{2} \times i$

Colocando $PV(1+i)^{2}$ em evidência, obtemos:

$$FV = PV(1+i)^{2} \times (1+i)$$

$$\Rightarrow FV = PV(1+i)^{3}.$$

IV. No enésimo período de capitalização, seguindo de modo análogo, temos que o valor futuro FV, ou montante, resultante da aplicação de um determinado valor presente, PV, durante ***n*** períodos de capitalização, com taxa de juros ***i*** por período, no regime de juros compostos, é obtido pela expressão:

$$FV = PV \times (1+i)^{n}. \qquad (1)$$

Consequentemente, para se calcular o valor presente PV a partir do valor futuro FV, temos a seguinte expressão:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^{n}}.$$

Assim:

i. para se obter um Valor Futuro multiplica-se o valor presente pela expressão $(1+i)^{n}$, chamado de fator de capitalização (ou fator de Valor Futuro).
ii. para se obter um Valor Presente multiplica-se o Valor Futuro pela expressão $\frac{1}{(1+i)^{n}}$, chamado de fator de atualização (ou de fator Valor Presente).

Observação 2.2.1: Podemos demonstrar a igualdade (1) usando indução ou a fórmula do termo geral de uma PG (a demonstração será omitida).

Exemplo 2.2.1: Qual o valor de resgate de uma aplicação de $R\$\ 12.000{,}00$ em um título pelo prazo de 8 meses à taxa de juros composta de $3{,}5\%$ ao mês?

Solução: Temos,

$PV = \$\ 12.000{,}00$

$n = 8\ meses$

$i = 3{,}5\%\ ao\ mês (= 0{,}035\ ao\ mês)$

$FV = ??$

Como $FV = PV(1+i)^{n}$, obtemos:

$$FV = 12.000,00 \times (1+0,035)^{8}$$

$$\Rightarrow FV = 12.000,00 \times (1,035)^{8}$$

$$\Rightarrow FV = 12.000,00 \times 1,316809$$

$$\Rightarrow FV = \$\ 15.801,71.$$

Logo, o valor de resgate é $R\$\ 15.801,71$.

Exemplo 2.2.2: Um banco lança um título pagando 6% ao trimestre. Se uma pessoa necessita de $R\$\ 58.000,00$ daqui a 3 anos, quanto deverá aplicar neste título?

Solução: Temos,

$PV = ?$

$n = 3\ anos\ (= 12\ trimestres)$

$i = 6\%\ ao\ trimestre$

$FV = \$\ 58.000,00$

Como $PV = \frac{FV}{(1+i)^{n}}$, obtemos:

$$PV = \frac{58.000,00}{(1+0,06)^{12}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{58.000,00}{(1,06)^{12}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{58.000,00}{2,012196}$$

$$\Rightarrow PV = \$\ 28.824,22.$$

Logo, o valor que deve ser aplicado neste título é de $R\$\ 28.824,22$.

Exemplo 2.3.3: Um banco publica em suas agências o seguinte anúncio: “aplique $R\$\ 1.000,00$ hoje e receba $R\$\ 1.180,00$ ao final de 6 meses”. Determinar a taxa efetiva mensal oferecida por esta aplicação.

Solução: Temos,

$PV = \$1.000,00$

$n = 6\ meses$

$i = ?$

$FV = \$1.180,00$

Como $FV = PV(1+i)^{\,n}$, substituindo os valores dados no problema, obtemos:

$$1.180,00 = 1.000,00 \times (1+i)^{\,6}$$

$$\Rightarrow \frac{1.180,00}{1.000,00} = (1+i)^{\,6}$$

$$\Rightarrow 1,18 = (1+i)^{\,6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{1,18} = \sqrt[6]{(1+i)^6}$$

$$\Rightarrow 1,02797 = 1+i$$

$$\Rightarrow i = 0,02797$$

$$\Rightarrow i \cong 2,8\%\ a.m.$$

Logo, a taxa de juros ofertada por essa agência é de $2,80\%$ ao mês.

2.2.3. Taxas de Juros Equivalentes

As taxas de juros são equivalentes quando se tem o mesmo capital aplicado e no final do mesmo período de tempo, promovem a igualdade entre os montantes. A expressão da taxa equivalente de juros compostos é a média geométrica da taxa de juros do período inteiro, ou seja:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1,$$

onde q representa o número de períodos de capitalização.

Observação 2.2.2: A igualdade acima é equivalente à:

$$i = (i_q + 1)^{\frac{1}{q}} - 1.$$

Exemplo 2.2.4: Qual a taxa de juros compostos mensal equivalente a 25% ao ano?

Solução: Temos,

$i = 25\%\ ao\ ano$

$q = 1\ ano = 12\ meses$

Substituindo os valores na expressão $i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$, obtemos:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+0,25} - 1$$

$$\Rightarrow i_{12} = \sqrt[12]{1{,}25} - 1$$

$$\Rightarrow i_{12} \cong 0{,}01877$$

$$\Rightarrow i_{12} \cong 1{,}877\%\ ao\ mês.$$

Logo, a taxa anual de 25% é equivalente a taxa mensal de $1{,}877\%$.

Observação 2.2.3: Pela definição de taxas de juros equivalentes, aplicando as taxas de juros de 25% ao ano e $1{,}877\%$ ao mês ao mesmo capital e pelo mesmo período de tempo, elas irão produzir o mesmo montante. Consideremos, por exemplo, o capital de $\$10.000{,}00$ no período de 2 anos:

- Para a taxa mensal, temos:

  $i = 1{,}877\%\ ao\ mês(= 0{,}01877)$

  $n = 2\ anos\ (= 24\ meses)$

  $PV = \$10.000{,}00$

  Como $FV = PV(1 + i)^{\,n}$, obtemos:

$$FV = 10.000{,}00 \times (1 + 0{,}01877)^{\,24}$$

$$\Rightarrow FV = 10.000{,}00 \times 1{,}5625$$

$$\Rightarrow FV = \$\ 15.625{,}00.$$

- Para a taxa anual, temos:

  $i = 25\%\ ao\ ano(= 0{,}25)$

  $n = 2\ anos$

  $PV = \$10.000{,}00$

  Como $FV = PV(1 + i)^{\,n}$, obtemos:

$$FV = 10.000{,}00 \times (1 + 0{,}25)^{\,2}$$

$$\Rightarrow FV = 10.000{,}00 \times 1{,}5625$$

$$\Rightarrow FV = \$\ 15.625{,}00.$$

Logo, para um mesmo capital e prazo de aplicação o montante acumulado é o mesmo.

Exemplo 2.2.5: Calcular a taxa de juros compostos semestral equivalente a 34% ao ano.

Solução: Como queremos a taxa equivalente semestral, temos:

$i = 34\%\ a.a. = (0{,}34)$

$q = 1\ ano\ (= 2\ semestres)$.

Substituindo os valores na expressão $i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$, obtemos:

$$i_2 = \sqrt[2]{1+0{,}34} - 1 \Rightarrow i_2 = \sqrt[2]{1{,}34} - 1 \Rightarrow i_2 \cong 15{,}76\%\ a.s.$$

Logo, a taxa equivalente composta ao semestre é de $15{,}76\%$.

