UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EVANDIO DEMÉTRIO JÚNIOR

OS PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES NA TEORIA DOS OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

CAMPINA GRANDE
2021

EVANDIO DEMÉTRIO JÚNIOR

OS PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES NA TEORIA DOS OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

CAMPINA GRANDE - PB

2021

D377p Demétrio Júnior, Evandio.
Os princípios básicos da análise funcional e algumas aplicações na Teoria dos operadores absolutamente somantes [manuscrito] / Evandio Demetrio Junior. - 2021.
74 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Espaços normados. 2. Espaços de Banach. 3. Operadores lineares contínuos. 4. Operadores absolutamente somantes. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

EVANDIO DEMÉTRIO JÚNIOR

OS PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES NA TEORIA DOS OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Aprovado em 26 de fevereiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de S. Coelho

Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Nilson da Costa Bernardes Junior

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço as duas pessoas mais importantes da minha vida, minha mãe, Márcia Leite, e minha avó, Maria Dirce, pela paciência, compreensão e amor, que sempre me motivaram a buscar estudo.

Agradeço ao meu professor e orientador, Gustavo da Silva Araújo, por sempre estar presente na minha vida acadêmica, pela confiança, constante ajuda, paciência e excelente orientação.

Agradeço a todos os amigos que fiz durante minha graduação, especialmente à Gustavo Freire pelo apoio e torcida em todas as etapas dessa trajetória. A Claudiana Maria, que esteve ao meu lado me incentivando, cuja ajuda foi indispensável para a conclusão dessa jornada.

Agradeço aos professores Nilson da Costa Bernardes Junior e Emanuela Régia de Sousa Coelho, membros da banca examinadora, pelas valorosas contribuições a este trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar."

Esopo

RESUMO

Os princípios básicos da Análise Funcional são os teoremas de Banach-Schauder (Teorema da Aplicação Aberta), Banach-Steinhaus (Princípio da Limitação Uniforme) e Hahn-Banach, resultados que marcaram o nascimento da teoria e foram fundamentais para o seu desenvolvimento. O presente trabalho tem como objetivo apresentar demonstrações detalhadas desses resultados, além de diversas consequências, algumas delas no contexto dos operadores absolutamente $(q, p)-$somantes.

Palavras-chave: Espaços Normados. Espaços De Banach. Operadores lineares contínuos. Operadores absolutamente somantes.

ABSTRACT

The basic principles of Functional Analysis are the Banach-Schauder (Open Mapping Theorem), Banach-Steinhaus (Uniform Boundedness Principle) and Hahn-Banach Theorems, results that marked the birth of the theory and were fundamental for its development. The present work aims to present detailed demonstrations of these results, in addition to several consequences, some of them in the context of absolutely $(q, p)-$summing operators.

Keywords: Normed spaces. Banach spaces. Continuous linear operators. Absolutely summing operators.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Análise Funcional nasceu de vários problemas matemáticos e físicos cujas soluções geralmente se encontravam em espaços de funções ou em espaços de sequências, ambos os, espaços vetorias de dimensão infinita. A partir disso foi preciso criar uma nova matemática para, essencialmente, tratar desses espaços. Dessa forma, podemos defini-la, de maneira sucinta, como sendo o ramo da Matemática que generaliza, de forma natural, os conceitos da Álgebra Linear. Ainda, a Análise Funcional destaca-se por sua própria importância teórica; afinal, esta desempenha um papel crucial nos mais diversos ramos da Matemática, em especial, no estudo da Teoria dos Espaços de Banach, Equações Diferenciais Parciais, Operadores Lineares Absolutamente Somantes, dentre outros.

Neste trabalho pretendemos apresentar os resultados clássicos da Análise Funcional e posteriormente algumas aplicações na Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes.

No Primeiro Capítulo faz-se uma ressalva a conceitos introdutórios, tais como os espaços normados com ênfase aos Espaços de Banach e alguns exemplos. Estes servirão de base para o restante do trabalho, visto que o conceito de Operadores em Espaços Normados depende desta teoria.

No Segundo Capítulo, apresentaremos a classe dos Operadores Lineares Contínuos definidos em Espaços Normados. Nesse primeiro momento, o resultado mais importante estabelece uma série de equivalências para avaliar a continuidade dos operadores lineares.

No Terceiro Capítulo, serão apresentados alguns dos principais teoremas dentre o vasto espectro de assuntos que merecem ser abordados. Tais resultados referem-se ao Princípio da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach. O primeiro destes nos assegura que a limitação pontual de operadores implica em limitação na norma desses operadores; ainda, segue como corolário que o limite pontual de operadores lineares contínuos definidos em espaços de Banach é ainda um operador linear contínuo. Um resultado familiar da Análise nos diz que a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto; entretanto, tal afirmação não é válida quando trata-se de conjuntos abertos. O Teorema da Aplicação Aberta nos garante certas condições para que um operador linear contínuo entre espaços normados leve conjuntos abertos em conjuntos abertos. E, como uma de suas consequências, tem-se o Teorema do Gráfico Fechado, este estabelece uma equivalência entre a continuidade de um operador linear e a topologia do seu gráfico. Tendo em vista que, em Análise Funcional, muitas vezes estamos interessados em saber quando é possível estender aplicações lineares contínuas definidas em um subespaço de um espaço normado para todo o espaço, supriu-se tal necessidade com o famoso Teorema de Hahn-Banach, o qual permite que todo funcional linear contínuo definido em um subespaço de um espaço normado seja estendido continuamente para todo o espaço, preservando sua norma.

No Último Capítulo, como aplicações dos resultados apresentados no Capítulo 3, apresentaremos alguns propriedades e exemplos envolvendo séries em espaços normados, bem como, veremos os conceitos e resultados básicos da Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes.

2. ESPAÇOS NORMADOS

Neste capítulo apresentemos os conceitos inicias da Análise Funcional, como os espaços normados e espaços de Banach, bem como alguns exemplos e resultados básicos. Durante todo o trabalho $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ou complexos, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. As principais fontes desse capítulo foram [3, 9]

Definição 1. *Seja E um espaço vetorial. Uma norma em E é uma aplicação da forma $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que asssocia a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado a norma de x, que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\|x\| \geq 0$, *para todo* $x \in E$;

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *para todo* $x \in E$;

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, *para todo* $x \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$;

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *para todo* x,$y \in E$.

Chamamos de Espaço Normado ao Espaço Vetorial munido de uma norma e o representamos por $(E, \|\cdot\|)$ ou simplesmente por E quando não houver ambiguidade sobre qual norma estivermos usando.

Definição 2. *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica em X é uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par (x, y) associa ao número $d(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *para todo* $x, y \in X$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$, *para todo* $x, y \in X$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *para todo* $x, y \in X$.

Chamamos de Espaço Métrico ao conjunto não vazio X munido de uma métrica d. Podemos ver que toda norma induz uma métrica em E através da aplicação

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Assim, todas as propriedades que são válidas em espaços métricos se mantém em espaços normados.

Exemplo 1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *e* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *são espaços normados.*

Uma sequência em um espaço normado E é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to E$ que, a cada $n \in \mathbb{N}$, associa um vetor $x(n)$ de E. Costuma-se representar o vetor $x(n)$ por x_n. Denotaremos a sequência $x : \mathbb{N} \to E$ por $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ ou simplesmente por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ quando não houver possibilidade de dúvida.

Definição 3. *Seja E um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ é de Cauchy em E quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definição 4. *Seja E um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita convergente se existe $x \in E$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo*

$$n > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Neste caso, denotamos por $x_n \longrightarrow x$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em E, convergente para $x \in E$, a desigualdade

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$$

mostra que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, isto é, toda sequência convergente é de Cauchy.

Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para isso, considere uma sequência de racionais $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo para $\sqrt{2}$. Como vimos acima, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy pois é convergente em $\mathbb{R}$, porém não é convergente $\mathbb{Q}$. A existência de sequências de Cauchy que não são convergentes em espaços normados, nos induz a seguinte definição:

Definição 5. *Um espaço normado E é dito espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em E for convergente.*

Exemplo 2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Denotaremos por $C[a,b]$ o espaço de todas as funções contínuas definidas em $[a,b]$ assumindo valores em $\mathbb{K}$, isto é,*

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}.$$

Nessas condições, sabemos que toda função em $C[a,b]$ é limitada. De maneira natural vamos definir a aplicação

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|,$$

que torna $C[a,b]$ um espaço normado. A seguir, provaremos que $C[a,b]$ é um espaço de Banach.

Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de Cauchy em* $C[a,b]$*, então, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| \ < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Para cada $t \in [a,b]$*, temos*

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \textit{sempre que} \quad n, m > n_0,$$

que nos diz que, para cada $t \in C[a,b]$*, a sequência de escalares* $(f_n(t))_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy, logo, convergente. Portanto a função* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *dada por*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

está bem definida. Como a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy segue que a convergência acima é uniforme, portanto* f *é contínua. Por fim, fazendo* $m \longrightarrow \infty$ *em* (2.1) *concluímos que* $f_n \longrightarrow f$*.*

Proposição 1. *Sejam* E *um espaço de Banach e* F *um subespaço vetorial de* E*, então* F *é um espaço de Banach com a norma herdada por* E *se, e somente se,* F *é fechado em* E*.*

Demonstração. Suponha que F é um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F convergente, digamos $x_n \longrightarrow x \in E$. Provaremos que $x \in F$. Observe que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E (pois é convergente), com maior razão $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, logo convergente para algum $y \in F$. Portanto pela unicidade do limite, concluímos que $x = y$, logo F é um subespaço fechado em E.

Suponhamos que F seja fechado em E. Considere $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F e como E um espaço de Banach, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente, digamos $x_n \longrightarrow x \in E$. Como, por hipótese, F é fechado, segue que $x \in F$. $\square$

Exemplo 3. *Denotaremos por* c_0 *o espaço de todas as sequências de escalares que convergem para zero, isto é,*

$$c_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \textit{ para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ e } a_n \longrightarrow 0\}.$$

A aplicação

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|,$$

define uma norma em c_0*. Provaremos que* c_0 *é um espaço de Banach. Com efeito, seja* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de Cauchy em* c_0*, isto é, para cada* $n \in \mathbb{N}$ $x_n = (a_k^n)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|x_m - x_n\|_\infty = \|(a_k^n - a_k^m)_{k=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k^n - a_k^m| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|a_j^n - a_j^m| < \varepsilon \text{ sempre que } n, m > n_0.$$

Assim, a sequência de escalares $(a_j^n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, portanto convergente, isto é, $a_j^n \longrightarrow a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Pondo $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$, afirmamos que $x \in c_0$. De fato, como a sequência $(a_k^n)_{k=1}^{\infty}$ converge para zero para todo n fixo então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k > n_1 \Longrightarrow |a_k^n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

além disso, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_2 \Longrightarrow |a_j^n - a_j| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e, portanto,

$$|a_j| \leq |a_j - a_j^{n_2+1}| + |a_j^{n_2+1}| < \varepsilon \text{ sempre que } j > n_1.$$

Logo $a_j \longrightarrow 0$ e assim, $x \in c_0$. Por fim, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.2), tem-se

$$\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon \text{ sempre que } n > n_0.$$

Logo c_0 é um espaço de Banach.

Exemplo 4. *Denotaremos por c_{00} o subespaço vetorial de c_0 formado pelas sequências de escalares eventualmente nulas, isto é,*

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \text{ existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Considere a seguinte sequência em c_{00}:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\
x_2 &= \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right) \\
x_3 &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0 \dots\right) \\
&\vdots \\
x_n &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 \dots\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Considerando $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty} \subset c_0$. *A expressão*

$$\|x_n - x\|_\infty = \left\|(0, 0, \ldots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\right\|_\infty = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

mostra que $x_n \longrightarrow x$. *Como* $x \notin c_{00}$, *resulta que* c_{00} *não é fechado e pela Proposição 1 não é um espaço de Banach.*

Exemplo 5. *Para cada número real* $p \geq 1$, *definamos*

$$\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

O conjunto ℓ_p *é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e a função*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

torna ℓ_p *um espaço de Banach. Para* $p = \infty$, *definimos o conjunto de todas as sequências limitadas de escalares, ou seja,*

$$\ell_\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

O conjunto c_0 *é um subespaço de* ℓ_∞ *e a função*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

torna ℓ_∞ *um espaço de Banach.*

Veremos a seguir que o estudo de séries em espaços normados torna-se imprescindível no estudo dos espaços de Banach, tendo em vista que é possível caracterizar tais espaços através de séries convergentes.

Definição 6. *Seja* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência no espaço normado* E. *Dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é convergente para* $x \in E$ *se a sequência das somas parciais* $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ *converge para* x. *Neste caso, denotaremos por* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Definição 7. *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *no espaço normado* E *é absolutamente convergente quando a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *for convergente. Neste caso, denotamos por* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Exemplo 6. *Considere a seguinte sequência em* c_{00}*:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1,0,0,\dots) \\
x_2 &= \left(0,\frac{1}{4},0,0,\dots\right) \\
x_3 &= \left(0,0,\frac{1}{9},0,0\dots\right) \\
&\vdots \\
x_n &= \left(0,0,0,\dots,\frac{1}{n^2},0,0\dots\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é absolutamente convergente. Seja* $x = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots\right)$*, então*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right\|_\infty = \left\|\left(0,0,\cdots,\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{(n+2)^2},\cdots\right)\right\|_\infty = \frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \notin c_{00}$.

Este exemplo nos mostra que séries absolutamente convergentes em espaços normados podem não ser convergente. Veremos a seguir que para espaços de Banach convergência absoluta implica em convergência simples.

Teorema 1. *Um espaço normado E é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente em E é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que toda série absolutamente convergente em E é convergente. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Seja $n_0^{(1)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n > n_0^{(1)} \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < 2^{-1}.$$

Escolha $n_1 > n_0^{(1)}$. Agora, considere $n_0^{(2)} \in \mathbb{N}$ tal que $n_0^{(2)} > n_0^{(1)}$ e se $m,n > n_0^{(2)}$, então $\|x_n - x_m\| < 2^{-2}$. Escolha $n_2 > n_0^{(2)}$ e $n_2 > n_1$. Prosseguindo dessa forma indefinidamente, obtemos uma sequência $(n_1, n_2, \dots,)$ que satisfaz

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Daí, pelo critério de comparação entre séries numéricas em $\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty,$$

donde segue que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente, isto é, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x \in E$. Note que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \longrightarrow \infty$, segue que $x_{n_{k+1}} \longrightarrow x_{n_1} + x \in E$. Portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, logo $x_n \longrightarrow x_{n_1} + x$.

Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Sejam $m > n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \Big\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| \longrightarrow 0 \text{ quando } m > n \longrightarrow \infty.$$

Assim a sequência $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, em particular, convergente. $\square$

Definição 8. *Seja E um espaço normado. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em E são ditas equivalentes se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_2 \textit{ para todo } x \in E.$$

Um exercício canônico desta teoria diz que se E é um espaço de Banach com uma determinada norma, então E é um espaço de Banach em qualquer norma equivalente àquela primeira. Sabemos dos cursos de Análise Real que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes (consulte, por exemplo [5]). Assim é sempre possível escolher uma norma de acordo com sua conveniência. Veremos que em dimensão finita quaisquer duas normas também são equivalentes.

Proposição 2. *Seja E um espaço normado e $B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto linear-*

mente independente, então existe $c > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \geq c\left(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\right)$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Demonstração. Dados quaisquer duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em $\mathbb{R}^n$ existe uma constante $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \geq c\|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, basta mostrar que a aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, sejam $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então:

1) $\|a\| = 0$ se, e somente se, $\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| = 0$, logo $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$ e como $B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente, segue que $a = 0$;

2) $\|\alpha a\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha a_j x_j \right\| = \left\| \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| = \left|\alpha\right| \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| = |\alpha|\|a\|$;

3) $\|a + b\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right\| = \|a\| + \|b\|$.

Logo, $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Por fim, tomando a norma da soma em $\mathbb{R}^n$ concluímos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \geq c\|\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)\|_s = c\left(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\right).$$

□

Teorema 2. *Todas as normas em um espaço normado de dimensão finita são equivalentes*

Demonstração. Seja E um espaço normado de dimensão finita e $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base de E, então para cada $x \in E$ existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que $x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. Consideremos a norma $\|\cdot\|_s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |a_j|,$$

sendo $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em E. Então

$$\begin{aligned}\|x\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|\|e_j\| \\ &\leq M\sum_{j=1}^{n}|a_j| = M\|x\|_s,\end{aligned}$$

para todo $x \in E$ em que $M = \max\limits_{1\leq j\leq n}\|e_j\|$. Pela Proposição 2 existe $c > 0$ tal que,

$$\|x\| = \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big\| \geq c\|x\|_s$$

para todo $x \in E$. O resultado segue notando que normas equivalentes são transitivas. $\square$

Teorema 3. *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão finita e $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ uma base de Hamel normalizada de E, então para cada $x_n \in$ E existem únicos escalares $a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n$ tais que $x_n = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j^n e_j$.

Pela Proposição 2 existe $c > 0$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \geq c\sum_{j=1}^{k}|a_i^n - a_i^m|, \quad \text{para quaisquer } n, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que:

$$m, n > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon c.$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos

$$|a_j^n - a_j^m| < \varepsilon \text{ sempre que } m, n > n_0.$$

Portanto a sequência de escalares $\left(a_j^n\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, logo convergente. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $b_j \in \mathbb{K}$ de modo que $a_j^n \longrightarrow b_j$ quando $n \longrightarrow \infty$. Tomando $x = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n \in E$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{k}\left(a_j^n - b_j\right)e_j\Big\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k}|a_j^n - b_j| = 0.$$

Daí concluímos que $x_n \longrightarrow x$, logo E é um espaço de Banach. $\square$

Corolário 1. *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado.*

Exemplo 7. *Vimos anteriormente que* $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço de Banach. Sabemos que toda função contínua definida em um intervalo compacto é, em particular, integrável. Assim a expressão*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$

está bem definida e torna $C[a,b]$ *um espaço normado. Posteriormente, provaremos que* $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ *não é um espaço de Banach. Por agora, assumiremos esse fato como verdade. Assim sendo, as normas* $\|\cdot\|_\infty$ *e* $\|\cdot\|_1$ *não são equivalentes.*

Exemplo 8. *Em todo espaço vetorial* E *é possível definir uma norma. De fato, Suponhamos inicialmente que* E *tem dimensão finita e seja* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *uma base de Hamel para* E*, então, para cada* $x \in E$ *existem únicos escalares* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

As aplicações $\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|$ *e* $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$ *definem normas em* E*.*

Agora, considere E *um espaço vetorial de dimensão infinita e* $B = \{e_i\}_{i\in I}$ *uma base de Hamel para* E*. Então, para cada* $x \in E$ *existe um subconjunto finito* $F \subset I$ *e escalares* $a_i \in \mathbb{K}$*, para todo* $i \in F$*, tais que*

$$x = \sum_{i\in F} a_i e_i.$$

Veremos que a aplicação $\|x\| = \max\limits_{i\in F}|a_i|$ *define uma norma em* E*. Segue diretamente da definição que* $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in E$ *e*

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow \max_{i\in F}|a_i| = 0 \Longrightarrow |a_i| = 0, \text{ para todo } i \in F \Longrightarrow x_i \text{ para todo } i \in F.$$

Portanto, $x = \sum\limits_{i\in F} a_i e_i = 0$*. Seja* $\alpha \in \mathbb{K}$*, então*

$$\|\alpha x\| = \Big\|\sum_{i\in F}\alpha a_i e_i\Big\| = \max_{i\in F}|\alpha a_i| = |\alpha|\max_{i\in F}|a_i| = |\alpha|\|x\|$$

para todo $x \in E$*. Por fim, sejam* $x = \sum\limits_{i\in F_1} a_i e_i$ *e* $y = \sum\limits_{i\in F_2} b_i e_i \in E$*, com* $F_1, F_2 \subseteq I$ *conjuntos finitos. Assim,*

$$x + y = \sum_{i\in F_1\setminus F_2} a_i e_i + \sum_{i\in F_1\cap F_2}(a_i + b_i)e_i + \sum_{i\in F_2\setminus F_1} b_i e_i.$$

Logo,

$$x + y = \sum_{i\in F_1\cup F_2} c_i e_i,$$

em que,

$$c_i = \begin{cases} a_i, \ \ se\ i \in F_1 \backslash F_2, \\ a_i + b_i, \ \ se\ i \in F_1 \cap F_2, \\ b_i, \ \ se\ i \in F_2 \backslash F_1. \end{cases}$$

Para todos esses valores de c_i sempre teremos $|c_i| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $i \in F_1 \cup F_2$ e, portanto, a desigualdade $\|x + y\| = \max_{i \in F_1 \cup F_2} |c_i| \leq \|x\| + \|y\|$ é satisfeita. Logo E é um espaço normado.

2.1 Um comentário sobre bases e dimensão

Do Teorema 2 até o final da seção anterior, pode-se perceber que falamos um pouco sobre espaços normados de dimensão finita e bases de Hamel. Entretanto, como já havíamos mencionado na Introdução, a Análise Funcional nasceu de vários problemas matemáticos e físicos cujas soluções, geralmente, encontravam-se em espaços vetorias de dimensão infinita.

Independente da dimensão do espaço, uma aplicação interessante do Lema de Zorn garante que todo espaço vetorial admite uma base de Hamel (veja, por exemplo, [4]). Contudo, o teorema abaixo, de certa forma, dificulta ou inviabiliza a utilização das bases de Hamel para espaços vetoriais de dimensão infinita.

Teorema 4. *Em todo espaço de Banach de dimensão infinita qualquer base de Hamel é não enumerável.*

Nesse sentido, foi preciso criar um novo conceito de base para dar prosseguimento ao estudo desses espaços. Antes de apresentarmos esse conceito, vamos demonstrar o Teorema 4. Para isso, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Teorema 5 (Teorema de Baire)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não-vazio.*

Para a demonstração do teorema acima consulte [3].

Proposição 3. *Todo subespaço próprio de um espaço normado tem interior vazio.*

Demonstração. Seja G um subespaço próprio do espaço normado E. Suponhamos que existam $g \in G$ e $r > 0$ tais que $B(g; r) \subset G$. Dado $x \in E - G$, então

$$z = g + \frac{r}{2} \frac{x - g}{\|x - g\|} \in B(g; r),$$

pois
$$\|g - z\| = \left\| g - g + \frac{r}{2} \frac{x - g}{\|x - g\|} \right\| = \frac{r}{2} < r.$$
Portanto, $z \in G$, como
$$x = \frac{2}{r}\|x - g\|z - g\left(\frac{2}{r}\|x - g\| - 1\right),$$
e sendo G um subespaço de E, resulta que $x \in G$. $\square$

Demonstração do Teorema 4. Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Suponhamos que exista uma base de Hamel em E enumerável, digamos $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $F_n = \text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é fechado por ser um subespaço de dimensão finita e, portanto completo de E. Além disso, afirmamos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. De fato, dado $x \in E$, sendo B uma base de Hamel em E então existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_j$ tais que
$$x = \sum_{i=1}^{j} x_i a_i.$$
Esse fato nos diz que $x \in F_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pelo Teorema 5 existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o interior de F_{n_0} é não vazio, o que é um absurdo, pois como E tem dimensão infinita, então para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n é um subespaço próprio de E e, portanto, pela Proposição 3 segue que F_n tem interior vazio para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos assim que qualquer base de Hamel em um espaço de Banach de dimensão infinita é não enumerável. $\square$

Representações de vetores por combinações lineares infinitas são bastante comuns e úteis para espaços normados.

Definição 9. *Seja E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita base de Schauder quando para todo $x \in E$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j.$$

A Base de Schauder tem como objetivo principal generalizar as Bases de Hamel adequadamente para o contexto de espaços normados de dimensão infinita. Bases de Schauder são úteis para se entender o comportamento e a estrutura de um espaço de Banach. Prova-se que todo espaço de Banach que contém uma Base de Schauder é separável (um espaço normado E é separável se possuir um subconjunto $A \subseteq E$ enumerável e denso; ver mais detalhes na Seção 2.3). A recíproca desse resultado é falsa e foi provada por Per Enflo, em 1972, que recebeu um ganso vivo de Stanislaw Mazur como presente pela demonstração.

Como ℓ_∞ não é separável (veja [9]), então não admite nenhuma base de Schauder. A busca por condições para que um espaço de Banach possua uma base de Schauder foi objeto de pesquisa de muitos matemáticos. Um resultado extremamente delicado conhecido como Princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski nos garante em uma de suas aplicações que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder. Para a demonstração desses dois fatos consulte [3].

2.1.1 Espaços que não são completos em nenhuma norma

Sabemos que se (M, D) é um espaço métrico então ele admite um completamento, ou melhor, M é isométrico a um subconjunto denso do espaço métrico completo $(\tilde{M}, \tilde{D})$ (veja, por exemplo, [9]). Grosseiramente falando, é possível adicionar pontos a um espaço métrico para torná-lo completo. Vimos no Exemplo 8 que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial. É natural se questionar se em todo espaço vetorial é possível definir uma norma que o torne um espaço de Banach. Quando a dimensão do espaço for finita, a resposta é trivial. O nosso objetivo nessa seção é apresentar um espaço normado de dimensão infinita que não é completo em nenhuma norma.

Exemplo 9. *Veremos que nenhuma norma em c_{00} o torna um espaço de Banach. Pelo Teorema 4 é suficiente exibir uma base de Hamel enumerável em c_{00}. Afirmamos que o conjunto formado pelos vetores canônicos $B = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hamel nesse espaço. O conjunto B é claramente linearmente independente. Além disso, dado $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > n_0$. Assim,*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{n_0} x_j e_j.$$

Portanto concluímos que B é uma base de Hamel enumerável em c_{00}.

Mais geralmente o seguinte resultado é válido.

Proposição 4. *Todo espaço vetorial de dimensão infinita que contém uma base de Hamel enumerável não é completo em nenhuma norma.*

2.2 Conjuntos Compactos em Espaços Normados

Definição 10. *Seja E um espaço normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito compacto quando toda sequência de pontos em A admite uma subsequência convergente em A.*

Teorema 6. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é compacto.*

Demonstração. Sejam E, F espaços normados e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação contínua. Vamos mostrar que se $K \subset E$ é um subconjunto compacto, então $\varphi(K)$ é compacto. De fato, seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\varphi(K)$, então existem $x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots \in K$ tais que $\varphi(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente, digamos $x_{n_j} \longrightarrow x \in M$. Sendo φ contínua então $\varphi(x_{n_j}) \longrightarrow \varphi(x)$. Como $\varphi(x_{n_j}) = y_{n_j}$ temos $y_{n_j} \longrightarrow \varphi(x) \in \varphi(K)$ o que prova o resultado. $\square$

Em espaços métricos, conjuntos compactos são sempre fechados e limitados (consulte, por exemplo, [7]). Além disso, em $\mathbb{R}^n$ fechados e limitados definem compactos. Em dimensão finita a caracterização de compactos permanece semelhante àquela de $\mathbb{R}^n$, como mostra o resultado abaixo.

Teorema 7. *Em dimensão finita os conjuntos compactos são exatamente aqueles fechados e limitados.*

Demonstração. É suficiente provar que todo conjunto fechado e limitado é compacto. Com efeito, Seja K um subconjunto fechado e limitado de um espaço normado de dimensão finita E. Considere $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base de Hamel normalizada de E, então para cada $x_m \in$ K existem escalares $a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m$ tais que:

$$x_m = \sum_{j=1}^{n} a_j^m e_j,$$

como K é limitado, existe $L > 0$ de modo que $\|x\| \leq L$ para todo $x \in K$. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em K, segue pelo Lema 2 que existe $c > 0$ de modo que

$$L \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j^m e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |a_j^m| = c\| \left(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m\right) \|_s,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que a sequência $(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}^n$, portanto, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass existe uma subsequência $\left(a_1^{m_j}, a_2^{m_j}, \cdots, a_n^{m_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ convergente, digamos $\left(a_1^{m_j}, a_2^{m_j}, \cdots, a_n^{m_j}\right) \longrightarrow (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, em que $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Pondo $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} e_j b_j \in E$. Afirmamos que $x_{m_k} \longrightarrow x$. De fato,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - x\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{j=1} \left(a_j^{m_k} - b_j\right) e_j \right\| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j^{m_k} - b| = 0.$$

Como K é fechado, segue que $x \in K$ e portanto K é compacto, concluindo a demonstração. $\square$

Na prova desse teorema utilizamos o famoso teorema de Bolzano–Weierstrass, o qual nos garante que toda sequência limitada em $\mathbb{K}^n$ admite uma subsequência convergente (consulte [5]). Esse teorema pode ser facilmente generalizado para espaços normados de dimensão finita. O próximo exemplo mostra que o resultado não vale em geral para espaço normados de dimensão infinita.

