UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

CAMILA NUNES PAULINO

SOBRE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2020

CAMILA NUNES PAULINO

SOBRE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque.

CAMPINA GRANDE - PB

2020

P327s Paulino, Camila Nunes.
Sobre a equação de Bernoulli e aplicações [manuscrito] / Camila Nunes Paulino. - 2020.
23 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque , Departamento de Matemática - CCT."

1. Equação de Bernouli. 2. Equação de Bernoulli - Resolução. 3. Jacob Bernoulli. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 BC/UEPB

CAMILA NUNES PAULINO

SOBRE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 15 / 12 / 20.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de S. Coelho

Profª. Drª. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Wilker de Lima Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus pais José Nunes Paulino e Ivanete Nunes Paulino por terem me incentivado a prosseguir com os estudos, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças e por me ajudar na realização dessa conquista. Agradeço aos meus familiares, mãe, pai, avós, irmão, e tios, por todo o apoio.

Agradeço ao professor Francisco Sibério Bezerra Albuquerque por ter acreditado em mim, e por ter tido paciência comigo nos momentos de dificuldade durante todo o tempo e por me incentivar a prosseguir nos estudos.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas da turma matemática 2014.2 e àqueles que encontrei durante a caminhada, que tiveram sua parcela de contribuição nessa conquista. Em especial, agradeço aos meus amigos Aylton Belo, Bianca Silvinio, Talhaine Tomaz, Viviane Lúcia, por todos os momentos que vivemos juntos, e por toda a ajuda em todos os momentos.

Agradeço a minha amiga Ana Carolina, por estar presente em todos os momentos, por não ter me deixado desistir, pelas palavras de encorajamento, apoio, que em todo esses anos me ajudou, e contribuiu valiosamente para minha realização acadêmica.

Agradeço a toda equipe do departamento e da coordenação de matemática da UEPB, a todos os professores em que tive o privilegio de ser aluna, pois foram muito importantes para a minha formação, e me fizeram evoluir como profissional e pessoa.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo histórico acerca da Equação de Bernoulli. A pesquisa abrangeu alguns dos principais fatos e respectivos trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento no decorrer do tempo. Estudou-se as formas de resolução da equação e algumas aplicações da Equação de Bernoulli para modelar e solucionar determinados problemas em diversos ramos das Ciências Naturais. Para isso, utilizou-se alguns conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias, tais como: EDO's linear, não linear e fator integrante.

Palavras Chave: Equação de Bernoulli. Equação de Bernoulli-Resolução. Jacob Bernoulli.

ABSTRACT

The present work aims to carry out a historical study about the Bernoulli Equation. The research covered some of the main facts and respective works that contributed to the development over time. We studied the ways of solving the equation and some applications of the Bernoulli equation to model and solve certain problems in different branches of Natural Sciences. For this, some concepts of Ordinary Differential Equations were used, such as: linear, non-linear EDO and integral factor.

Keywords: Bernoulli equation. Bernoulli-Resolution equation. Jacob Bernoulli.

SUMÁRIO

Introdução

Uma Equação de Bernoulli é uma equação diferencial não linear, de primeira ordem, na forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n,$$

em que n é um número real qualquer. Para $n = 0$ e $n = 1$ a equação é linear em y.

O estudo da Equação de Bernoulli começou no século XVII com investigações no incipiente Cálculo Diferencial e Integral feitas por Jacob, Johann e Leibniz e suas principais aplicações foram nas Ciências Naturais, mas posteriormente foram feitas varias aplicações em outras áreas.

A Equação de Bernoulli, em geral, é classificada em $n = 0$ (quando é preciso usar um fator de integração), $n = 1$ (a equação é resolvida por variáveis separáveis) ou $\forall\, n \in \mathbb{R} \neq 0,1$ (quando a equação é reduzida a uma equação linear pela mudança de variável).

No presente trabalho, iremos caminhar um pouco pela a história da família Bernoulli, procurando enfatizar o trabalho realizado por Jacob Bernoulli, que no ano de 1696 desenvolveu a equação que conhecemos como Equação de Bernoulli. Jacob contou com as contribuições de Leibniz para provar $n \neq 0,1$, como podemos encontrar no artigo intitulado *Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?*, conforme a referência [3].