Observação 2.2.4: Podemos ter situações em que a taxa de juros aplicada não é a mesma durante todo o período da aplicação, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.2.6: Maria fez um investimento em uma aplicação por 1 ano. Sabendo que os juros dessa aplicação foram de 3% ao mês nos cinco primeiros meses e de $4{,}5\%$ ao mês nos meses seguintes, Calcule:

a) A taxa de juros equivalente anual
b) A taxa média de juros

Solução:

a) Temos,

$i_1 = 3\%\ ao\ mês\ \ (= 0{,}03)$

$i_2 = 4{,}5\%\ ao\ mês\ \ (= 0{,}045)$

$q = 1\ ano = 12\ meses$

Daí, temos que determinar a taxa de juros equivalente anual, que será denotado por i_a.

$$i_a = ??\ (\ taxa\ de\ juros\ equivalente\ anual)$$

Como, i_1 foi capitalizado em um período de 5 meses e i_2 no restante do ano (7 meses), temos:

$$i_a = [(1+i_1)^5 \times (1+i_2)^7] - 1$$

$$\Rightarrow i_a = [(1+0{,}03)^5 \times (1+0{,}045)^7] - 1$$

$$\Rightarrow i_a = [(1{,}1593) \times (1{,}3609)] - 1$$

$$\Rightarrow i_a = 0{,}577691 = 57{,}77\%\ a.a.$$

Logo, a taxa equivalente de juros anual é de $57{,}77\%$.

b) A taxa média de juros (taxa equivalente composta) é determinada pela expressão $i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$, neste caso a taxa de juros $i = i_a$. Temos:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}5777} - 1$$

$$\Rightarrow i_{12} = \sqrt[12]{1{,}5777} - 1$$

$$\Rightarrow i_{12} = 0{,}03873 = \ 3{,}87\%\ a.m.$$

Logo, a taxa média de juros mensal da aplicação de Maria vai ser de $3{,}87\%\ a.m.$

2.2.4. Equivalência Financeira em Juros compostos

Dois ou mais capitais, com datas de vencimento diferentes, são ditos capitais equivalentes (ou que há uma equivalência financeira) quando, transportados para uma mesma data, com a mesma taxa, produzem valores iguais. A equivalência financeira encontra diversas aplicações práticas, estando presente em planos de empréstimo, reescalonamento de dívidas, financiamentos e etc. Na capitalização composta, a equivalência financeira independe da data de comparação escolhida (chamada de data focal).

Exemplo 2.2.7: João tem as seguintes obrigações financeiras com Carlos

- Dívida de $R\$\ 16.300{,}00$ vencível no fim de um mês.
- Dívida de $R\$\ 23.500{,}00$ vencível no fim de 5 meses.
- Dívida de $R\$\ 20.000{,}00$ vencível no fim de 10 meses.

Prevendo dificuldade no pagamento desses compromissos, João propõe substituir este plano original por dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro de hoje a 12 meses e o segundo no fim de 15 meses. Determinar o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de $2{,}5\%$ ao mês.

Solução: Admitindo que a data de comparação escolhida seja o momento atual (data zero), tem-se:

- Data Focal = *0*

  Neste caso, por definição de equivalência financeira, a soma dos três pagamentos propostos inicialmente na data zero, deve ser igual a soma dos dois pagamentos propostos posteriormente, também na data zero, ou seja,

$$\frac{16.300,00}{(1,025)}+\frac{23.500,00}{(1,025)^5}+\frac{20.000,00}{(1,025)^{10}}=\frac{X}{(1,025)^{12}}+\frac{X}{(1,025)^{15}}$$

$$\Rightarrow 15.902,43+20.770,58+15.623,97=0,7436X+0,6905X$$

$$\Rightarrow 1,4341X=52.296,98$$

$$\Rightarrow X=\frac{52.296,98}{1,4341}$$

$$\Rightarrow X=36.466,76.$$

Logo, o valor de cada um dos dois pagamentos a serem pagos nesse novo plano é de $R\$\,36.466,76$.

3. INFLAÇÃO

A inflação significa um aumento generalizado dos preços de bens e serviços. Quando os preços de alguns itens aumentam, isso não significa de certo modo um aumento na inflação, por exemplo, o milho teve um aumento de duas vezes no preço em comparação às semanas anteriores, porém, isso não quer dizer que o aumento está relacionado diretamente à inflação, já que pode estar relacionada a outros fatores, como o aumento ou redução do período chuvoso, pragas, provocando uma alta demanda e uma baixa oferta. Assim, podemos destacar que o conceito de inflação não diz respeito ao aumento de apenas um bem e serviço, e sim uma média da maioria dos produtos e serviços consumidos ao longo de um determinado período.

Uma inflação muito elevada desvaloriza o valor da moeda e reduz o poder de compra da população. Para medir a inflação são considerados os preços atuais de diversos bens e serviços e os mesmo serão comparados com o de um período anterior, este tipo medida mostra o crescimento dos preços em sua forma percentual. Quando a média de preços atuais são superiores que a do período anterior, se dá a inflação e quando se tem o inverso se dá a deflação.

Neste Capítulo temos como principal objetivo observar o comportamento exponencial da inflação, o que ocorre com a taxa de juros em um ambiente inflacionado e a desvalorização da moeda como um efeito recorrente da inflação. Estudaremos a Inflação, apresentaremos alguns dos índices de preços utilizados no Brasil e a matemática financeira aplicada a um ambiente inflacionado. Para isto utilizamos as referências [1], [2] e [6].

3.1. Índice de preços e taxas de inflação

Um índice de preços é resultante de um procedimento estatístico que, entre outras aplicações, permite medir as variações ocorridas nos níveis gerais de preços de um período para o outro. O índice de preço representa uma média global das variações de preços que se verificaram num conjunto de determinados bens ponderada pela quantidade respectiva.

Para se medir a inflação, é preciso se considerar o público alvo que será estudado como os bens e serviços por elas adquiridos. No Brasil existem inúmeros índices de preços, sendo originados de amostragens e critérios desiguais e elaborados por diferentes instituições de pesquisa. Segundo o Banco Central do Brasil (BCB) essa vasta variedade de índices se dá pelo processo inflacionário vivido entre os anos 70 e meados de 90 que levou a necessidade de índices de preços mais específicos para cada propósito. Sendo alguns desses tipos de índices:

i) **Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)**: "O IPCA tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias, cujo rendimento varia entre 1 e 40 salários mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos." (IBGE).

ii) **Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)**: "O INPC tem por objetivo a correção do poder de compra dos salários, através da mensuração das variações de preços da cesta de consumo da população assalariada com mais baixo rendimento." (IBGE).

iii) **Índice Geral de Preços - Mercado (IGP-M):** "O Índice Geral de Preços do Mercado, calculado pela Fundação Getúlio Vargas - FGV, é formado por três índices diversos que medem os preços por atacado (IPA-M), ao consumidor (IPC-M), e de construção (INCC)." (IBGE).

A taxa de inflação (I) pode ser medida a partir dos índices de preços, pela seguinte expressão:

$$I = \frac{P_n}{P_{n-t}} - 1.$$

Onde:

I = taxa de inflação obtida a partir de determinado índice de preços;

P = índice de preços utilizado para o cálculo da taxa de inflação;

$n, n - t$ = respectivamente, data de determinação da taxa de inflação e o período anterior considerado.

Exemplo 3.1.1: Sabendo que os índices gerais de preços (IGP) referentes aos seis primeiros meses de determinado ano no Brasil foram:

	Dez./X8	*Jan./X9*	*Fev../X9*	*Mar./X9*	*Abr./X9*	*Maio./X9*	*Jun./X9*
IGP	$107,325$	$108,785$	$110,039$	$112,035$	$114,614$	$115,071$	$118,090$

Pede-se calcular:

a) Taxa de inflação dos meses de janeiro, fevereiro e março de X9;
b) Inflação do primeiro trimestre de x9;
c) Taxa de inflação do semestre;
d) Considerando de $2{,}24\%$ a inflação de julho, apurar o IGP do mês.

Solução:

a) A taxa de inflação do mês de janeiro medida pelo IGP está refletida na evolução apresentada no índice do mês dez./x8 e no mês de jan./x9. Assim, utilizando a fórmula de inflação temos:

$$Inflação\ de\ janeiro = \frac{IGP\ (Janeiro\ x9)}{IGP\ (Dezembro\ x8)} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ janeiro = \frac{108{,}785}{107{,}325} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ janeiro = 1{,}01360 - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ janeiro = 0{,}01360$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ janeiro = 1{,}36\%.$$

Logo, a inflação verificada no mês de janeiro foi de $1{,}36\%$.

A taxa de inflação do mês de fevereiro, seguindo o mesmo raciocínio, é medida da seguinte forma:

$$Inflação\ de\ fevereiro = \frac{IGP\ (fevereiro\ x9)}{IGP\ (Janeiro\ x9)} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ fevereiro = \frac{110{,}039}{108{,}785} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ fevereiro = 1{,}0115273 - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ fevereiro = 0{,}0115273$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ fevereiro = 1{,}15\%.$$

Logo, a inflação verificada no mês de fevereiro foi de $1{,}15\%$.

