UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

WILLIAM PORTO PEQUENO

UMA APLICAÇÃO DAS EDOs: CAMPOS CENTRAIS DE FORÇA

CAMPINA GRANDE – PB
2020

WILLIAM PORTO PEQUENO

UMA APLICAÇÃO DAS EDOs: CAMPOS CENTRAIS DE FORÇA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Orientador: Prof. Dr. Israel Burití Galvão

CAMPINA GRANDE – PB
2020

P425a Pequeno, William Porto.
Uma aplicação das EDOs [manuscrito] : Campos Centrais de Força / William Porto Pequeno. - 2020.
42 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Israel Burití Galvão , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Campos centrais de força. 3. Teorema Fundamental do cálculo. 4. Órbita de partículas. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

WILLIAM PORTO PEQUENO

UMA APLICAÇÃO DAS EDOs: CAMPOS CENTRAIS DE FORÇA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

Aprovado em: 14/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de S. Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

À minha família, pelo apoio e pela compreensão. Dedico especialmente a minha bisavó, dona Severina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus: pela compreensão e apoio da minha família, por ter deixado de fazer várias coisas para focar na elaboração desse trabalho; agradeço em especial a meu irmão, Arthur, por ele ter deixado eu usar o meu computador; em especial, pela minha mãe que sempre apoiou os meus estudos, bem como o estudos do meu irmão, e; à Ana pelo apoio e orações.

Agradeço a Deus pelos meus irmãos em Cristo, da Igreja Presbiteriana de Campina Grande, por suas orações, palavras de apoio e ações que contribuíram para minha formação.

Agradeço a Deus: por ter me dado o prazer de ter o professor Israel como orientador do PIBIC e do TCC (obrigado pelas ajudas quando eu não sabia como desenvolver algumas demonstrações, e pela orientação de como não devo escrever o "temos que", quando antecede uma fórmula matemática, mas o "temos"); por conceder o prazer de ter aulas com professores tão bons no que fazem, como, por exemplo, a professora Emanuela, que está na banca examinadora deste TCC e é uma excelente professora, e, o professor Victor Hugo, pelas excelentes aulas de Geometria.

Agradeço a Deus por ter me dado a graça de ter Sua Palavra para me alimentar diariamente, pelo Seu cuidado em cada minuto de minha vida, por ter concedido a comunhão dos santos, pelo perdão dos meus pecados. Tais coisas foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

"Este Jesus é pedra [...] e não há salvação em nenhum outro; porque abaixo do céu não existe nenhum outro nome, dado entre os homens, pelo qual importa que sejamos salvos. (Atos 4.11-12)" (Pedro em resposta aos líderes judeus religiosos)

RESUMO

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) modelam inúmeros fenômenos do cotidiano, sendo uma das áreas da Matemática que possui relações com as demais ciências. Ciente disso aborda-se nesse trabalho definições, classificações, bem como os métodos de soluções de uma EDO, seguido de uma aplicação desta: Campos Centrais de Força, sendo este o objetivo principal deste trabalho. Inicialmente é demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo, seguido de uma explanação quanto as EDOs de primeira ordem, Problemas de Valor Inicial (PVI), Equações Separáveis, conceitos e resultados da Mecânica Clássica, que são responsáveis pela modelagem da referida aplicação. Fora utilizado um levantamento bibliográfico em fontes eletrônicas, mas em especial, fontes impressas. Dito isso, é observado a importância das EDOs para o desenvolvimento do conhecimento quanto ao movimento de partículas, ou em outras palavras, órbita de partículas.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs); Campos Centrais de Força; Teorema Fundamental do Cálculo; Órbita de Partículas.

ABSTRACT

Ordinary Differential Equations (ODE's) models everyday phenomenons, being one of the areas of Mathematics that has relations with other sciences. Knowing that, in this work are approached definitions, classifications as well as the solution methods of an ODE, followed by an application of this: Central Force Fields, which is the main goal of this work. Initially the Fundamental Theorem of Calculus is demonstrated, followed by an explanation about the first order of ODE's, Initial Value Problems, Separable Equations, concepts and results of Mechanical Physics who is responsible for the modeling of the mentioned application. A bibliographic survey was used, employing electronic sources, especially, printed ones. That said, it is observed the importance of ODE's for the development of knowledge regarding the movement of particles, or in other words, particle orbit.

PALAVRAS-CHAVE: Ordinary Differential Equations (ODE's); Central Force Fields; Fundamental Theorem of Calculus; Particle Orbit.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática surge na Antiguidade mediante as necessidades do dia a dia, tais como, contar, medir, representar, associar, organizar o espaço e as formas. Diante de experiências diárias, a Matemática, em meio a erros e acertos, contraexemplos, especulações, críticas e conflitos, evoluiu, e se adaptou, conforme a própria maturação do conhecimento da humanidade. Atualmente, com o irromper de novas necessidades, que em sua maioria são distintas das necessidades dos nossos antepassados, surgem diversas áreas na Matemática, entre elas, destaca-se a Álgebra, a Geometria Espacial, a Geometria Algébrica, a Álgebra Linear, a Geometria Diferencial e a Análise Matemática; afim de solucionar, satisfazer, ou aperfeiçoar, as necessidades, os problemas e os questionamentos.

Como exemplo de uma situação, pergunta-se: por que uma corda enrolada em um poste, tanto horizontal quanto vertical, sustenta um barco. Este é um problema matemático e físico. Todavia, por que isso acontece? Por que o barco simplesmente não é levado pela maré depois de um tempo, ou no instante em que a corda é colocada? E mais, quantas voltas sobre o poste serão suficientes para que o barco não seja levado pelo mar? De fato, talvez a noção de que o barco será sustentado por esta corda seja mais fácil do que responder a essas perguntas. A área Análise Matemática, em particular, as Equações Diferenciais (EDs) estudam problemas desse tipo.

Motivados, em um primeiro momento, em resoluções, e/ou modelagens, de problemas físicos, Newton e Leibniz, que criaram o Cálculo, não de maneira conjunta, mas independente, deram início ao estudo das equações diferenciais, ainda no século XVII. Posteriormente, esta subárea da Matemática teve um largo desenvolvimento com as contribuições de Cauchy e Poincaré, entre outros, encontrando, agora, aplicações não apenas na Física, mas em outras áreas do conhecimento, como, Química, Biologia e Economia. Podendo ser citadas algumas destas aplicações: a taxa de variação da temperatura de um corpo, o movimento de um foguete, dinâmica populacional, propagação de um vírus, equação da onda e reações químicas. Isso é importante, haja vista que é possível ver a inter-relação com as demais ciências.

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), equação que envolve derivadas de uma função, com apenas uma variável, responde essas perguntas, relacionadas ao problema da corda que sustenta o barco (descrita anteriormente), e outras semelhantes, bem como existem outras EDOs que modelam fenômenos das áreas, citadas no parágrafo anterior, entre outras.

O curso de Licenciatura em Matemática, no Campus I, na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), fornece um componente, pelo qual é estudado as EDOs e algumas de suas aplicações. Porém, um aprofundamento da aplicabilidade das EDOs, bem como das suas principais proposições, teoremas e resultados só foi possível de serem contempladas, para este que vos escreve, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC). E por isso, justificando do ponto de vista pessoal, este trabalho visa rever alguns conceitos essenciais das EDOs e apresentar uma aplicação deste, a saber, Campo Central de Força.

Destaca-se a importância deste estudo para aqueles, no Campus I da UEPB, bem como para todos que sobrepujam afinidade e/ou interesse no estudo das EDOs, que não têm oportunidade de debruçarem-se no estudo dessa subárea da Matemática.

Isto posto, o presente trabalho consistirá em uma apresentação das EDOs: seus tipos, suas ordens, linearidade e seus métodos de solução. Em seguida, desenvolve-se uma das muitas aplicações destas equações diferenciais, aplicação esta já citada. Em resumo, estudar-se-á sobre as EDOs e uma aplicação desta.