Durante o período de estudo para a elaboração deste trabalho, pesquisando sobre a família Bernoulli, no site do IMPA, encontrei duas matérias de autoria do matemático Marcelo Viana, com quem mantive contato e fiquei agradecida com a disponibilização completa das matérias, a primeira intitulada *Os Bernouli são a família real da matemática* a segunda *A notável família matemática Bernoulli era problemática*, em que, faço citações das mesmas no Capítulo 1.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentaremos um pouco da historia da polêmica família Bernoulli. No Capítulo 2, apresentaremos a importante contribuição de Leibniz no estudo da equação. No Capítulo 3, apresentaremos a resolução da equação considerando, separadamente, os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n \neq 0,1$, bem como algumas aplicações dela. Por derradeiro, tecemos algumas palavras em conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Breve histórico da família Bernoulli

Os Bernoulli são originários da Bélgica e emigraram para a cidade suíça da Basileia. A família é formada por quatro irmãos e seis irmãs. Dois deles alcançaram renome na matemática, quais sejam, Jacob e Johann. Daniel, filho de Johann, seu primo Nicolaus I, seus irmãos Nicolaus II e Johann II, e os filhos de Johann II: Johann III e Jacob II, também deram contribuições à Matemática.

Os Bernoulli trataram de temas importantes. Jacob possibilitou, por exemplo, avanços na teoria da Probabilidade, lei dos grandes números, processos de Bernoulli. Johann trabalhou nas equações diferenciais (em especial, na equação que carrega seu sobrenome) e no Cálculo das Variações.

Daniel trabalhou no conhecido "Princípio de Bernoulli da Hidrodinâmica", além de ter estudado o paradoxo de São Petersburgo. Os Bernoulli eram muito talentosos, mas eram uma família com muitos problemas. Havia ciúme entre os irmãos Jacob e Johann. Logo após Johann ficar famoso, Jacob falava que ele havia sido seu aluno, o que deixava Johann irritado. Eles chegaram ao ponto de brigar por causa da solução de um problema dito isoparamétrico e por esse motivo deixaram de se falar em 1697. Conforme preceitua Viana (2019, p. 1), "Jacob desconfiava que Johann queria seu emprego na Universidade da Basileia, que Johann realmente conseguiria depois da morte do irmão."

Em 1738, Daniel publicou um livro sobre hidrodinâmica. Johann, seu pai, publicou um livro com as mesmas ideias de Daniel, mas colocou uma data anterior e falou que seu filho tinha feito plágio. Johann novamente se envolveu em serias controvérsias com o marquês L'Hôpital[1], seu patrocinador.

[1] **Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital** (1661-1704) foi um matemático francês

> Marquês de L'Hôpital, pagou a Johann um bom honorário para que o informasse sobre suas descobertas na teoria do cálculo, as quais ele não poderia contar para mais ninguém. Dois anos depois, o marquês publicou o livro "Análise dos infinitamente pequenos com aplicações às linhas curvas", que se tornou um enorme sucesso. (Viana, 2019, p. 1)

Após a morte do marquês, Johann não recebeu mais o honorário dai em publico afirmou que o livro era copia de suas notas de aula que ele tinha dado a L'Hôpital. Mas, os historiadores não acreditaram nele, depois do que ele fez com o próprio filho. Em 1920, foi encontrado na Universidade de Basileia uma cópia das notas de aula de Johann comprovando o que ele tinha afirmado.

1.1 Jacob (Jacques) Bernoulli

Jacob nasceu dia 27 de dezembro de 1654 em Basel e faleceu em 16 de agosto de 1705. Estudou Matemática e Astronomia contra a vontade dos seus pais. Em 1676, após licenciatura em Teologia, foi trabalhar em Genebra como tutor. Depois de um tempo, viajou para França, onde trabalhou dois anos com os seguidores de René Descartes.

Já em 1681, Jacob foi para a Holanda e lá conheceu vários matemáticos. Continuando os seus estudos com os cientistas e matemáticos da Europa, logo após, foi para Inglaterra, onde conheceu, Boyle e Hooke e outros. Dai, começou o interesse por Astronomia, área na qual elaborou uma teoria sobre cometas mas que, no final, se considerou incorreta.