A taxa de inflação do mês de março, seguindo o mesmo raciocínio, é medida da seguinte forma:

$$Inflação\ de\ março = \frac{IGP\ (março\ x9)}{IGP\ (fevereiro\ x9)} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ março = \frac{112,035}{110,039} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ março = 1,01814 - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ março = 0,01814$$

$$\Rightarrow Inflação\ de\ março = 1,81\%.$$

Logo, a inflação verificada no mês de março foi de $1,81\%$.

b) A taxa de inflação do trimestre medida pelo IGP está refletida na evolução apresentada no índice do mês de dez./x8 (início do trimestre) e no mês de Mar./x9. Assim, utilizando a fórmula de inflação temos:

$$Inflação\ do\ trimestre = \frac{IGP\ (março\ x9)}{IGP\ (dezembro\ x8)} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ trimestre = \frac{112,035}{107,325} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ trimestre = 1,04388 - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ trimestre = 0,04388$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ trimestre = 4,38\%.$$

Logo, a inflação no trimestre foi de $4,38\%$.

c) A taxa de inflação do semestre, de modo análogo ao que fizemos no item (b), é dada por:

$$Inflação\ do\ semestre = \frac{IGP\ (junho\ x9)}{IGP\ (dezembro\ x8)} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ semestre = \frac{118,090}{107,325} - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ semestre = 1,100303 - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ semestre = 0,100303.$$

$$\Rightarrow Inflação\ dosemestre = 10,03\%.$$

Logo, a inflação no semestre foi de $10,03\%$.

d) A partir dos dados da questão podemos determinar o valor do IGP do mês de julho utilizando a fórmula de inflação $I = \frac{P_n}{P_{n-t}} - 1$,ou seja, como

$$Inflação\ de\ julho = \frac{IGP\ (julho\ x9)}{IGP\ (junho\ x9)} - 1,$$

Onde:

$$Inflação\ de\ julho = 2{,}24\% \text{ e } IGP\ (junho\ x9) = 118{,}090.$$

Daí:

$$0{,}0224 = \frac{IGP\ (julho\ x9)}{118{,}090} - 1$$

$$\Rightarrow 1{,}0224 = \frac{IGP\ (julho\ x9)}{118{,}090}$$

$$\Rightarrow 1{,}0224 \times 118{,}090 = IGP\ (julho\ x9)$$

$$\Rightarrow IGP\ (julho\ x9) = 120{,}735.$$

Logo, o IGP do mês de julho foi de $120,735$.

3.2. Valores monetários em inflação

Ao se relacionar valores monetários em diferentes períodos em condição de inflação, temos que levar em consideração o problema dos diferentes níveis de poder aquisitivo da moeda. Sendo assim, temos que considerar o valor real da moeda em diferentes períodos para associar lucro real em algumas transações financeiras.

Por exemplo, suponhamos que uma pessoa comprou um imóvel por \$80.000,00 e após quatro anos o vendeu por $\$105.000{,}00$. Sendo que nesse período de quatro anos a inflação atingiu 35%.

Se não levarmos em conta a inflação do período, poderíamos analisar o lucro da seguinte forma: Lucro = Valor de Venda – Valor de compra, isto é,

$$Lucro\ = \$\,105.000{,}00 - \$\,80.000{,}00\ =\ \$\,25.000{,}00.$$

Mas, ao se conhecer que os preços cresceram em média 35% no período. O lucro relacionado acima terá sido aparente (nominal) e não o ganho real da venda, pois é determinado pela evolução dos preços e não por uma valorização real (acima da inflação) do imóvel vendido.

Para que ocorra lucro real o valor do imóvel deveria ser vendido por um preço de 35% maior que o valor de compra efetuado há quatro anos. Ou seja, o valor teria que ser de no mínimo: $\$\ 80.000{,}00\ \times (1 + 0{,}35) = \$\ 108.000{,}00$, somente acima desse valor é que existe legitimamente lucro. Portanto, como o imóvel foi vendido por $\$105.000{,}00$, o exemplo indica um prejuízo real de $\$\ 3.000{,}00$.

Os ajustes para se conhecer a evolução real de valores monetários em inflação, se processam mediante a indexação (inflacionamento) e desindexação (deflacionamento) dos valores nominais, os quais se processam por meio de índices de preços, onde:

I. A **Indexação** consiste em corrigir valores nominais de uma data em moeda representativa de mesmo poder de compra em momento posterior.
II. A **Desindexação** envolve transformar valores nominais em moeda respectiva de mesmo poder de compra num momento anterior.

Para calcular o ganho nominal utilizamos a seguinte expressão:

$$Ganho\ nominal = \frac{Valor\ de\ venda}{Valor\ de\ compra} - 1.$$

Calculando o ganho nominal da compra e venda efetuada no exemplo, onde o valor de venda foi de $105.000,00 e o valor de compra foi de $80.000,00, tem-se:

$$Ganho\ nominal = \frac{\$\ 105.000{,}00}{\$\ 80.000{,}00} - 1 = 31{,}25\%.$$

O que significa que o imóvel foi vendido por $1,3125$ vezes o seu valor de compra, equivalentemente, o lucro (ganho nominal) dessa venda foi de $31{,}25\%$. No entanto, o ganho nominal compara os valores de diferentes datas com capacidades de compra desiguais. Para se conhecer o resultado real da operação, precisamos expressar os valores monetários dos respectivos valores de compra e de venda, em um mesmo momento. Onde:

i. ao indexar os valores para a data da venda, temos a seguinte expressão para o cálculo do ganho real:

$$Ganho\ Real = \frac{Preço\ de\ venda\ na\ data\ da\ venda}{Preço\ de\ compra\ corrigido\ para\ data\ da\ venda} - 1.$$

ii. Ao desindexar os valores para a data da compra, temos a seguinte expressão para o cálculo do ganho real

$$Ganho\ Real = \frac{Preço\ de\ venda\ corrigido\ para\ data\ da\ compra}{Preço\ de\ compra\ na\ data\ da\ compra} - 1.$$

Assim, no exemplo dado, transportando o preço de compra para a data da venda, ou seja, indexando os valores para a data da venda e admitindo a inflação do período que é de 35%, tem-se:

$$Ganho\ Real = \frac{Preço\ de\ venda\ na\ data\ da\ venda}{Preço\ de\ compra\ corrigido\ para\ data\ da\ venda} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \frac{\$\ 105.000{,}00}{\$\ 80.000{,}00 \times 1{,}35} - 1$$

$$\Rightarrow GanhoReal = \frac{\$\ 105.000{,}00}{\$\ 108.000{,}00} - 1 = -2{,}78\%.$$

Logo, o ganho real representa uma evolução negativa de $2{,}78\%$

Do mesmo modo, transportando o preço do imóvel para o período de compra, ou seja, ao desindexar o valor atual da moeda para um valor equivalente no período da compra do imóvel, e admitindo que a inflação do período é de 35%, obtém-se:

$$Ganho\ Real = \frac{Preço\ de\ venda\ corrigido\ para\ data\ da\ compra}{Preço\ de\ compra\ na\ data\ da\ compra} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \frac{\$\ 105.000{,}00/(1{,}35)}{\$\ 80.000{,}00} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \frac{\$\ 77.777{,}77}{\$\ 80.000{,}00} - 1 = -2{,}78\%.$$

Podemos notar que no processo de indexação e desindexação apura-se que no exemplo temos um prejuízo real de $2{,}78\%$ ocasionado pelos efeitos da inflação.

Exemplo 3.2.1: Um imóvel foi adquirido por $\$ \, 3.000{,}00$ em determinada data, sendo vendido por $\$ \, 30.000{,}00$ quatro anos depois. Sendo a taxa de inflação equivalente em cada um desses anos de 100%, determinar a rentabilidade nominal e real anual desta operação.

Solução:

A partir da expressão $Ganho\ nominal = \frac{Valor\ de\ venda}{Valor\ de\ compr} - 1$, pode-se calcular o ganho nominal da operação. Ou seja,

$$Ganho\ nominal = \frac{30.000{,}00}{3.000{,}00} - 1$$

$$Ganho\ nominal = 9\ ou\ 900\%.$$

Como esse ganho nominal é para 4 anos e queremos calcular a rentabilidade nominal anual dessa operação, para encontrá-la, iremos utilizar a expressão de taxa equivalente do regime de capitalização composto $i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$, já que a inflação também se comporta de forma exponencial. Daí, como $i = 900\%$ e $q = 4$, temos

$$i_4 = \sqrt[4]{1+9} - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = 1{,}7783 - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = 0{,}7783 = 77{,}83\%\ a.a.$$

Logo, a rentabilidade nominal anual é de $77{,}83\%$.