Assumindo como conhecido as propriedades e resultados dos Vetores, tais como Produto Escalar e Produto Vetorial, Matrizes e métodos de resolução de Integrais; utilizar-se-á, predominantemente, o livro *Equações Diferenciais Aplicadas*, dos autores Djairo Figueiredo e Aloisio Neves, publicado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Outras fontes impressas, como livros disponibilizados na biblioteca desta instituição; e fontes digitais, como TCCs; serão também utilizados.

Dito isso, encerra-se este introdutório parecer, apresentando a estrutura desse trabalho: 1. Introdução, 2. Definições e conceitos necessários, 3. Aplicação: Campos centrais de força, e, 4. Considerações finais.

2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção, serão apresentadas as definições, propriedades e resultados basilares para a devida compreensão do presente texto. Ademais, quando necessário, para melhorar o entendimento, são apresentados exemplos ou aplicações.

2.1 Teorema Fundamental do Cálculo

De acordo com Sterwart (2006, p. 393), o cálculo diferencial e o cálculo integral, mediante este importante teorema, é unido. Dessa forma, nada mais coerente do que, inicialmente, enunciar e demonstrar o *Teorema Fundamental do Cálculo* (TFC).

Para a demonstração da parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo utiliza-se o seguinte resultado:

Lema 2.1 (Valor Extremo)**.** Se $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[a,b]$.

Prova. Para ver a prova deste lema ver STEWART, 2006, p. 281.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1)**.** Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua, então, a função $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

onde $x\in[a,b]$, é diferenciável, e $\dot{g}(x)=f(x), \forall x\in(a,b)$, onde $\dot{g}$ é a derivada da função g.

Demonstração. Inicialmente, verifique que usando a definição da função g, se $x,x+h\in[a,b]$, então

$$\begin{aligned} g(x+h)-g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)-\int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t),\,dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

para $h>0$.

Considerando $r, s \in [x, x+h]$, tais que

$$f(r) = m \quad \text{e} \quad f(s) = n,$$

onde m é o mínimo absoluto e n é o máximo absoluto de f no intervalo dado. Dessa maneira, munido do resultado anterior (2.1), se $t \in [x, x+h]$, então, $f(r) \leq f(t) \leq f(s)$.

Será necessário enunciar uma propriedade das integrais, para prosseguir com a demonstração: se $C \leq f(x) \leq D$, para $a \leq x \leq b$, então,

$$C(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq D(b-a). \tag{2.3}$$

Assim,

$$m(x+h-x) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq n(x+h-x) \Rightarrow$$

portanto,

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq nh \tag{2.4}$$

dividindo (2.4) por h, pois, $h > 0$, tem-se

$$m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq n$$

isto é,

$$f(r) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(s). \tag{2.5}$$

Fez-se esse desenvolvimento para $h > 0$, porém a desigualdade (2.5) pode ser provada para $h < 0$, para isso, é necessário inverter as desigualdades de (2.5) e fazer as devidas adaptações.

Fazendo $h \to 0$, $r, s \to x$, pois, $r, s \in [x, x+h]$. Por conseguinte,

$$\lim_{h\to 0} f(r) = \lim_{r\to x} f(r) = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(s) = \lim_{s\to x} f(s) = f(x)$$

por causa da continuidade de f em x. E, dessa forma,

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(x) \tag{2.6}$$

Conclui-se, munido do Teorema do Confronto e da desigualdade de (2.6),

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

isto é,

$$\dot{g}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x), \tag{2.7}$$

como desejado.

□

Esse Teorema garante que a integral definida é a operação inversa da derivada. A função g é chamada de antiderivada, ou primitiva de f. A notação a seguir é usada por Leibniz,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2.8}$$

A seguir enuncia-se e demonstra-se a parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2)**.** Sejam $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua e F uma de suas antiderivadas, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a). \tag{2.9}$$

Demonstração. Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Do Teorema anterior, sabe-se que g é uma antiderivada de f, e, portanto $\dot{g}(x) = f(x), \forall x$. Considere F como sendo qualquer outra antiderivada de f no intervalo dado. Dessa forma, as funções F e g diferem apenas por uma constante C, ou seja,

$$F(x) = g(x) + C. \tag{2.10}$$

De fato, como $\dot{F}(x) = f(x) = \dot{g}(x)$, vem

$$\begin{aligned}\dot{F}(x)-\dot{g}(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad F(x)-g(x) = C\\ &\Leftrightarrow \quad F(x) = g(x)+C.\end{aligned}$$

Note, para $x = a$ e $x = b$, respectivamente, têm-se

$$F(a) = g(a)+C \qquad \text{e} \qquad F(b) = g(b)+C. \tag{2.11}$$

E mais, para $x = a$ em $g(x)$,

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt \;=\; 0.$$

Agora, subtraindo as duas equações de (2.11), obtém-se

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= (g(b)+C)-(g(a)+C)\\ &= g(b)+C-g(a)-C\\ &= g(b)-g(a)\\ &= g(b)\\ &= \int_a^b f(t)\,dt\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2.12}$$

□

Este teorema estabelece que se F é uma primitiva de f, então pode-se calcular a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

apenas subtraindo os valores de F nos limites superiores e inferiores da integral.

"Assim, o problema do cálculo de uma área se reduz ao problema de calcular a solução de uma equação diferencial."(FIGUEIREDO; NEVES, 2007, p. 5).

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma Equação Diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e envolve várias derivadas.

Definição 2.1 (*Equação Diferencial Ordinária*)**.** Define-se *Equação Diferencial Ordinária* (EDO) como sendo uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes de uma função com apenas uma variável não dependente.

Observação. Se a função incógnita possuir mais de uma variável, então chama-se esta equação de *Equação Diferencial Parcial* (EDP)

Veja a seguir alguns exemplos de EDOs.

Exemplo 2.1. Estas são algumas equações diferenciais:

a) Note que a equação diferencial a seguir

$$y = \frac{du}{dy} - \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^3u}{dy^3} \tag{2.13}$$

é uma EDO, pois a variável u é dependente e a função y é independente.

b) E, a equação diferencial abaixo,

$$u^2 = \frac{d^2x}{du^2} + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 - 3x \tag{2.14}$$

é uma EDO, posto que as variáveis x e y são dependentes e a função u é independente.

As equações diferenciais acima podem ser escritas da seguinte forma:

a) $y = \dot{u}(y) - \ddot{u}(y) + u^{(3)}$;

b) $u^2 = \ddot{x} + (\dot{y})^2 - 3x$.

Definição 2.2 (*Ordem de uma ED*)**.** A ordem de uma Equação Diferencial é dada pela mais alta ordem da derivada que nela aparece. Por exemplo, a equação diferencial a seguir é uma EDO de ordem n

$$f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \ldots, x^{(3)}, \ddot{x}, \dot{x}, x, y) = 0. \tag{2.15}$$

Dessa forma, as equações diferenciais (2.13) e (2.14) são de 3ª ordem e 2ª ordem, respectivamente.

Definição 2.3 (*Linearidade*)**.** Uma EDO é Linear se a função é linear. Por exemplo, a equação diferencial (2.15) é linear se f é linear.

Observação. Caso contrário, isto é, a função f não seja linear, então, neste caso, a EDO é Não-linear.

De modo geral, uma EDO linear de ordem n, tem a seguinte forma:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = g(t). \tag{2.16}$$

Os exemplos a seguir, explicam a definição anterior.

Exemplo 2.2. Observe as seguintes EDOs:

a) A equação diferencial $\ddot{x} + x = 0$ é linear, pois está escrita como em (2.16). De fato,

$$\ddot{x} + 0\dot{x} + x = 0.$$

Note que todos os termos envolvendo x tem potência 1 e seus coeficientes são constantes.

b) A equação diferencial $u^3v^{(4)} - u^2\ddot{v} + 12u\dot{v} = 5v$ também é linear, podendo ser escrita da mesma forma que (2.16). Note que os coeficientes não são mais constantes, mas funções.

c) A equação diferencial $y^{(3)} + 2\ddot{y} + y\dot{y} = T^4$ não é linear, pois o termo $y\dot{y}$ não é linear.

d) E, a equação diferencial $y^{(3)} - ln(y) = 4$ não é linear, por causa da não linearidade do terno $ln(y)$.

