**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**
**CAMPUS I**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**CARLOS ANDRÉ DE VASCONCELOS**

# UM ESTUDO SOBRE INTEGRAIS E SUAS APLICAÇÕES

**CAMPINA GRANDE-PB**

**Março - 2021**

CARLOS ANDRÉ DE VASCONCELOS

# UM ESTUDO SOBRE INTEGRAIS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Onildo dos Reis Freire.

**CAMPINA GRANDE**

**Março - 2021**

V331e Vasconcelos, Carlos André de.

Um estudo sobre Integrais e suas aplicações [manuscrito] / Carlos Andre de Vasconcelos. - 2021.

44 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Prof. Me. Onildo dos Reis Freire , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Teorema Fundamental do Cálculo. 3. Integrais. I. Título

21. ed. CDD 515.43

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

**CARLOS ANDRÉ DE VASCONCELOS**

# UM ESTUDO SOBRE INTEGRAIS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 01 / Março / 2021

BANCA EXAMINADORA

Onildo dos Reis Freire

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira

Universidade Estadual da Paraíba

## AGRADECIMENTOS

Acima de tudo gostaria de agradecer primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força de vontade para superar as dificuldades encontradas durante todo o percurso.

À minha mãe, pelo amor, incentivo, compreensão e apoio, em todos os momentos de dificuldade nessa jornada.

Ao meu orientador Onildo dos Freire Reis, por todo o suporte que ele me propôs nesse Trabalho de Conclusão de curso, pelas suas correções e incentivos.

À Universidade Estadual da Paraíba assim como todo seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a possibilidade que tive de completar o ensino superior.

Aos amigos e a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica, o meu muito obrigado.

# RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso em si foi todo inspirado na idéia de aplicabilidade que o Cálculo Integral tem nas diversas áreas do conhecimento, mais especificamente nas áreas de exatas, com ênfase nas Aplicações de Integrais Definidas. No presente Trabalho de Conclusão de Curso foram estudados conceitos relativos ao Cálculo Integral, onde teve uma pequena abordagem sobre a história de Newton e Leibniz em relação ao Cálculo Diferencial e Integral. Foram abordadas todas as regras e o conceito de Primitivas e Integral Definida. Foi demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), onde ele nos possibilita calcular Integrais Definidas sem recorrer à definição de limite do somatório, a partir disso foi colocado em prática nas Aplicações de Integrais Definidas em algumas áreas do conhecimento. O trabalho esta organizado da seguinte seqüência: Introdução, Abordagem Histórica, Integral Indefinida, Integral definida, Teorema Fundamental do Cálculo, Aplicações das Integrais, Conclusão e Referências.



**Palavras chave:** Cálculo Diferencial e Integral. Teorema Fundamental do Calculo. Aplicações.

**ABSTRACT**

This Final Graduation Project was all inspired by the idea of applicability that Integral Calculus has in several areas of knowledge, more specifically in the exact areas, with emphasis on the applications of defined integrals. In this End of Course Work we studied concepts related to Integral Calculus, where we had a small approach about the history of Newton and Leibniz in relation to the Differential and Integral Calculus. All the rules and the concept of primitives and defined integral were discussed. It was demonstrated the Fundamental Theorem of Calculus (FCT), where it allows us to calculate defined integrals without using the definition of limit of the summation, from this it was put into practice in the applications of definite integrals in some areas of knowledge. The work is organized in the following sequence: Introduction, Historical Approach, Indefinite Integral, Defined Integral, Fundamental Theorem of Calculus, Applications of Integrals, Conclusion and References.
**Keywords:** Differential and Integral Calculus. Fundamental Theorem of Calculus. Applications.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho realizaremos um estudo sobre o Cálculo Integral, especificamente em Aplicações da Integral Definida com o tratamento matemático necessário, não apenas com uso das principais regras de integração, mas trazendo toda a compreensão do processo de integração. Com o objetivo de mostrar que com o uso da Integral definida é possível aplicar nas mais determinadas áreas do conhecimento.

O Cálculo Infinitesimal ou como é mais conhecido popularmente como Cálculo Diferencial e Integral, é um dos mais importantes ramos da Matemática, já que ele surgiu a partir de problemas que estão relacionados diretamente à Geometria e à Álgebra. Desde a antiguidade, os matemáticos encontravam dificuldades em resolver certos problemas relacionados a traçar retas tangentes em determinados pontos de uma curva, calcular à área de figuras planas ou calcular volumes de sólidos.

Para o seu aperfeiçoamento, vários matemáticos contribuíram ao longo da história para se chegar ao Cálculo que conhecemos nos dias de hoje. Foram muitas contribuições para o seu desenvolvimento, cada matemático que teve oportunidade de pesquisa o Cálculo deu suas contribuições para seu desenvolvimento ao longo de muitos anos, onde se desenvolveram novas idéias e conceitos, o aperfeiçoando para ser usado, não apenas na Matemática, mas nas mais diversas áreas do conhecimento. Se tornando uma das mais importantes ferramentas tanto no mundo acadêmico como para o desenvolvimento do mundo em que vivemos.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma: No Capítulo 1, iniciamos com um breve resumo sobre a história do Cálculo Diferencial e Integral, destacando Newton e Leibniz. No Capítulo 2, estudaremos Integral Indefinida e o uso das regras de integração. No Capítulo 3, abordaremos a Integral Definida e suas Propriedades. No Capítulo 4, iremos enunciar e demonstrar nosso principal resultado, o Teorema Fundamental do Cálculo e como está relacionado as integrais Definidas e Indefinidas. No Capítulo 5, colocaremos tudo o que foi abordado em prática através das Aplicações da Integral Indefinida.

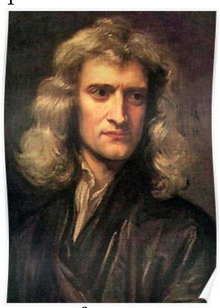
## 2 ABORDAGEM HISTÓRICA

O primeiro registro de um problema onde se é capaz de enxergar o uso de idéias primitivas do Cálculo, foi datado aproximadamente no ano de 1850 a.C., e se trata do Papiro de Golonishev, onde apresenta o cálculo do volume de um tronco de pirâmide quadrada, sendo este o primeiro cálculo de um volume de um sólido já registrado. O conhecimento matemático é um dos mais antigos que a humanidade criou e tem características próprias, como por exemplo, a sua natureza abstrata, e é constituída de diversas áreas, entre elas: Álgebra, Cálculo e Geometria.

> No ensino da Matemática,destacam-se aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e devem ser estimuladas, levando-se o aluno a pensar ,falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1997, p.20).

