UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SÉRGIO CÂNDIDO DA SILVA

OTIMIZAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE - PB
2021

SÉRGIO CÂNDIDO DA SILVA

OTIMIZAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2021

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586o Silva, Sérgio Cândido da.

Otimização [manuscrito] : um estudo sobre resolução de problemas / Sergio Candido da Silva. - 2021.

58 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Prof. Me. Maxwell Aires da Silva , Departamento de Matemática - CCT."

1. Problemas de otimização. 2. Multiplicadores de Lagrange. 3. Cálculo diferencial. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

SÉRGIO CÂNDIDO DA SILVA

OTIMIZAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Aprovado em: 10/06/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a todos àqueles que se alegram com as minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus sobre todas as coisas, por me guiar, me amparar e me dar forças para continuar a cada momento, pois só Ele sabe quantas vezes pensei em desistir e Ele sempre me abriu mais uma porta para que eu seguisse em frente.

A minha família, em especial aos meus pais Ivaci e Marluce, e irmã Ladyjane (Nane) que me apoiam incondicionalmente e sempre estão ao meu lado a cada momento de dificuldade.

A minha companheira, Vaneide, pela compreensão nos momentos de ausência e apoio nas dificuldades que enfrentamos.

Aos meus primos, Flávio e João Paulo, pela ajuda nos momentos em que me vi mais desvalido.

A minha tia, Maria, que não pôde ver o fim deste ciclo, mas que foi de muita valia para mim nesta caminhada.

Ao meu professor orientador, Me. Maxwell, que fez parte da minha caminhada na vida acadêmica desde o início até este momento não só no âmbito pedagógico me cobrando sempre que eu desse o meu melhor, mas também na vida como amigo me ajudando em momentos importantes da minha caminhada.

"A sua tarefa é apenas ser o melhor que puder ser. Se lhe perguntarem qual o seu segredo, conte." (T. Harv Eker)

RESUMO

Otimização é uma forma de se encontrar as melhores alternativas para se chegar aos objetivos desejados. Neste trabalho, aborda-se ao que chamamos de Problemas de Otimização. Inicialmente, apresenta-se um pouco da história a respeito da origem dessa classe de problemas e, em seguida, alguns problemas clássicos da geometria. Posteriormente, apresenta-se alguns problemas envolvendo desigualdades aritméticas e o embasamento teórico acerca do Cálculo Diferencial necessário para o uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange que é usado para determinar pontos de máximos e mínimos de funções sujeitas a algumas restrições. Esse método nos fornece um roteiro que permite resolver uma gama de problemas em várias áreas de conhecimentos, problemas estes que a Matemática não dava conta de resolver até então.

Palavras-chave: Problemas de Otimização. Multiplicadores de Lagrange. Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

Optimization is a way to find the best alternatives to reach the desired goals. In this work, we approach what we call Optimization Problems. Initially, a little history of the origin of this class of problems is presented, followed by some classical geometry problems. Subsequently, it presents some problems involving arithmetic inequalities and the theoretical foundation about the Differential Calculus necessary for the use of the Lagrange Multiplier Method, which is used to determine maximum and minimum points of functions subject to some restrictions. This method provides us with a roadmap that allows us to solve a range of problems in various areas of knowledge, problems that Mathematics was not able to solve until then.

Keywords: Optimization problems. Lagrange multipliers. differential calculus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, cada vez mais está se intensificando a busca pelo aumento da eficiência dos processos e a diminuição dos custos empregados neles. Assim, estamos sempre buscando encurtar distâncias com intuito de otimizar o tempo ou economizar recursos financeiros. Agindo dessa forma, buscamos maneiras de melhorar a aplicação de recursos, melhorando dessa forma, a receita obtida.

A matemática mostra ser uma ferramenta que auxilia no processo de tomada de decisões criando métodos que possibilitam encontrar soluções ótimas para os problemas. Podemos inferir que a essência da otimização é obter dentre um conjunto de alternativas disponíveis, a opção que melhor se adeque às nossas necessidades, ou seja, resolver um problema de otimização, nada mais é, do que determinar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções.

A Otimização trata-se de uma área de estudo que possui abundante aplicabilidade, tendo uma importância fundamental nas mais diversas áreas de estudos, ao passo que a dificuldade de se encontrar as melhores soluções aumenta surge a necessidade de se criar técnicas matemáticas e computacionais que melhorem o processo de tomada de decisão.

O objetivo do trabalho é estudar os problemas de otimização com o intuito de encontrar soluções ótimas para questões envolvendo conceitos de geometria, desigualdades algébrias e Cálculo Diferencial. Com o propósito de alcançar os objetivos propostos, o trabalho está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 1, aborda-se um pouco da história dos problemas de otimização, desde os primeiros problemas de que se têm registro até os tempos atuais. Para isso, apontamos, de forma cronológica, os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dessa linha de pesquisa.