Agora, para calcular o rendimento real, podemos utilizar a expressão abaixo:

$$Ganho\ Real = \frac{Preço\ de\ venda\ na\ data\ da\ venda}{Preço\ de\ compra\ corrigido\ para\ data\ da\ venda} - 1.$$

Assim,

$$Ganho\ Real = \frac{30.000{,}00}{3.000{,}00 \times (1+i)^4} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \frac{30.000{,}00}{3.000{,}00 \times (1+1)^4} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \frac{30.000{,}00}{48.000{,}00} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \ 0{,}625 - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real = \ -0{,}375 = -37{,}5\%$$

Ou seja, o ganho real na realidade foi um prejuízo de $37{,}5\%$.

Finalmente, utilizando novamente a expressão de taxa equivalente do regime de capitalização composto $i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$, com $i = -37{,}5\%$ e $q = \ 4$, temos que a rentabilidade real anual é de:

$$i_4 = \sqrt[4]{1 + (-0{,}375)} - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{0{,}625} - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = 0{,}8891 - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = -0{,}1109 = -11{,}09\%$$

Logo, a rentabilidade real anual foi um prejuízo de $11{,}09\%$.

3.3. Comportamento exponencial da taxa de inflação

O comportamento da inflação se processa de maneira exponencial da mesma forma como ocorre no regime de capitalização composta, onde vimos no capítulo anterior que ao final de cada período os juros são capitalizados, e o montante constituído é base para o cálculo de juros do período seguinte e assim sucessivamente, formando o chamado “juros sobre juros”.

Por exemplo, um ativo de $\$\ 20.000{,}00$ depositado em um banco e sendo de $4{,}5\%$, 2% e $3{,}8\%$, a taxa de inflação de três meses consecutivos de um mesmo ano. Se este valor for corrigido plenamente pela inflação da economia, apresentaria os seguintes valores ao final de cada um dos meses:

$$1^{\underline{o}}\ m\hat{e}s{:}\ \$\ 20.000{,}00 \times 1{,}045 = \$\ 20.900{,}00.$$

$$2^{\underline{o}}\ m\hat{e}s{:}\ \$\ 20.900{,}00 \times 1{,}020 = \$\ 21.318{,}00.$$

$$3^{\underline{o}}\ m\hat{e}s{:}\ \$\ 21.318{,}00 \times 1{,}038 = \$\ 22.128{,}08.$$

Daí, podemos notar que o incremento (crescimento) do valor do ativo no banco no trimestre é de $\frac{\$\ 22.128{,}08}{\$\ 20.000{,}00} - 1 \cong 10{,}64\%$. De fato, no regime de capitalização composta temos $FV = PV(1+i)^n$, como o prazo é de 1 trimestre, $FV = 22.128{,}08$ (valor acumulado ao final de 1 trimestre) e $PV = 22.000{,}00$ (capital inicial), temos:

$$22.128{,}00 = 20.000(1+i)^1$$

$$\Rightarrow 1 + i = \frac{22.128{,}08}{20.000{,}00}$$

$$\Rightarrow i = \frac{22.128{,}08}{20.000{,}00} - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 10{,}64\%$$

Este valor equivale ao produto das taxas mensais da inflação, ou seja, a taxa de inflação trimestral equivalente, que é dada por:

$$Inflação\ do\ trimestre\ (I) = [(1+0{,}045) \times (1+0{,}020) \times (1+0{,}038)] - 1$$

$$\Rightarrow Inflação\ do\ trimestre\ (I) = [(1{,}045) \times (1{,}020) \times (1{,}038)] - 1 \cong 10{,}64\%$$

Já a taxa média mensal de inflação do exemplo é apurada da seguinte forma:

$$Taxa\ Equivalente\ Mensal\left(I_q\right) = \sqrt[3]{(1{,}045) \times (1{,}020) \times (1{,}038)} - 1$$

$$\Rightarrow Taxa\ Equivalente\ Mensal\left(I_q\right) = \sqrt[3]{1{,}1064} - 1$$

$$\Rightarrow Taxa\ Equivalente\ Mensal\left(I_q\right) \cong 3{,}43\%.$$

Podemos notar que para as taxas equivalentes de inflação e do regime de capitalização composta são validos os mesmos conceitos e expressões.

Exemplo 3.3.1: Sendo de $1.183{,}5\%$ a inflação de determinado ano, calcular a taxa média equivalente mensal.

Solução: Temos que a taxa de inflação anual é $I = 1.183{,}5\%\ a.a\ (11{,}835)$. Daí, usando a fórmula de taxa equivalente mensal em inflação $I_q = \sqrt[q]{1+I} - 1$, (que é a mesma utilizada no regime de capitalização composta) obtemos:

$$I_{12} = \sqrt[12]{1 + 11{,}835} - 1$$

$$\Rightarrow I_{12} = \sqrt[12]{12{,}835} - 1$$

$$\Rightarrow I_{12} = 0{,}2370\ ou\ 23{,}7\%\ a.m.$$

Logo, a taxa média mensal de inflação é de $23{,}7\%$.

Exemplo 3.3.2: Até abril de um ano, a inflação atingiu $4{,}4\%$. Mantendo-se em $1{,}1\%$ a taxa mensal até o fim do ano, calcular a inflação acumulada do período.

Solução: Temos,

$$i_1 = 4{,}4\% \; para \; 4 \; meses (taxa \; acumulada \; de \; janeiro \; a \; abril)$$
$$i_2 = 1{,}1\% \; ao \; mês \; (taxa \; para \; cada \; um \; dos \; meses \; de \; maio \; a \; dezembro)$$

A taxa de inflação equivalente do período é:

$$I = [(1 + i_1) \times (1 + i_2)^8] - 1$$

$$\Rightarrow I = [(1 + 0{,}044) \times (1 + 0{,}011)^8] - 1$$

$$\Rightarrow I = [(1{,}044) \times (1{,}09146)] - 1$$

$$\Rightarrow I = 1{,}13948 - 1$$

$$\Rightarrow I = 0{,}13948 \cong \; 13{,}95\%.$$

Logo, a taxa anual de inflação é de $13{,}95\%$.

3.4. Taxa de desvalorização da moeda

A taxa de desvalorização da moeda (TDM) mede a queda do poder de compra da moeda causada pelo aumento de preços gerados pela inflação.

Com a taxa de inflação do período (mês, ano, trimestre e etc.) podemos obter a taxa de desvalorização da moeda (TDM) a partir da seguinte fórmula:

$$TDM = \frac{I}{1 + I},$$

Sendo I a taxa de inflação do período.

Exemplo 3.4.1: Com uma inflação de 15% no ano x6 determine a desvalorização da moeda nesse período.

Solução: Como $I = 15\% \; ao \; ano$ e $TDM = \frac{I}{1+I}$, temos:

$$TDM = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}15}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{0{,}15}{1{,}15}$$

$$\Rightarrow TDM \cong 0{,}1304 = 13{,}04\%.$$

Logo, a redução do poder de compra da moeda no ano x6 é de $13{,}04\%$, ou seja, com a da taxa de inflação a 15% as pessoas adquirem $13{,}04\%$ menos bens e serviços que costumavam consumir.

Podemos assim concluir que quanto maior a taxa de inflação, evidentemente maior será a taxa de desvalorização da moeda, definindo um menor poder de compra.

Exemplo 3.4.2: Sendo de $2{,}2\%$ a taxa de inflação de determinado mês e de $1{,}8\%$ a taxa do mês seguinte, determinar a redução do poder de compra verificada no bimestre.

Solução: Temos que,

$Inflação\ do\ primeiro\ mês\ (I_{m1})\ =\ 2{,}2\%\ (0{,}022)$

$Inflação\ do\ segundo\ mês\ (I_{m2}) =\ 1{,}8\%\ (0{,}018)$

$Inflação\ do\ bimestre\ (I_{BIM}) = ??$

$TDM\ = ??$

Primeiramente, temos que determinar a taxa de inflação do bimestre, que é dada por:

$$Inflação\ do\ bimestre\ (I_{BIM}) =\ [(1 + I_{m1}) \times (1 + I_{m2})] - 1$$

$$\Rightarrow I_{BIM} =\ [(1{,}022) \times (1{,}018)] - 1$$

$$\Rightarrow I_{BIM} =\ 0{,}040396 = 4{,}0396\%.$$

Daí, podemos determinar a redução do poder aquisitivo (TDM) no bimestre, que é dada por:

$$TDM = \frac{I_{BIM}}{1 + I_{BIM}}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{0{,}040396}{1{,}040396}$$

$$\Rightarrow TDM \cong 0{,}0388 = 3{,}88\%.$$

Logo, a redução do poder aquisitivo no bimestre é de $3,88\%$.