A história do cálculo envolve vários períodos e pesquisadores, mas dois de seus principais pesquisadores para seu desenvolvimento foram Isaac Newton (Figura 1). E Gottfried Wilhelm Leibniz ou mais conhecido como Leibniz (Figura 2).

Figura 1 – Retrato pintado de Isaac Newton (1643-1727)



fonte:

https://aventurasnahistoria.uol.com.br/media/_versions/legacy/2016/11/21/isaac-newton_widelg.jpg

Figura 2 – retrato pintado de Leibniz (1646-1716)

fonte: https://blog.wolfram.com/2016/11/14/celebrating-gottfried-leibniz-on-the-300th-anniversary-of-his-death/

O Cálculo teve grande avanço científico no século XVII, com os principais pesquisadores Isaac Newton e Leibniz. Newton nasceu em 1642 no dia 25 de dezembro no interior da Inglaterra próximo a Cambridge, Newton não teve uma infância fácil, pois nasceu prematuro e seu pai faleceu antes do seu nascimento, durante toda a sua vida teve dificuldades, ao ser criado pela avó, os pais de Newton eram donos de terras e animais o que o possibilitava certo poder requisitivo, mas mesmo assim ele teve uma vida sofrida e conturbada. Newton é conhecido não só pela sua historia com o Cálculo, mas também por suas descobertas na Física, e é reconhecido mundialmente como físico, matemático, teólogo e astrólogo, etc. Leibniz nasceu no dia 1 de junho de 1946 na Alemanha na cidade de Leipzig, diferente de Newton que se destacou na vida adulta, Leibniz desde os seus primeiros anos na escola se destacava, com apenas quinze anos já ingressou na universidade com 17 anos já tinha seu diploma de bacharel em teologia.

No inicio do século XVII Leibniz e Newton se envolveram numa briga acadêmica, pois ambos alegavam que tinham descoberto o Cálculo, por mais de dez anos e até o fim de suas vidas e além, pois essa briga foi assumida até pelos seus alunos, e existem muitas controversas para os historiadores da área matemática. Oficialmente tanto Leibniz quanto Newton ficaram com a autoria do Cálculo, por mais incrível que pareça ambos chegaram à mesma conclusão, apesar de ser em países diferentes.

Entretanto Newton chegou a essa conclusão 10 anos mais cedo que Leibniz , por isso para muitos Newton é conhecido como o pai do Cálculo, o que também deu ênfase a que Leibniz o tinha plagiado. Essa briga ficou conhecida como A Guerra do Cálculo, apesar da morte de Leibniz em 1716, Newton continuava o ataques e defendo que seria o único responsável pelo desenvolvimento do Cálculo e Leibniz era apenas alguém que o havia plagiado . Para muitos historiadores essa briga foi uma perda de tempo, pois caso os dois tivessem conversado e se juntado para discutir idéias sobre o cálculo, talvez eles tivessem avançado mais ainda o seu desenvolvimento o que infelizmente não ocorreu.

O Calculo que conhecemos nós dias de hoje já passou por muitas mudanças e melhoras, o Cálculo que Newton desenvolveu tinha uma escrita altamente difícil de entender, o que só pessoas com certa formação especifica conseguiria entender, a notação que temos hoje parte foi desenvolvida por Leibniz o que facilitou bastante seu entendimento.

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática ( divisão de terras, cálculo de créditos ), por problemas vinculados as outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1997, p.32).

Assim, concluímos um breve resumo sobre a história do Cálculo Diferencial e Integral. A seguir, apresentaremos o conceito da Integral Indefinida e sua importância nesse contexto.

# 3 INTEGRAL INDEFINIDA

Neste capítulo, abordaremos de forma simples e intuitiva possível às noções básicas necessárias de integrais indefinidas ou como é conhecida por muitos, como antiderivada (primitiva). Logo, serão abordadas algumas definições, propriedades, teoremas e exemplos relacionados ao conteúdo. Apresentaremos também a Tabela das Integrais Imediatas e juntamente com as duas principais técnicas de integração; Integração por Mudança de Variáveis e Integração por Partes.

**Definição 3.0.1** Dada uma função $f$, dizemos que $F$ é uma antiderivada (primitiva) de $f$ em um intervalo qualquer $I$ se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

**Teorema 3.0.2** Toda função diferenciável em um ponto é contínua nesse ponto.

**Demonstração:** Da definição 3.0.1, segue que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. Assim, $F$ é diferenciável em $I$ e portanto, contínua em $I$.

**Teorema 3.0.3** Se uma função $f$ é continua em um intervalo $[a, b]$, é se essa função $f$ é diferenciável em $(a, b)$, então existe um número $z$ pertencente a $(a, b)$, tal que:

$$f\,'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow f(b) - f(a) = f\,'(z)(b - a)\,.$$

A demonstração desse teorema será omitida, focaremos apenas no resultado. Um resultado importante sobre antiderivada de uma função $f$ é dado pelo seguinte resultado:

**Teorema 3.0.4** Se $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas de $f(x)$ em um intervalo $I$, então existe uma constante $c$ tal que

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I.$$

**Demonstração:** Se $F$ e $G$ são antiderivadas de $f$, isto é, $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, seja $H$ a função definida por

$$H(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in I.$$

Nosso objetivo é mostrar que $H(x)$ é uma função constante em $I$. Para isso, sejam quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$. Como $H(x)$ é diferenciável em $I$ pois $G$ e $F$ o são, então, pelo Teorema 3.0.2, $H(x)$ é contínua em $I$. Em particular, $H(x)$ é contínua e diferenciável em $(a,b)$, então pelo teorema 3.0.3, existe um $z \in (a,b)$ tal que:

$$H(b) - H(a) = H'(z) \cdot (b-a).$$

Mas

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Logo,

$$H(b) - H(a) = 0.$$

Portanto,

$$H(b) = H(a) \Leftrightarrow H(x) = c, \ (c \in R).$$

Assim, o problema em determinar as antiderivadas de $f$ se resume em achar uma antiderivada em particular.

**Definição 3.0.5** Se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, a expressão $F(x)+c$ $(c \in R)$ é dita integral indefinida da função $f(x)$ e é dada por

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c.$$

A expressão $F(x) + c$ consiste em uma família de antiderivadas da função $f$ em $I$.

### 3.1 Propriedades da Integral Indefinida

Sejam $f, g : I \to R$ e $k$ uma constante qualquer:

i)$\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$.

ii)$\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$.