No Capítulo 2, apresenta-se alguns problemas clássicos que surgem de forma usual em nosso cotidiano e esttão presentes no âmbito da Geometria, apresentando suas soluções através de argumentos geométricos.

No Capítulo 3, descreve-se alguns problemas que versam acerca dos máximos e mínimos na aritmética, apresentando algumas desigualdades, suas demonstrações e algumas aplicações em problemas reias.

No Capítulo 4, enuncia-se as definições acerca das funções de várias variáveis, presentes no Cáculo Diferencial, que são pré-requisitos para a solução dos problemas de otimização por meio do uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Esse método consiste em resolver problemas de otimização que estão sujeitos a uma ou mais restrições nos permitindo analisar situações mais gerais.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA ACERCA DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

2.1 A origem dos problemas de otimização

Segundo Galeév (1991) o problema mais antigo de que se tem relato, que trata da determinação de máximos e mínimos, é o chamado **Problema Isoperimétrico**: "Determinar dentre todas as curvas fechadas de um dado comprimento, aquela que possui a maior área". Esse problema, que é contado na *Eneida de Virgílio* (70 a.C. - 19 a.C.), teve origem na Grécia Antiga, em meados do século IX a.C., e é conhecido como *A Lenda de Dido*.

De acordo com a lenda, Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia, irmã do rei Pigmaleão e casada com Sicarbas. Ao descobrir que seu irmão foi o mandante da morte de seu marido com intensão de se apossar de suas riquezas, Elisa ficou aterrorizada e resolveu fugir. Em segredo carregou os barcos com seu tesouro e fugiu juntamente com outros cidadãos que viviam insatisfeitos com o reinado de Pigmaleão.

Ela seguiu em direção ao norte da África, e atracou na cidade de Cartago, atual Tunísia. Elisa e seus seguidores foram muito bem recepcionados pelos nativos da região, e após ser acolhida, solicitou ao rei que lhe vendesse algumas quantidades de terra para que se estabelecesse juntamente com seus seguidores. Então o rei local lhe disse que ela poderia se apossar de toda terra que pudesse carregar em uma bolsa feita da pele de um único animal.

Elisa não tinha outra opção que não fosse aceitar tal proposta, então ela, ou algum conselheiro seu, teve a brilhante ideia de cortar a pele do animal que lhe foi cedido em tiras muito finas, juntou todas as tiras umas nas outras e cercou uma porção de terra a beira-mar formando um semicírculo se aproveitando do mar para servir de extremo, dessa forma tomou a maior quantidade de terra que era possível.

Certamente a solução encontrada por Elisa para esse problema foi por pura intuição, afinal, a solução formal desse problema é bastante complexa e só foi demonstrada mais de um milênio depois. Não se sabe o quanto desta história é verdade e o quanto é lenda, o que fica bem evidente é que nessa época já se demonstrava interesse por essa área do conhecimento, e já se apresentavam alguns resultados bastante plausíveis.

Tempos depois outros povos também utilizaram a mesma técnica como forma de proteção, haja vista que naquela época haviam muitas guerras e tentativas de invasão, as cidades possuíam muros de contenção em volta delas. Como os muros custavam muito tempo e dinheiro para serem construídos, tentavam construí-los da forma menos extensa possível, como mostram as figuras a seguir:

Figura 1 – Cidades de Paris (França) e Colônia (Alemanha)

Fonte: wikipédia

2.2 O primeiro Problema de Otimização registrado em uma obra matemática

Embora se tenha relatos de que desde a época mencionada anteriormente já se demonstrava interesse por buscar soluções ótimas para alguns problemas, o primeiro problema registrado de fato em uma obra matemática, está presente na famosa obra de Euclides: *Os Elementos*, que é datada do século IV a.C., aparece nos livros III e VI. São problemas que versam acerca da geometria no plano (GONZÁLEZ, 2013).

Euclides é considerado um dos maiores matemáticos da Grécia Clássica e também de toda história da matemática. Viveu entre os anos de 330 a.C. e 260 a.C. Apesar de boa parte de sua obra ter se perdido ao longo do tempo, ainda restaram alguns trabalhos escritos por ele, entre eles os treze livros que fazem parte dos *Elementos*. Os problemas sobre máximos e mínimos encontram-se no livro III: proposições 7, 8, 15 e 16 e são sobre circunferências. Encontramos também a proposição 27 do livro VI que fala sobre figuras planas.