Exemplo 10. *Em* $\ell_2 = \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\right\}$ *com a norma*

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

considere a sequência definida por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que $e_n \in \ell_2$*, pois* $\|e_n\|_2 = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, donde segue também que* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *é limitada em* ℓ_2*. Entretanto, sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*, com* $m > n$*, então*

$$\|x_m - x_n\|_2 = \|(0, 0, \dots, -1, 0, \dots, 1, 0, \dots)\| = \sqrt{2}.$$

Assim nenhuma subsequencia da sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy e, portanto, a sequência* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *apesar de limitada não possui nenhuma subsequência convergente.*

Lema 1 (Lema de Riez)**.** *Sejam* E *um espaço normado e* M *um subespaço fechado de* E *e* $0 < \theta < 1$ *então existe* $y \in E - M$ *com* $\|y\| = 1$ *de modo que* $\|y - x\| \geq \theta$ *para todo* $x \in M$*.*

Demonstração. De fato, seja $y_0 \in E - M$ e defina

$$d = d(y_0, M) := \inf\{\|y_0 - x\| : x \in M\}.$$

Afirmamos que $d > 0$. De fato, se $d = 0$ então $y_0 \in \overline{M} = M$ o que é um absurdo. Como $0 < \theta < 1$, segue que $\frac{1}{\theta} > 1$ ou melhor $\frac{d}{\theta} > d$, portanto existe $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta} \tag{2.3}$$

Tome $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. É claro que $\|y\| = 1$, e ainda $y \in E - M$. De fato, se $y \in M$ então $x_0 + \|y_0 - x_0\| y = y_0 \in M$, pois M é um subespaço de E, o que é um absurdo. Sendo

$x \in M$, então

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \left\| \frac{y_0 - x_0 - \|y_0 - x_0\| x}{\|y_0 - x_0\|} \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + x\|y_0 - x_0\|)\,\|}{\|y_0 - x_0\|}.$$

Como $(x_0 + x\|y_0 - x_0\|) \in M$, então $\|y - (x_0 + x\|y_0 - x_0\|)\,\| \geq d$ e por (2.3) concluímos que

$$\|y - x\| \geq \theta.$$

□

Definição 11. *Seja E um espaço normado. O conjunto*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é chamado de bola unitária fechada de E.

De maneira análoga ao Exemplo 10, é possível mostrar que B_{c_0} apesar de fechada e limitada não é compacta. O teorema a seguir nos diz que em dimensão infinita a bola unitária fechada nunca é compacta.

Teorema 8. *Um espaço normado E tem dimensão finita, se e somente se, a bola unitária fechada de E for compacta.*

Demonstração. Se E é um espaço normado de dimensão finita, como B_E é sempre fechada e limitada segue, pelo que já vimos que B_E é compacto. Suponha que B_E é um conjunto compacto, $\dim E = \infty$ e tome $x_1 \in E$ com $\|x_1\| = 1$. Temos que $\text{span}\{x_1\}$ é um subespaço próprio de E, como dim $\text{span}\{x_1\} = 1$, segue que $\text{span}\{x_1\}$ é um subespaço fechado de E, portanto pelo Lema 1 existe $x_2 \in E$ - $\text{span}\{x_1\}$ com $\|x_2\| = 1$, tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Note que $\text{span}\{x_1, x_2\}$ é um subespaço próprio de E e $\dim \text{span}\{x_1, x_2\} < \infty$, Portanto $\text{span}\{x_1, x_2\}$ é um subespaço fechado de E, segue novamente pelo Lema 1 que existe $x_3 \in E$ - $\text{span}\{x_1, x_2\}$ com $\|x_3\| = 1$ de modo que

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ e } \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

De modo geral, $\text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é um subespaço próprio fechado E , em que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso é sempre possível pois $\dim E = \infty$, logo pelo Lema 1 existe $x_{n+1} \in E$ - $\text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ com $\|x_{n+1}\| = 1$ tal que

$$\|x_n - x_i\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Construímos assim uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E, porém sendo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

Assim nenhuma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, com maior razão $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não possui nenhuma subsequência convergente, o que é um absurdo pois B_E é compacto, portanto $\dim E < \infty$. □

Esse teorema nos mostra um grande problema na passagem da dimensão finita para a dimensão infinita. Neste ambiente, funções contínuas definidas em conjuntos fechados e limitados não nos garantem propriedades já esperadas para esse tipo de aplicação, como por exemplo, a existência de máximos e mínimos.

2.3 Espaços Separáveis

Definição 12. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é separável se existir um subconjunto $A \subseteq E$ enumerável e denso.*

Exemplo 11. *$\mathbb{R}^n$ é separável, pois o conjunto $\mathbb{Q}^n$ por n-uplas de números racionais é enumerável e denso.*

Exemplo 12. *Todo espaço normado de dimensão finita é separável. Com efeito, seja E um espaço normado de dimensão n. Considere*

$$B = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

uma base de Hamel normalizada em E. O conjunto

$$A = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n : a_i \in \mathbb{Q} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$$

é enumerável, pois a aplicação $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \longmapsto (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n)$ é sobrejetiva. Vamos mostrar que A é denso. Sendo $y \in E$, então existem numeros reais $b_1, b_2, \cdots, b_n$ tais que

$$y = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$|\beta_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots n.$$

Isso é sempre possível pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Tomando $x = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots \beta_nx_n \in A$, temos

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - b_j)\, x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\beta_j - b_j| < \varepsilon.$$

Logo, A é denso em E.

Exemplo 13. *Se E é um espaço separável então a esfera unitária centrada na origem também é separável. De fato, seja $D \subseteq E$ um conjunto enumerável e denso em E, defina*

$$S = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in D - \{0\} \right\}$$

vamos mostrar que S é denso em S_E. Seja $y \in S_E$ e $\varepsilon > 0$. Pela densidade de D, existe $y_0 \in D$ tal que

$$\|y - y_0\| < \varepsilon$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left\| y - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| &= \left\| y - y_0 - \frac{y_0}{\|y_0\|} + y_0 \right\| \\
&\leq \|y - y_0\| + \left\| \frac{y_0}{\|y_0\|} - y_0 \right\| \\
&= \|y - y_0\| + \frac{\|y_0\,(1 - \|y_0\|)\,\|}{\|y_0\|} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |1 - \|y_0\|| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + |\|y\| - \|y_0\|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|y - y_0\| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

provando assim que S é denso em S_E. A enumerabilidade de S segue da enumerabilidade de D.

Lema 2. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto A de E enumerável tal que $\overline{\text{span}\{A\}} = E$.*

Demonstração. Seja E um espaço normado separável então existe $A \subset E$ denso e enumerável. Como $A \subset \text{span}\{A\}$ segue que $E = \overline{A} \subset \overline{\text{span}\{A\}} \subset E$ o que mostra o resultado. Suponhamos agora que exista $A \subset E$ enumerável tal que $\overline{\text{span}\{A\}} = E$. Seja B_n o conjunto de todas as combinações lineares de n elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}$,

$$B_n = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \;\; e \;\; a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}.$$

A enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ implica na enumerabilidade de B_n para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é enumerável pois é reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis, vamos mostrar que B é denso em E. Sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{\text{span}\{A\}} = E$ existe $y_0 \in \text{span}\{A\}$ digamos $y_0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_kx_k$ em que $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$

e $x_1, x_2, \dots x_k \in A$ de modo que $\|x - y_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ então existem $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \|x_n\|} \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, k.$$

Tome $y = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_k$. Assim, $y \in B$ e

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 + x\| \\
&\leq \|x - y_0\| + \|y - y_0\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + \dots + (a_k - b_k)x_k\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leq i \leq k} |a_j - b_j| \left(\|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_k\|\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1 \leq i \leq k} |a_j - b_j| \sum_{n=1}^{k} \|x_n\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente concluímos que $\overline{B} = E$ mostrando assim que E é separável. □

Corolário 2. *O espaço c_0 é separável.*

Demonstração. Considere em c_0 a sequência dos vetores unitários canônicos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Dado $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, temos

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right\|_{\infty} = \lim_{k \to \infty} \left\| (0, 0, \dots, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) \right\|_{\infty} = \lim_{k \to \infty} \sup_{k > j} |a_k| = 0,$$

onde a última igualdade é valida pois $a_j \longrightarrow 0$. Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j e_j \in \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Lema 2 que c_0 é separável. De maneira análoga mostra-se que ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ é separável. □

Corolário 3. *$C[a, b]$ é separável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(t) = t^n$. Pondo $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ então $A \subseteq C[a, b]$ e $\text{span}A$ é o conjunto de todos os polinômios definidos no intervalo $[a, b]$. Do teorema da aproximação de Weierstrass (veja, por exemplo, [6]), segue que $\overline{\text{span}A} = C[a, b]$ e, portanto, pelo Lema 2, $C[a, b]$ é separável. □

Destacamos abaixo as propriedades exclusivas para espaços normados de dimensão finita vistas nessa seção.

1. Todas as normas em um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes;

2. Todo espaço normado de dimensão finita é Banach;

3. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado;

4. Todo espaço normado de dimensão finita é separável;

5. Conjuntos fechados e limitados são sempre compactos em dimensão infinita.

3. OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos básicos sobre operadores lineares em espaços normados. De interesse especial são os operadores lineares contínuos, estes formam um classe de aplicações importante. O principal resultado dessa seção, caracteriza os operadores lineares através de uma série de equivalências.

Definição 13. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que o operador $T : E \longrightarrow F$ é linear quando:*

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$*, para todo* $x, y \in E$

2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $x \in E$.

Exemplo 14. *Considere aplicação $\varphi : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

A linearidade de φ segue das propriedades de integração. Provaremos que φ é uniformemente contínuo, para isso basta ver que

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = \Big| = \Big| \int_a^b (f(t) - g(t))\, dt \Big| \leq \int_a^b |(f(t) - g(t))|dt \leq \|f - g\|_\infty (b - a)$$

para todo $f, g \in C[a,b]$.

Teorema 9. *Sejam E e F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, então todas as afirmações abaixo são equivalentes*

1. *T é Lipschitziana;*
2. *T é uniformemente contínua;*
3. *T é contínua;*
4. *T é contínua em algum ponto de E;*
5. *T é contínua na origem;*

6. *O conjunto* $B = \{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ *é limitado;*

7. *Existe* $c > 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ *para todo* $x \in E$

Demonstração. As implicações (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) são de fáceis verificações.
(4) $\Longrightarrow$ (5) Seja T contínua em $x_0 \in E$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$$

Considerando o conjunto de pontos de E tais que $\|x\| < \delta$, segue que $\|(x + x_0) - x_0\| < \delta$, logo

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T(x) - T(0)\| \\ &= \|T(x) - T(x_0 - x_0))\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que T é contínua na origem.
(5) $\Longrightarrow$ (6) Dado $\varepsilon = 1$ pela continuidade de T na origem, existe δ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se $\|x\| \leq 1$, temos

$$\left\|\frac{\delta}{2}x\right\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \Longrightarrow \left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| = \frac{\delta}{2}\|T(x)\| < 1.$$

Portanto $\|T(x)\| < \dfrac{2}{\delta}$ sempre que $\|x\| \leq 1$. Em outras palavras, a imagem dos elementos de E que estão na bola unitária fechada de E são limitados, ou melhor:

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} < \infty.$$

(6) $\Longrightarrow$ (7) Se $x = 0$ a desigualdade é imediata. Suponha que $x \neq 0$. Assim,

$$\frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq c \Longrightarrow \|T(x)\| \leq c\|x\|,$$

onde c é uma cota superior de $A = \{\|T(x)\| : x \in B_E\}$.
(7) $\Longrightarrow$ (1) Seja $x, y \in E$, então

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq c\|x - y\|,$$

donde segue que T é Lipschitziana. $\square$

Exemplo 15. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Considere o operador deslocamente a direita:*

$$T : \ell_p \longrightarrow \ell_p,\ T\left((a_1, a_2, a_3, \dots)\right) = \left(a_2, a_3, \dots\right).$$

É fácil ver que T é linear. Mostraremos que T é contínuo. Dado $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ temos

$$\|T\left((a_1, a_2, a_3, \dots)\right)\|_p = \|\left(a_2, a_3, \dots\right)\|_p = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p.$$

Portanto, segue pelo Teorema 9 que T é contínuo.

Definição 14. *Diremos que dois espaços normados E, F são isomorfos e denotaremos por $E \cong F$ quando existir um operador linear contínuo bijetor $\varphi : E \longrightarrow F$ de modo que o operador inverso $\varphi^{-1} : F \longrightarrow E$ também seja contínuo.*

Corolário 4. *Sejam E e F espaços normados. Um operador linear bijetor $T : E \longrightarrow F$ é um isomorfismo se, e somente se, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq c_2\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Demonstração. Se T é um isomorfismo, então para cada $x \in E$ temos

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|,$$

isto é,

$$c_1\|x\| \leq \|T(x)\|,$$

em que $c_1 = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$. A desigualdade inversa segue da continuidade de T e do Teorema 9.

Como a inversa de uma aplicação linear também é linear, basta provar que T^{-1} é contínua. Sendo T sobrejetiva, então dado $y \in F$ existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Daí

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq \frac{1}{c_1}\|T(x)\| = \frac{1}{c_1}\|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|.$$

Resulta do Teorema 9 que T e T^{-1} são contínuas. $\square$

Proposição 5. *Todo espaço normado isomorfo a um espaço de Banach também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja E um espaço normado isomorfo ao espaço de Banach F, então existe uma aplicação linear bijetiva contínua $T : E \longrightarrow F$ com inversa contínua. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Da continuidade de T resulta que a sequência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F e, portanto, convergente, digamos $T(x_n) \longrightarrow z = T(x) \in F$ em que $x \in E$. Sendo T um isomorfismo então pelo Corolário 4 existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq c_2\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow c_1\|x_n - x\| \leq \|T(x_n - x)\| = \|T(x_n) - T(x)\| \leq \varepsilon c_1,$$

provando assim que E é um espaço de Banach. $\square$

O caminho mais fácil para se mostrar que dois espaços normados E e F não são isomorfos é exibindo uma propriedade que o espaço E contenha e que não seja satisfeita para o espaço F. Segue dos Exemplos 4 e 9 que o espaço c_{00} não é isomorfo a nenhum espaço de Banach.

Sejam E e F espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos $T : E \longrightarrow F$. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos E^* ao invés de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ e os elementos de E^* são chamados funcionais lineares contínuos. $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, além disso, o Teorema 9 nos diz que para cada operador linear contínuo T, o conjunto $\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ é limitado. Esse fato nos induz a considerar a seguinte norma em $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Proposição 6. *Sejam E e F espaços normados. Então*

A. *$\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.*

B. *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.*

Demonstração. A. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Observe que:

1. $\|T_1\| = 0$ se, e somente se, $\sup\{\|T_1(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0$. Logo $T_1(x) = 0$ para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Se $x \neq 0$, então

$$\frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \left\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0.$$

Assim, $T_1(x) = 0$ para todo $x \in E$.

2. $\|\alpha T_1\| = \sup\{\|\alpha T_1(x)\| : x \in B_E\} = |\alpha| \sup\{\|T_1(x)\| : x \in B_E\} = |\alpha|\|T_1\|$.