**Verificação:**

i) Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Assim, $k \cdot F(x)$ é uma antiderivada de $k \cdot f(x)$ com $k \in R$, isto é,

$$[k \cdot F(x)]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int k \cdot f(x)dx &= k \cdot F(x) + c \\
&= k \cdot F(x) + k \cdot c_1 \quad \text{onde} \quad c = k \cdot c_1 \\
&= k \cdot [F(x) + c_1] = k \cdot \int f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

ii) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas antiderivadas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Assim,

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int [f(x)+g(x)]\ dx &= [F(x)+G(x)]+c \\
&= [F(x)+G(x)]+c_1+c_2 \quad \text{onde} \quad c=c_1+c_2 \\
&= [F(x)+c_1]+[G(x)+c_2] \\
&= \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.
\end{aligned}
$$

### 3.2 Tabela das Integrais Imediatas - Parte I

A seguir, iremos apresentar a primeira parte da tabela de integrais imediatas, decorrente das definições da integral indefinida e tendo uma ligação direta entre derivadas e integrais indefinidas. A tabela e altamente necessária para compreensão e resoluções de integrais simples e complexas.

1. $\int dx = x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$
\begin{aligned}
F(x)' = f(x) &\Rightarrow \int f(x)\ dx = F(x)+c \\
(x)' = 1 &\Rightarrow \int 1\ dx = x+c \Rightarrow \int dx = x+c.
\end{aligned}
$$

2. $\int x^\alpha\ dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{com} \quad \alpha \neq -1.$

**Verificação:** Considere a função:

$$y = x^m + c_1, \text{ onde } c_1 \text{ é uma constante.} \tag{3.1}$$

Derivando (3.1), segue que

$$dy = m \cdot x^{m-1}\ dx.$$

Fazendo $m = \alpha + 1$ com $\alpha \neq -1$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
dy &= (\alpha+1)\cdot x^{(\alpha+1)-1}\ dx \\
&= (\alpha+1)\cdot x^\alpha\ dx. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Integrando (3.2), obtemos:

$$\int dy = \int (\alpha+1)\cdot x^\alpha\ dx \Rightarrow y = \int (\alpha+1)\cdot x^\alpha\ dx.$$

Como $(\alpha+1)$ é uma constante, temos

$$y = (\alpha+1)\cdot \int x^{\alpha}\,dx \Rightarrow \int x^{\alpha}\,dx = \frac{y}{\alpha+1}\cdot \tag{3.3}$$

Mas de (3.1), sabemos que: $y = x^{m} + c_1 = x^{\alpha+1} + c_1$. Assim, substituindo em (3.3), segue que:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}+c_1}{\alpha+1} \Rightarrow \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{c_1}{\alpha+1}\cdot$$

Como a expressão $\frac{c_1}{\alpha+1}$ é uma constante, temos $c = \frac{c_1}{\alpha+1}\cdot$ Portanto,

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ com } \quad \alpha \neq -1.$$

3. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$
$$(e^{x})' = e^{x} \Rightarrow \int e^{x}\,dx = e^{x} + c.$$

4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c.$$

6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$
$$(-\cos x)' = \operatorname{sen} x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c.$$

7. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x \, + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x) \; dx = F(x) + c$$
$$(\operatorname{tg} \; x)' = \sec^2 \; x \Rightarrow \int \sec^2 \; x \; dx = \operatorname{tg} \; x + c.$$

8. $\int \operatorname{cossec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} \; x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x) \; dx = F(x) + c$$
$$(-\operatorname{cotg} x)' = \operatorname{cossec}^2 x \, dx \Rightarrow \int \operatorname{cossec}^2 \; x \; dx = -\operatorname{cotg} x + c.$$

9. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \; dx = \sec x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x) \; dx = F(x) + c$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow \int \sec x \cdot \operatorname{tg} \; x \; dx = \sec x + c.$$

10. $\int \operatorname{cossec} \; x \cdot \operatorname{cotg} \; x \; dx = -\operatorname{cossec} \; x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x) \; dx = F(x) + c$$
$$(-\operatorname{cossec} \; x)' = \operatorname{cossec} \; x \cdot \operatorname{cotg} \; x \Rightarrow \int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x \; dx \; = -\operatorname{cossec} x + c.$$

11. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} \; x + c.$

**Verificação:** Decorre da definição da integral indefinida, pois

$$F'(x) = f(x) \; \Rightarrow \int f(x) \; dx = F(x) + c$$
$$(\operatorname{arctg} \; x)' = \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} \; x + c.$$

A seguir, iremos utilizar o conhecimento adquirido até o momento, ou seja, usaremos as propriedades, definições da integral indefinida junto a Tabela das Integrais Imediatas - Parte I para resolvemos alguns exemplos à frente.

**Exemplos 2.2.1:** Vamos calcular as seguintes integrais indefinidas:

a. $\int(3 \cdot x^5 + 5 \cdot x + \sqrt{x^3} + \cos x)\ dx$.

**Solução:** Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos:

$$\begin{aligned}\int(3 \cdot x^5 + 5 \cdot x + \sqrt{x^3} + \cos x)\ dx &= 3 \cdot \int x^5 dx + 5 \cdot \int x\ dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int \cos x\ dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{5 \cdot x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} + \text{sen}\ x + c \\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{5 \cdot x^2}{2} + \frac{2 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{5} + \text{sen}\ x + c.\end{aligned}$$

b. $\int(6 \cdot \text{cossec}\ x \cdot \text{cotg}\ x + \frac{1}{2} \cdot \sec^2 x)\ dx$.

**Solução:** Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos:

$$\begin{aligned}\int(6 \cdot \text{cossec}\ x \cdot \text{cotg}\ x + \frac{1}{2} \cdot \sec^2 x)\ dx &= 6 \cdot \int \text{cossec}\ x \cdot \text{cotg}\ x\ dx + \frac{1}{2} \cdot \int \sec^2 x\ dx \\ &= -6 \cdot \text{cossec}\ x + \frac{1}{2} \cdot \text{tg}\ x + c.\end{aligned}$$

c. $\int(-5 \cdot \text{tg}\ x \cdot \text{cotg}\ x)\ dx$.

**Solução:** Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos:

$$\int(-5 \cdot \text{tg} \cdot \text{cotg}\ x)\ dx = -5 \cdot \int \left(\frac{\text{sen}\ x}{\cos x} \cdot \frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x}\right)\ dx = -5 \int 1\ dx = -5x + c.$$

### 3.3 Método da Substituição ou Mudança de Variável

O Método da Substituição ou Mudança de Variável é uma técnica de integração usada para calcular várias integrais. Ao fazermos uma substituição adequada, conseguimos reescrever a integral em função de uma nova varíável e, posteriormente, aplicar a Tabela de Integrais Imediatas para resolvê-la. Esse método surge a partir da Regra da Cadeia, e será descrito a seguir.