Com tantas viagens feitas, Jacob manteve-se em correspondência com vários matemáticos durante muitos anos. Voltou, depois, à Suíça, e lá ensinou Mecânica na Universidade de Basel desde 1683, onde proferiu várias palestras sobre mecânica de sólidos e líquidos.

Como Jacob também era formado em Teologia, esperava-se que ele voltasse para a Igreja, mas recusou o lugar oferecido a ele. Suas paixões eram a Matemática e a Física Teórica e foi nestas áreas que se dedicou à pesquisa e ao ensino. Durante esse tempo, o membro da família Bernoulli estudou os trabalhos dos grandes matemáticos da sua época e, por meio deles, começou a se interessar por Geometria Infinitesimal.

Em 1682 Jacob começou a publicar no *Journal Acta Eruditorum*, em Leipzig. Já em 1684 se casou com Judith Stupanus e tiveram um casal de filhos que, ao contrário de muitos dos membros da família Bernoulli, não se tornaram nem matemáticos nem físicos.

Em 1687 Jacob foi nomeado professor de Matemática em Basel e, juntamente com o seu irmão Johann, começou a estudar o Cálculo Diferencial e Integral como Leibniz o apresentara.

Note-se que as publicações de Leibniz sobre o Cálculo Diferencial e Integral eram muito obscuras para os matemáticos da época, e os irmãos Bernoulli foram os primeiros a tentar compreender e aplicar as ideias do matemático alemão. Apesar da sua cooperação em trabalhos importantes, os irmãos Bernoulli, como de costume, vieram a se desentender, chegando mesmo a haver, em 1697, uma ruptura total das relações entre eles. Jacob criticou publicamente as autoridades da Universidade de Basel, o que, como seria de esperar, deixou-o numa situação difícil na própria Universidade.

Foram várias as primeiras grandes contribuições de Jacob para a Matemática: em 1685 publicou um panfleto sobre o paralelismo entre a Lógica e a Álgebra; em 1685 trabalhou no campo da Teoria das Probabilidades; em 1687 elaborou trabalhos no campo da Geometria, e os resultados que obteve permitiram-lhe formular uma construção que assegurava dividir qualquer triângulo em quatro partes iguais com duas linhas perpendiculares. Em 1689 Jacob publicou dois importantes trabalhos: um sobre séries infinitas e outro em que demonstrava a chamada Lei dos Grandes Números. Entre 1682 e 1704 publicou cinco trabalhos sobre séries infinitas, em que os primeiros dois continham importantes resultados. Bernoulli estudou também séries exponenciais.

Em maio de 1690, Jacob publicou um artigo muito importante para a história do desenvolvimento do Cálculo, é neste artigo que a expressão “integral"aparece pela primeira vez, com o verdadeiro sentido de integração. Em 1696 resolveu a equação que hoje conhecemos como “Equação de Bernoulli”:

$$y' = p(x)y + q(x)y^n.$$

Jacob se interessou também pelo estudo de curvas, entre as quais as hipociclóides e epiciclóides, a ciclóide, a catenária, os ovais de Cassini, a espiral equiângular e a lemniscata, que depois ficou com o seu nome. Ele foi também o matemático que mais avançou no estudo da espiral logarítmica. Em 1692, investigou, as curvas cáusticas e as estudou, em particular, associadas à parábola, à espiral logarítmica e à epiciclóide. Em 1694 foi concebida, pela primeira vez, a Lemniscata de Bernoulli.

O trabalho mais original de Jacob foi “Ars Conjectandi” (“A arte de conjecturar”) publicado em Basel em 1713, oito anos após a sua morte. Até a data da sua morte, em 1705, continuou a leccionar Matemática em Basel, sendo que após sua mote foi substituído pelo seu irmão

Johann. Quando da sua morte, seu trabalho estava incompleto, mas não deixou de ter um enorme significado na Teoria das Probabilidades.

Jacob, era um apaixonado pelas curvas e pelo Cálculo, e sempre considerou as propriedades da espiral logarítmica como sendo quase mágicas, ele pediu que, na sua pedra tumular, ficasse inscrita a seguinte frase em latim: *Eadem Mutata Resurgo*, que significa “surjo sempre igual a mim própria”.