3. Note que $\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, para todo $x \in B_E$. Portanto $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

B. A desigualdade é óbvia para $x = 0$. Suponhamos $x \neq 0$, então

$$\frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|.$$

$\square$

O próximo teorema afirma que para $\mathcal{L}(E,F)$ ser um espaço de Banach é suficiente que F seja um espaço de Banach.

Teorema 10. *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço De Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|T_n - T_m\| = \sup\{\|T_n(x) - T_m(x)\| : x \in B_E\} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|\left(T_n - T_m\right)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \tag{3.1}$$

Assim, para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, portanto convergente pois F é um espaço de Banach. Definamos a aplicação $T : E \longrightarrow F$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ para cada $x \in E$.

Primeiramente vamos mostrar que T é linear. Sejam $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

1. $T(x+y) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)+T_n(y) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)+\lim\limits_{n\to\infty} T_n(y) = T(x)+T(y)$;

2. $T(\alpha x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha T_n(x) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = \alpha T(x)$.

Agora, provemos que $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Para $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_1 \Longrightarrow \|(T_n - T_m)(x)\| =\leq \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|x\| \tag{3.2}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \|x\|$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_1$. Daí

$$\|(T_{n_1} - T)(x)\| = \|T_{n_1}(x) - T(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$$

para todo $x \in E$, garantindo assim que $(T_{n_1} - T) \in \mathcal{L}(E,F)$. Segue assim que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ pois $T = T - T_{n_1} + T_{n_1}$. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (3.1) concluímos que $T_n \longrightarrow T$. $\square$

Segue do resultado anterior que

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|T(x)\| \\ &= \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.\end{aligned}$$

Corolário 5. *Seja E um espaço normado, então E^* é um espaço de Banach (sendo E um espaço de Banach ou não).*

Proposição 7. *Sejam E, F e G espaços normados. Se $T \in (E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$ então $S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Demonstração. Dados $x_1, x_2 \in E$ temos

$$\begin{aligned}(S \circ T)(x_1 + x_2) &= S(T(x_1 + x_2)) = S(T(x_1) + T(x_2)) \\ &= S(T(x_1)) + S(T(x_2)) = (S \circ T)(x_1) + (S \circ T)(x_2)\end{aligned}$$

e ainda

$$(S \circ T)(\alpha x_1) = S(T(\alpha x_1)) = S(\alpha T(x_1)) = \alpha (S \circ T)(x_1)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Para provar a continuidade de $S \circ T$ basta ver que

$$\| (S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$$

para todo $x \in E$. Por fim, para cada $x \neq 0$ temos

$$\frac{\| (S \circ T)(x)\|}{\|x\|} \leq \|S\|\|T\|,$$

segue que $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Vimos anteriormente que existem conjuntos fechados e limitados que não são compactos. Na verdade, em todo espaço de Banach de dimensão infinita sempre existe um conjunto fechado e limitado que não é compacto, a saber, a bola fechada unitária. Além disso, verificamos que nem toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Esses dois resultados nos trazem sérios problemas no estudo da compacidade dos espaços normados. Uma classe interessante de operadores lineares são os chamados operadores compactos que, de certa forma, "resolvem" alguns desses problemas no seguinte sentido: um operador linear $\varphi : E \longrightarrow F$ é dito compacto quando leva sequências limitadas de E em sequências com subsequências convergentes em F (para mais detalhes sobre operadores compactos consulte [3]). Nos cursos básicos de Álgebra Linear, denotamos o espaço de todos os operadores lineares definidos nos espaços vetorias E e F por $\mathcal{L}(E, F)$ sem se preocupar com a continuidade dessas aplicações. A proposição 8 abaixo justifica esse fato.

Proposição 8. *Todo operador linear definido em um espaço normado de dimensão finita é contínuo.*

Demonstração. De fato, sejam E, F espaços normados com $\dim E = n$, $\varphi : E \longrightarrow F$ um operador linear e $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base de Hamel de E. Para cada $x \in E$ existem únicos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

Segue diretamente da linearidade de φ que

$$\|\varphi(x)\| \leq |a_1|\|\varphi(e_1)\| + |a_2|\|\varphi(e_2)\| + \cdots |a_n|\|\varphi(e_n)\| \leq M\left(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\right),$$

em que M $= \max\{\|\varphi(e_1)\|, \|\varphi(e_2), \| \cdots, \|\varphi(e_n)\|\}$. Definamos a seguinte aplicação em E:

$$\|x\|_s = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_s = \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Observe que $(\| \cdot \|_s, E)$ é um espaço normado. Sendo $\| \cdot \|$ uma norma qualquer em E, como $\dim E = n$ segue que as normas $\| \cdot \|_s$ e $\| \cdot \|$ são equivalentes, ou melhor, existem c_1, c_2 tais que

$$c_1\|x\| \leq \|x\|_s \leq c_2\|x\| \quad \text{para todo } x \in E,$$

donde segue que

$$\|\varphi(x)\| \leq Mc_2\|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Provando assim que φ é contínua. □

Em dimensão infinita existem operadores lineares descontínuos, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 16. *Denotemos por $P[0,1]$ o espaço de todas as funções polinomiais definidas no intervalo $[0,1]$. Claro que $P[0,1] \subset C[0,1]$, mas $P[0,1]$ não é um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_\infty$, pois o Teorema de Weierstrass garante que o conjunto dos polinômios é denso em $C[0,1]$. Consideremos o operador derivação, definido por*

$$T : P[0,1] \longrightarrow P[0,1], \ \textit{dado por } T(f) = f'.$$

A linearidade de T segue das propriedades de derivação. Se T fosse contínuo, então existiria $c > 0$ tal que $\|T(f)\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$ para todo $f \in P[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função polinomial $f_n(t) = t^n$, então

$$\|T(f_n)\|_\infty = n \leq c\|f_n\|_\infty = c \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo pois $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, portanto T é descontínuo.

A descontinuidade de operadores lineares não se resumem a apenas exemplos particulares, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 9. *Para todo espaço normado de dimensão infinita E e todo espaço normado $F \neq \{0\}$, existe um operador linear descontínuo $T : F \longrightarrow E$.*

Demonstração. De fato, seja B uma base de Hamel para E e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência qualquer em B. Defina $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e tome y um vetor não nulo em F. Considere o operador linear $T : E \longrightarrow F$ dado por

$$T(x) = \begin{cases} n\|x_n\|\|y\|, \text{ se } x = x_n, \\ 0, \text{ se } x \in B \backslash A. \end{cases}$$

Não é necessário definir a aplicação em todo o espaço E, pois para operadores lineares é suficiente apenas que esteja definido em uma base de Hamel, consulte por exemplo [4]. Note que T não é contínuo, pois

$$\|T(x_n)\| = n\|y\|\|x_n\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 17. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma base de Hamel em E. Para cada $1 \leq j \leq n$ as aplicações lineares*

$$\pi_j : E \longrightarrow \mathbb{K},\ \pi_j(x) = \pi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \alpha_i.$$

são chamadas projeções ou funcionais coordenados. Como E tem dimensão finita, então todas as projeções relativas a base B são contínuas.

Quando E é um espaço vetorial de dimensão infinita, definimos os funcionais coordenados $f_b : E \longrightarrow \mathbb{R}$ relativos a uma base de Hamel B como sendo aqueles que associam a cada ponto $x \in E$ sua coordenada na base de Hamel.

O próximo teorema nos diz que em todo espaço de Banach de dimensão infinita não existe nenhuma base de Hamel que torne todos os funcionais coordenados contínuos.

Teorema 11. *Seja B uma base de um espaço de Banach de dimensão infinita. Seja $f_b, b \in B$ os funcionais coordenados. Então existem somente um número finito de funcionais coordenados contínuos.*

Demonstração. Suponhamos que $b_i : i \in \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito de B tal que f_{b_i} é contínuo. Como E é um espaço de Banach, então a série

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{b_i}{\|b_i\|}$$

é convergente por ser absolutamente convergente. Tome $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{b_i}{\|b_i\|}$. Como f_{b_k} é contínuo para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_n \longrightarrow x$, então

$$f_{b_k}(x) = \lim_{n \to \infty} f_{b_k}(x_n) = \frac{1}{2^k}.$$

Assim, o vetor x possui infinitas coordenadas não nulas, contradizendo o fato de B ser uma base de Hamel. $\square$

4. OS PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

Stefan Banach (30/03/1892 - 31/08/1945) foi um matemático polonês e, atualmente, é considerado um dos matemáticos mais importantes e influentes dos séculos XX e XXI. Em 1932, com a publicação do livro "Théorie des opérations linéaires", Banach torna-se um dos fundadores de uma nova teoria: Análise Funcional. Os princípios básicos da Análise Funcional são os teoremas de Banach-Schauder (Teorema da Aplicação Aberta), Banach-Steinhaus (Princípio da Limitação Uniforme) e Hahn-Banach, resultados que marcam o nascimento da teoria e são fundamentais para o seu desenvolvimento. Estes resultados são, ainda hoje, utilizados como ferramentas para a obtenção de resultados em pesquisas de alto nível.

4.1 Princípio da Limitação Uniforme

Teorema 12 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam E um espaço de Banach F um espaço normado e $(T_i)_{i\in l}$ uma família de operadores lineares contínuos em $\mathcal{L}(E,F)$ limitados pontualmente, isto é, para cada $x \in E$ existe $c = c(x)$ tal que*

$$\sup_{i\in I}\|T_i(x)\| < c,$$

então $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Com efeito, as aplicações $\|\cdot\|_F : F \longrightarrow \mathbb{R}$ e $T_i : E \longrightarrow F$ são contínuas para todo para todo $i \in I$ e portanto a composta $\|\cdot\|_F \circ T_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua, daí segue que o conjunto

$$(\|\cdot\|_F \circ T_i)^{-1}([0,n]) = \{x \in E : \|T_i(x)\| \in [0,n]\} = \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado para todo $i \in I$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ (por ser imagem inversa de um conjunto fechado por uma aplicação contínua). Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$A_n := \{x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}.$$

A igualdade acima é imediata e ainda A_n é fechado por ser interseção de uma família de conjuntos fechados. Além disso, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e pelo Teorema 5 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tenha interior não vazio. Seja $a \in \operatorname{int}(A_{n_0})$, então existe $r > 0$ tal que $\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subset \operatorname{int}(A_{n_0})$. O nosso objetivo é exibir uma cota superior para o conjunto $\{\|T_i(y)\| : y \in B_E\}$ para todo $i \in I$, para isso note que $x = a + ry \in A_{n_0}$ sempre que $y \in B_E$. Assim

$$\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq 2n_0$$

para todo $i \in I$. Finalmente, concluímos que $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < \infty$. $\square$

Veremos a seguir que a hipótese de E ser um espaço de Banach no teorema anterior é essencial.

Exemplo 18. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional*

$$\varphi_n : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \varphi_n\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = na_n.$$

É claro que φ_n é linear para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuidade segue, observando que,

$$|\varphi_n\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right)| = |na_n| \leq n \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}$$

para todos $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset (c_{00})'$ e ainda

$$\|\varphi_n\| = \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0} \frac{|\varphi_n((a_j)_{j=1}^{\infty})|}{\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|} = \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0} \frac{|na_n|}{\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}} \leq n.$$

Além disso,

$$n = |\varphi_n(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)| \leq \sup\{|\varphi_n(a_j)_{j=1}^{\infty}| : \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\| \leq 1\} = \|\varphi_n\|.$$

Logo $\|\varphi_n\| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset c_{00}$ então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0$ para todo $j \geq j_0$, logo $\varphi_n\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = 0$ sempre que $n \geq j_0$. Assim, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x)| < \infty$ para todo $x \in c_{00}$, porém $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| = \infty$.

4.1.1 Aplicações

Convergência pontual de operadores lineares contínuos

Sabemos que se uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limite uniforme de uma sequência de funções contínuas $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua. Retirando a hipótese de uniformidade, não temos essa garantia, por exemplo, a sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge pontualmente para a função descontínua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ 1, \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

Veremos a seguir que no contexto dos operadores lineares contínuos, a convergência pontual é suficiente.

Corolário 6. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores lineares contínuos pontualmente convergentes, isto é $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo $x \in E$. Se definirmos*

$$T : E \longrightarrow F, \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração. A linearidade de T segue das propriedades de limites. Para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente e, portanto, limitada. Assim, existe $c > 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme existe $k > 0$ de modo que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| \leq k$. Segue então que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq k\|x\|$$

para todo $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in E$, mostrando assim a continuidade de T. $\square$

Operadores bilineares separadamente contínuos

Definição 15. *Sejam E, F e G espaços normados. Um operador $B : E \times F \longrightarrow G$ é dito bilinear quando for linear em cada entrada, isto é, quando, para quaisquer $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ e todo escalar α, valem as seguintes propriedades:*

1. *$B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$;*

2. *$B(x, \alpha y_2) = \alpha B(x, y_2)$;*

3. *$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$;*

4. $B(\alpha x_1, y) = \alpha B(x_1, y)$.

Sendo E, F espaços normados, as expressões

1. $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$

2. $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

3. $\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$

definem normas equivalentes no produto cartesiano $E \times F$. Pode-se provar que se E e F são espaços de Banach então $E \times F$ é um espaço de Banach em qualquer uma das normas definidas acima.

Exemplo 19. *Sejam E, F e G espaços normados. A composição*

$$\varphi : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G), \text{ dada por } \varphi(f,g) = g \circ f$$

é uma forma bilinear. Com efeito, fixando $h \in \mathcal{L}(E,F)$, temos

$$((f+g) \circ h)(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$

para todos $f, g \in \mathcal{L}(F,G)$ e todo $x \in E$, assim

$$\varphi(h, f+g) = \varphi(h,f) + \varphi(h,g).$$

Sendo $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$(\alpha f \circ h)(x) = (\alpha f(h(x)) = \alpha f(h(x)) = \alpha(f \circ h)(x)$$

para todo $x \in E$, isto é,

$$\varphi(h, \alpha f) = \alpha \varphi(h,f).$$

De modo análogo mostra-se a linearidade em relação a primeira variável.

As formas bilineares podem ser interpretadas como "produto" entre vetores de E e F em que o resultado é um vetor de G. O próximo teorema nos mostra que formas bilineares contínuas possuem propriedades semelhantes àquelas dos operadores lineares contínuos.

Proposição 10. *Sejam E, F, G espaços normados e $B : E \times F \longrightarrow G$ uma forma bilinear, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *B é contínua;*

2. *B é contínua na origem;*

3. *T é contínua;*

4. $\sup\{\|B(x,y)\| : x \in B_E \text{ e } y \in B_F\} < \infty$;

5. Existe $c > 0$ *tal que* $\|B(x,y)\| \leq c\|x\|\|y\|$ *para todo* $x \in E$ *e* $y \in F$.

A prova do resultado acima é idêntica a feita no Teorema 9 por isso será omitida.