Dadas $f(x)$, $g(x)$ e $F(x)$ três funções deriváveis, tal que $F(x)$ seja uma antiderivada de $f(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$, considere que a imagem $g(x)$ pertença ao domínio de $F(x)$. Assim, aplicando a Regra da Cadeia em $F \circ g$, segue que

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, e pela Definição 3.0.5, temos

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x)) + c. \tag{3.4}$$

Fazendo

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\ dx. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4), obtemos

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c.$$

Sempre que se usar o Método da Substituição o intuito e transforma a integral complicada em uma outra integral simples, em que podemos resolver conhecendo a Tabela das Integrais Imediatas. A seguir para uma melhor visualização e compreensão do assunto, vamos colocar em pratica o processo em alguns exemplos.

**Exemplos 2.3.1:** Resolvendo Integrais Indefinidas com o Método da Substituição:

a. $\int 2x \cdot \sqrt[3]{9+x^2} \ \ dx.$

**Solução:** Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = 1 + x^2 \Longrightarrow du = 2xdx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot \sqrt[3]{9+x^2}dx &= \int \sqrt[3]{9+x^2} \cdot 2x \ \ dx \\ &= \int \sqrt[3]{u} \ \ du \\ &= \int u^{1/3}\, du \\ &= \frac{3}{4} \cdot u^{4/3} + c \\ &= \frac{3}{4} \cdot (9+x^2)^{4/3} + c. \end{aligned}$$

b. $\int x^3 \cdot \cos(x^4+9) \ \ dx.$

**Solução:** Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = x^4 + 2 \Longrightarrow \frac{du}{4} = x^3 \ \ dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot \cos(x^4+9)\, dx &= \int \cos(u) \ \frac{du}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int \cos u \ du \\ &= \frac{1}{4} \cdot sen \ u + c \\ &= \frac{1}{4} \cdot sen(x^4+9) + c. \end{aligned}$$

c. $\int \left[\frac{x}{1+x^4}\ \right] dx.$

**Solução:** Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = x^2 \Longrightarrow \frac{du}{2} = x\,dx.$$

Assim

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot arctg(u) + c = \frac{1}{2}\cdot arctg(x^2) + c.$$

Com o uso do Método da Substituição, apresentaremos a complementação da Tabela das Integrais Imediatas.

### 3.4 Tabela das Integrais Imediatas - Parte II

Nesta seção, iremos demonstrar a segunda parte da tabela de integrais imediatas.

12. $\int \operatorname{cotg} x\ dx = \ln|\operatorname{sen} x|\ + c.$

**Verificação:** Da Trigonometria, temos:

$$\int \operatorname{cotg} x\ dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\ dx.$$

Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \operatorname{sen} x \Longrightarrow du = \cos x\ dx.$$

Assim,

$$\int \operatorname{cotg} x\ dx = \int \frac{1}{u}\ du = \ln|u|\ + c = \ln|\operatorname{sen} x|\ + c.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{cotg} x\ dx = \ln|\operatorname{sen} x|\ + c.$$

13. $\int \operatorname{tg} x\ dx = \ln|\sec x|\ + c.$

**Verificação:** Da Trigonometria, temos:

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ dx.$$

Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \cos x \Longrightarrow -\,du = \operatorname{sen} x\ dx.$$

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = -\int \frac{1}{u}\ du = -\ln|u|\ + c = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x|\ + c.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{tg} x \; dx = \ln|\sec x| + c.$$

14. $\int \sec x \; dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$

**Verificação**: Para resolvermos essa integral, teremos que aplicar um artirfício matemático. Multiplicaremos e, em seguida, dividiremos a integral por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Assim,

$$\int \sec x \; dx = \int \sec x \cdot \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)} \, dx = \int \left( \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right) dx.$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x \Longrightarrow du = \left(\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x\right) \, dx.$$

Logo,

$$\int \left( \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right) dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

Portanto,

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

15. $\int \operatorname{cossec} x \, dx = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + c.$

**Verificação**: Para resolvermos essa integral, teremos que aplicar um artirfício matemático. Multiplicaremos e, em seguida, dividiremos a integral por $\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x$. Assim,

$$\int \operatorname{cossec} x \, dx = \int \operatorname{cossec} x \cdot \frac{(\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)}{(\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)} \, dx = \int \left( \frac{\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x} \right) dx.$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x \Longrightarrow -du = \left(\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x\right) \, dx.$$

Logo,

$$\int \left( \frac{\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x} \right) dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + c = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + c.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{cossec} x \, dx = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + c.$$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + c$, sendo $a \neq 0$.

**Verificação**: Para resolvermos essa integral, teremos que aplicar um artirfício matemático. Multiplicaremos e, em seguida, dividiremos a integral por $a^2$. Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\left(\frac{dx}{a^2}\right)}{\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}.$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \frac{x}{a} \Longrightarrow du = \frac{1}{a}\,dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} u \; + c \\
&= \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \; + c.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \; + c.$$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c.$

**Verificação**: Para resolvermos essa integral, teremos que aplicar um artirfício matemático. Multiplicaremos e, em seguida, dividiremos a integral por $\sqrt{x^2+a^2}+x$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}\,dx \\
&= \int \frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}\,dx \\
&= \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}\,dx \\
&= \int \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \sqrt{x^2+a^2}+x \Longrightarrow du = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\,dx.$$

Logo,

$$\int \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right)dx = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right| + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c.$$

18 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$

**Verificação**: Para resolvermos essa integral, teremos que aplicar um artirfício matemático. Multiplicaremos e, em seguida, dividiremos a integral por $\sqrt{x^2-a^2}+x$. Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}\,dx$$
$$= \int \frac{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}\,dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}\,dx$$
$$= \int \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)dx.$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = \sqrt{x^2-a^2}+x \Longrightarrow du = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)dx.$$

Logo,

$$\int \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)dx = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$$

**3.5 Método de Integração por Partes**

O Método de Integração por Partes visa facilitar a resolução de integrais mais complexas, geralmente quando há multiplicações de funções distintas na integral. Essa técnica de integração busca tornar a integral o mais simples possível para aplicar, na maioria das vezes, a Tabela das Integrais Imediatas.

Esse método surge a partir da Regra da Produto para derivadas, e será descrito a seguir. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis em um mesmo intervalo $I$. Aplicando a Regra do Produto para derivadas, segue que

$$[f(x)g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Somando $-f'(x) \cdot g(x)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f\ '(x) \cdot g(x). \tag{3.6}$$

Integrando em (3.6), temos:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \ \cdot dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' \cdot dx - \int f\ '(x) \cdot g(x)\ dx.$$

Assim,

$$\int f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f\ '(x)\ dx. \tag{3.7}$$

Fazendo,

$$u = f(x) \Longrightarrow du = f\ '(x)dx \quad \text{e} \quad v = g(x) \Longrightarrow dv = g'(x)dx. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtemos

$$\int u\ dv = u\ v\ - \int v\ du.$$

Lembrando que às vezes será necessário aplicar o Método de Integração por Partes mais de uma vez para sé revolver a integral, ou ainda, depois de aplicar esse método será necessário também se aplicar o Método da Substituição. Para uma melhor compreensão, vamos colocar em prática esse processo em alguns exemplos.