3.5. Inflação e prazo de pagamento

Podemos aplicar o conceito da taxa de desvalorização da moeda na prática para efetuar o cálculo da perda do poder de compra do dinheiro nas operações de venda a prazo. Pelo simples fato que o dinheiro tem um valor diferente no decorrer do tempo, motivado pelas taxas de juros e inflação.

Exemplo 3.5.1: Considere uma venda de uma loja no valor de $\$\,5.000,00$ para o recebimento em 30 dias. Sendo de 8% a taxa de inflação do período, determine a perda inflacionária assumida pela loja nessa operação.

Solução: Como $I = 8\%$, a taxa de desvalorização da moeda é dada por:

$$TDM = \frac{I}{I+1}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{0,08}{1,08} \cong 0,074 = 7,4\%.$$

Isto significa que, no recebimento do dinheiro, ao final de 30 dias, seu poder efetivo de compra reduziu-se em $7,4\%$. Logo, o poder de compra reduziu-se para $92,6\%$, originando uma perda no valor de: $\$\,5.000,00 \times 0,074 = \$\,370$. Essa perda se dá pelo aumento nos níveis gerais de preços.

Observação 3.5.1: Neste exemplo, a desvalorização de $7,4\%$ também pode ser interpretada como desconto máximo que a empresa poderia conceder para pagamento imediato (á vista), ou seja, para tornar equivalente a venda à vista ou para recebimento em 30 dias.

3.6. Taxa Nominal e Taxa Real

"A taxa nominal de juros é aquela adotada normalmente nas operações correntes de mercado, incluindo os efeitos inflacionários previstos para o prazo da operação. Constitui-se em outras palavras, numa taxa prefixada de juros, que incorpora as expectativas da inflação" (Assaf Neto, 2012, p.68).

Em contexto inflacionário, ainda devem ser identificadas na taxa nominal (prefixada) uma parte devida à inflação e outra definida como legítima, real, que reflete “realmente” os juros que foram pagos ou recebidos.

A taxa real denota o resultado apurado de uma operação financeira livre dos efeitos inflacionários. A fórmula de apuração da taxa real é a seguinte:

$$Taxa\,real\ (r) = \frac{1 + Taxa\ nominal\ (i)}{1 + Taxa\ de\ inflação\ (I)} - 1.$$

O objetivo do cálculo da taxa real (r) é expressar o juro real de uma operação retirando da taxa nominal de juros os efeitos da inflação.

Por exemplo, uma aplicação no valor de $\$\ 300.000{,}00$ num título por um período de 3 meses a taxa nominal de juros de 6% a.t. Sendo de 4% a inflação nesse mesmo período. Temos que, o rendimento nominal dessa aplicação foi de $\$\ 18.000{,}00\ (6\% \times \$\ 300.000{,}00)$ no período, totalizando um montante de $\$\ 318.000{,}00$.

Podemos notar que o rendimento nominal de $\$\ 18.000{,}00$ não representa um lucro real, pois, no mesmo período houve uma taxa de inflação de 4%. Para que haja um lucro o valor do montante no final do período deve ultrapassar $\$\ 312.000{,}00\ (1{,}04 \times \$\ 300.000{,}00)$, pois como a inflação é de 4%, este é o valor do capital acumulado do aplicador para manter inalterado o seu poder de compra, isso mostra que o rendimento real dessa operação foi de $\$\ 6.000{,}00\ (\$318.000{,}00\ -\ \$312.000{,}00)$.

Em termos percentuais, o retorno real da operação é determinado pela relação entre o lucro (ganho) e o valor aplicado, ambos expressos em moeda de mesmo poder de compra, assim a rentabilidade real é:

$$Rentabilidade\ real\ (r) = \frac{\$\ 6.000{,}00}{\$\ 300.000{,}00 \times 1{,}04} \cong 0{,}0192\ ou\ 1{,}92\%\ a.t.$$

Para determinar a taxa real, também utilizamos a fórmula abaixo:

$$Taxa\,real\ (r) = \frac{1 + Taxa\ nominal\ (i)}{1 + Taxa\ de\ inflação\ (I)} - 1.$$

No exemplo citado, utilizando a fórmula de taxa real diretamente obtemos:

$$Taxa\ real\ (r) = \frac{1 + Taxa\ nominal\ (i)}{1 + Taxa\ de\ inflação\ (I)} - 1$$

$$\Rightarrow Taxa\ real\ (r) = \frac{1 + 0{,}06}{1 + 0{,}04} - 1$$

$$\Rightarrow Taxa\ real\ (r) = \frac{1{,}06}{1{,}04} - 1$$

$$\Rightarrow Taxa\ real\ (r) \cong 0{,}0192\ ou\ 1{,}92\%.$$

Logo, o ganho real da aplicação foi de $1{,}92\%$ a.t.

Note que $\left(\frac{1{,}06}{1{,}04} - 1\right) \times 32.000 = 615{,}00$ que é exatamente o valor do ganho real da operação. (Se fizermos $32.000 \times 0{,}0192$ iremos obter aproximadamente $615{,}00$ pois a taxa real obtida é de aproximadamente $1{,}92\%$).

A partir da identidade da taxa real, pode-se calcular tanto a taxa nominal como a taxa de inflação, que são, respectivamente, dadas por

$$i = (1 + r) \times (1 + I) - 1 \text{ e } I = \frac{(1+i)}{(1+r)} - 1.$$

De fato, como vimos que $Taxa\ real\ (r) = \frac{1+Tax\ \ nominal\ (i)}{1+Tax\ \ de\ inflação\ (I)} - 1$, temos:

- $r = \frac{1+i}{1+I} - 1 \Leftrightarrow 1 + r = \frac{1+i}{1+I} \Leftrightarrow 1 + i = (1 + r) \times (1 + I)$

$$\Leftrightarrow i = (1 + r) \times (1 + I) - 1.$$

- $r = \frac{1+i}{1+I} - 1 \Leftrightarrow 1 + r = \frac{1+i}{1+I} \Leftrightarrow 1 + i = (1 + r) \times (1 + I)$

$$\Leftrightarrow 1 + I = \frac{1 + i}{1 + r} \Leftrightarrow I = \frac{1 + i}{1 + r} - 1.$$

Observação 3.6.1: A taxa de real também pode ser negativa, caso a inflação do período seja maior que a variação nominal dos juros. Causando uma perca no poder de compra da moeda.

Exemplo 3.6.1: Uma pessoa levanta um empréstimo para ser liquidado ao final de 4 meses, pagando uma taxa real de juros de 20% ao ano. Determinar a taxa nominal equivalente mensal de juros desta operação ao se prever, para cada um dos meses considerados, respectivamente, as seguintes taxas de inflação: $1{,}5\%,\ 1{,}2\%,\ 2{,}2\%$ e $1{,}7\%$.