Definição 16. *Sejam* E, F *e* G *espaços normados. Uma forma bilinear* $B : E \times F \longrightarrow G$ *é dita separadamente contínua quando as aplicações lineares* $B(x,\cdot) : F \longrightarrow G$, $B(\cdot, y) : E \longrightarrow F$ *forem contínuas para todo* $x \in E$ *e* $y \in F$.

Exemplo 20. *Seja* $E = (C[0,\pi], \|\cdot\|_1)$, *em que* $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^\pi |f(t)|dt$. *A aplicação*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } \varphi(f,g) = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

é uma forma bilinear separadamente contínua, mas não é contínua. As propriedades de integração nos garantem que φ *é bilinear. Sendo* $f \in E$, *temos*

$$\|\varphi(f,g)\|_1 = \left|\int_0^\pi f(t)g(t)dt\right| \leq \int_0^\pi |f(t)g(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^\pi |g(t)|dt = \|f\|_\infty \|g\|_1$$

para todo $g \in E$. *O Teorema 9 nos garante a continuidade de* φ *em relação a segunda variável. De modo análogo, mostra-se a continuidade em relação a primeira variável. Provaremos que* φ *não é continua. Com efeito, a sequência definida abaixo*

$$f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(nt), & \text{se } t \in 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{n} \\ 0, & \text{se } t \in \dfrac{\pi}{n} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

é contínua em $[0,\pi]$ *e* $\|f_n\|_1 = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *assim* $f_n \longrightarrow 0$, *entretanto*

$$\varphi(f_n, f_n) = \int_0^\pi f_n(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *portanto* φ *não é contínua.*

O próximo resultado nos garante que, em espaços de Banach, formas bilineares separadamente contínuas são sempre contínuas.

Proposição 11. *Sejam* E, F *e* G *espaços normados,* F *completo e* $B : E \times F \longrightarrow G$ *uma forma bilinear. Se* B *é separadamente contínua, então* $B : E \times F \longrightarrow G$ *é contínuo.*

Demonstração. Por hipótese, $B(\cdot, y)$ é linear e contínuo para cada $y \in F$. Logo, para todo $x \in E$, com $\|x\| \leq 1$, temos

$$\|B(x,y)\| \leq \|x\|\|B(\cdot,y)\| \leq \|B(\cdot,y)\| = C_y.$$

Assim, a família $\mathcal{F} = \{B(x,\cdot) : x \in B_E\} \subset \mathcal{L}(F,G)$ é pontualmente limitada e F é um espaço de Banach e, portanto, pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe uma constante C tal que

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|B(x,\cdot)\| = \sup_{\|x\|\le 1}\sup_{\|y\|\le 1} \|B(x,y)\| < C.$$

A continuidade de B é imediata se $(x,0) \in E\times F$ ou $(0,y) \in E \times F$, então sejam $x \in E$ e $y \in F$, ambos não nulos, daí

$$\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} = \left\| B\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le C,$$

donde segue que $\|B(x,y)\| \le C\|x\|\|y\|$ para todos $x \in E$ e $y \in F$. Pela Proposição 10 concluímos que B é contínuo. $\square$

Esse resultado juntamente com o Exemplo 20 nos diz que $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ não é um espaço de Banach.

Apresentamos na Definição 15 os operadores bilineares e vimos algumas de suas propriedades. Mais geralmente, podemos dar a seguinte definição: sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F espaços normados, uma aplicação $\varphi : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é dita n-linear quando for linear em cada entrada. Diversos resultados relacionados a operadores lineares e bilineares podem ser, de certa forma, generalizados para operadores n-lineares. Para mais detalhas sobre essas aplicações, veja, por exemplo, [8, 11].

4.2 Teorema da Aplicação Aberta

Proposição 12. *Seja E um espaço De Banach, F um espaço normado e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Se existirem $R, r > 0$ tais que $B_F(0;r) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;R)\right)}$, então $B_F(0;\frac{r}{2}) \subseteq T\left(B(0;R)\right)$.*

Demonstração. Mostraremos que para todo $a > 0$ vale

$$B_F(0,ar) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;aR)\right)}.$$

Com efeito, dado $y \in B_F(0,ar)$ segue de imediato que $\dfrac{y}{a} \in B_F(0,r)$. Por hipótese existe uma sequência $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em que $x_n \in B_E(0,R)$ tal que $T(x_n) \longrightarrow \dfrac{y}{a}$. Usando esse fato e a linearidade de T conclui-se que $y \in \overline{T\left(B_E(0;aR)\right)}$. Seja $y \in B_F(0,\frac{r}{2})$. Pelo que acabamos de provar, existe $x_1 \in B_E(0;\frac{R}{2})$ tal que $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}$, isto é $y - T(x_1) \in B_F(0,\frac{r}{4})$, donde segue que existe $x_2 \in B_E(0,\frac{R}{4})$ tal que $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{8}$. Como esse fato vale para todo $a > 0$ podemos continuar com esse procedimento indefinidamente construindo assim uma sequência $(x_n) \subset E$ tal que $x_n \in B(0, \frac{R}{2^n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também

$$\|y - T(x_1) - T(x_2) - T(x_3) - \cdots - T(x_n)\| < \frac{2}{2^{n+1}} \tag{4.1}$$

Como $\|x_n\| < \dfrac{R}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente, em particular de Cauchy, logo

$$\Big\| \sum_{j=n}^{m} x_j \Big\| \leq \sum_{j=n}^{m} \|x_j\| \longrightarrow 0 \text{ quando } m > n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, a sequência $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Como E é um espaço de Banach, existe $x \in E$ para o qual essa sequência converge. Vamos mostrar que $x \in B_E(0; R)$ e $y = T(x)$. Para isso note que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \Big\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \\ &< \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \leq \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{2^n} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R \end{aligned}$$

e, portanto, $x \in B_E(0, R)$. Por (4.1) temos

$$\begin{aligned} \|y - T(x)\| &= \left\| y - T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j\right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| y - \sum_{j=1}^{n} T(x_j) \Big\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{r}{2^{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

donde finalmente concluímos que $y = T(x)$ em que $x \in B_E(0; R)$ e o resultado está provado. □

Definição 17. *Seja E um espaço normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito convexo se dados $x, y \in A$, o conjunto*

$$[x, y] := \{xt + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$$

estiver inteiramente contido em A.

Exemplo 21. *O conjunto $B_E(0; r) = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$, chamado de bola fechada centrada na origem de raio $r > 0$ é convexo. De fato, sejam $x, y \in B_E(0; r)$, então*

$$\begin{aligned} \|xt + (1-t)y\| &\leq \|x\|t + (1-t)\|y\| \\ &\leq rt + (1-t)r = r \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$.

Proposição 13. *O fecho de um conjunto convexo é convexo.*

Demonstração. Seja A um subconjunto convexo do espaço normado E. Para cada $x, y \in \overline{A}$ existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Assim,

$$x_n t - (1-t)y_n \longrightarrow xt - (1-t)y.$$

Como A é convexo, para todo $t \in [0,1]$ a sequência $(x_n t - (1-t)y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ e, portanto, $xt - (1-t)y \in \overline{A}$. $\square$

A seguir apresentamos o principal teorema dessa seção, o qual nos garante que todo operador linear contínuo sobrejetor definido em espaços de Banach é uma aplicação aberta, isto é, a imagem de qualquer aberto por esse operador é um conjunto aberto.

Teorema 13 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Observe inicialmente que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0;n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \|x\| < n\}$. Da sobrejetividade de T temos

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0;n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0;n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0;n))}.$$

Pelo Teorema 5 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_E(0;n_0))}$ tem interior não-vazio. Logo existem $b \in F$ e $r > 0$ tais que $B_F(b;r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$. Além disso, observe que

$$\overline{T(B_E(0,n_0))} = -\overline{T(B_E(0,n_0))}.$$

De fato, dado $x \in \overline{T(B_E(0,n_0))}$, existe uma sequência $T(x_n) \subset T(B_E(0,n_0)$ tal que $T(x_n) \longrightarrow x$. Em particular, se $x_n \in B_E(0,n_0)$, então $-x_n \in B_E(0;n_0)$. Assim, $(-x_n) \subset B_E(0;n_0)$ e $-T(-x_n) = T(x_n) \longrightarrow x$ e, portanto, $x \in -\overline{T(B_E(0,n_0))}$. A inclusão contrária é obtida de maneira análoga. Logo

$$B_F(-b;r) = -B_F(b;r) \subseteq -\overline{T(B_E(0,n_0))} = \overline{T(B_E(0,n_0))}.$$

A igualdade $x = \frac{1}{2}(b+x) + \frac{1}{2}(-b+x)$ nos diz que

$$\begin{aligned} B_F(0;r) &\subseteq \frac{1}{2}B_F(b;r) + \frac{1}{2}B_F(-b;r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0,n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0,n_0))}. \end{aligned}$$

Sendo T contínuo, então $T(B_E(0,n_0))$ é convexo e, pela Proposição 13, $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ é convexo. Portanto,

$$B_F(0;r) \subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0,n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0,n_0))} = \overline{T(B_E(0,n_0))}.$$

Pela Proposição 12 temos que $B_F(0;\frac{r}{2}) \subseteq T(B_E(0,n_0)$. Provemos que $B_F(0;c\frac{r}{2}) \in T(B_E(0,cn_0))$ para todo real positivo c. Com efeito, dado $y \in B_F(0;c\frac{r}{2})$, então $\frac{y}{c} \in B_F(0;\frac{r}{2}) \subseteq T(B_E(0,n_0)$, ou seja, existe $x \in B_E(0,n_0)$ de modo que $T(x) = \frac{y}{c}$, daí $T(cx) = y$ e $cx \in B_E(0,cn_0)$. Provando assim a afirmação. Vejamos agora que

$$B_F\left(T(x);c\frac{r}{2}\right) \subseteq T(B_E(x;cn_0))$$

para todo $x \in E$ e todo $c > 0$. De fato, como $B_E(x,cn_0) = x + B_E(0,cn_0)$, segue que

$$\begin{aligned} T(B_E(x;cn_0)) &= T(x + B_E(0,cn_0)) = T(x) + T(B_E(0,cn_0)) \\ &\supseteq T(x) + B_F\left(0;c\frac{r}{2}\right) \\ &= B_F\left(T(x);c\frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

Por fim, veremos que T é uma aplicação aberta. Para isso considere U um aberto em E. Sejam $x \in E$ e $c > 0$ tais que $B_E(x,cn_0) \subseteq U$. Já vimos que $T(U) \supseteq T(B_E(x,cn_0)) \supseteq B_F(T(x;c\frac{r}{2}))$, o que mostra que existe uma bola centrada em $T(x)$ inteiramente contida em $T(U)$. Provamos, portanto, que $T(U)$ é um aberto em F. □

Um corolário importante do Teorema da Aplicação Aberta nos garante que toda bijeção contínua entre espaços de Banach é um isomorfismo. Para a demonstração desse fato primeiramente relembremos que uma aplicação $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ é contínua se $T^{-1}(A) := \{x \in E : T(x) \in A\}$ é um subconjunto aberto em E para todo aberto $A \subseteq F$.

Corolário 7. *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo e bijetor, então T é um isomorfismo.*

Demonstração. Segue do Teorema anterior que T é uma aplicação aberta. Sendo $A \subseteq E$ um conjunto aberto, então $T(A)$ é aberto e assim

$$\left(T^{-1}\right)^{-1}(A) = \{x \in F : T^{-1}(x) \in A\} = T(A),$$

onde a última igualdade resulta do fato de T ser bijetora. Portanto T^{-1} é contínua. □

Corolário 8. *Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um espaço vetorial E tais que $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(E, \|\cdot\|_2)$ são espaços de Banach. Se existe $c > 0$ tal que*

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \text{ para todo } x \in E,$$

então as duas normas são equivalentes.

Demonstração. Considere o operador identidade

$$\varphi : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1), \text{ dada por } \varphi(x) = x.$$

Por hipótese temos que $\|\varphi(x)\|_1 \leq c\|x\|_2$ para todo $x \in E$. Sendo E um espaço de Banach nas duas normas, temos pelo Corolário 7 que φ^{-1} é contínua, ou melhor, existe $a > 0$ tal que

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Logo as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes. □

A seguir veremos que hipótese dos espaços E e F serem espaços de Banach no Corolário 7 é essencial.

Exemplo 22. *Considere o operador*

$$T : c_{00} \longrightarrow c_{00}, \;\; T(a_1, a_2, a_3, \dots) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right).$$

Não é difícil ver que T é linear. Provemos que T é injetiva. Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ tais que

$$T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = T((b_n)_{n=1}^{\infty}),$$

isto é,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{b_n}{n}, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

resultando assim que $a_n = b_n$ para todo $\in \mathbb{N}$, ou seja, T é injetora. Sendo $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$, tomando a sequência $x = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, então $x \in c_{00}$ e $T(x) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, assim T é bijetiva. Além disso,

$$\|T(a_1, a_2, a_2, \dots)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|a_1|, \left|\frac{a_2}{2}\right|, \left|\frac{a_3}{3}\right|, \dots\right\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Logo, T é contínuo. Entretanto, a inversa de T é dada por $T^{-1}((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ e sendo e_n os vetores canônicos de c_{00}, temos $\|T^{-1}(e_n)\|_{\infty} = \|(0,0,0,\dots,n,\dots)\|_{\infty} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, provando assim que T^{-1} não é contínuo.

4.2.1 Aplicações

O Teorema do Gráfico Fechado

Nessa seção apresentamos um dos principais resultados da Análise Funcional, conhecido como Teorema do Gráfico Fechado.

Funções contínuas definidas em espaços normados podem ser caracterizadas sequencialmente, isto é, uma função $T : E \longrightarrow F$ é dita contínua no ponto $x \in E$ quando, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E com $x_n \longrightarrow x$, a sequência $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$ for convergente com $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. O Teorema do Gráfico Fechado nos diz que se $T : E \longrightarrow F$ é linear e está definida entre espaços de Banach, então para garantir a continuidade de T é suficiente provar que, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E com $x_n \longrightarrow x$ e $T(x_n) \longrightarrow y \in F$, tem-se $y = T(x)$, sem se preocupar com a convergência da sequência $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definição 18. *Sejam E e F espaços normados. Uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é dita fechada quando, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \longrightarrow x \in E$ e $T(x_n) \longrightarrow y \in F$, tem-se $y = T(x)$.*

Definição 19. *Sejam E, F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é definido por*

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Resulta da linearidade de T que $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Após a definição 15 comentamos que é possível definir algumas normas no produto cartesiano dos espaços normados $E \times F$. Por conveniência, usaremos, a partir de agora, a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \text{ para todo } (x, y) \in E \times F.$$

A Definição 18 é equivalente a dizer que o gráfico de T é um conjunto fechado, isto é, um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é fechado quando seu gráfico for fechado.