Definição 2.4. Diz-se que uma função f, definida em um intervalo I é solução de uma EDO, quando ela satisfaz a expressão dada.

Os dois exemplos a seguir tem por objetivo esclarecer a definição acima.

Exemplo 2.3. As funções $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ são soluções para a equação diferencial $\ddot{y} + y = 0$.

De fato, para $y_1(t) = \cos t$, obtém-se $\dot{y_1}(t) = -\operatorname{sen} t \Rightarrow \ddot{y_1}(t) = -\cos t$.

Agora, substituindo y_1 e as devidas derivadas na equação diferencial dada, tem-se

$$\ddot{y} + y = 0 \Rightarrow -\cos t + \cos t = 0.$$

Logo, $y_1(t) = \cos t$ é solução. E, para $y_2(t) = \operatorname{sen}(t)$, vem $\dot{y_2}(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{y_2}(t) = -\operatorname{sen} t$. Daí,

$$\ddot{y} + y = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t) = 0$$

é solução.

Exemplo 2.4. A função $y_1(t) = e^{t^2} \cdot \int_0^t e^{-s^2}\, ds + e^{t^2}$ é uma solução da equação diferencial $\dot{y} - 2ty = 1$.

De fato, calculando a primeira derivada de y_1, tem-se

$$\dot{y_1}(t) = 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + e^{t^2} e^{-t^2} + 2te^{t^2} = 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + 2te^{t^2} + 1.$$

Assim, substituindo na equação diferencial,

$$2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + 2te^{t^2} + 1 - 2t\left(e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + e^{t^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + 2te^{t^2} + 1 - 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds - 2te^{t^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds - 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds + 2te^{t^2} - 2te^{t^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1$$

como desejado. Logo, y_1 é solução da equação diferencial $\dot{y} - 2ty = 1$.

2.2.1 Equação Diferencial Ordinária Linear de 1ª Ordem

Definição 2.5. Uma EDO linear e de 1ª ordem é escrita da forma

$$\dot{y} + p(t)y = g(t). \tag{2.17}$$

Exemplo 2.5. São exemplos de EDO linear de 1ª ordem:

a) $\dot{y} - 4ty = t^3$.

b) $t\dot{y} + 2y = \operatorname{sen} t$, pois, dividindo por t, vem:

$$\dot{y} + \frac{2}{t}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Uma das formas de resolução das EDOs lineares de 1ª ordem é o *Método do Fator Integrante*. Visto a seguir.

Considere a EDO linear de 1ª ordem (2.17). Multiplicando esta equação diferencial por uma função μ, que será chamada de fator integrante, tem-se

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \tag{2.18}$$

Suponha que o lado esquerdo desta igualdade seja igual à derivada de μy, isto é

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\dot{y} + \mu(t)p(t)y.$$

Daí, desenvolvendo a equação diferencial acima, segue

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}(t)y + \mu(t)\dot{y} = \mu(t)\dot{y} + \mu(t)p(t)y \quad &\Rightarrow \quad \dot{\mu}(t)y = \mu(t)p(t)y \\
&\Rightarrow \quad \dot{\mu}(t) = \mu(t)p(t) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu(t)} = p(t)dt \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{d\mu}{\mu(t)} = \int p(t)\,dt \\
&\Rightarrow \quad ln\,|\mu(t)| = \int p(t)\,dt \\
&\Rightarrow \quad e^{ln\,|\mu(t)|} = e^{\int p(t)\,dt} \\
&\Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Agora, substituindo $\mu(t)$ em (2.18):

$$\begin{aligned}
e^{\int p(t)\,dt}\dot{y} + e^{\int p(t)\,dt}p(t)y = e^{\int p(t)\,dt}g(t) \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{\int p(t)\,dt}\cdot y\right) = e^{\int p(t)\,dt}g(t) \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}\left(e^{\int p(t)\,dt}\cdot y\right)\,dt = \int \left(e^{\int p(t)\,dt}g(t)\right)dt \\
&\Rightarrow \quad e^{\int p(t)\,dt}\cdot y = \int \left(e^{\int p(t)\,dt}g(t)\right)dt + C \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{1}{e^{\int p(t)\,dt}}\cdot\left(\int \left(e^{\int p(t)\,dt}g(t)\right)dt + C\right).
\end{aligned}$$

Sabendo que $\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}$, então

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\cdot\left(\int (\mu(t)g(t))\,dt + C\right), \tag{2.20}$$

é a solução geral da equação diferencial (2.17).

Portanto, para obter a solução de (2.17), basta, encontrar $\mu(t)$ e substituir em

(2.20).

2.2.2 Problema de Valor Incial (PVI)

O Problema de Valor Inicial é um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{y} + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ (valor inicial)} \end{cases},$$

onde t_0 é um número fixado no mesmo intervalo onde a EDO está definida e y_0 é um valor numérico conhecido da função em t_0.

Para facilitar a compreensão do que fora anunciado anteriormente, quanto ao método de solução de uma EDO linear de 1ª ordem e PVI, vê-se a seguir dois exemplos que englobam o que fora visto.

Exemplo 2.6. O seguinte PVI possui solução.

$$\begin{cases} t\dot{y} + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \text{ (valor inicial)} \end{cases}.$$

De fato, inicialmente observe que a equação diferencial desse PVI pode ser escrita, quando dividida por t, da seguinte forma,

$$\dot{y} + \frac{2}{t}y = 4t. \tag{2.21}$$

Agora, sabendo que $p(t) = \frac{2}{t}$, pode-se calcular o fato integrante, isto é,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int \frac{2}{t}\,dt} = e^{2ln\,t} = e^{ln\,t^2} = t^2$$

ou seja,

$$\mu(t) = t^2.$$

Daí, substituindo o fator integrante e $g(t) = 4t$ em (2.20), vem

$$y = \frac{1}{t^2}\cdot\left(\int \left(4t^3\,dt\right) + C\right) = \frac{1}{t^2}\cdot(t^4 + C) \Rightarrow y = t^2 + \frac{C}{t^2}, \tag{2.22}$$

que é uma solução da EDO deste PVI. Agora, aplicando a condição inicial, isto é, $y(1) = 2$, encontra-se o valor desta constante:

$$y(1) = 2 \Rightarrow 1^2 + \frac{C}{1^2} = 2 \Rightarrow C = 1.$$

Portanto,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

é a solução do PVI.

Exemplo 2.7. O seguinte PVI possui solução.

$$\begin{cases} \dot{y} + \frac{2}{t}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ (valor inicial)} \end{cases}.$$

De fato, em primeiro lugar encontra-se o valor do fator integrante,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}\,dt} = e^{ln\, t^2} = t^2.$$

Ao invés de substituir μ em (2.20), multiplica-se a EDO deste PVI por $\mu(t) = t^2$, isto é

$$t^2\dot{y} + 2ty = t \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{d}{dt}(t^2 \cdot y) = t \operatorname{sen} t.$$

Integrando esta equação diferencial, vem

$$\int \frac{d}{dt}(t^2 \cdot y)\, dt = \int t \operatorname{sen} t\, dt \Rightarrow t^2 \cdot y = \int t \operatorname{sen} t\, dt$$

Essa integral pode ser resolvida pelo método da substituição. Considere $u = t \Rightarrow du = dt$ e $dv = \operatorname{sen} t\, dt \Rightarrow v = -\cos t$, portanto,

$$\begin{aligned} \int u\, dv = uv - \int v\, du &= -t\cos t - \int (-\cos t)\, dt \\ &= -t\cos t - \operatorname{sen} t + C. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Daí,

$$t^2 \cdot y = -t\cos t - \operatorname{sen} t + C \Rightarrow y = \frac{1}{t^2} \cdot (-t\cos t - \operatorname{sen} t + C)$$

é a solução da EDO deste PVI. Observe que essa forma de resolução é idêntica à construção da solução de uma EDO linear de 1ª ordem (2.20).