Capítulo 2

Contribuição de Leibniz na Equação de Bernoulli

Para uma abordagem histórica acerca da contribuição de Leibniz, baseamo-nos, precipuamente, no trabalho intitulado *Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?*, cuja autoria é devida a Adam Parker (vide [3]).

Houve três principais matemáticos que estudaram a resolução da equação de Bernoulli. O primeiro foi Gottfried Leibniz - Matemático e Filósofo alemão desenvolvedor do Cálculo, o segundo foi Jacob e o terceiro foi Johann, seu irmão. Em 1695, Jacob Bernoulli propôs pela imprensa a equação pela primeira vez. Ele estava preso nesse problema fazia alguns meses e, por isso, decidiu organizar uma competição para resolvê-lo.

Três meses após a publicação da equação diferencial de Bernoulli, Leibniz publicou uma solução que baseada na mudança de variáveis y^{1-n}. Ressalte-se que Leibniz não forneceu a substituição que reduz a uma equação diferencial linear, ele estava sendo vago, e também não deu nenhuma indicação de como resolver a equação diferencial linear. Em verdade, omitiu os detalhes dizendo: "Essa equação geral é reduzida à quadratura por mim e já foi comunicada aos amigos". O amigo a quem ele se refere é L'Hôpital e a técnica de resolução está em uma carta de Leibniz datada de 27 de novembro de 1694. Não ficou claro se Leibniz poderia dar uma solução para o resultado da equação diferencial linear. O fato de ter usado a palavra "quadratura" indica que ele estava satisfeito em mostrar a solução como área sob uma curva.

Em julho de 1696, Jacob Bernoulli publicou um artigo anunciando que seu problema fora resolvido por Leibniz. Johann deu detalhes acerca de uma segunda solução e, em março de 1697, publicou que estava resolvendo a equação do irmão em que mostrava duas soluções, quais sejam: a primeira delas é uma solução advinda do método de Leibniz em que, por meio da mudança $y = v^{\frac{1}{(1-n)}}$ transforma a equação de Bernoulli numa equação diferencial linear. A segunda solução de Johann sugere que escrevamos a solução como

$$y = mz$$

Ele substitui y na equação diferencial $ady = ypdx + by^n qdx$ o que significa que y resolve a equação diferencial original. Em seguida, ele afirma que:

$$\frac{adz}{z} = pdx$$

ou seja, z satisfaz

$$\frac{ady}{dx} = yp$$

que é a parte homogênea da solução:

$$\frac{ady}{dx} = yp + by^n q.$$

Johann escreve a solução em duas partes $y = mz$, introduzindo um grau de liberdade. A função z foi escolhida para resolver a equação diferencial original homogênea, e mz resolve a equação diferencial original. Johann usa variação de parâmetros 78 anos antes do famoso artigo de Lagrange sobre o assunto em 1775.

Johann fornece a substituição explícita de Leibniz:

1) z é uma solução da equação homogênea $adz = zpdx$. Equação separável, portanto, resolvemos para z em função de x.

2)$Y = mz$ resolve a equação diferencial de Bernoulli, ou seja $ady = a(mdz + zdm) = mzpdx + bqdx$. Como $adz = zpdx$ temos que $azdm = bqdx$.

A substituição do z encontrado nesta equação diferencial leva a outra equação separável que podemos resolver para m. Finalmente, escrever $y = zm$ fornece a solução para a equação diferencial linear.

Isso mostra que Joham conhecia a técnica. De fato, Joham escreveu em dezembro de 1696 que a equação não tinha lhe causado problemas.

Mas a historia não termina por aqui. Após a morte Jacob, suas anotações e artigos foram coletados e publicados junto com extensas considerações do editor, Cramer[1]. Nas notas de rodapé do problema:

$$ady = ypdx + by^n qdx,$$

[1]**Gabriel Cramer** (1704-1752) foi um matemático suíço.