Teorema 14 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. A implicação T contínuo $\Longrightarrow G(T)$ fechado é válida em espaços normados não necessariamente completos. Com efeito, seja (x_n) uma sequência em E com $x_n \longrightarrow x \in E$ e $T(x_n) \longrightarrow z \in F$. Da continuidade de T e unicidade do limite, temos $T(x_n) \longrightarrow T(x) = z$, o que prova que $G(T)$ é fechado.

Supondo que $G(T)$ é um subespaço fechado. Como por hipótese E e F são espaços de Banach segue que $E \times F$ é um espaço de Banach. Então, pela Proposição 1, $G(T)$ também é um espaço de Banach. A função

$$\pi : G(T) \longrightarrow E, \;\; \pi\,(x, T(x)) = x$$

é linear, pois

$$\begin{aligned}\pi(x,T(x))+\pi(y,T(y)) &= \pi\left(x+y,T(x)+T(y)\right)\\ &= \pi(x+y,T(x+y))\\ &= x+y\\ &= \pi(x,T(x))+\pi(y,T(y))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi(\alpha x,\alpha T(x)) &= \pi(\alpha x,T(\alpha x))\\ &= \alpha x\\ &= \alpha T(x,T(x))\end{aligned}$$

para todo $x,y\in E$ e $\alpha\in\mathbb{K}$.

Observe ainda que π é bijetora. Além disso, como

$$\|\pi\left(x,T(x)\right)\|_E=\|x\|_E\leq\|x\|_E+\|T(x)\|_F=\|(x,T(x))\|_{E\times F},$$

segue que π é contínua. Assim, sendo E e $G(T)$ espaços de Banach, resulta do Teorema da Aplicação Aberta que π é um isomorfismo, ou ainda, existe $c>0$ tal que

$$\|\pi^{-1}(x)\|=\|(x,T(x))\|_{E\times F}\leq c\|x\|$$

para todo $x\in E$. Logo,

$$\|T(x)\|\leq\|T(x)\|+\|x\|=\|(x,T(x))\|_{E\times F}\leq c\|x\|$$

para todo $x\in E$. Portanto T é contínuo. □

Denotaremos por $C^1[a,b]$ o espaço de todas as funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$, isto é,

$$C^1[a,b]=\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}: f \text{ é diferenciável e } f'\in C[a,b]\}\subset C[a,b].$$

Exemplo 23. *Considere o Operador Derivação*

$$T:\left(C^1[a,b],\|\cdot\|_\infty\right)\longrightarrow(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)\ \textit{dada por}\ T(f)=f'.$$

Vimos no Exemplo 16 que T é linear e descontínuo. Contudo, este operador tem gráfico fechado. De fato, se $\varphi_n\longrightarrow\varphi$ e $\varphi_n'\longrightarrow f$ convergem uniformemente, pelo Teorema

Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(0) = \int_0^x \varphi_n'(t)dt$$

para todo $x \in [0, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x \varphi_n'(t)dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} \varphi_n'(t)dt = \int_0^x f(t)dt,$$

donde segue que $\varphi \in C^1[0, \pi]$ e que $\varphi' = f$, isto é, $G(T)$ é fechado.

Desse Exemplo e do Teorema do Gráfico Fechado resulta que o espaço $C^1[a, b]$ quando munido com a norma induzida por $C[a, b]$ não é completo. Sendo $f \in C^1[a, b]$, segue que f' é limitada e, portanto, a aplicação

$$\|f\|_{C_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

está bem definida e torna $C^1[a, b]$ um espaço de Banach. Mais geralmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ o espaço

$$C^k[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável e } f' \in C^{k-1}[a, b]\}$$

é completo quando munido com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty,$$

em que $f^{(k)}$ é a k-ésima derivada de f.

Proposição 14. *Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em um espaço de Banach E com a seguinte propriedade $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)_{n=1}^\infty| < \infty$ para todo $\varphi \in E^*$. Então $\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)_{n=1}^\infty| < \infty$.*

Demonstração. Por hipótese, a aplicação

$$T : E^* \longrightarrow \ell_1, \text{ dada por } T(\varphi) = \varphi(x_n)_{n=1}^\infty$$

é linear e está bem definida. Provaremos que T é contínuo. Sendo E^* e ℓ_1 espaços de Banach, pelo Teorema 14 é suficiente provarmos que T é fechado. Suponha que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em E^* e que $T(\varphi_n) = \varphi_n(x_j)_{j=1}^\infty \longrightarrow (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$. Pela desigualdade

$$|\varphi_n(x_j) - y_j| \leq \|\varphi_n(x_j)_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_1,$$

temos que $\varphi_n(x_j) \longrightarrow y_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Além disso, a sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente, em particular converge pontualmente, logo $\varphi_n(x_j) \longrightarrow \varphi(x_j)$. Portanto,

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} = \varphi(x_j)_{j=1}^{\infty} = T(\varphi).$$

Concluímos assim que T é contínuo e, finalmente, pelo item 6 do Teorema 9,

$$\sup\{\|T(\varphi)\|_1 : \|\varphi\| \leq 1\} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty.$$

□

4.3 Teoremas de Hahn-Banach

4.3.1 O Teorema da Extensão de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados da Análise Funcional,

Proposição 15. *Seja E um espaço normado, F um espaço de Banach e G um subespaço de E. Se $T : G \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo, então existe um operador linear $\varphi : \overline{G} \longrightarrow F$ que estende T, isto é, $\varphi(x) = T(x)$ para todo $x \in G$ e $\|T\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Para cada $x \in \overline{G}$ existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em G tal que $x_n \longrightarrow x$. Em particular a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Sendo T contínuo, então $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach F, logo existe $z \in F$ tal que $T(x_n) \longrightarrow z$. Essas informações nos induzem a definir a função

$$\varphi : \overline{G} \longrightarrow F, \;\; \varphi(x) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = z \in F, \tag{4.2}$$

em que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é qualquer sequência em G que converge para x. Primeiramente vamos verificar que φ está bem definida. Sejam $x \in \overline{G}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em G tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow x$. Então existem z_1 e z_2 tais que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = z_1$ e $\lim_{n\to\infty} T(y_n) = z_2$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\| &= \|z_1 - T(x_n) + T(x_n) - T(y_n) - z_2 + T(y_n)\| \\ &\leq \|z_1 - T(x_n)\| + \|T(x_n - y_n)\| + \|z_2 - T(y_n)\|. \end{aligned}$$

Pela continuidade de T temos $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$, daí

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - T(x_n)\| + c\|x_n - y_n\| + \|z_2 - T(y_n)\|.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ segue que $z_1 = z_2$. Logo a função em (4.2) está bem definida.

A linearidade de φ segue da linearidade de T e das propriedades de limite.

Além disso, φ é contínua, pois

$$\|\varphi(x)\| = \left\| \lim_{n\to\infty} T(x_n) \right\| \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T\|\|x\| \tag{4.3}$$

para todo $x \in \overline{G}$. Dado $x \in G$, tome a sequência constante igual a x. Então $x_n \longrightarrow x$ e resulta da continuidade de T que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$, portanto $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$. Assim φ estende T.

Por fim, veremos que $\|\varphi\| = \|T\|$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em G tal que $x_n \longrightarrow x$. Por (4.3) temos

$$\|\varphi\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} =\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T\|\|x\|}{\|x\|} = \|T\|.$$

Como

$$\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in B_G \right\} \subseteq \left\{ \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} : x \in B_{\overline{G}} \right\},$$

então $\|T\| \leq \|\varphi\|$ e assim concluímos que $\|T\| = \|\varphi\|$. □

Teorema 15 (Teorema de Hahn-Banach - Caso real)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$\begin{cases} p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E. \end{cases}$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ e $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Considere a seguinte família $\mathcal{F}$ de funcionais lineares definidos em subespaços de E que contém G:

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \phi : D(\phi) \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é um subespaço de } E, \\ \phi \text{ linear}, G \subseteq D(\phi), \phi(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in G, \\ \phi(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\phi). \end{cases}$$

O nosso objetivo é mostrar que existe $\phi \in \mathcal{F}$ tal que $D(\phi) = E$. Note que $\mathcal{F}$ é não vazio pois $\varphi \in \mathcal{F}$. Defina a seguinte relação

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Longleftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2), \text{ e}$$

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) \text{ para todo } x \in D(\phi_1).$$

Não é dificil ver que $(\mathcal{F}, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ possui cota superior. Com efeito, seja $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$ um subconjunto totalmente ordenado. Defina $\phi : D(\phi) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\phi) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{P}} D(\theta) \text{ e } \phi(x) = \theta(x) \text{ se } x \in D(\theta).$$

Afirmamos que $D(\phi)$ é um subespaço de E. Com efeito, dados $x, y \in D(\phi)$, então existem $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{P}$ tais que $x \in D(\theta_1)$ e $y \in D(\theta_2)$. Sendo $\mathcal{P}$ totalmente ordenado temos $\phi_1 \leq \phi_2$ ou $\phi_2 \leq \phi_1$. Suponha que $\phi_1 \leq \phi_2$, isto é, $D(\theta_1) \subseteq D(\theta_2)$, logo $x \in D(\theta_2)$ e portanto $x + y \in D(\theta_2) \subseteq D(\phi)$. Usando argumentos semelhantes mostra-se que $\phi \in \mathcal{F}$ e como ϕ estende todos os funcionais de $\mathcal{P}$ e seu domínio contém todos os domínios desses funcionais, segue que ϕ é uma cota superior de $\mathcal{P}$. O Lema de Zorn nos garante que $\mathcal{F}$ admite um elemento maximal, que será denotado por $\tilde{\varphi}$. Vamos provar que $D(\tilde{\varphi}) = E$. Para isso suponha que $D(\tilde{\varphi}) \neq E$. Nesse caso podemos escolher $x_o \in E - D(T\tilde{\varphi})$ e definir $\phi : D(\phi) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(x + tx_0) = \tilde{\varphi}(x) + t\alpha,$$

em que $D(\phi) = D(\tilde{\varphi}) + \text{span}\{x_0\}$ e α será escolhida posteriormente de forma conveniente. A linearidade da ϕ segue da linearidade da T. Por enquanto queremos que α satisfaça as seguintes desigualdades:

$$\begin{gathered} \phi(x) + \alpha = \phi(x + x_0) \leq p(x + x_0) \text{ para todo } x \in D(\tilde{\varphi}) \text{ e} \\ \phi(x) - \alpha = \phi(x - x_0) \leq p(x - x_0) \text{ para todo } x \in D(\tilde{\varphi}), \end{gathered}$$

ou melhor,

$$\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x).$$

É suficiente escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(T)} \{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(T)} \{p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)\}.$$

Tal escolha é sempre possível, pois para $x, y \in D(\tilde{\varphi})$ temos,

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x + y) \leq p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

e, consequentemente,

$$\tilde{\varphi}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)$$

para quaisquer $x, y \in D(\tilde{\varphi})$. Portanto, sempre existe α atendendo as duas exigências inicias, donde concluímos que: Para $t > 0$,

$$\phi(x + tx_0) = \phi\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\phi\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).$$

Para $t < 0$,

$$\phi(x + tx_0) = \phi\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\phi\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0).$$

Para $t = 0$,

$$\phi(x + tx_0) = \phi(x) = \tilde{\varphi}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Segue, portanto, que $\phi \in \mathcal{F}$, $\tilde{\varphi} \leq \phi$ e $\tilde{\varphi} \leq \phi$, o que é um absurdo pois $\tilde{\varphi}$ é um elemento maximal de $\mathcal{F}$. Portanto $D(T) = E$. $\square$

Teorema 16 (Teorema de Hahn-Banach - Caso complexo)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma, isto é,*

$$\begin{cases} p(ax) = |a|p(x) \text{ para todo } x \in E \text{ e } a \in \mathbb{K}, \\ p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para todo } x, y \in E. \end{cases}$$

Se $G \subset E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ e satisfaz $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Provemos inicialmente o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nesse caso a hipótese do teorema nos garante que $\varphi(x) \leq |\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Pelo Teorema 15 existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ e $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. É suficiente mostrar que $-\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, o que é imediato, pois

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Logo $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Façamos agora o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesse caso E é um espaço vetorial complexo e $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo e, portanto, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi(x)_2$ para todo $x \in E$, onde $\varphi_1, \varphi_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ são, respectivamente, a parte real e a parte complexa de φ. Não é difícil ver que φ_1 e φ_2 são funcionais lineares. Representaremos por $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais E e G sobre o corpo dos números reais (a justificativa para isso é que queremos usar o teorema anterior para estender o funcional linear (real) φ_1). Para cada $x \in G_{\mathbb{R}}$, temos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

O teorema anterior nos garante a existência de um funcional linear $\tilde{\varphi_1} : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_1 e $\tilde{\varphi_1} \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$. Estudaremos agora o caso em que φ_2, para todo $x \in G$, temos

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Pela igualdade entre números complexos, obtemos $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$ para todo $x \in G$. Definindo então

$$\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}, \;\; \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi_1}(x) + i\tilde{\varphi_2}(x) = \tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(x),$$

dado $x \in G$, temos

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix) = \varphi(x) - i\varphi_2(x) = \varphi(x)$$

e, portanto, $\tilde{\varphi}$ estende φ.