Solução: Primeiramente, temos que calcular a taxa real de juros (r) e a taxa de inflação (I) no quadrimestre, logo:

- Taxa de juro real no quadrimestre: Como a taxa de juros é $r = 20\%\ a.a.$, usando as fórmulas de taxas equivalentes, temos que a taxa real equivalente quadrimestral é:

$$r_3 = \sqrt[3]{1 + 0{,}20} - 1$$
$$\Rightarrow r_3 \cong 0{,}0626586\ ou\ 6{,}27\%\ a.q.$$

- Taxa de Inflação no quadrimestre: Usando as definições já estudadas, a taxa de inflação equivalente quadrimestral é:

$$I = [(1{,}015) \times (1{,}012) \times (1{,}022) \times (1{,}017)] - 1$$
$$\Rightarrow I = 1{,}0676241 - 1$$
$$\Rightarrow I \cong 0{,}0676241\ ou\ 6{,}76\%\ a.q.$$

Assim, como a taxa de juro nominal equivalente é dada pela expressão:

$$i = [(1 + r) \times (1 + I)] - 1,$$

A taxa de juros nominal equivalente quadrimestral é:

$$i = [(1 + 0{,}0626586) \times (1 + 0{,}0676241)] - 1$$
$$\Rightarrow i = 1{,}13451993 - 1$$
$$\Rightarrow i \cong 0{,}13451993\ ou\ 13{,}45\%\ a.q.$$

Daí, temos que a taxa de juro nominal equivalente mensal é:

$$i_4 = \sqrt[4]{0{,}13451993 + 1} - 1$$

$$\Rightarrow i_4 = 1{,}0320555 - 1$$

$$\Rightarrow i_4 \cong 0{,}0320555\ ou\ 3{,}2\%\ a.m.$$

Logo, a taxa nominal de juros é de $3{,}2\%\ a.m.$

3.7. Taxa referencial – TR e Caderneta de Poupança

A taxa referencial (TR) é apurada e calculada pelo Banco Central do Brasil a partir das taxas de juros prefixadas praticadas pelos bancos na colocação de títulos de sua emissão e por um redutor que segue, em essência, os critérios de política econômica e competência do Banco Central. A taxa referencial é utilizada como um indexador em diversos contratos de financiamento, aplicação financeiras, títulos públicos, rendimento do FGTS, caderneta de poupança entre outros.

O Banco Central obedece à seguinte metodologia de apuração para calcular a TR:

- diariamente, os principais bancos captadores de recursos informam ao Banco Central suas taxas de juros pagas aos aplicadores em certificados e recibos de depósitos bancários (prefixados), de emissão de 30 a 35 dias;
- o Banco Central calcula então a média ponderada dos juros pagos pelo mercado bancário, sendo esta taxa média conhecida por Taxa Básica Financeira (TBF). A TBF representa, dessa forma, o custo médio de captação dos bancos na colocação de seus títulos de renda fixa no mercado;
- sobre a taxa básica financeira, o Banco Central aplica um redutor obtendo assim a Taxa Referencial (TR).

Quando o Banco Central eleva o valor do redutor, ocasiona em um menor custo ao tomador de empréstimo corrigido pelo TR e também ocasiona em uma redução dos rendimentos das cadernetas de poupança. Quando se diminui o redutor, ocasiona em uma elevação do empréstimo indexado à TR e um aumento no rendimento da poupança.

A caderneta de poupança por conta da sua praticidade e liquidez se tornou o tipo de aplicação mais popular do mercado.

A remuneração da caderneta de poupança está atualmente fixada pela TR mais $0,5\%\ a.m.$ de juros, sendo creditada mensalmente para os depositantes pessoas físicas. O cálculo dos rendimentos tem por base sempre o menor saldo mantido pelo aplicador no período.

Exemplo 3.7.1: Admita uma aplicação de R$5.000,00 em caderneta de poupança por 3 meses. A TR definida para cada mês (na data do aniversário) é a seguinte:

Mês 1: $0,5843\%$

Mês 2: $0,7231\%$

Mês 3: $0,6081\%$.

Determinar:

a) O saldo disponível do aplicador ao final de cada período.
b) A rentabilidade efetiva da operação.

Solução:

a) Vimos que a remuneração da Caderneta de Poupança é formada pelo TR, definida para a data de aniversário, mais juros de $0{,}5\% a.m.$. Daí, utilizando as fórmulas de juros compostos, temos que
   - Ao final do Mês 1, o saldo (montante acumulado) é

$$FV_1 = 5.000\left(1 + \underbrace{0{,}005843}_{TR\ do\ Mês\ 1}\right)(1 + 0{,}005) = 5.054{,}36.$$

   - Ao final do Mês 2, o saldo (montante acumulado) é

$$FV_2 = FV_1\left(1 + \underbrace{0{,}007231}_{TR\ do\ Mês\ 2}\right)(1 + 0{,}005) = 5.116{,}36.$$

   - Ao final do Mês 3, o saldo (montante acumulado) é

$$FV_3 = FV_2\left(1 + \underbrace{0{,}006081}_{TR\ do\ Mês\ 3}\right)(1 + 0{,}005) = 5.173{,}21.$$

b) Para determinar a rentabilidade efetiva (mensal) da operação, primeiro iremos determinar a rentabilidade acumulada do período (3 meses), que é dada por

$$i = \left[\left(1 + \underbrace{0{,}005843}_{TR\ do\ Mês\ 1}\right).\left(1 + \underbrace{0{,}007231}_{TR\ do\ Mês\ 2}\right).\left(1 + \underbrace{0{,}006081}_{TR\ do\ Mês\ 3}\right).(1 + 0{,}005)^3\right] - 1$$

$$\Rightarrow i = 0{,}0346 = 3{,}46\%\ ao\ trimestre.$$

Logo, a rentabilidade efetiva mensal é de

$$i = \sqrt[3]{1 + 0{,}0346} - 1 = 0{,}0114 = 1{,}14\%\ ao\ mês.$$

Exemplo 3.7.2: Os rendimentos nominais mensais da caderneta de poupança no segundo trimestre de determinado ano foram os seguintes:

- Abril – $i = 3{,}984\%$
- Maio – $i = 3{,}763\%$
- Junho – $i = 3{,}400\%$

a) Determinar o rendimento nominal acumulado da caderneta de poupança no trimestre.
b) Com base nas variações mensais do índice de preços ao consumidor, demonstradas a seguir, apurar a rentabilidade real da caderneta de poupança no trimestre.
   - Abril: $2{,}90\%$
   - Maio: $2{,}21\%$
   - Junho: $4{,}39\%$

Solução:

a) Temos,

$i_1 = 3{,}984\%$ Abril

$i_2 = 3{,}763\%$ Maio

$i_3 = 3{,}400\%$ Junho

Como o crescimento de juros compostos se processa de forma exponencial temos que a taxa de rendimento equivalente para este trimestre é:

$$i = [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3)] - 1$$
$$\Rightarrow i = [(1{,}03984) \times (1{,}03763) \times (1{,}03400)] - 1$$
$$\Rightarrow i = 0{,}11565 \; ou = 11{,}565\% \; a.t..$$

Logo, o rendimento nominal acumulado no trimestre é de $11,565\%$.

b) Primeiramente, temos que calcular a taxa de inflação (I) do trimestre, que é dada por,

$$I = [(1{,}0290) \times (1{,}0221) \times (1{,}0439)] - 1$$
$$\Rightarrow I = 1{,}09791 - 1$$
$$\Rightarrow I = 0{,}09791 \; = 9{,}791\% \; a.t..$$

Agora com o rendimento nominal calculado no item (a) $i = 11,565\% \; a.t.$ e com a taxa de inflação trimestral $I = 9{,}79\%$, podemos determinar a taxa real (r) utilizando a fórmula abaixo:

$$r = \frac{1 + Taxa \; nominal \; (i)}{1 + Taxa \; de \; inflação \; (I)} - 1.$$

Assim,

$$r = \frac{1{,}11565}{1{,}09791} - 1$$

$$\Rightarrow r = 1{,}01616 - 1$$

$$\Rightarrow r = 0{,}01616 = 1{,}616\%\ a.t.$$

Logo, a rentabilidade real da caderneta de poupança no trimestre é de $1{,}616\%$.

Observação 3.7.1: Desde setembro de 2017 a TR não é mais usada.

4. ALGUMAS APLICAÇÕES DA INFLAÇÃO

Nesse capítulo, veremos algumas aplicações da inflação no nosso cotidiano. Dentre tantas aplicações, iremos analisar a evolução do salário mínimo no período do plano real e a desvalorização da moeda no plano real. Para isso utilizamos as referências [1], [3] e [8].

4.1 Ganho real do salário mínimo desde a implantação do Plano Real

Ao longo do tempo o custo de vida de uma família típica aumenta, precisando assim, gastar mais dinheiro para manter o mesmo padrão de vida. O índice de preço é usado para monitorar essas mudanças. No Brasil existem diversos índices de preços, uns medem preço ao consumidor, outros preço ao produtor e etc.