Jacob anunciou como Leibniz resolveu seu problema. Cramer faz vários comentários sobre o problema, um deles já vimos, que foi como usar o método de Leibniz. Ele também comenta sobre Jacob ter atacado a equação diferencial.

$$dy = ayx^m dx + by^r x^v dx$$

que foi pensado como uma versão mais simples da equação diferencial de Bernoulli. Nas anotações de Jacob, ele resolve equações diferenciais onde a solução é escrita como produto de duas funções $dy = ydx + bx^v dx$ e $dy = yydx + x^v dx$ ambas equações resolvidas supondo que: $y = pq$. No primeiro exemplo resolve a equação diferencial homogênea $dy = ydx$.

Em suma, Gottfried Leibniz, Jacob e Johann são os principais matemáticos que contribuíram para a solução da equação diferencial de Bernoulli. Jacob propôs isso no papel, enquanto Leibniz e Johann forneceram ideias importantes. Leibniz conhecia a técnica que ensinamos até hoje, mas ele escondeu a maioria dos detalhes. Frise-se que a solução de Johann foi, em verdade, baseada no método da variação dos parâmetros (Boyce-Diprima, 2015, p.96) anos antes de Lagrange estudar a técnica.

Capítulo 3

Resolução da equação de Bernoulli e aplicações

Conforme visto na Introdução, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

é chamada de **equação de Bernoulli**. Para $n = 0$ ou $n = 1$ a equação (3.1) é linear em y.

3.1 Resolução da equação de Bernoulli

Dedicaremos o estudo desta seção à resolução da equação (3.1). Para isso, serão suficientes os conhecimentos aprendidos em qualquer curso básico de Equações Diferenciais Ordinárias. Relembremos que uma solução para (3.1) é um função $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciável, que satisfaz a equação em todos os pontos $t \in (a,b)$. Para fins didáticos, separamos essa resolução em três casos, discriminados a seguir. O dois primeiros casos correspondem ao caso linear e o último ao não linear.

Caso 1: $n = 0$. (3.1) se reduz a $y' + p(t)y = q(t)y^0$, ou seja, $y' + p(t)y = q(t)$, a qual é uma EDO linear cujo método de solução é descrito como segue: seja $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ (Fator integrante da equação linear). Multiplicando $y' + p(t)y = q(t)$ por $\mu(t)$, obtemos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t). \tag{3.2}$$

Mas como $\mu(t)p(t) = \dfrac{d\mu}{dt}$, então (3.2) pode ser escrita como:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t).$$

O lado esquerdo da equação é derivada do produto, então:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)q(t). \tag{3.3}$$

A equação (3.3) é do tipo $y' + p(t)y = q(t)$, ou seja,

$$\frac{dY}{dt} = f(t),$$

em que $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$. Integrando ambos os membros de (3.3) em t, temos

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C.$$

Como $\mu(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, obtemos a solução geral da equação que é dado por:

$$y(t) = \int \frac{\mu(t)q(t)dt}{\mu(t)} + C.$$

Caso 2: $n = 1$. Nesse caso, (3.1) se reduz a $y' + p(t)y = q(t)y$, a qual é uma EDO linear separável cujo método de resolução é descrito como segue:

$$y' + p(t)y = q(t)y.$$

Fazendo a separação de variável, temos:

$$\frac{dy}{dt} = (q(t) - p(t))y \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = (q(t) - p(t))dt.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução da EDO:

$$\int \frac{dy}{y} = \int (q(t) - p(t))dt + C.$$

Caso 3: $n \neq 0, 1$. Para $n \neq 0, 1$ a equação de Bernoulli (3.1) é não linear.

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n. \tag{3.4}$$

Multiplicando (3.4) por y^{-n}, obtemos:

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)y^{1-n} = q(t). \tag{3.5}$$

Fazendo $v = y^{1-n}$

$$\frac{dv}{dt} = (1-n)y^{1-n-1} \cdot \frac{dy}{dt} = (1-n)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Portanto,

$$y^{-n}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.5), temos:

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dt} + p(t) \cdot v = q(t)$$

Logo,

$$v' + (1-n) \cdot p(t)v = (1-n)q(t).$$

a qual é linear, obtemos a solução geral da equação que é dado por:

$$y(t) = \mu(t)(\int \frac{\mu(t)q(t)dt}{\mu(t)} + C)$$

Ao final, devemos voltar a variável original, com $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

3.2 Aplicações

Finalmente, apresentaremos algumas aplicações da equação de Bernoulli. Esta seção foi inspirada, principalmente, na referência [2]. A primeira delas trata da famosa equação diferencial de Verhulst[1], a qual é um importante tópico da teoria das equações diferenciais relacionado ao crescimento populacional.