**Exemplos 2.5.1:** Resolvendo Integrais Indefinidas com o Método de Integração por Partes:

a. $\int x \cdot \text{cossec}^2\, x \cdot \text{cotg}\ x\ dx.$

**Solução:** Aplicando o Método de Integração por Partes, faça

$$u = x \Longrightarrow du = dx$$
$$dv = \text{cotg}\, x \cdot \text{cossec}^2\, x\ dx \Longrightarrow v = \int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \text{cossec}^2\, x.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int x \cdot \text{cossec}^2\, x \cdot \text{cotg}\ dx &= -\frac{x.}{2} \cdot \text{cossec}^2\, x + \frac{1}{2} \cdot \int \text{cossec}^2\, x\ dx \\ &= -\frac{x}{2} \cdot \text{cossec}^2\, x + \frac{1}{2} \cdot \text{cotg}\ x + c. \end{aligned}$$

b. $\int x^2 \cdot \ln(9x)\ dx$.

**Solução:** Aplicando o Método de Integração por Partes, faça

$$u = \ln(9x) \implies du = \frac{1}{x}\ dx \quad \text{e} \quad dv = x^2\ dx \implies v = \frac{x^3}{3}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \ln(9x) \cdot dx &= \frac{x^3 \cdot \ln(9x)}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{x^3 \cdot \ln(9x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3 \cdot \ln(9x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c.\end{aligned}$$

c. $\int \operatorname{arctg} x\ dx$.

**Solução:** Aplicando o Método de Integração por Partes, faça

$$u = \operatorname{arctg}\ x \implies du = \frac{1}{1+x^2}\ dx \quad \text{e} \quad dv = dx \implies v = x.$$

Logo

$$\int \operatorname{arctg}\ x\ dx = (\operatorname{arctg}\ x) \cdot\ x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\ dx.$$

Agora, aplicando o Método da Substituição, faça

$$w = x^2 + 1 \implies \frac{dw}{2} = x\ dx.$$

Assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}\ x\ dx &= (\operatorname{arctg}\ x) \cdot\ x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dw}{w} \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1 + x^2\right| + c.\end{aligned}$$

Até o presente momento trabalhamos apenas com a integral indefinida. A seguir, apresentaremos o conceito, da Integral Definida justamente com suas propriedades. Posteriormente, mostraremos sua importância abordando uma série de aplicações.

# 4 INTEGRAL DEFINIDA

Neste capítulo, inicialmente definiremos a Integral Definida. Na seqüência, vamos demonstrar as suas sete propriedades, de forma mais simples e didática possível.

**Definição 4.0.1** A integral definida da função $f$ no intervalo $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x) \cdot dx$, é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k.$$

*quando este limite existe.* Caso

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

exista, dizemos que $f$ é integral em $[a, b]$. Existe uma grande variedade de funções que podem ser utilizadas no Cálculo Integral, por isso é necessário saber em que momento essas funções podem ser integráveis. O teorema a seguir nos garante esse resultado .

**Teorema 4.0.2** Seja $f$ uma função continua no intervalo fechado $[a, b]$, então essa função $f$ é integrável nesse intervalo $[a, b]$.

A demonstração desse teorema será omitida, focaremos especificamente no resultado. O teorema 4.0.2 será de extrema importância para demonstrar um resultado importante posteriormente.

## 4.1 Propriedades da Integral Definida

A seguir, iremos demonstrar as propriedades da Integral Definida.

Sejam $f$ e $g$ duas funções integráveis em $[a, b]$.

1. Se $c$ é uma constante qualquer, então

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

**Demonstração:** Como $f$ é integrável em $[a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b c \cdot f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot f(w_k) \cdot \Delta x_k \\
&= c \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k \\
&= c \cdot \int_a^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

2. A função $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.2}$$

**Demonstração:** Como $f$ e $g$ são integráveis em $[a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(w_k)+g(w_k)] \cdot \Delta x_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(w_k) \cdot \Delta x_k \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

3. Se $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

**Demonstração:** Considere $P$ uma partição qualquer em $[a,b]$, com $a < c < b$. Se o intervalo $[a,c]$ ficou dividido em $r$ subintervalos, então teremos $[c,b]$ dividido em $(n-r)$ subintervalos, ou seja

$$\sum_{k=1}^{r} f(w_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=r+1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=r+1}^{n} f(w_k) \cdot \Delta x_k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\cdot\Delta x_k\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} f(w_k)\cdot\Delta x_k + \sum_{k=r+1}^{n} f(w_k)\cdot\Delta x_k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r} f(w_k)\cdot\Delta x_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=r+1}^{n} f(w_k)\cdot\Delta x_k\\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

4. Podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente, isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(w)\,dw = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\theta)\,d\theta. \tag{4.4}$$

5. Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{4.5}$$

   se a integral à direita existir.

6. Se $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.6}$$

**Demonstração:** Como $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, temos que

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

7. Se $f$ é uma função continua em $[a,b]$, então

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{4.7}$$

**Demonstração:** Como $f$ e $|f|$ são contínuas em $[a, b]$, pelo Teorema 4.0.2, segue que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$
$$\int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Usando a propriedade de módulo

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a \quad (a > 0).$$

Segue que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx.$$

A seguir, iremos anunciar e demonstrar o nosso principal resultado. Para enfim, podemos trabalhar com as Aplicações da Integral Definida.

# 5 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Agora que já temos bastante informação sobre o que é uma integral indefinida e definida, vamos nos aprofundar no assunto de Cálculo e falar um pouco sobre um dos mais importantes teoremas, como o próprio nome já diz, o Teorema Fundamental do Cálculo.

Para a maioria das funções, o cálculo de uma integral definida é extremamente trabalhoso. Visando simplificar esse cálculo foi que surgiu o Teorema Fundamental do Cálculo. Esse teorema estabelece uma forte conexão entre as integrais definidas e as antiderivadas. A seguir, introduziremos alguns resultados importantes que subsidiarão o tema central desse capítulo. Posteriormente, com o uso de alguns conceitos vistos anteriormente, enunciaremos e demonstraremos esse teorema.

**Teorema 5.0.1** Se $f$ integrável e $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$, então a área $A$ da região abaixo do gráfico de $f(x)$, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

**Demonstração:** Sendo $f$ uma função não-negativa em $[a, b]$, a área $A$ é dada por

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) \cdot \Delta x.$$

onde $f(u_k)$ é o valor mínimo de $I$ em $[x_{k-1}, x_k]$. Como se trata de Somas de Riemann e $f$ é integrável em $[a, b]$, pela Definição 4.01, segue que:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo é importante não só porque estabelece uma relação entre derivadas e integrais de uma função $f$, mas principalmente porque facilita profundamente o cálculo da área sob uma curva.