Vejamos que $\tilde{\varphi}$ é um funcional linear. Dados $x, y \in E$, tem-se

$$\tilde{\varphi}(x+y) = \tilde{\varphi_1}(x+y) - i\tilde{\varphi_1}(x+y) = \tilde{\varphi_1}(x) + \tilde{\varphi_1}(y) - i\tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y).$$

Dados $(a + b_i) \in \mathbb{C}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(a+b_i)(x) &= \tilde{\varphi_1}(a+b_i)(x) - ii\tilde{\varphi_1}(a+b_i) \\ &= \tilde{\varphi_1}(a) + b\tilde{\varphi_1}(ix) - i(a\tilde{\varphi_1}(ix) - b\tilde{\varphi_1}(x)) \\ &= (a+b_i)\tilde{\varphi_1}(x) - i\tilde{\varphi_1}(ix) = (a+b_i)\tilde{\varphi}(x). \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Sendo p uma seminorma, segue que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Logo se $\tilde{\varphi}$ é o funcional identicamente nulo, não há o que provar. Suponha então que exista $x \in E$ tal que $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, então podemos escrever $\tilde{\varphi}(x)$ na forma polar, isto é, existe θ tal que $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$. Segue que $|\widetilde{\varphi(x)}| = \tilde{\varphi}(x)e^{-i\theta} = \tilde{\varphi}(e^{-i\theta}x)$. Como $|\tilde{\varphi}(x)|$ é um número real, temos

$$|\tilde{\varphi}(x)| = \tilde{\varphi}(e^{-i\theta}x) = \tilde{\varphi_1}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

□

Corolário 9 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ e preserva a sua norma.*

Demonstração. Pela continuidade de φ temos $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$ para todo $x \in G$. Esse fato nos leva a definir a função $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|\varphi\|\|x\|$. É imediato que p é uma seminorma e $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Pelo Teorema 16 existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ e $|\widetilde{\varphi(x)}| \leq p(x) = \|\varphi\|\|x\|$ para todo $x \in E$, o que, em particular, garante a continuidade de $\tilde{\varphi}$. Sendo $x \neq 0$ temos $\frac{\|\widetilde{\varphi(x)}\|}{\|x\|} \leq \|\varphi\|$, donde segue que $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. A desigualdade contrária segue do fato de que $\tilde{\varphi}$ estende φ e, portanto, $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. □

Corolário 10. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E - \{0\}$ existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|\tilde{\varphi}\| = 1$ e $\tilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Consideremos a seguinte aplicação:

$$\varphi : \operatorname{span}\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{K}, \;\; \varphi(ax_0) = a\|x_0\|.$$

A linearidade e continuidade de φ são imediatas, além disso, $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ e também

$$\|\varphi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi(ax_0)|}{\|ax_0\|} = 1.$$

Assim, pelo Corolário 9 existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ e preserva sua norma. □

Corolário 11. *Sejam $E \neq \{0\}$ um espaço normado e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x)| = \max_{\varphi \in S_{E^*}} |\varphi(x)|$$

Demonstração. Pelo Corolário anterior, para cada $x \in E - \{0\}$ existe um funcional $\varphi \in S_{E^*}$ tal que $\varphi(x) = \|x\|$, daí

$$\|x\| = \varphi(x) \leq \max_{\varphi \in S_{E^*}} |\varphi(x)|.$$

A desigualdade $|\varphi(x)| \leq \|x\|\|\varphi\| = \|x\|$ é válida para todo $\varphi \in S_{E^*}$, donde segue o resultado. □

Veremos a seguir que a extensão do Teorema de Hahn-Banach como no Corolário 9 não é única.

Exemplo 24. *Seja $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. O funcional linear*

$$T : (G, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dado por } f(x, x) = x$$

possui as extensões $g(x, y) = x$ e $h(x, y) = y$, satisfazendo $\|g\| = \|h\| = \|T\|$.

Mais geralmente, se um operador linear contínuo admite duas extensões como no Corolário 9, então a aplicação possui infinitas extensões desse tipo.

Proposição 16. *Seja G um subespaço do espaço normado E e $T : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um operador linear contínuo. Se $T_1, T_2 : E \longrightarrow \mathbb{K}$ são duas extensões distintas de T que preserva sua norma, então existem infinitas extensões de T que preservam sua norma.*

Demonstração. Para cada $s \in [0, 1]$, a aplicação $T_s : E \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$T_s(x) = sT_1(x) + (1 - s)T_2(x), \;\; x \in E,$$

é linear e contínua por ser combinação de operadores lineares contínuos. Além disso, para cada $x \in G$, tem-se

$$T_s(x) = sT_1(x) + (1-s)T_2(x) = sT(x) + (1-s)T(x) = T(x).$$

Logo T_s é uma extensão linear de T e, assim, $\|T\| \leq \|T_s\|$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|T_s\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|T_s(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|sT_1(x) + (1-s)T_2(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x\neq 0}\frac{s\|T_1(x)\| + (1-s)\|T_2(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x\neq 0}\frac{s\|T(x)\| + (1-s)\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|T_s\| = \|T\|$ para cada $s \in [0,1]$. Concluímos que existem infinitas extensões de T preservando sua norma. $\square$

Proposição 17. *Seja E um espaço normado. O dual E^* separa pontos de E, isto é, dados $x, y \in E$ com $x \neq y$, então existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Demonstração. Com efeito, se $x \neq y$ então $x - y \neq 0$, assim pelo Corolário 9 existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y) = \|x - y\| \neq 0$. Portanto $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. $\square$

A proposição anterior nos garante em particular que se $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in E^*$ então $x = 0$.

Proposição 18. *Seja A um subconjunto do espaço normado E tal que $\varphi(A) = \{\varphi(x) : x \in A\}$ é limitado para todo $\varphi \in E^*$. Então A é limitado.*

Demonstração. Para cada $x \in A$, considere a aplicação

$$T_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } T_x(\varphi) = \varphi(x).$$

Claramente T_x é linear e a continuidade é garantida pois

$$|T_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| = c\|\varphi\|$$

para cada $\varphi \in E^*$. Sendo $\varphi(A)$ um conjunto limitado, então existe $c_\varphi > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq c_\varphi$ para todo $x \in A$. Logo,

$$|T_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq c_\varphi$$

para todo $x \in A$. Isto nos diz que a família dos operadores lineares contínuos $(T_x)_{x\in A}$ é pontualmente limitada, Assim pelo Princípio da Limitação Uniforme existe $c > 0$ tal que

$$\|T_x\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x)| = \|x\| \leq c$$

para todo $x \in A$. A última igualdade segue do Corolário 11. $\square$

Exemplo 25. *Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ vetores linearmente independentes do espaço normado E e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ escalares dados. Veremos que existe um funcional $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x_j) = a_j$ para todo $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

De fato, considere a aplicação

$$T : \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ dada por } \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j.$$

Pela definição de T, temos $T(x_j) = a_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Note que T é linear, pois, dados $x, y \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, digamos $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} (\beta_j + \alpha_j) x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j + \alpha_j) a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Segue que T é contínuo, pois é uma aplicação linear definida em um espaço normado de dimensão finita. Portanto, pelo Corolário 9 existe uma extensão linear e contínua $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ de T tal que $\varphi(x_j) = a_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Proposição 19. *Sejam E e F espaços normados e suponha $E \neq \{0\}$. Se $\mathcal{L}(E, F)$ é completo, então F é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Sendo $E \neq \{0\}$, existe $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$. Pelo Corolário 10 existe um funcional $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = 1$. Considere a sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}(E, F)$ dada por $T_n(x) = \varphi(x) x_n, x \in E$. Afirmamos que a sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. De fato, note que

$$\|\left(T_n - T_m\right)(x)\| = \|\varphi(x)\left(x_n - x_m\right)\| = |\varphi(x)| \|x_n - x_m\| \leq \|x\| \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0.$$

Sendo $\mathcal{L}(E, F)$ um espaço de Banach, existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T_n \longrightarrow T$. Como

$$\|x_n - T(x_0)\| = \|T_n(x_0) - T(x_0)\| \leq \|T_n - T\| \|x_0\| \longrightarrow 0,$$

segue que $x_n \longrightarrow T(x_0) \in F$, mostrando que F é completo. $\square$

4.3.2 Subespaços Complementados

Vimos, na seção anterior que o Teorema de Hahn-Banach, em uma de sua consequências, dá condições para que um funcional linear contínuo definido em um subespaço de um espaço normado possa ser estendido continuamente para o espaço todo. É natural imaginar se esse resultado é válido para operadores lineares contínuos em geral. Mais precisamente, sendo E, F espaços normados e G um subespaço de E, se $T \in \mathcal{L}(G, F)$, então existe um $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ que estende T e preserva sua norma? quando G for subespaço denso de E, a Proposição 15 nos garante que tal extensão é sempre possível.

Definição 20. *Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \longrightarrow E$ é dito projeção se $P^2 = P \circ P = P$.*

Proposição 20. *Seja F um subespaço do espaço de Banach E. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. *Existe uma projeção $P : E \longrightarrow E$ tal que $P(E) = F$. Neste caso dizemos que P é uma projeção de E sobre F.*

2. *F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$.*

Neste caso, $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ e $G = \ker(P)$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) Vejamos primeiro que $F = \{x \in E : P(x) = x\}$. Dado $x \in F$, então existe $y \in E$ tal que $P(y) = x$, donde segue que $P(x) = P(P(y)) = P(y) = x$. Se x é um ponto fixo de P, então $x \in \mathrm{Im}(P) = F$, provando assim a igualdade. Veremos que F é fechado. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F com $x_n \longrightarrow x \in E$. Sendo P contínuo resulta que $P(x_n) = x_n \longrightarrow P(x)$, portanto $P(x) = x$.

Tome agora $G = \ker(P)$. Analogamente ao que foi feito no parágrafo anterior, vê-se que G é um subespaço fechado de E. Dado $x \in E$, então $x - P(x) \in G$, pois $P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = 0$ e $P(x) \in F$. Assim, $x = (x - P(x)) + P(x)$, isto é, $E = F + G$. Se $x \in F \cap G$, então $x = P(x)$ e $P(x) = 0$, logo $x = 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Para cada $x \in E$, existem únicos $x_1 \in F$ e $x_2 \in G$ tais que $x = x_1 + x_2$, assim o operador

$$P : E \longrightarrow E, \text{ dada por } P(x) = P(x_1 + x_2) = x_1,$$

está bem definido. Note que P é linear e $P^2(x) = P^2(x_1 + x_2) = P(x_1) = x_1 = P(x)$, $\mathrm{Im}(P) = F$. Resta provar que P é contínuo. Pelo Teorema do Gráfico Fechado é suficiente que $G(P)$ seja fechado. Com efeito, sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $x_n \longrightarrow x \in E$ e $P(x_n) \longrightarrow y \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n = y_n + z_n$ em que $y_n \in F$ e $z_n \in G$. Então, $z_n = x_n - y_n = x_n - p(x_n) \longrightarrow x - y$. Sendo G fechado, então $x - y \in G$

e, portanto, $P(x) = P(y)$. Além disso, $y_n = P(x_n) \longrightarrow y$. Como F é fechado, $y \in F$ e assim $y = P(y) = P(x)$, provando que P é contínuo. $\square$

Definição 21. *Um subespaço F do espaço de Banach E é complementado se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 20.*

Teorema 17. *Seja G um subespaço complementado do espaço de Banach E e F um espaço normado. Se $T \in \mathcal{L}(G, F)$, então existe uma extensão $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ de T.*

Demonstração. Sendo G complementado, então existe uma projeção $P : E \longrightarrow E$ tal que $P(E) = G$. A aplicação $\varphi = T \circ P : E \longrightarrow F$ é linear e contínua, pois é uma composição de operadores lineares contínuos. Dado $x \in G$, então $\varphi(x) = T(P(x)) = T(x)$, ou seja, φ estende T. $\square$

Proposição 21. *Seja E um espaço de Banach e F um subespaço não complementado de E. Então não existe operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x) = x$ para todo $x \in E$, ou seja, o operador identidade em F não pode ser estendido continuamente a E.*

Demonstração. Suponhamos que existe um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x) = x$ para todo $x \in E$. Como a inclusão $i_F : F \longrightarrow E$ é linear e contínua, o operador $i_F \circ T : E \longrightarrow E$ é também linear e contínuo. Como $T(x) \in F$ para todo $x \in E$, segue que $T^2(x) = T(T(x)) = T(x)$ para todo $x \in E$. Portanto $i_F \circ T$ é uma projeção sobre F, o que é um absurdo, pois F é um subespaço não complementado. $\square$

Teorema 18 (Teorema de Phillips)**.** *Seja F um subespaço do espaço normado E e $T \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty)$. Então existe uma extensão $\varphi \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty)$ de T a E que preserva sua norma.*

Demonstração. Já vimos no Exemplo 18, com certas adaptações, que a aplicação

$$\varphi_n : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ dada por } \varphi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = a_n,$$

é linear, contínua e $\|\varphi_n\| = 1$. Então $\varphi_n \circ T \in F^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe H_n extensão de $\varphi_n \circ T$ a E com $\|H_n\| = \|\varphi_n \circ T\|$. Consideremos o operador

$$\tilde{T} : E \longrightarrow \ell_\infty, \text{ dado por } T\ (x) = (H_n(x))_{n=1}^\infty .$$

Dado $x \in E$, a desigualdade

$$|H_n(x)| \leq \|x\|\|H_n\| = \|x\|\|\varphi_n \circ T\| \leq \|x\|\|\varphi_n\|\|T\| \leq \|x\|\|T\|$$

nos diz que $\tilde{T}$ está bem definida. A linearidade do operador $\tilde{T}$ segue da linearidade de H_n. Dado $x \in F$, então

$$\tilde{T}(x) = (H_n(x))_{n=1}^\infty = ((\varphi_n \circ T)(x))_{n=1}^\infty = T(x),$$

isto é, $\tilde{T}$ estende T. Por fim, temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(x)\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |H_n(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x\|\|H_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n \circ T\|\|x\| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|\|T\|\|x\| = \|x\|\|T\| \end{aligned}$$

e, portanto, $\|\tilde{T}\| < \infty$. Assim, $\tilde{T}$ é contínuo e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. A desigualdade contrária segue do fato que $\tilde{T}$ estende T. $\square$

5. APLICAÇÕES NO CONTEXTO DOS OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Neste capítulo, motivaremos e apresentaremos o conceito de operador absolutamente $(q,p)-$somante e provaremos, como consequência dos resultados do capítulo anterior, uma equivalência deste conceito. Para alcançar este objetivo, precisaremos demonstrar diversos resultados preliminares, que possuem seu próprio interesse e são também corolários dos resultados do Capítulo 4.

Na primeira seção definimos séries convergentes em espaços normados. Definiremos séries incondicionalmente convergentes de maneira análoga aos cursos de análise real.

Definição 22. *Seja E um espaço normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente quando for convergente em qualquer ordenação dos seus termos, ou melhor, quando para toda função bijetora $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{T(n)}$ for convergente.*

É natural especular se séries incondicionalmente convergentes em espaços normados assumem os mesmos valores em qualquer ordenação dos seus elementos. A proposição abaixo nos diz que sim.