Agora, usando o valor inicial dado, tem-se:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot \left[-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + C\right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2} \cdot 0 \; - \; 1 + C\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{\pi^2} + \frac{4C}{\pi^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 + 4C = \pi^2 \\ &\Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi^2}{4} - 1. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de C na solução geral, obtém-se a solução deste PVI, ou seja,

$$y = \frac{1}{t^2} \cdot \left(-t\cos t - \operatorname{sen} t + \frac{\pi^2}{4} - 1\right)$$

2.2.3 Equação Diferencial Ordinária Separável

Uma equação diferencial é dita separável se é da forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.24}$$

ou, simplesmente,

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

O método de resolução da EDO Separável é chamado de *integração direta*, porque é isso que é feito, para obter uma solução desta equação diferencial. A seguir é dado um exemplo de resolução.

Exemplo 2.8. O PVI,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \text{ (valor inicial)} \end{cases}.$$

possui uma única solução.

De fato, a equação diferencial deste problema de valor inicial é separável. Pois,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \Rightarrow (3x^2+4x+2)dx = 2(y-1)dy.$$

Integrando em ambos os lados da igualdade, tem-se

$$\int (3x^2+4x+2)\,dx = \int 2(y-1)\,dy \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + C = y^2 - 2y,$$

portanto,

$$x^3 + 2x^2 + 2x + C = y^2 - 2y$$

é a solução geral dada de forma implícita. Aplicando o valor inicial $y(0) = -1$,

$$0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C = y(0)^2 - 2y(0) \Rightarrow C = -1^2 - 2(-1) \Rightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = y^2 - 2y$$

é a solução do PVI.

3 APLICAÇÃO: CAMPOS CENTRAIS DE FORÇA

Antes de prosseguir, assume-se o conhecimento prévio acerca de curvas diferenciáveis e parametrizáveis.

Um *campo vetorial* trata-se de uma função que associa um vetor a cada ponto do domínio, quer seja no plano, quer seja no espaço. Dessa forma, um campo vetorial no espaço, ou campo vetorial tridimensional, é dado da seguinte forma:

$$F(x, y, z) = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}, \tag{3.1}$$

e quanto ao campo vetorial no plano, ou dito campo vetorial bidimensional,

$$F(x, y) = A(x, y)\mathbf{i} + B(x, y)\mathbf{j}. \tag{3.2}$$

No que se segue, denota-se por campo, apenas para facilitar a escrita, o campo vetorial.

Definição 3.1. O campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é contínuo se suas componentes são contínuas. E, diz-se que F é diferenciável, se suas componentes são diferenciáveis.

Dessa forma, a equação (3.1), por exemplo, é contínua e derivável se as componentes A, B e C são contínuas e diferenciáveis.

3.1 Campo Gradiente

Definição 3.2. Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real, onde Ω é uma região conexa aberta. Define-se o *Campo Gradiente* desta função f de classe $\mathrm{C}^1(\Omega)$, como sendo o campo de vetores gradiente,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1. Seja $f = 2x^3 + 3y + z^2$ uma função de classe $\mathrm{C}^1(\Omega)$. O campo gradiente desta função é,

$$\nabla f = 6x^2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = (6x^2, 3, 2z).$$

Exemplo 3.2. Seja T dada por,

$$T = xyz^2 + 2y^2 - 3yz^2,$$

com T de classe $\mathrm{C}^1(\Omega)$.

Assim,

$$\nabla T = yz^2\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - 6yz\mathbf{k}$$

é o campo gradiente da função T.

3.2 Campo Conservativo

Precisa-se enunciar a definição de *integral de linha de campo vetorial*, para definir campo conservativo e um importante resultado, advindo desta definição, ambos para o desenvolvimento do presente trabalho.

A princípio, apresenta-se a definição da integral de linha e, em seguida, a definição desta no campo vetorial. Se $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, está definida em uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$, cuja parametrização é dada por $r(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + l(t)\mathbf{k}$, onde $a \leq t \leq b$, então a integral de linha ao longo da curva C é expressada da seguinte forma

$$\int_C F\,ds = \int_a^b F(r(t))|\dot{r}(t)|\,dt. \tag{3.4}$$

Definição 3.3 (*Integral de Linha de Campo Vetorial*)**.** Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo contínuo definido em uma curva C, de intervalo $[a, b]$, parametrizada por $r(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + l(t)\mathbf{k}$, com $a \leq t \leq b$. Dessa forma, define-se a integral de linha de F sobre a curva C, como sendo,

$$\int_C F \cdot T\,ds = \int_C \left(F \cdot \frac{dr}{ds}\right) ds = \int_C F\,dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt}\,dt, \tag{3.5}$$

onde T é o vetor tangente que substitui $|\dot{r}(t)|$.

Definição 3.4 (*Campo Conservativo*)**.** Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo, onde Ω é uma região conexa aberta no $\mathbb{R}^3$, e; C_1 e C_2 duas curvas em $\mathbb{R}^3$, cujo ponto inicial e final, são A e B, respectivamente. F é dito *conservativo* em $\mathbb{R}^3$ se

$$\int_{C_1} F\,ds = \int_{C_2} F\,ds. \tag{3.6}$$

Em outras palavras, F é conservativo quando o valor de sua integral se mantém o mesmo independente do caminho escolhido, contanto que o ponto inicial e o ponto final sejam os mesmos. É dito, apenas, que a integral de linha de F independe do caminho.

Definição 3.5 (*Função Potencial*)**.** Se $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial, onde Ω é uma região conexa aberta. f é dita *função potencial* de F, se

$$F = \nabla f, \tag{3.7}$$

onde f é uma função escalar em Ω.

Observação. No seção 2 deste trabalho, onde demonstra-se o Teorema Fundamental do Cálculo, é visto que esta função f é a primitiva do campo vetorial F, que também faz as vezes de uma função.

A seguir enuncia-se o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

Teorema 3.1 (*Teorema Fundamental das Integrais de Linha*)**.** Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo e C uma curva lisa, definida no intervalo $[a, b]$, de parametrização $r(t)$, com $a \leq t \leq b$. Se f é uma função potencial de F, isto é, $F = \nabla f$, então

$$\int_C F\, ds = f(b) - f(a). \tag{3.8}$$

Proposição 3.1. O campo contínuo $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, é *conservativo* se, e somente se, F for o campo gradiente ∇f de uma função escalar f, ou seja,

$$F = \nabla f. \tag{3.9}$$

Observação. F é um campo conservativo se, e somente se, existir um potencial f para F, ou, em outras palavras, a função f é a antiderivada, ou primitiva, da função F.

A demonstração do Teorema 3.1 e a prova da Proposição 3.1 encontram-se em THOMAS, George B. *et al*, 2012, p. 383-85.

3.3 Campos Centrais de Forças

Definição 3.6. Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo de forças e $X \in \Omega$, tal que $X = (x, y, z)$. F é um campo central de forças neste ponto arbitrário dado, se aponta para um ponto fixo. Esse ponto fixo chama-se de centro do movimento. Pode-se escrever um campo central de forças, cujo centro do movimento é a origem, como sendo

$$F(X) = f(X)X, \tag{3.10}$$

onde f é uma função escalar definida no mesmo domínio do campo F.

Inicialmente nesta seção, fora enunciado alguns resultados de campos conservativos, os quais possuem conexões com os campos centrais de forças, conexões estas que serão abordadas a seguir.

Proposição 3.2. Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo conservativo, e V, definida em Ω, um potencial de F. Então, dado $X = (x, y, z) \in \Omega$, $F(X)$ é um campo central de forças se e, somente se, V depende apenas de

$$|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3.11}$$

E neste caso, existe uma função real de variável real g, tal que

$$F(X) = g(|X|)X. \tag{3.12}$$

Demonstração. Inicialmente, observe que $|X|$ pode ser considerado como o raio da esfera de centro na origem, ou o comprimento do vetor posição da partícula X.