**Teorema 5.0.2** Se $f$ é continua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(z) \cdot (b - a).$$

**Demonstração:** Se $f$ é uma função constante; $f(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$ com $c \in R$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a) = f(z) \cdot (b - a).$$

Agora, suponha que $f(x) \neq c$ (constante). Como $f$ é continua em $[a, b]$, existem $u, v \in [a, b]$, tal que

$$f(u) = m = \min f \quad \text{e} \quad f(v) = M = \max f.$$

Como $f$ não é uma função constante,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx.$$

Por (4.1), obtemos

$$\begin{aligned} m \cdot (b - a) &< \int_a^b f(x)\,dx < M \cdot (b - a) \\ f(u) \cdot (b - a) &< \int_a^b f(x)\,dx < f(v) \cdot (b - a) \\ f(u) &< \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx < f(v). \end{aligned}$$

Como $f$ é continua em $[a, b]$, então existe $z \in (u, v) \subset (a, b)$ tal que

$$\frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = f(z).$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z) \cdot (b - a).$$

**Teorema 5.0.5** Seja $f$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Então a função $G : [a, b] \to R$ definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b].$$

*é uma antiderivada de $f$ em $[a, b]$.*

**Demonstração:** Mostraremos que $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Considere inicialmente $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Pelo Teorema 5.0.1, segue que

$$A = G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Seja $h > 0$ tal que $x + h \in [a, b]$. Assim,

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{h} \cdot (x + h - x) \cdot f(z) \quad \text{para algum } z \in (x,\, x+h). \end{aligned}$$

Isso decorre do Teorema 5.0.2, uma vez que $f$ é contínua em $[x,\, x+h]$. Logo,

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(z).$$

Como $x < z < x + h$ decorre da continuidade de $f$ que

$$\lim_{h \to 0^+} f(z) = \lim_{z \to x^+} f(z) = f(x).$$

Daí,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(z) = f(x).$$

Agora, se $h < 0$, segue que

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_x^{x\,+\,h} f(t)\,dt \\ &= -\int_{x\,+\,h}^{x} f(t)\,dt \\ &= -(x - x - h) \cdot f(z) \\ &= h \cdot f(z) \quad \text{para algum } z \in (x+h,\, x). \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$G'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} f(z) = f(x).$$

Se $f(x) < 0$, a área

$$A = G(x) = -\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x -f(t)\,dt.$$

Fazendo $g(x) = -f(x) < 0$ , $\forall x \in [a, b]$, e procedendo com a função $g(x)$ como anteriormente, concluíremos que

$$G'(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Agora, já dispomos de informações suficientes para provarmos o nosso principal resultado.

**Teorema Fundamental do Cálculo:** Se $f$ é uma função continua em um intervalo fechado $[a,b]$, e se $F$ é qualquer antiderivada de $f$ neste intervalo, então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

**Demonstração:** Como $f$ é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema 5.0.3, segue que

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

é uma antiderivada de $f$ neste intervalo.Assim, seja $F(x)$ uma antiderivada qualquer de $f$ em $[a,b]$. Pelo Teorema 3.0.4, temos que:

$$F(x) = G(x) + c \quad (c \in R).$$

Daí, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - c \quad \forall x \in [a,b].$$

Se $x = a$, então

$$0 = G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) - c \Leftrightarrow c = F(a).$$

Se $x = b$, então

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - c.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Assim, concluímos esse capítulo, onde demonstramos um dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral. No próximo capítulo, colocaremos tudo o que foi visto em prática, no uso de Aplicações da Integral Definida.

# 6 APLICAÇÕES DA INTEGRAL

Neste capitulo, o foco principal será algumas das Aplicações de Integral Definida. No curso de Cálculo fica evidente o fato de serem necessárias nas mais diversas áreas do conhecimento, mais especificamente nas áreas de exatas, com diversas Aplicações nos campos de Matemática, Física, Química, Engenharia, entre outras. Assim, vamos colocar em prática o que foi visto em diversos problemas relacionados a algumas dessas áreas. Usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo e todas as propriedades da Integral Definida tal como as regras de integral vistas nesse trabalho para resolver algumas dessas Aplicações.

1. Mostre que o comprimento de uma de circunferência de raio $r$ é igual a $2\,\pi\,r$.

**Solução:** Inicialmente considere uma circuferência com centro na origem e raio $r$ $(r > 0)$.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \Longrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Denotando por $S$ o comprimento do arco dessa circunferência, segue que:

$$S = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (y')^2}\; dx.$$

Assim,

$$y' = \left[(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) \Longrightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\; dx \\
&= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\; dx \\
&= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\; dx \\
&= 2r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\; dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Método da Substituição para resolvermos essa integral, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{r^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}}\, dx = \int \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx.$$

Fazendo $u = \frac{x}{r} \Rightarrow du = \frac{1}{r} \cdot dx$, obtemos

$$\int \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du = \operatorname{arcsen} u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= 2r \cdot \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{r} \\ &= 2r \cdot \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{r}{r}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{-r}{r}\right)\right] \\ &= 2r \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2r \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow S = 2\pi r. \end{aligned}$$

2. Mostre que a área de um circulo de raio $r$ é $\pi \cdot r^2$.

**Solução:** Inicialmente, considere um círculo com centro na origem e raio $r$ $(r > 0)$, tal que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Denotando por $A$ a área desse círculo, segue que:

$$A = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx. \tag{2}$$

Sabendo-se que

$$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow dx = r \cdot \cos\theta\, d\theta. \tag{3}$$

Ao substituirmos (3) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \sqrt{r^2 - (r \cdot \operatorname{sen}\theta)^2} \cdot r \cdot \cos\theta\, d\theta \\ &= \sqrt{r^2 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2\theta)} \cdot r \cdot \cos\theta\, d\theta \\ &= r \cdot \cos\theta \cdot r \cdot \cos\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx \\ &= 2r^2 \cdot \int_{-r}^{r} \cos^2\theta\ d\theta \\ &= \frac{2}{2} r^2 \cdot \int_{-r}^{r} [1 + \cos(2\theta)]\ d\theta \\ &= r^2 \cdot \left[ \int_{-r}^{r} 1\ d\theta + \int_{-r}^{r} \cos(2\theta)\ d\theta \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o Método da Substituição, faça

$$u = 2\theta \Longrightarrow \frac{du}{2} = d\theta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A &= r^2 \cdot \left[ \int_{-r}^{r} 1\ d\theta + \frac{1}{2} \int_{-r}^{r} \cos u\ du \right] \\ &= r^2 \cdot \left[ \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r^2 - 2x^2}{r^2} \right) \right]_{-r}^{r} \\ &= r^2 \cdot \left[ \operatorname{arcsen}\left(\frac{r}{r}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r^2 - 2r^2}{r^2} \right) - \left( \operatorname{arcsen}\left(\frac{-r}{r}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r^2 - 2(-r)^2}{r^2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = r^2 \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right] \Longrightarrow A = \pi \cdot r^2.$$