Considere o problema:

$$\frac{dp}{dt} = k(p_{max} - p)p, \tag{3.7}$$

em que $k > 0$ é uma constante e p_{max} denota um valor limite máximo para a população. Segundo este modelo, qual será o comportamento da população no longo prazo? A resposta a esse questionamento é desenvolvida a seguir. A EDO (3.7) é equivalente a

$$\frac{dp}{dt} - kp_{max}p = -kp^2. \tag{3.8}$$

Logo, é uma equação de Bernoulli. Fazendo $v = p^{-1}$, segue-se que $p' = -v^{-2} \cdot v'$. Substituindo p e p' na equação (3.8), obtemos a equação

$$v' + kp_{max} \cdot v = k, \tag{3.9}$$

a qual é linear se resolve pelo método do fator integrante (Boyce-Diprima, 2015, p.31).

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int kp_{max}dt},$$

[1]**Pierre François Verhulst**(1804-1849) foi matemático e doutor na teoria dos números.

donde

$$\mu(t) = e^{kp_{max}t}. \tag{3.10}$$

Multiplicando a equação (3.9) por (3.10), obtemos

$$e^{kp_{max}t} \cdot v^{'} + kp_{max} \cdot v = e^{kp_{max}t} \cdot k$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \cdot [kp_{max} \cdot v] = k \cdot e^{kp_{max}t}.$$

Integrando ambos os membros, obtém-se

$$v = \frac{1}{p_{max}} + C \cdot e^{-kp_{max}t},$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Retornando à variável p, inferimos que

$$p = \frac{1}{\frac{1}{p_{max}} + \frac{C}{e^{kp_{max}t}}},$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{p_{max}}} + \frac{C}{e^{kp_{max}t}} \right) = \frac{1}{\frac{1}{p_{max}}} = p_{max},$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}$, demonstrando que, no longo prazo, a população ficará mais e mais próxima de p_{max}.

Uma segunda aplicação se dá na equação de Ricatti[2]. Uma EDO de primeira ordem é denominada equação de Ricatti se puder ser expressa na forma

$$\frac{dy}{dt} = p(t) + q(t)y + r(t)y^2, \tag{3.11}$$

para funções $p, q, r : (a, b) \to \mathbb{R}$ contínuas. A equação de Ricatti pode ser transformada em uma equação de Bernoulli, caso seja conhecida uma solução particular $y_1(t)$ da equação de Ricatti, por meio da seguinte mudança de variável:

$$y(t) = y_1(t) + u(t). \tag{3.12}$$

Derivando (3.12) em relação à t, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{du}{dt}. \tag{3.13}$$

[2] **Jacob Francesco Ricatti** (1676-1754) foi um conde italiano e também matemático e filósofo

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11), temos

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}+\frac{du}{dt} &= p(t)+q(t)\cdot(y_1+u)+r(t)\cdot(y_1+u)^2\\ &= p(t)+q(t)y_1+q(t)u+r(t)\cdot(y_1^2+2y_1u+u^2)\\ &= p(t)+q(t)y_1+q(t)u+r(t)y_1^2+r(t)2y_1u+r(t)u^2.\end{aligned}$$

Dado que $y_1(t)$ é solução, depreende-se que $\dfrac{dy_1}{dt}-p(t)-q(t)y_1-r(t)y_1^2=0$. Daí,

$$\frac{dy_1}{dt}-p(t)-q(t)y_1-r(t)y_1^2+\frac{du}{dt}=q(t)u+r(t)2y_1u+r(t)u^2,$$

ou seja,

$$\frac{du}{dt}-(q(t)+r(t)2y_1)\cdot u=r(t)u^2, \tag{3.14}$$

a qual é uma equação de Bernoulli com $n=2$, e pode, como vimos, ser reduzida à equação linear. À guisa de exemplo, consideremos o modelo a seguir da equação (3.11):