($\Rightarrow$) Suponha que F é central, ou seja,

$$F(X) = f(X)X,$$

onde f é uma função escalar definida em Ω. Deve-se provar que o potencial de F, V depende apenas de $|X|$, ou seja, deve-se provar que V é constante sobre $|X| = r_0$. Para isso, seja $\alpha(t)$ um caminho, que vai da origem da esfera até sua superfície; logo $|\alpha(t)| = r_0, \forall t \in \Omega$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\alpha(t)) &= \langle \nabla V(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle \\ &= \langle F(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle \\ &= \langle f(\alpha(t))\,\alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle \\ &= f(\alpha(t))\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle, \end{aligned} \tag{3.13}$$

pois, $f(\alpha(t))$ é uma função escalar.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle &= \langle \dot{\alpha}(t), \alpha(t)\rangle + \langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle \\ &= \langle \dot{\alpha}(t), \alpha(t)\rangle + \langle \dot{\alpha}(t), \alpha(t)\rangle \\ &= 2\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle, \end{aligned} \tag{3.14}$$

ou seja,

$$2\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle,$$

portanto,

$$\langle \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2. \tag{3.15}$$

Portanto, das equações diferenciais (3.13) e (3.15), tem-se

$$\frac{d}{dt}V(\alpha(t)) = \frac{1}{2}f(\alpha(t))\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2, \tag{3.16}$$

que é igual a zero, isto é,

$$\frac{d}{dt}V(\alpha(t)) = 0 \tag{3.17}$$

pois $|\alpha(t)| = r_0$. Logo, $V(X)$ é constante, como desejado. Isso quer dizer que a função potencial V depende apenas de

$$|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

($\Leftarrow$) Agora, supondo que V depende apenas de $|X| = r$, ou seja,

$$|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

basta exibir que $V(X)$ é um potencial de $F(X)$, isto é, $F(X) = \nabla V(X)$. Para isso, calcula-se as derivadas parciais de $V(X)$, isto é,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2y = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{y}{r},$$

e,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2z = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{z}{r}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla V &= \left(\frac{dV}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \frac{dV}{dr} \cdot \frac{y}{r}, \frac{dV}{dr} \cdot \frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} (x, y, z) \\ &= \frac{1}{|X|} \dot{V}(|X|) X \end{aligned}$$

Dessa forma pode-se exibir a função real g da seguinte forma,

$$g(|X|) = \frac{1}{|X|} \dot{V}(|X|)$$

para que a equação em (3.12) seja satisfeita e, portanto, tem-se o desejado.

$\square$

Proposição 3.3. Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo central de forças contínuo, com F dependendo apenas de $|X|$, isto é,

$$F(X) = g(|X|)X. \tag{3.18}$$

Então, F é conservativo.

Demonstração. Foi visto anteriormente na Proposição 3.1 que exibindo um potencial V para F, isto é,

$$F = \nabla V$$

garante-se a conservatividade de F. Portanto, utiliza-se esse caminho para demonstrar esta proposição.

Ciente disto, seja $G(|X|)$ uma primitiva da função $|X|\, g(|X|)$, ou seja,

$$\int |X|\, g(|X|)\, dt = G(|X|),$$

onde $|X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Note,

$$V(X) = G(|X|)$$

é um potencial de F, visto que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= |X|\, g(|X|)\, \frac{\partial |X|}{\partial x} \\
&= |X|\, g(|X|) \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2x \right) \\
&= |X|\, g(|X|) \frac{x}{|X|} \\
&= g(|X|)\, x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial y} &= |X|\, g(|X|)\, \frac{\partial |X|}{\partial y} \\
&= |X|\, g(|X|) \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2y \right) \\
&= |X|\, g(|X|) \frac{y}{|X|} \\
&= g(|X|)\, y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial z} &= |X|\, g(|X|)\, \frac{\partial |X|}{\partial z} \\
&= |X|\, g(|X|) \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2z \right) \\
&= |X|\, g(|X|) \frac{z}{|X|} \\
&= g(|X|)\, z.
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \nabla V &= g(|X|)(x,y,z) \\ &= g(|X|)X \\ &= F. \end{aligned}$$

Assim, F é conservativa, já que V é um potencial de F, e tem-se o desejado.

$\square$

Logo, consegue-se garantir que um campo F, que depende apenas de X, é conservativo.

Agora, restringe-se para o plano o estudo do movimento de partículas sob a ação de campos centrais de força, como será visto a seguir.

Definição 3.7 (*Órbita*)**.** Chama-se de *órbita* a trajetória de uma partícula X sob a ação de um campo central de força.

Esta partícula X, designa o vetor posição no $\mathbb{R}^2$, no instante t,

$$X(t) = (x(t), y(t)), \tag{3.19}$$

e

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{3.20}$$

no $\mathbb{R}^3$.

O vetor velocidade, que é a derivada do vetor posição, também no instante t e definido no $\mathbb{R}^2$, pode ser expresso da seguinte forma,

$$\dot{X}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \tag{3.21}$$

e, no $\mathbb{R}^3$,

$$\dot{X}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\,. \tag{3.22}$$

O vetor aceleração no instante t também definido no $\mathbb{R}^2$ é dado como sendo a segunda derivada do vetor posição, isto é,

$$\ddot{X}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \tag{3.23}$$

e, quando este está definido no $\mathbb{R}^3$,

$$\ddot{X}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)). \tag{3.24}$$

Da 2ª lei de Newton, sabe-se que a massa m vezes a aceleração a é igual a força resultante. Desta forma substituindo a aceleração usual pelo vetor aceleração, segue

$$ma = F \Rightarrow m\ddot{X} = F(X). \tag{3.25}$$

Proposição 3.4. Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo central de forças e X uma partícula de massa m. Se esta partícula está sob a ação do campo F, então sua órbita está contida num plano.

Demonstração. Seja $X \in \Omega$, tal que, $X = (x(t), y(t), z(t))$. Da 2ª lei de Newton (3.25), tem-se

$$m\ddot{X} = F.$$

Como F é um campo central de forças, segue

$$m\ddot{X} = f(X)X,$$

onde f é uma função escalar definida em Ω. Tomando o produto vetorial dessa equação diferencial por X, vem

$$m(\ddot{X} \times X) = f(X)(X \times X).$$

Mas, por outro lado,

$$X \times X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (yz - yz)\mathbf{i} + (xz - xz)\mathbf{j} + (xy - xy)\mathbf{k} = 0,$$

que é uma consequência do produto vetorial.

Daí,

$$m(\ddot{X} \times X) = 0. \tag{3.26}$$

Como $m \neq 0$, pois a massa da partícula nunca será nula, então de (3.26), vem

$$\ddot{X} \times X = 0. \tag{3.27}$$

Observe,

$$\frac{d}{dt}(\dot{X} \times X) = (\ddot{X} \times X) + (\dot{X} \times \dot{X}) = (\ddot{X} \times X).$$

Assim a equação diferencial (3.27) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\frac{d}{dt}(\dot{X} \times X) = 0.$$

Integrando, em ambos os lados da igualdade, tem-se

$$\int \frac{d}{dt}(\dot{X} \times X)\, dt \;=\; \int 0\, dt \Rightarrow \dot{X} \times X = C, \tag{3.28}$$

onde $C = (c_1, c_2, c_3)$ é um vetor constante.

Calculando o produto vetorial em (3.28), obtém-se

$$\dot{X} \times X \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (y\dot{z} - \dot{y}z, \dot{x}z - x\dot{z}, x\dot{y} - \dot{x}y).$$

Agora, tomando o produto interno de (3.28) e X, tem-se

$$\langle X, \dot{X} \times X \rangle = \langle X, C \rangle \tag{3.29}$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle X, \dot{X} \times X \rangle &= x(y\dot{z} - \dot{y}z) + y(\dot{x}z - x\dot{z}) + z(x\dot{y} - \dot{x}y) \\ &= xy\dot{z} - x\dot{y}z + \dot{x}yz - xy\dot{z} + x\dot{y}z - \dot{x}yz \\ &= xy\dot{z} - xy\dot{z} - x\dot{y}z + x\dot{y}z + \dot{x}yz - \dot{x}yz \\ &= 0. \end{aligned}$$

pois, vale a comutatividade e a associatividade.

Daí,

$$\langle X, C \rangle \;=\; 0 \;\Rightarrow\; c_1\, x(t) + c_2\, y(t) + c_3\, z(t) \;=\; 0 \tag{3.30}$$

que é uma equação do plano. Logo, $X(t)$ está num plano passando pela a origem. Observe também a perpendicularidade entre os vetores X e C, uma vez que seu produto interno é nulo, caso $C \neq 0$.