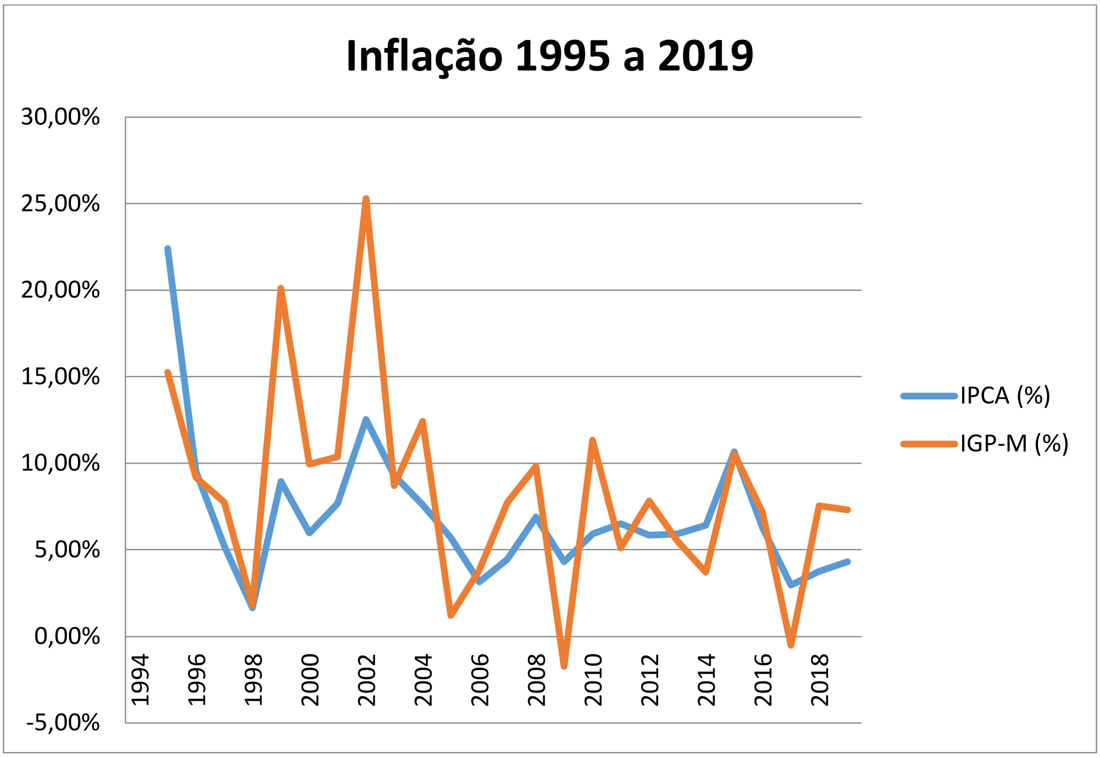
Na tabela **1**, é mostrado o salário mínimo com o passar dos anos e a inflação calculada pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e o Índice Geral de Preços - Mercado (IGP-M).

Tabela 1. Tabela do IPCA, IGP-M e salário mínimo (1995 a 2019).

ANO	IPCA (%)	IGP-M (%)	Salário mínimo ($)
1995	22,41%	15,24%	100,00
1996	9,56%	9,19%	112,00
1997	5,22%	7,74%	120,00
1998	1,65%	1,79%	130,00
1999	8,94%	20,10%	136,00
2000	5,97%	9,95%	151,00
2001	7,67%	10,37%	180,00
2002	12,53%	25,30%	200,00
2003	9,30%	8,71%	240,00
2004	7,60%	12,42%	260,00
2005	5,69%	1,21%	300,00
2006	3,14%	3,83%	350,00
2007	4,46%	7,75%	380,00
2008	5,90%	9,81%	415,00
2009	4,31%	-1,72%	465,00
2010	5,91%	11,32%	510,00
2011	6,50%	5,10%	545,00
2012	5,84%	7,82%	622,00
2013	5,91%	5,51%	678,00
2014	6,41%	3,69%	724,00
2015	10,67%	10,54%	788,00
2016	6,29%	7,17%	880,00
2017	2,95%	-0,52%	937,00
2018	3,75%	7,54%	954,00
2019	4,31%	7,30%	998,00

Fonte: FGV e IPEADATA.

A partir da tabela 1, podemos notar uma grande diferença na inflação calculada pelo IPCA e IGP-M, para melhor observação da inflação calculada pelos dois indicadores, temos o seguinte gráfico:



Fonte: O autor.

No gráfico pode-se notar que o IGP-M tende a variar mais que o IPCA e em alguns anos eles coincidem.

A partir dos dados da Tabela 1, iremos calcular a inflação acumulada do IPCA e IGP-M e ajustar o salário mínimo do ano de 1994 para o ano de 2019. Segundo o Banco Central, a inflação acumulada pelo IPCA nos últimos seis meses de 1994 foi de $18{,}57\%$ e pelo IGP-M foi de $16{,}52\%$. O salário mínimo teve reajuste dois meses após ser implantado o Plano Real. Portanto, usaremos o salário mínimo da Medida Provisória Nº 598 de 31/08/94 que é fixado em $R\$\ 70{,}00$.

- Inflação acumulada pelo IPCA

Considerando $i_1 = 18{,}57\%$ e $i_2, i_3, i_4, \ldots, i_{26}$, respectivamente, a inflação acumulada pelo IPCA nos anos de 1994, 1995, 1996, ..., 2019, conforme Tabela 1. Temos que a inflação acumulada pelo IPCA (I_{IPCA}) de 1994 a 2019 é dada por:

$$I_{IPCA} = [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times (1 + i_4) \times \cdot \ldots \cdot \times (1 + i_{26})] - 1$$

$$\Rightarrow I_{IPCA} = [(1{,}1857) \times (1{,}2241) \times (1{,}0956) \times (1{,}0522) \times (1{,}0165) \times (1{,}0894) \times (1{,}0597) \times (1{,}0767) \times (1{,}1253) \times (1{,}0930) \times (1{,}0760) \times (1{,}0569) \times (1{,}0314) \times (1{,}0446) \times (1{,}0590) \times (1{,}0431) \times (1{,}0591) \times (1{,}0650) \times (1{,}0584) \times (1{,}0591) \times (1{,}0641) \times (1{,}1067) \times (1{,}0629) \times (1{,}0295) \times (1{,}0375) \times (1{,}0431)] - 1 \cong 6{,}2054 - 1$$

$$\Rightarrow I_{IPCA} \cong 5{,}2054 = 520{,}54\%.$$

Indexando o valor do salário mínimo pelo IPCA de 1994 para 2019, podemos calcular o ganho real do salário usando a expressão de ganho real:

$$Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{valor\ do\ salário\ mínimo\ 2019}{valor\ do\ salário\ mínimo\ de\ 1994\ corrigido\ para\ 2019} - 1.$$

Ou seja,

$$Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{998{,}00}{70{,}00 \times (1 + I_{IPCA})} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{998{,}00}{70{,}00 \times 6{,}2054} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) = 2{,}2975 - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) = 1{,}2975 = 129{,}75\%.$$

Logo, o valor do salário mínimo pela inflação acumulada do IPCA no decorrer do período (de 1994 a 2019) teve um ganho real de $129{,}75\%$.

- Inflação acumulada pelo IGP-M

Considerando $i_1 = 16{,}52\%.$ e $i_2, i_3, i_4, \ldots, i_{26}$, respectivamente, a inflação acumulada pelo IGP-M nos anos de 1994, 1995, 1996, ..., 2019, conforme tabela 1. Temos que a inflação acumulada pelo IGP-M (I_{IGP-M}) de 1994 a 2019 é dada por:

$$I_{IGP-M} = [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times (1 + i_4) \times \ldots \times (1 + i_{26})] - 1$$

$$\Rightarrow I_{IGP-M} = [(1{,}1652) \times (1{,}1524) \times (1{,}0919) \times (1{,}0774) \times (1{,}0179) \times (1{,}2010) \times (1{,}0995) \times (1{,}1037) \times (1{,}2530) \times (1{,}0871) \times (1{,}1242) \times (1{,}0121) \times (1{,}0383) \times (1{,}0775) \times (1{,}0981) \times (0{,}9828) \times (1{,}1132) \times (1{,}0510) \times (1{,}0782) \times (1{,}0551) \times (1{,}0369) \times (1{,}1054) \times (1{,}0717) \times (0{,}9948) \times (1{,}0754) \times (1{,}0730)] - 1 \cong 8{,}2299 - 1$$

$$\Rightarrow I_{IGP-M} \cong 7{,}2299 = 722{,}99\%.$$

Indexando o valor do salário mínimo pelo IGP-M de 1994 para 2019, podemos calcular o ganho real do salário usando a expressão de ganho real:

$$Ganho\ Real\ (IGP - M) = \frac{valor\ do\ salário\ mínimo\ 2019}{valor\ do\ salário\ mínimo\ de\ 1994\ corrigido\ para\ 2019} - 1.$$

Ou seja,

$$Ganho\ Real\ (IGP - M) = \frac{998{,}00}{70{,}00 \times (1 + I_{IGP-M})} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IGP - M) = \frac{998{,}00}{70{,}00 \times 8{,}2299} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IGP - M) = 1{,}7324 - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IGP - M) = 0{,}7324 = 73{,}24\%.$$

Logo, o valor do salário mínimo pela inflação acumulada do IGP-M no decorrer do período (de 1994 a 2019) teve um ganho real de $73{,}24\%$.