$$y'=e^{2t}+(1+2e^t)y+y^2. \tag{3.15}$$

É de rápida verificação que a função $y_1=-e^t$ é uma solução particular de (3.15). Fazendo $y=y_1+u$, tem-se $y=(-e^t)+u \Rightarrow u=y+e^t$. Daí, em comparação com a equação de Bernoulli (3.14) e após as devidas substituições, obtemos

$$\frac{du}{dt}-[(1+2e^t)+1\cdot 2\cdot(-e^t)]\cdot u=1\cdot u^2.$$

Da mudança de variável $v=u^{1-2}$, tem-se $v=u^{-1}$. Substituindo em $v'+(1-n)\cdot p(t)v=(1-n)q(t)$

$$v'+(1-2)\cdot -[(1+2e^t)+1\cdot 2\cdot(-e^t)]v=(1-2)\cdot 1$$

ou seja,

$$v'+v=-1 \tag{3.16}$$

Agora, vamos calcular o fator integrante;

$$\mu(t)=e^{\int 1dt}=e^t. \tag{3.17}$$

Multiplicando ambos os membros de (3.16) por (3.17)

$$v^1\cdot e^t+v\cdot e^t=-1\cdot e^t$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[e^t\cdot v]=-e^t \tag{3.18}$$

Integrando ambos os membros de (3.18), concluímos que

$$e^t \cdot v = -\int e^t dt = -e^t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

donde

$$v = -1 + C \cdot e^{-t}.$$

logo,

$$u^{-1} = -1 + C \cdot e^{-t}.$$

daí,

$$(y + e^t)^{-1} = -1 + C \cdot e^{-t}$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{-1 + C \cdot e^{-t}} - e^{-t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

é a solução geral de (3.15).

Por fim, vamos estudar uma aplicação da equação de Bernoulli para a estabilidade de fluxo de fluido. Considere a equação

$$y' = \varepsilon \cdot y - \delta \cdot y^3, \tag{3.19}$$

em que $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Multiplicando a equação (3.19) por y^{-3}, obtemos

$$y' \cdot y^{-3} = \varepsilon \cdot y^{-2} - \delta. \tag{3.20}$$

Agora, fazendo $v = y^{-2}$, vem que $v' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y'y^{-3} = \dfrac{v'}{-2}$. Substituindo em (3.20), chegamos na seguinte EDO linear de 1ª ordem:

$$v' + 2\varepsilon \cdot v = 2\delta, \tag{3.21}$$

a qual se resolve de forma, inteiramente, análoga ao que fora feito acima para se chegar na solução

$$y = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{v + C\varepsilon e^{-2\varepsilon t}}}.$$

Capítulo 4

Conclusões

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) fizemos um estudo histórico acerca da equação de Bernoulli, em que destacamos a história da família Bernoulli e a contribuição de Leibniz, importante matemático que foi um dos criadores do Cálculo desde a antiguidade até os séculos XVIII e XIX. Estudamos as formas de resoluções da equação de Bernoulli, dos tipos: $n = 0$, $n = 1$ e $n \neq 0, 1$ utilizando alguns conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias e resolvemos algumas aplicações, tais como: A teoria das Equações Diferenciais para o crescimento populacional, a equação de Ricatti pode ser transformada em uma equação de Bernoulli, caso seja conhecido uma solução particular da equação de Ricatti e por derradeiro, uma aplicação da equação de Bernoulli para a estabilidade do fluxo de fluido.

Portanto, por meio desse estudo foi possível verificar o quão importante é a equação de Bernoulli, pois além de ser utilizada na própria Matemática, também é utilizada em outras áreas do conhecimento como por exemplo: Ciências Naturais.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10ª Edição. Editora LTC, 2015.

[2] FERREIRA, M. C. Uma Introdução às EDOs Lineares. Notas de aula. Unidade Acadêmica de Matemática (UFCG), 2020.

[3] PARKER, A. E. *Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?*, THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, VOL. 44, Nº. 2, MARCH 2013.

[4] VIANA, M. *A notável família matemática Bernoulli era problemática*. FOLHA DE SÃO PAULO. São Paulo, ano 99, n. 32.921, p. 46, 22 maio 2019.

[5] VIANA, M. *Os Bernouli são a família real da matemática*. FOLHA DE SÃO PAULO. São Paulo, ano 99, n. 32.914, p. 52, 15 maio 2019.