Agora, faz-se para $C = 0$. Mostra-se a seguir que para este caso, $X(t)$ também está sobre uma reta.

Para isso, calcula-se a derivada do vetor X normalizado, isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{|X|}\right), \tag{3.31}$$

com $|X| \neq 0$.

Fazendo $r = |X|$, note

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{r}\right) \;=\; \frac{\dot{X}r - X\dot{r}}{r^2}. \tag{3.32}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} r = |X| \quad &\Rightarrow \quad r^2 = |X|^2 \\ &\Rightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ &\Rightarrow \quad r^2 = \langle X, X \rangle \\ &\Rightarrow \quad r = \frac{\langle X, X \rangle}{r}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

E, derivando a equação $r^2 = \langle X, X \rangle$ em ambos os lados da igualdade, vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r^2 = \frac{d}{dt} \langle X, X \rangle \quad &\Rightarrow \quad 2r\dot{r} = \langle \dot{X}, X \rangle + \langle X, \dot{X} \rangle \\ &\Rightarrow \quad 2r\dot{r} = \langle \dot{X}, X \rangle + \langle \dot{X}, X \rangle \\ &\Rightarrow \quad 2r\dot{r} = 2\langle \dot{X}, X \rangle \\ &\Rightarrow \quad r\dot{r} = \langle \dot{X}, X \rangle \\ &\Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{\langle \dot{X}, X \rangle}{r} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Assim, substituindo em (3.32) os resultados obtidos para r e $\dot{r}$ em (3.33) e (3.34), respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{X}{r}\right) &= \frac{\dot{X} r - X \dot{r}}{r^2} \\ &= \frac{\frac{\langle X, X \rangle}{r} \dot{X} - \frac{\langle \dot{X}, X \rangle}{r} X}{r^2} \\ &= \frac{\frac{\langle X, X \rangle \dot{X} \, - \, \langle \dot{X}, X \rangle X}{r}}{r^2} \\ &= \frac{\langle X, X \rangle \dot{X} - \langle \dot{X}, X \rangle X}{r^3} \end{aligned}$$

Usando a identidade vetorial

$$\langle P, R \rangle Q - \langle Q, R \rangle P = (P \times Q) \times R,$$

segue

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{r}\right) = \frac{(X \times \dot{X}) \times X}{r^3},$$

mas, $X \times \dot{X} = C$, como visto em (3.28), logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{r}\right) = \frac{(X \times \dot{X}) \times X}{r^3} = \frac{C \times X}{r^3} = 0,$$

pois, $C = 0$. Voltando para a incógnita original, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{|X|}\right) = 0 \tag{3.35}$$

Logo, $\frac{X}{|X|}$ é um vetor constante, ou seja, $X(t)$ está sobre uma reta, como desejado. Portanto, a órbita da partícula $X(t)$ está contida num plano.

$\square$

Definição 3.8. Seja uma partícula X de massa m, cujo o vetor posição é dado por $X(t) = (x(t), y(t))$, no instante t. A órbita de X está contida num plano (x, y). Define-se o *momento angular*, denotado por $\widehat{h}$, (ou *momento da quantidade de movimento*) com relação à origem pela expressão

$$\widehat{h} = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{3.36}$$

Proposição 3.5 (*Lei da Conservação do Momento Angular no Movimento Central*)**.** Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ e a órbita de uma partícula X que está sob a ação de $F = (f_1, f_2)$. Então, o momento angular h é constante se e só se o campo for central.

Demonstração. Derivando o momento angular em relação a t, vem

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{h}} &= m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) \\ &= mx\ddot{y} - my\ddot{x}. \end{aligned}$$

E mais, como visto em (3.25), $F = m\ddot{X}$, pois F é um campo central de forças; então,

$$\dot{\widehat{h}} = xf_2 - yf_1.$$

Ora, observe que a expressão acima é igual a zero se, e somente se, o vetor F for paralelo ao vetor posição X, ou seja, se, e somente se, F for um campo central de forças.

Desta forma, como $\dot{\widehat{h}} = 0$, então o momento angular $\widehat{h}$ é constante em um campo central de força, e a reciproca vale.

$\square$

Observação. Uma consequência imediata de se ter um campo de força central é que este aponta na mesma direção, mas em sentido oposto, do vetor posição. Em outras palavras, o produto vetorial entre eles será nulo, uma vez que o ângulo entre eles será 180° e o $\operatorname{sen} 180° = 0$.

Agora, introduz-se as coordenadas polares, no estudo dos movimentos centrais, isto é,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta. \tag{3.37}$$

Dessa forma, a órbita de uma partícula outrora determinada por $(x(t), y(t))$ passa a ser determinada por $(r(t), \theta(t))$. Derivando as coordenadas polares (3.37), vem

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta, \qquad \text{e} \qquad \dot{y} = \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta. \tag{3.38}$$

Fazendo $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ e somando a quadratura de $\dot{x}$ e $\dot{y}$, tem-se

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2 + (\dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 \\ &= \dot{r}^2\cos^2\theta - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &+ \dot{r}^2\operatorname{sen}^2\theta + 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \\ &= \dot{r}^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Calculando a segunda derivada das coordenadas polares, obtêm-se

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - (\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + r\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta) \\ &= \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - r\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \end{aligned} \tag{3.40}$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r}\operatorname{sen}\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta \\ &= \ddot{r}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{3.41}$$

As expressões (3.37) e (3.38) dão a seguinte forma para o momento angular:

$$\begin{aligned} \widehat{h} &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= m\left[r\cos\theta(\dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - r\operatorname{sen}\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\right] \\ &= m\left[r\dot{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta\right] \\ &= mr^2\dot{\theta}(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= mr^2\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Logo, da Proposição (3.5), tem-se,

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante} \equiv h. \tag{3.43}$$

Observação. Na expressão em (3.43), r^2 sempre será positivo, portanto o sinal do produto $r^2\dot{\theta}$ será definido por θ, que, caso $h \neq 0$, é uma função estritamente *monotônica* ao longo da órbita, isto é, crescente, decrescente, estritamente crescente, estritamente decrescente ou constante, ao longo desta órbita.

Observação. Se $h = 0$, então $\theta(t)$ não será estritamente monotônica, e, por conseguinte, a órbita da partícula seria ao longo de uma reta passando pelo o centro do movimento.

Este trabalho se detêm no caso em que o momento angular é diferente de zero.

Proposição 3.6 (*Segunda Lei de Kepler*)**.** Se $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$, onde Ω é uma região conexa aberta, é um campo central de forças, então os raios vetores ligando o centro do movimento à partícula varrem áreas iguais em tempos iguais.

Demonstração. Para demonstrar essa proposição pega-se dois pontos arbitrários do campo central de força $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde Ω é uma região conexa aberta, e mostra-se que a área obtida é sempre constante entre eles.

Para isso, considere a área entre a curva e dois raios r partindo da origem para o ponto inicial $X_0 = (r(t_0), \theta(t_0))$ e o ponto final $X = (r(t), \theta(t))$,

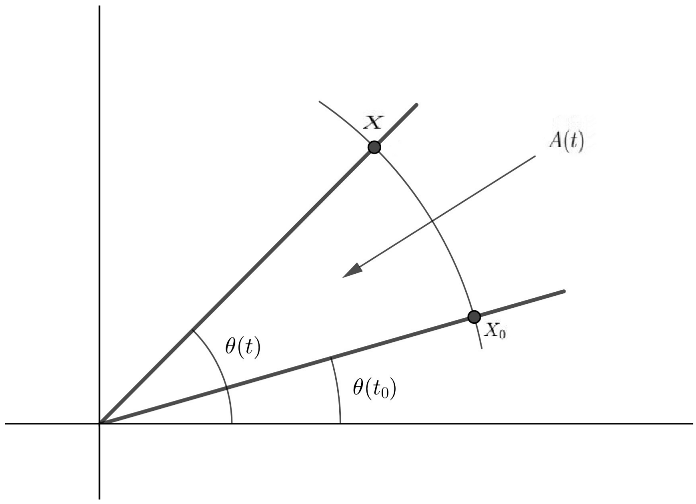

Figura 3.1: Área entre a curva e dois raios.