3. Mostre que a área da superficie de uma esfera de raio $r$ é $4 \cdot \pi \cdot r^2$.

**Solução:** Considere a superficie esferica sendo denotada por $E$, temos:

$$E = \int_{-r}^{r} 2\pi \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx. \tag{4}$$

Assim,

$$y' = [(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}]' \Longrightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos

$$E = \int_{-r}^{r} 2\pi . \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + (\frac{x}{\sqrt[2]{r^2 - x^2}})^2} dx = 2.\pi. \int_{-r}^{r} \sqrt{(r^2 - x^2) \cdot (\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2})}\ dx.$$

Logo,

$$E = 2.\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\ dx = 2.\pi.r \int_{-r}^{r} .dx = 2 \cdot \pi \cdot r[x]_{-r}^{r} = 2\pi \cdot r[r - (-r)] \Longrightarrow E = 4\pi \cdot r^2.$$

Portanto $E = 4\pi \cdot r^2$.

4. Mostre que o volume de uma esfera de raio $r$ é $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

**Solução:** Denotando como sendo $V$ o volume do solido de revolução obtido pela rotação do eixo x, da região delimitada pelo grafico da função:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{as retas } x = a, x = -a \text{ é o eixo x.}$$

Então:
$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \left[ r^2 \cdot x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^{r}.$$

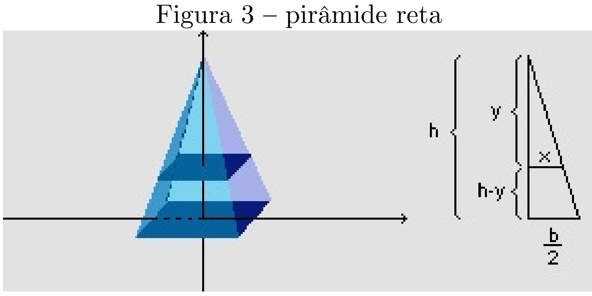
Dai segue que:
$$\begin{aligned} V &= \pi \left[ r^2 \cdot r - \frac{1}{3}r^3 - \left( \pi[r^2 \cdot (-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right) \right] \\ &= \pi \left[ 2 \cdot r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \pi(\frac{4}{3}r^3) \Longrightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

5. Mostre que o volume de uma pirâmide reta de base quadrada, sendo $b$ a medida da aresta da base e $h$ a altura da piramide é $V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h$.

Figura 3 – pirâmide reta




fonte: http://ecalculo.if.usp.br/integrais/aplicacoes_integral/volumes_solidos/problemas_volumes/imagens_problema1_vol/figura12_13.gif

**Solução:** Determinando o sistema de forma que o eixo $y$ seja perpendicular à base da pirâmide reta, passando pelo centro, temos:

A cada corte transversal na altura $h - y$, temos que a secção obtida é um quadrado paralelo à base cuja área é $(2x)^2$.Examinando o corte longitudinal ao lado, por semelhança de triângulos, temos:
$$\frac{b}{2h} = \frac{x}{y} \Longrightarrow x = \frac{b \cdot y}{2 \cdot h}$$

Dai então, a área de cada secção transversal é

$$A(y) = \left( \frac{2 \cdot b \cdot y}{2 \cdot h} \right)^2 = \frac{4 \cdot b^2 \cdot y^2}{4 \cdot h^2} \Longrightarrow A(y) = \frac{b^2}{h^2} \cdot y^2$$

Logo, o volume da pirâmide é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \frac{b^2}{h^2} \cdot y^2 \; dy \\ &= \frac{b^2}{h^2} \cdot \int_0^h y^2 \; dy \\ &= \frac{b^2}{h^2} \cdot \left[ (\frac{y^3}{3}) \right]_0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2} \cdot \left[ (\frac{h^3}{3}) - (\frac{0^3}{3}) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \Longrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h.$$

6. Monstre a elipse com eixos $2a$ para o eixo maior e $2b$ para o eixo menor, sendo $a > b > 0$. Que a área da superficie da uma elipse é $\pi.a.b$.

**Solução:** Inicialmente, considere uma elipse com centro na origem, com $a > b > 0$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

A área dessa região limitada pelo eixo horizontal e pelo gráfico de

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Denotando por $A_1$ a área de uma das semi-elipses, temos :

$$A_1 = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Tendo que a função integrante e par, podemos apenas determinar a área de 25 % da região interior a elipse, ou seja:

$$A_2 = \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \; dx.$$

Assim,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \cdot \left[ \text{arcsen } \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right].$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \\
&= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \left[ \text{arcsen } \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right] \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \left[ \text{arcsen } \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right]_0^a \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \left[ (\text{arcsen } \frac{a}{a} + \frac{a}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}}) - \left( \text{arcsen } \frac{0}{a} + \frac{0}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{0^2}{a^2}} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\ dx \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \cdot (\text{arcsen } 1) \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \Longrightarrow A_2 = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4}.
\end{aligned}
$$

Como $A_2$ é 25% da área da elipse, ou seja, a área total é $A = \pi \cdot a \cdot b$.

7. Um cientista estima que em um determinado período de tempo seja possível determinar a temperatura média com o uso de calculo integral, ou seja, t horas depois da meia-noite, em um período típico de 24 horas, a temperatura em certa cidade é dada por graus Celsius. Qual é a temperatura média dessa cidade entre meia noite e 20 horas sendo que a função $T(t) = 3 - \frac{2}{3} \cdot (t - 13)^2$ representa a temperatura total.

**Solução:** Inicialmente note que a variação de tempo é de 20 horas, ou seja,o tempo inicial $t = 0$ e o tempo final $t = 20$ serão os limites superior e inferior da integral, é mais, com a função teremos todas as somas de temperaturas que ocorreram nesse período de tempo, assim sendo teremos que dividir pelo total de horas, logo será dividido por 20. Portanto temos:

$$\begin{aligned}
T_m &= \frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} \left[3 - \frac{2}{3} \cdot (t-13)^2\right] \, dt \\
&= \frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} \left[3 - \frac{2}{3} \cdot \left(t^2 - 26t + 169\right)\right] \, dt \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left[3t - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{t^3}{3} - 13 \cdot t^2 + 169 \cdot t\right)\right]_0^{20} \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left[60 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8000}{3} - 5200 + 3380\right)\right] \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left[60 - \frac{16000}{9} + \frac{10400}{3} - \frac{6760}{3}\right] \\
&= -25,22.
\end{aligned}$$

Portanto, a temperatura média é $-25,22^{\circ}C$.