Podemos observar que o ganho real medido pelo IPCA, foi bem maior que pelo IGP-M.

Na prática, quando há um aumento no salário, este aumento só representa um ganho real se for maior que a inflação. Assim, por exemplo, de 2018 para 2019, considerando os valores dados na tabela 1, temos pelo IPCA, que o ganho real é dado por

$$Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{valor\ do\ salário\ mínimo\ 2019}{valor\ do\ salário\ mínimo\ de\ 2018\ corrigido\ para\ 2019} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{998}{954(1 + 0{,}0431)} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) = \frac{998}{954(1 + 0{,}0431)} - 1$$

$$\Rightarrow Ganho\ Real\ (IPCA) \cong 0{,}002897 = 0{,}29\%.$$

Logo, o ganho real (menos a inflação) pelo IPCA do salário de 2018 para 2019 foi de apenas $0{,}29\% \times 998{,}00 = R\$2{,}89$.

Podemos determinar este valor atualizando o valor do salário mínimo de 2018 para 2019, pela inflação medida pelo IPCA, ou seja,

$$954 \times (1 + 0{,}0431) = R\$\,995{,}12.$$

Como o salário mínimo de 2019, foi de $R\$\,998{,}00$, o ganho real (menos a inflação) foi de apenas $998 - 995{,}12 = R\$\,2{,}88$, que é 0,29% de $R\$\,998{,}00$ o restante do valor obtido com o aumento foi apenas para repor a inflação.

Importante: Como estamos trabalhando com aproximais decimais os valores obtidos são aproximados.

De modo análogo, obtemos o ganho real usando o IGP-M.

4.2 Desvalorização do Real

Usando a definição de taxa de desvalorização da moeda (TDM), estudada no capítulo anterior, podemos medir a depreciação do plano real desde sua criação, de 1994 até 2019.

I) Cálculo da TDM pela inflação acumulada pelo IPCA.

Como vimos na seção anterior, a inflação acumulada pelo IPCA é:

$$I_{IPCA} \cong 520{,}54\%.$$

Agora, usando a expressão para o cálculo da TDM, podemos calcular a depreciação do real no período. Ou seja,

$$TDM = \frac{I_{IPCA}}{1 + I_{IPCA}}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{5{,}2054}{6{,}2054}$$

$$\Rightarrow TDM = 0{,}8389 = \ 83{,}89\%.$$

Logo, a queda do poder aquisitivo da moeda medida pelo IPCA é de $83{,}89\%$, ou seja, a inflação de $520{,}54\%$ reduziu o poder de compra do Real em $83{,}89\%$ desde sua criação. Isto significa na prática que nesse período, o real perdeu aproximadamente 84% do seu poder de compra.

Na prática, pelo IPCA, se considerarmos uma nota de 100 reais, isto significa que houve uma redução do poder de compra de aproximadamente 84 reais, ou seja, o que compramos hoje com 100 reais, em 1994 comprávamos com apenas 16 reais.

II) Cálculo da TDM pela inflação acumulada pelo IGP-M.

Como vimos na seção anterior, a inflação acumulada pelo IGP-M é:

$$I_{IGP-M} \cong 722{,}99\% \cong 723\%.$$

Daí, calculando a TDM, temos:

$$TDM = \frac{I_{IGP-M}}{1 + I_{IGP-M}}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{7{,}23}{8{,}23}$$

$$\Rightarrow TDM \cong 0{,}8785 = 87{,}85\%.$$

Logo, a inflação medida pelo IGP-M do período nos mostra que o poder de compra do Real foi reduzido em $87{,}85\%$ desde sua criação. Isto significa na prática que nesse período, o real perdeu aproximadamente 88% do seu poder de compra.

Na prática, pelo IGP-M, se considerarmos uma nota de 100 reais, isto significa que houve uma redução do poder de compra de aproximadamente 88 reais, ou seja, o que compramos hoje com 100 reais, em 1994 comprávamos com apenas 12 reais.

Desta forma, podemos observar que pelo IPCA ou pelo IGP-M, houve uma queda no nosso poder de compra, ou seja, o nosso dinheiro hoje compra bem menos coisas que no início do plano real. Podemos observar mais claramente, que isto ocorreu recentemente, de 2018 para 2019. Neste período a TDM pela inflação acumulada pelo IPCA é

$$TDM = \frac{I_{IPCA}(2019)}{1 + I_{IPCA}(2019)}$$

$$\Rightarrow TDM = \frac{0{,}0431}{1{,}0431}$$

$$\Rightarrow TDM = 0{,}0413 = \ 4{,}13\%.$$

Isto significa que pela inflação medida pelo IPCA, apenas neste ano, o real perdeu aproximadamente $4{,}13\%$ do seu poder de compra.

5. CONCLUSÃO

A matemática financeira está sempre presente no nosso cotidiano de uma forma direta ou indireta e podemos perceber que seu uso é de suma importância para o desenvolvimento de todo cidadão, sendo inflação um dos assuntos destacado neste trabalho, o mesmo tem impactos gigantes no cotidiano, pois, um ambiente inflacionado gera muitos problemas principalmente para a população de baixa renda, distorções na arrecadação dos impostos, salários e etc.

Com esse trabalho, vimos uma revisão geral do regime de capitalização composta para assim chegar a uma melhor compreensão e definição de inflação, como também aplicamos as taxas de juros em ambientes inflacionados e a taxa de desvalorização da moeda no plano real e calculamos o ganho real no salário mínimo de 1994 até o final do ano de 2019.

Ou seja, este trabalho mostrou como aplicar as fórmulas de inflação no nosso cotidiano, que é importante que a população em geral saiba os impactos que a inflação pode gerar e possa procurar métodos para se proteger. Também deixou claro que na prática o salário mínimo só tem um aumento real se for dado um aumento acima da taxa de inflação do período, que a taxa de juro é influenciada pela inflação e que a moeda se desvaloriza com o tempo, perdendo seu valor no curto ou a longo prazo.

REFERÊNCIAS

[1] Assaf Neto, A. **Matemática Financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

[2] Banco Central do Brasil. Índices de preços. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/indicepreco>. Acesso em: 10/07/2020.

[3] Dados, F.G.V. Fundação Getúlio Vargas. Disponível em: <http://www14.fgv.br/fgvdados20/default.aspx>. Acesso em: 15/08/2020.

[4] Ferguson, Niall. A ascensão do dinheiro: a história financeira do mundo; tradução Cordelia Magalhães. São Paulo: Editora Planeta do Brasil, 2009.

[5] Gonçalves, J. P. A história da matemática comercial e financeira. Disponível em:<https://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em: 02/12/2019.

[6] IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php> Acesso em: 10/07/2020.

[7] Ifrah, Georges. História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Nova Fronteira, 1997.

[8] Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Dados econômicos e financeiros do Brasil. Disponível em: < http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>. Acesso em: 15/08/2020.

[9] Leitão, Miriam. Saga brasileira: a longa luta de um povo por sua moeda. Rio de Janeiro: Editora Record, 2011.

[10] Puccini, A. D. L., Puccini A. Matemática Financeira: Objetiva e Aplicada. 9. ed. São Paulo: Elsevier, 2011.

[11] Versignassi, Alexandre. Crash: uma breve história da economia: da Grécia Antiga ao século XXI. São Paulo: Leya, 2011.