$A(t)$ nada mais é que a área de um setor circular, que por definição, é dada por

$$A(t) = \frac{\Delta\theta}{2} r^2. \tag{3.44}$$

Daí,

$$A(t) = \frac{1}{2} r^2 (\theta(t) - \theta(t_0)) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} r^2 \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} d\theta. \tag{3.45}$$

Derivando $A(t)$ com relação a t tem-se

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}, \tag{3.46}$$

como $r^2\dot{\theta}$ é constante (3.43), então $\dot{A}(t) = k$, onde k é uma constante. Dessa forma, tem-se o desejado.

□

3.3.1 Fórmula de Binet

Considere o campo central de força $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde Ω é uma região conexa aberta, tal que $F(X) = f(X)X$, com $X \in \Omega$. F pode ser escrito em coordenadas polares, da seguinte forma:

$$F(X) = f(X)(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Por outro lado, $F = m\ddot{X}$. Portanto,

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= f(X)(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ m(\ddot{x},\ddot{y}) &= f(X)(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Decorre da equação diferencial (3.47),

$$m\ddot{x} = f(X)\,r\cos\theta \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = f(X)\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{3.48}$$

pois, f é uma função escalar. Na Proposição (3.2) foi visto que $|X| = r$; daí,

$$m\ddot{x} = f(X)\,|X|\cos\theta \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = f(X)\,|X|\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{3.49}$$

E mais, fazendo $P = P(X) = f(X)|X|$, obtêm-se

$$m\ddot{x} = P\cos\theta \quad e \quad m\ddot{y} = P\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{3.50}$$

As equações diferenciais em (3.50) são as equações do movimento de uma partícula de massa m em um campo central de forças F.

Multiplicando as equações diferenciais (3.40) e (3.41) por $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$, respectivamente, vem

$$\ddot{x}\cos\theta = \ddot{r}\cos^2\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\ddot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot{\theta}^2\cos^2\theta \tag{3.51}$$

e

$$\ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta = \ddot{r}\,\mathrm{sen}^2\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{3.52}$$

Somando as equações diferenciais (3.51) e (3.52), têm-se,

$$\begin{aligned} \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta &= \ddot{r}\cos^2\theta + \ddot{r}\,\mathrm{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\theta \\ &= \ddot{r}(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) - r\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) \\ &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Agora, multiplicando as equações diferenciais (3.40) e (3.41) por $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, respectivamente, vem,

$$\ddot{x}\operatorname{sen}\theta = \ddot{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - r\ddot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta \tag{3.54}$$

e

$$\ddot{y}\cos\theta = \ddot{r}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos^2\theta + r\ddot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta. \tag{3.55}$$

Subtraindo as equações diferenciais (3.54) e (3.55),

$$\begin{aligned}\ddot{x}\operatorname{sen}\theta - \ddot{y}\cos\theta &= -2\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\cos^2\theta - r\ddot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta - r\ddot{\theta}\cos^2\theta \\ &= -2\dot{r}\dot{\theta}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - r\ddot{\theta}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= -2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Multiplicando as duas equações diferenciais de (3.50) por $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, respectivamente, obtêm-se:

$$m\ddot{x}\cos\theta = P\cos^2\theta \Rightarrow \ddot{x}\cos\theta = \frac{P}{m}\cos^2\theta \tag{3.57}$$

e

$$m\ddot{y}\operatorname{sen}\theta = P\operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \ddot{y}\operatorname{sen}\theta = \frac{P}{m}\operatorname{sen}^2\theta. \tag{3.58}$$

Somando as equações diferenciais (3.57) e (3.58), vem,

$$\begin{aligned}\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\operatorname{sen}\theta &= \frac{P}{m}\cos^2\theta + \frac{P}{m}\operatorname{sen}^2\theta \\ &= \frac{P}{m}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= \frac{P}{m}.\end{aligned}$$

Portanto, de (3.53), segue

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{P}{m}. \tag{3.59}$$

De modo semelhante, multiplica-se as equações diferenciais de (3.50) por $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, respectivamente,

$$m\ddot{x}\operatorname{sen}\theta = P\cos\theta\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \ddot{x}\operatorname{sen}\theta = \frac{P}{m}\cos\theta\operatorname{sen}\theta \tag{3.60}$$

e

$$m\ddot{y}\cos\theta = P\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \ddot{y}\cos\theta = \frac{P}{m}\cos\theta\operatorname{sen}\theta. \tag{3.61}$$

Subtraindo as equações diferenciais (3.60) e (3.61), obtém-se:

$$\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{y}\cos\theta \;=\; \frac{P}{m}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{P}{m}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \;=\; 0,$$

logo,

$$-\,2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \tag{3.62}$$

As equações diferenciais (3.59) e (3.62), que são as equações do movimento em coordenadas polares, são equivalentes as equações de (3.50).

O fato de $\theta(t)$ ser estritamente monotônica implica que pode-se obter t como função de θ, consequentemente r como função de θ. Dessa forma, $r = r(\theta)$, ou seja, $r(t(\theta))$. Observe que $t(\theta)$ é a função inversa de $\theta(t)$; portanto o seguinte resultando vale:

$$\dot{t}(\theta) = \frac{1}{\dot{\theta}(t)},$$

uma vez que,

$$\dot{f}^{-1}(x) = \frac{1}{\dot{f}(f^{-1}(x))}. \tag{3.63}$$

Portanto, pode-se calcular as seguintes derivadas,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\dot{r}\dot{t}(\theta)}{r^2} = -\frac{\dot{r}}{r^2}\frac{1}{\dot{\theta}(t)} = -\frac{\dot{r}}{h} \tag{3.64}$$

e, sabendo que h é uma constante (3.43), então

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\\
&= \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\dot{r}}{h}\right)\\
&= -\frac{1}{h}\cdot\frac{d}{d\theta}(\dot{r})\\
&= -\frac{1}{h}\cdot\ddot{r}\dot{t}\\
&= -\frac{\ddot{r}}{h\dot{\theta}}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Encontrando o valor de $\ddot{r}$ em (3.65), isto é,

$$\ddot{r} = -h\dot{\theta}\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -r^2\dot{\theta}^2\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

e substituindo na equação diferencial (3.59), obtém-se:

$$\begin{aligned}
-r^2\dot{\theta}^2 \cdot \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\dot{\theta}^2 = \frac{P}{m} \quad &\Rightarrow \quad -r^2\dot{\theta}^2 \cdot \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = \frac{P}{m} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{P}{mr^2\dot{\theta}^2} = -\frac{P}{mr^2\dot{\theta}^2}\cdot\frac{r^2}{r^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{Pr^2}{mh^2}. \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

A equação diferencial de segunda ordem acima é conhecida como *fórmula de Binet*, que é a equação diferencial de todas as órbitas $r = r(\theta)$ de uma partícula X de massa m num campo central de forças $F = (P(r)\cos\theta, P(r)\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Sejam $t = 0$ e os seguintes valores iniciais em $t = 0$

$$r(0) = r_0 \neq 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{r}(0) = v_r \quad e \quad \dot{\theta}(0) = v_\theta / r_0.$$

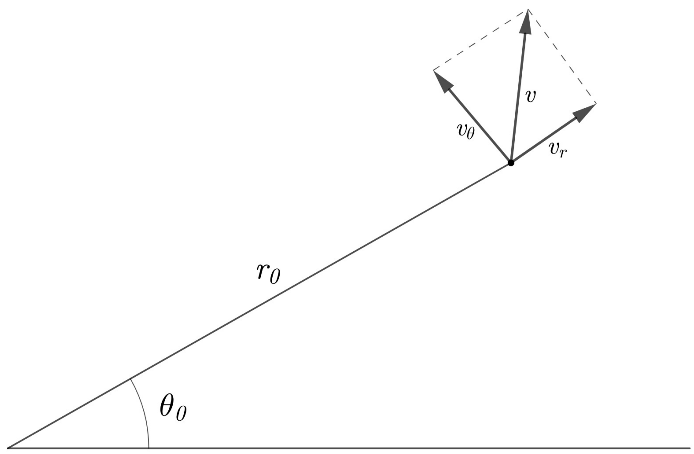

Figura 3.2: Gráfico dos valores iniciais.