8. Uma barra de ferro horizontal mede 8 metros de comprimento. No seu ponto médio a densidade linear é 0,8 kg/m e cresce proporcionalmente com o quadrado da distância até este ponto. Se numa das extremidades a densidade é 16,8 kg/ m, encontre a massa e o centro de massa dessa barra.

**Solução:** Inicialmente extraindo os dados, temos:

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= k \cdot (x-4)^2 + 0,8 \\
\rho(4) &= 0,8 \\
\rho(8) &= k(8-4)^2 + 0,8 \\
\rho(8) &= k(8-4)^2 + 0,8 \\
&= 16k + 0,8 \\
&= 16,8, \text{ com } k = 1.
\end{aligned}$$

Como a massa da barra é dada por:

$$\begin{aligned}
m &= \int_b^a \rho(x).dx \\
&= \int_0^8 \left[(x-4)^2 + 0,8\right] \, dx \\
&= \int_0^8 \left[(x-4)^2\right] \cdot dx + \int_0^8 [0,8] \, dx \\
&= [0,8x]_0^8 + \int_0^8 \left[(x-4)^2\right] \, dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Método da Substituição para resolvermos essa integral, temos:

$$u = x - 4 \Longrightarrow du = dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
m &= [0,8x]_0^8 + \int_0^8 \left[(u)^2\right] \; dx \\
&= \left[\frac{(x-4)^3}{3} + 0,8 \cdot x\right]_0^8 \\
&= \left[\frac{(8-4)^3}{3} + (0,8)\cdot 8 - \left(\frac{(0-4)^3}{3} + (0,8)\,.0\right)\right] \\
&= 49,07.
\end{aligned}$$

Encontrando o centro de massa que é dado por:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{m} \cdot \int_b^a x \cdot \rho(x) \cdot dx \\
&= \frac{1}{49,07} \cdot \int_0^8 x \cdot \left[(x-4)^2 + 0,8\right] \; dx \\
&= \frac{1}{49,07} \cdot \int_0^8 x \cdot \left[(x-4)^2 + 0,8\right] \; dx \\
&= \frac{1}{49,07} \cdot \int_0^8 \left[x^3 - 8x^2 + 16,8 \cdot x\right] \; dx \\
&= \frac{1}{49,07} \cdot \left[\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^3}{3} + (16,8) \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^8 \\
&\cong 3,9997...
\end{aligned}$$

Portando, econtramos $m = 49,07$ e $\overline{x} \cong 3,9997...$

9. Um balde pesa 10N e possui cimento cujo peso é 40N. O balde está no extremo Inferior de uma corrente de 60 m de comprimento, que pesa 10N é está no fundo de um poço. Determine o trabalho necessário para suspender o balde até a borda do poço.

**Solução:** Note que o peso do balde mais o peso do cimento são de $50N$, o peso de um metro de corrente é $\frac{1}{10} \cdot N$. Quando o balde subir $x$, o peso que corresponde é $\frac{1}{10} \cdot (60 - x)$. Portanto

$$f(x) = 50 + (60 - x) \cdot \frac{1}{10}.$$

Assim, o trabalho realizado é dado por:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{60} \left[50 + (60 - x) \cdot \frac{1}{10}\right] \, dx \\
&= \left[50 \cdot x + 6 \cdot x - \frac{1}{10} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{60} \\
&= \left[56 \cdot x - \frac{x^2}{20}\right]_0^{60} \\
&= \left[56 \cdot 60 - \frac{60^2}{20}\right] \\
&= 3180 \ J.
\end{aligned}
$$

Portanto, o trabalho realizado é 3180 $Joules$.

Enfim, concluímos o que queríamos monstrar, onde todas as aplicações foram trabalhadas de forma mais simples e atrativa possível, com o intuito de despertar interesse pelo estudo de Integrais e suas Aplicações.

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar os estudos na universidade, mais especificamente em um curso de exatas, os alunos se deparam sempre com algo novo, que vai ser vivenciado pela primeira vez, mas uma das disciplinas que chamaram minha atenção, e fiquei fascinado, foi a disciplina de Cálculo, pois era algo novo e atrativo, e que nesse conteúdo se usava muito a Matemática básica. Desde aquele momento percebi que seria nesse assunto que me aprofundaria e realizaria o meu Trabalho de Conclusão de Curso.

O Cálculo Diferencial e Integral a cada dia vem se tornando indispensável na formação do ensino superior. Neste Trabalho percebemos que todo o estudo sobre Cálculo Diferencial e Integral que conhecemos foi um processo que demorou muito tempo para ser formulado, e que para isso acontecer precisou da contribuição de vários matemáticos durante todo esse processo, o Newton e o Leibniz foram os grandes percussores dessa história.

Realizamos um breve estudo acerca das Integrais Definidas e Suas Aplicações, onde para chegar a isso tivemos toda uma fundamentação teórica sobre as primitivas das funções, e algumas de suas regras de integração, onde foram enunciados e demonstrados vários resultados importantes a cerca de integral Definida e Indefinida. Buscamos expor as demonstrações de forma mais simples e detalhada possível, para uma melhor compreensão e clareza sobre o assunto.

Destacamos o Teorema Fundamental do Cálculo como um dos principais resultados do Cálculo Diferencial e Integral, não só por possui uma forte relação entre integrais e derivadas de uma função, mas principalmente por facilitar profundamente na hora de se fazer os cálculos, pois ele nos possibilita calcular Integrais Definidas sem recorrer à definição de limite do somatório, que é algo bem trabalhoso.

Através desse estudo, constatamos a importância das Aplicações das Integrais, não só para a Matemática. E assim comprovamos a presença do Cálculo Integral em diversas abordagens no meio acadêmico, contribuindo para o desenvolvimento de várias áreas do conhecimento e melhorando o mundo em que vivemos.

# REFERÊNCIAS

1. BARDI, JASON SOCRATES, A Guerra do Cálculo [tradução Aluizio Pestana da Costa] – Rio de Janeiro: Record, 2008.

2. BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MECSEF, 1998.

3. FLEMMING, DIVA M.; GONÇALVES, MIRIAN B. Cálculo A. 6. Ed. São Paulo: Pearson, 2012.

4. Aplicações da integral . Disponível em: `http://ecalculo.if.usp.br/integrais/aplicacoes_integral/areas_fig_planas/areas_fig_planas.htm`