Proposição 22. *Sejam E um espaço normado e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série incondicionalmente convergente. Então para quaisquer bijeções $T_1, T_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{T_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{T_2(n)}$$

Demonstração. Seja $\varphi \in E^*$. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente e φ é contínua, então a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$ é incondicionalmente convergente. Como séries numéricas incondicionalmente convergentes convergem para o mesmo valor, independente da ordem das parcelas, então

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{T_1(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{T_1(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{T_2(n)}) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{T_2(n)}\right).$$

Para todo $\varphi \in E^*$. Pela Proposição 17 segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{T_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{T_2(N)}$. □

Em 1837, o matemático J.P.G.L. Dirichlet provou que convergências absoluta e incondicional coincidem para séries de números reais e generalizou esse resultado para espaços normados de dimensão finita. Em 1922, S. Banach provou que, em dimensão infinita, convergência absoluta implica em convergência incondicional, mas a recíproca desse resultado não é verdadeira, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 26. *Considere a seguinte sequência em* c_{00}*:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1,0,0,\dots)\\
x_2 &= \left(0,\frac{1}{2},0,0,\dots\right)\\
x_3 &= \left(0,0,\frac{1}{3},0,0\dots\right)\\
&\vdots\\
x_n &= \left(0,0,0,\dots,\frac{1}{n},0,0\dots\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Seja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *uma bijeção. Dado* $\varepsilon > 0$*, escolha* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Para cada* $j = 1, 2, \dots, N$ *existe* $n_j \in \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(n_j) = j$*. Seja* $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$*. Assim, para* $n \geq n_0$*, temos*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{\varphi(j)} &= x_{\varphi(1)} + x_{\varphi(2)} + \cdots + x_{\varphi(n)}\\
&= x_{\varphi_{(n_1)}} + \cdots + x_{\varphi(n_N)} + \sum_{j\in A} x_j\\
&= x_1 + \cdots + x_N + \sum_{j\in A} x_j,
\end{aligned}$$

onde $A = \{1, 2, \dots, n\} - \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$*. Assim,*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_{\varphi(j)} - x\Big\| \leq \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \textit{sempre que } n \geq n_0.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = x$*, ou seja, a sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é incondicionalmente convergente. Entretanto* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *não é absolutamente convergente, pois*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

A partir disso, passou-se a questionar se em todo espaço de Banach de dimensão infinita existe uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente. Essa questão atraiu a atenção de muitos matemáticos e se tornou um dos problemas do Scottish Book (Problem 122 de S. Banach, 1932). Em 1950, A. Dvoretzky e C.A. Rogers finalmente publicaram a solução desse problema, o qual enunciaremos abaixo. Curiosamente, em sua prova, usaram resultados válidos para espaços de dimensão finita.

Teorema 19 (Teorema de Dvoretzky-Rogers)**.** *Seja* E *um espaço de Banach de dimensão infinita. Para qualquer sequência* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ *existe uma série incondicionalmente convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *em* E *tal que* $\|x_n\| = |a_n|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Em particular, se* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$*, então a série associada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é incondicionalmente convergente mas não absolutamente convergente.*

Para a demonstração veja [3]. Ao leitor interessado, sugerimos [2] para uma discussão detalhada sobre a caracterização de séries incondicionalmente convergentes em espaços de Banach.

O Teorema de Dvoretzky-Rogers foi o ponto de partida da teoria dos operadores absolutamente somantes, os quais serão definidos mais adiante.

Os dois fatos a seguir, apesar de simples, foram cruciais para o surgimento da teoria dos operadores absolutamente somantes.

Fato 1. *Operadores lineares contínuos preservam somabilidade incondicional e somabilidade absoluta.*

Demonstração. Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços normados. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, veremos que $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Com efeito, sendo $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção, então $\sum_{j=1}^{n} x_{\varphi(j)} \longrightarrow x \in E$. Pela continuidade de T, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_{\varphi(n)}) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}\right) = T(x) \in F.$$

Por outro lado, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

$\square$

Antes de apresentarmos o segundo fato, vamos reescrever os conceitos de séries absolutamente e incondicionalmente somáveis de outra forma:

Notação 1. *(1) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço normado E. Dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente é equivalente a dizer que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável.*
(2) Dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente é equivalente a dizer que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

Fato 2. *Operadores lineares contínuos não transformam sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis.*

De fato, basta considerar o operador identidade $i : c_0 \longrightarrow c_0$ e a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{e_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Pelo Exemplo 26, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, mas não é absolutamente somável.

Surge então uma pergunta natural: Que tipo de operador linear leva sequências incondicionalmente. somáveis em sequências absolutamente somáveis? Essa pergunta deu origem ao conceito de operador absolutamente somante.

Observação 1 (Um pouco da história)**.** *A. Grothendieck, em 1955, apresentou uma prova diferente do Teorema de Dvoretzky-Rogers e seu "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques" trouxe muitos insights esclarecedores para a teoria dos operadores absolutamente somantes.*

A noção de operadores lineares absolutamente $p-$somantes é creditada a A. Pietsch e a noção de operador absolutamente $(q,p)-$somante é creditado a B. Mitiagin e A. Pełczyński. Em 1968, J. Lindenstrauss e A. Pełczyński reescreveram o Résumé de Grothendieck de uma forma mais compreensiva, atraindo a atenção de muitos matemáticos e colocando, finalmente, o assunto em destaque.

Antes de apresentarmos o conceito de operador absolutamente $(q,p)-$somante, vamos dar mais algumas definições e provar mais alguns resultados, todos eles consequências dos principais resultados apresentados no capítulo anterior.

Definição 23. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ é dita fortemente $p-$somável, quando a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.*

Denotamos por $\ell_p(E)$ o espaço vetorial formado por todas as sequências em E fortemente $p-$somáveis, ou seja,

$$\ell_p(E) = \Big\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\Big\}.$$

Naturalmente podemos considerar a aplicação

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A expressão acima define uma norma em $\ell_p(E)$.

Proposição 23. *Se $1 \leq p < \infty$, então $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ denotemos $x_j = (x_j^n)_{n=1}^{\infty}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > N \Longrightarrow \|x_m - x_k\|_p = \|(x_m^n)_{n=1}^{\infty} - (x_k^n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_m^n - x_k^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos

$$m, k > N \Longrightarrow (\|x_m^n - x_k^n\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x_m^n - x_k^n\| < \varepsilon.$$

Assim, a sequência $(x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach E. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x^n \in E$ de modo que $x_j^n \longrightarrow x^n$ quando $j \longrightarrow \infty$. Pondo $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$, veremos que $x \in \ell_p(E)$ e $x_j \longrightarrow x$. Para cada $l \in \mathbb{N}$ temos por (5.1) que

$$m, k > N \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{l} \|x_m^n - x_k^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (5.2), segue que

$$m > N \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{l} \|x_m^n - x^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \tag{5.3}$$

Fazendo $l \longrightarrow \infty$ em (5.3), concluímos que

$$m > N \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_m^n - x^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_m^n)_{n=1}^{\infty} - (x^n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \varepsilon. \tag{5.4}$$

Daí, $(x_m^n)_{n=1}^{\infty} - (x^n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ para todo $m > N$. Logo, $(x^n) = (x_{m+1}^n)_{n=1}^{\infty} + (x^n)_{n=1}^{\infty} -$

$(x_{m+1}^n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Segue de (5.4) que $x_j \longrightarrow x$, como queríamos demonstrar. □

Definição 24. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ é dita fracamente $p-$somável quando a sequência $\varphi(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ para todo $\varphi \in E^*$.*

Denotamos por $\ell_p^w(E)$ o espaço vetorial formado por todas as sequências em E fracamente $p-$somáveis, ou seja,

$$\ell_p^w = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset E : \sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p < \infty \text{ para todo } \varphi \in E^*\right\}.$$

Consideremos a seguinte aplicação em $\ell_p^w(E)$:

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vimos no Proposição 14 que para $p = 1$ a aplicação acima está bem definida. De modo análoga ao feito naquela proposição, vê-se que $\|\cdot\|_p^w$ está bem definida para todo $1 \leq p < \infty$. Não é dificil ver que $\ell_p^w(E)$ é um espaço normado.

Teorema 20. *Se $1 \leq p < \infty$, então $\left(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_p^w\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ denotaremos $x_j = (x_j^n)_{n=1}^\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > N \Longrightarrow \|x_m - x_k\|_p^w = \|(x_m^n)_{n=1}^\infty - (x_k^n)_{n=1}^\infty\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_m^n - x_k^n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Em particular, para cada $\varphi \in B_{E^*}$ temos

$$m, k > N \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_m^n - x_k^n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$ fixo, então

$$m, k > N \Longrightarrow (|\varphi(x_m^n - x_k^n)|^p)^{\frac{1}{p}} = |\varphi(x_m^n - x_k^n)| < \varepsilon \text{ para todo } \varphi \in B_{E^*} \tag{5.6}$$

e

$$m, k > N \Longrightarrow \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x_m^n - x_k^n)| \leq \varepsilon.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach na forma do Corolário 11, segue que

$$m, k > N \Longrightarrow \|x_m^n - x_k^n\| = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} |\varphi(x_m^n - x_k^n)| \leq \varepsilon.$$

Concluímos que a sequência $(x_m^n)_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach E. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x^n \in E$ tal que $x_m^n \longrightarrow x^n$ quando $m \longrightarrow \infty$. Pondo $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$, afirmamos que $x \in \ell_p^w(E)$ e $x_j \longrightarrow x$. Por (5.5), para cada $l \in \mathbb{N}$, obtemos

$$m, k > N \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{l} |\varphi(x_m^n - x_k^n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{5.7}$$

Fazendo $k \longrightarrow \infty$ em 5.7 e depois $l \longrightarrow \infty$, chegamos que

$$m > k \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_m^n - x^n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \text{ para todo } \varphi \in B_{E^*}.$$

Portanto, $(x_m^n)_{n=1}^{\infty} - (x^n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e, assim, $(x^n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Fazendo $k \longrightarrow \infty$ em 5.6 segue que $x_j \longrightarrow x$. $\square$

Vamos agora apresentar o conceito de operador absolutamente $(q,p)-$somante e logo em seguida apresentaremos um resultado que garante uma equivalência desse conceito.

Definição 25. *Seja $1 \leq p, q < \infty$. Um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ é absolutamente $(q,p)-$somante quando existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^w$$

para todo sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

Proposição 24. *Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) T é absolutamente $(q,p)-$somante

(2) $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

(3) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo inteiro positivo n e para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{n} \in \ell_p^w(E)$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Por (1) temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Portanto $T(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$.

Veremos que (2) $\Longrightarrow$ (1). Supondo que vale (2), então o operador

$$\tilde{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_q(F), \text{ dado por } \tilde{T}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = T(x_j)_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido. Afirmamos que $\tilde{T}$ é um operador linear contínuo. De fato, seja $((x_j^{(k)})_{k=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_p^w(E)$ convergente, digamos

$$((x_j^{(k)})_{k=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \longrightarrow (x^k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) \tag{5.8}$$

e

$$(\tilde{T}((x_j^{(k)})_{k=1}^{\infty}))_{j=1}^{\infty} \longrightarrow (y^k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q(F). \tag{5.9}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (5.8) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq N \Longrightarrow \sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_j^k - x^k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Logo

$$j \geq N \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_j^k - x^k)|^p < \varepsilon^p \quad \text{para todo } \varphi \in B_{E^*}$$

para cada k fixo e, assim, temos

$$j \geq N \Longrightarrow |\varphi(x_j^k - x^k)| < \varepsilon \text{ para todo } \varphi \in B_{E^*}.$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach na forma do Corolário 11, obtemos

$$j \geq N \Longrightarrow \|x_j^k - x^k\|_E = \sup_{\varphi\in B_E}|\varphi(x_j^k - x^k)| \leq \varepsilon.$$

A sequência $(x_j^k)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach E. Logo, $x_j^k \longrightarrow x^k$. Sendo T contínuo, então $T(x_j^k) \longrightarrow T(x^k)$. Por (5.9), dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq M \Longrightarrow \|(\tilde{T}(x_j^k)_{k=1}^{\infty}) - (y^k)_{k=1}^{\infty}\|_q \leq \varepsilon$$

e

$$j \geq M \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|T(x_j^k) - y^k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Consequentemente
$$j \geq M \Longrightarrow \|T(x_j^k) - y^k\| < \varepsilon$$
para todo k fixo, donde concluímos que $(y^k)_{k=1}^{\infty} = T(x^k)_{k=1}^{\infty} = (\tilde{T}(x^k))_{k=1}^{\infty}$. Já vimos anteriormente que tanto $\ell_p^w(E)$ quanto $\ell_q(E)$ são espaços de Banach e, portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\tilde{T}$ é contínuo. Sendo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \|T(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q \\
&= \|\tilde{T}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_q \\
&\leq \|\tilde{T}\| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^w \\
&= C \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^w,
\end{aligned}$$

em que $C = \|\tilde{T}\|$.
(1) $\Longrightarrow$ (3). Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere a sequência $(x_j)_{j=1}^{n} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0, 0, \cdots) \in \ell_p^w(E)$. Por (1), temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Como
$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ para todo } \varphi \in B_{E^*},$$
pois $\varphi(x_j) = 0$ para todo $j \geq n$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \|T(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Por (3) existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Para mais detalhes sobre a teoria dos operadores absolutamente somantes consulte [1, 10, 12].

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na primeira parte do trabalho, enfatizamos a motivação do surgimento da Análise Funcional: a preocupante extensão de resultados e propriedades válidos na Análise em dimensão finita para dimensão infinita. Entretanto, é notória que estes nem sempre são válidos. Uma das grandes diferenças se encontra no Lema de Riesz, o qual, essencialmente, nos garante que em todo espaço normado de dimensão infinita existe um conjunto fechado e limitado que não é compacto.

A partir dos Operadores Lineares Contínuos, surge um dos principais teoremas esse trabalho, o Teorema de Hahn-Banach, o qual, na sua versão mais famosa, possibilita a extensão de funcionais lineares contínuos para o espaço todo.

No Último Capítulo apresentamos o Teorema de Dvoretzky-Rogers, resultado esse que iniciou o estudo da Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes. Este foi o momento ideal para o leitor se certicar da importância dos Teoremas estudados nos capítulos anteriores. O resultado final deste trabalho, nos garante que os Operadores Absolutamente Somantes são exatamente aquelas aplicações que transformam sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis.

Finalmente, tentamos apresentar de maneira detalhada os diversos resultados da Análise Funcional. Este trabalho é indicado para estudantes de Graduação e Pós-Graduação em Matemática e desejamos que seja utilizado como referência para estudos futuros

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, G. S. **Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions**. Tese de Doutorado, UFPB, 2016.

BOTELHO, G. **Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers**. Revista Matemática Universitária, IMPA, 2001.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2^a ed., Rio de Janeiro, 2015.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. Vol. 34, EDUSP, 2001.

HALLACK, A. A. **Análise III (Análise no $\mathbb{R}^n$)**. Notas, UFJF, 2008.

LIMA, E. L. **Análise Real**. IMPA, 4^a ed., Rio de Janeiro, 2010.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. IMPA, 4^a ed., Rio de Janeiro, 2011.

NACHBIN, L. **Introdução a Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial**. OEA, Washington, 1976.

OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. IMPA, 2^a ed., Rio de Janeiro, 2012.

PEREIRA, A. F. **O Teorema Dvoretzky-Rogers**. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2005.

SANTISTEBAN L. A. G. **Técnicas de Extensão de operadores multilineares em espaços Banach**. Dissertação de Mestrado, UFU, 2019.

SANTOS, J. S. **Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes**. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.