Calcula-se o momento angular h:

$$h \;=\; r_0^2\theta(0) \;=\; r_0^2 \cdot \frac{v_\theta}{r_0} \;=\; v_\theta r_0. \qquad (3.67)$$

E, os valores iniciais de $1/r$ como função de θ,

$$\frac{1}{r(\theta_0)} = \frac{1}{r_0} \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r_0}\right)\Big|_{\theta=\theta_1} = -\frac{v_r}{v_\theta r_0}. \qquad (3.68)$$

Os valores iniciais acima e a equação de Binet (3.66) determinam a equação da órbita.

Obtém-se a seguir uma equação diferencial de primeira ordem “quase equivalente” a (3.66).

Definição 3.9 (*Energia Cinética*)**.** Seja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de força, onde Ω é um aberto. Uma partícula de massa m está sob movimento deste campo F, cujo o vetor posição, no instante t é $X(t)$. A *Energia Cinética* desta partícula é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2, \tag{3.69}$$

onde v é a velocidade escalar.

Definição 3.10 (*Energia Total*)**.** A *Energia Total* $E_T(t)$ de uma partícula de massa m, definida da mesma forma da definição anterior é dada por

$$E_T(t) = E_c(t) + U(X(t)), \tag{3.70}$$

onde $U(X(t))$ é a energia potencial (já vista no começo desta seção).

Lema 3.2 (*Princípio da Conservação de Energia*)**.** Sejam $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde Ω é uma região conexa aberta, um campo de força e uma partícula de massa m. Se F é conservativo, então, a energia total é constante.

Demonstração. De fato, derivando a equação (3.69) com relação a t e sabendo que a velocidade v fora definida como sendo igual a $\dot{X}$, tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{E}_c &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}m \cdot (2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) \\ &= m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} \\ &= f_1\dot{x} + f_2\dot{y} \\ &= \langle \dot{X}, F \rangle, \end{aligned} \tag{3.71}$$

pois, $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})$ e $F = (f_1, f_2)$.

Integrando a equação obtida em (3.71) também com relação a t, vem

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \dot{E}_c \, dt &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{X}, F \rangle \, dt \\ \Rightarrow E_c(t_1) - E_c(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{X}, F \rangle \, dt. \end{aligned}$$

Mas, como F é conservativo, então supondo que V é um potencial de F, dessa forma, $F = \nabla V$, obtém-se

$$\begin{aligned} E_c(t_1) - E_c(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{X}, \nabla V \rangle \, dt \\ &= V(X(t_1)) - V(X(t_0)). \end{aligned}$$

Daí, fazendo $U(X) = -V(X)$,

$$
\begin{aligned}
E_c(t_1) - E_c(t_0) &= -U(X(t_1)) + U(X(t_0)) \\
\Rightarrow E_c(t_1) + U(X(t_1)) &= E_c(t_0) + U(X(t_0)) \\
\Rightarrow E_T(t_1) &= E_T(t_0) \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

Logo, como t é arbitrário, a energia total é constante em um campo conservativo para qualquer instante t, como desejado.

□

Seja V um potencial de F dado da seguinte forma

$$V = -W = \int P(r)\, dr,$$

com $U = -(-W) \Rightarrow U = W$. Logo, de (3.70), obtém-se,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + W. \qquad (3.73)$$

Mas, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, veja (3.39); daí,

$$E_T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + W \Rightarrow 2(E_T - W) = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Multiplicando ambos os membros por $1/(mr^4\dot{\theta}^2)$, vem

$$
\begin{aligned}
\frac{2(E_T - W)}{mh^2} = \frac{1}{mr^4\dot{\theta}^2} \cdot 2(E_T - W) &= \frac{1}{mr^4\dot{\theta}^2} \cdot m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\
&= \frac{\dot{r}^2}{r^4\dot{\theta}^2} + \frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \\
&= \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2},
\end{aligned}
$$

logo,

$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2(E_T - W)}{mh^2}. \qquad (3.74)$$

As equações diferenciais (3.66) e (3.74) são quase equivalentes, garantindo:

i. Toda solução $r(t)$ de (3.66) é solução de (3.74), por conta do princípio da conservação de energia;

ii. Se $r(t)$ for uma solução não constante de (3.74), então ela é solução de (3.66).

Para provar o item ii deriva-se (3.74) com relação a θ, isto é,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2(E_T - W(r))}{mh^2}\right] \\
\Rightarrow 2\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{2\dot{r}}{r^3\dot{\theta}} &= \frac{2}{mh^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(E_T - W(r)\right) \\
\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{\dot{r}}{h}\right)\cdot\left(-\frac{\ddot{r}}{h\dot{\theta}}\right) - \frac{2\dot{r}}{r^3\dot{\theta}} &= \frac{2}{mh^2}\cdot\left(-\dot{W}(r)\cdot\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}\right) \\
\Rightarrow \frac{\dot{r}\ddot{r}}{\dot{\theta}h^2} - \frac{\dot{r}}{r^3\dot{\theta}} &= \frac{1}{mh^2}\cdot\left(P\cdot\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Como $h = r^2\dot{\theta}$; então,

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{r}\ddot{r}}{\dot{\theta}h^2} - \frac{\dot{r}}{rh} &= \frac{P\dot{r}}{m\dot{\theta}h^2} \\
\Rightarrow -\frac{\dot{r}}{h}\left(-\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}h} + \frac{1}{r}\right) &= \frac{P\dot{r}}{m\dot{\theta}h^2} \\
\Rightarrow -\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}h} + \frac{1}{r} &= -\frac{P\dot{r}}{m\dot{\theta}h^2}\cdot\frac{r^2\dot{\theta}}{\dot{r}} \\
\Rightarrow -\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}h} + \frac{1}{r} &= -\frac{Pr^2}{mh^2}.
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

Observe que esta expressão implica (3.66) se $r(t)$ não for constante, uma vez que se $r(t)$ for contante não faz sentindo calcular sua derivada como foi feito.

Dessa forma, obtém-se uma equação diferencial de 1ª ordem, quase equivalente à fórmula de Binet, que é uma equação diferencial de 2ª ordem. Portanto, a equação (3.74) é uma equação diferencial de todas as órbitas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como força motriz o desejo de ver a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias nas demais ciências, como mencionado na introdução deste. Em específico, fora aqui apresentado apenas uma de muitas aplicações das Equações Diferenciais, aplicação esta que é vista na Física, mais especificamente na subárea Mecânica Clássica.

Fora revisado nas seções 2 e 3 alguns conceitos e definições necessários para o desenvolvimento deste trabalho, enunciado alguns resultados, bem como demonstrado alguns outros, com o intuito de viabilizar para o leitor a aplicação desenvolvida na seção 3: Campos Centrais de Força.

O objetivo deste trabalho não foi conseguir uma solução para (3.66), mas apenas apresentar um modelo, cuja solução pode ser obtida com menor esforço do que a solução da fórmula de Binet, haja vista que (3.66) é uma equação diferencial de 1ª ordem e a fórmula de Binet é uma equação diferencial de 2ª ordem, para descrever as órbitas $r = r(\theta)$.

A partir do que fora visto, pode-se encontrar uma solução para a equação diferencial (3.66) e mostrar que ela é única, e/ou apresentar uma solução para a fórmula de Binet. Há também outras possibilidades de aplicações, como, por exemplo, o *ápside* de uma órbita, que é ponto de máximo ou mínimo de $r(\theta)$, as *Leis de Kepler*, e, a *Lei da Gravitação Universal*, bem como suas relações. Mas, tais aplicações ficam para outro momento.

Espera-se a contribuição para o corpo acadêmico da UEPB e, demais instituições, bem como, apresentar ao leitor a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias, mostrando que ela não é uma teoria isolada.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, Djairo G.; NEVES, Aloisio F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 301 p.

REIPS, Louise. **Campos Vetoriais no Plano**. 2006. 68 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96497. Acesso em: 19 nov. 2020.

STEWART, James. **Cálculo**, volume I. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

STEWART, James. **Cálculo**, volume II. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. 549 p. v. 2.