2.3 Outras contribuíções importantes

No decorrer da história, vários matemáticos se dedicaram a estudar os problemas extremais, e deixaram em suas obras, escritos que contribuíram posteriormente para o desenvolvimento desse ramo de estudo da Matemática. Entre eles podemos destacar o trabalho de **Apolônio** (262 a.C - 190 a.C) com sua obra *As Cônicas*, que possuíam oito volumes, tendo dedicado o quinto livro de sua coleção ao estudo de segmentos de comprimento máximo e mínimo traçados em relação a uma cônica, conforme (FEITOSA, 2015).

Outro matemático que contribuiu no estudo dos problemas de otimização segundo Araújo Júnior (2018) foi **Zenodorus** (200 a.C. - 140 a.C.), matemático da Grécia antiga, foi pioneiro no estudo de figuras isoperimétricas e estudou a área de uma figura tendo o valor de seu perímetro fixado e o volume de um sólido tendo o valor da superfície fixada, e provou que o triângulo equilátero é dentre todos os triângulos de perímetro fixo aquele que possui a maior área.

Um dos problemas sobre máximos e mínimos mais conhecidos na geometria é o da lei da reflexão da luz estudado pelo matemático grego **Heron da Alexandria** (10 - 70). Heron ficou muito conhecido pela fórmula que leva seu nome, e é usada para encontrar a área de um triângulo através da medida dos seus lados. A respeito do problema da refração da luz e os resultados alcançados por Heron, Boyer menciona que:

> Heron se interessava por mensuração de todas as formas [...] foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada Catóptrica (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil, isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e então ao olho E de um observador, o caminho mais curto possível SPE e EPM' é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais (BOYER, 1996).

Embora muito se tenha estudado a respeito e se tenha chegado a muitas conclusões plausíveis, mesmo que sem demonstrações formais elaboradas, até meados do século XVII não foi determinado nenhum método geral que permitisse se chegar a repostas exatas dos problemas sobre otimização.

De acordo com Feitosa (2015), o primeiro procedimento de caráter geral com intuito de encontrar máximos e mínimos foi descrito pelo matemático francês **Pierre de Fermat** (1601 - 1665) no ano de 1630. O método criado por Fermat é encontrado na maioria dos livros de cálculo da atualidade, o teorema que recebe seu nome afirma que uma condição necessária para a existência de um extremo em um ponto num intervalo do domínio de uma função, é que a derivada nesse ponto seja nula. Esse resultado foi obtido por Fermat somente válido para polinômios e generalizado por **Isaac Newton** (1643 - 1727) algum tempo depois.

Posteriormente, no século XVIII, os matemáticos **Joseph-Louis Lagrange** (1736 - 1813) e **Leonhard Paul Euler** (1707 - 1783) foram responsáveis por criar procedimentos para resolução de problemas sobre máximos e mínimos de funções de várias variáveis, restritas e irrestritas. As contribuições dadas por Euler e Lagrange possibilitaram a solução de problemas em que o elemento a ser otimizado não é um número real e nem um vetor n dimensional, mas sim uma função. Dessa forma foi possível chegar a solução de problemas como o conhecido *Problema da Braquistócrona*, que busca encontrar a trajetória de uma partícula sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial igual a zero, que se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo possível.

Tais resultados deram origem ao Cálculo Variacional, que generaliza os métodos de determinação de extremos de funções reais de uma variável real do Cálculo Diferencial.

2.4 Os problemas de otimização na atualidade

O estudo de maximização e minimização de funções teve início através de métodos clássicos, e a necessidade de resolver tais problemas contribuiu para o surgimento do Cálculo Diferencial e do Cálculo de Variações. Apesar das contribuições valiosas dos matemáticos, já citados anteriormente, terem tido fundamental importância nesse processo, com o desenvolvimento desenfreado da humanidade em todos os seus âmbitos, essas contribuições se tornaram pequenas para o avanço nas técnicas de otimização e muito pouco progresso foi obtido até mais ou menos a metade do século XX. Na atualidade, devido ao aumento da complexidade dos problemas, os recursos computacionais têm se tornado importantes instrumentos nas simulações e na busca de melhores soluções para os problemas de Otimização. Quando os computadores digitais começaram a ganhar velocidade, houve um grande avanço nos procedimentos de otimização, com o desenvolvimento de novas técnicas. Para mais detalhes, indicamos (CORRÊA, 2016).

Uma das áreas mais importantes atualmente no estudo de otimização é a Programação Linear, tal ramo consiste em otimizar funções lineares sujeitas a restrições lineares. O matemático russo **Leonid Vitaliyevich Kantorovich** (1912 - 1986), motivado pelos problemas de uma empresa de produção de madeira onde foi convidado a prestar consultoria desenvolveu esse ramo para solucioná-los. O ramo da Programação Linear passou pelo seu ápice na década de 1940 quando o americano **George Dantzig** (1914 - 2005) formulou o conhecido problema do transporte, e criou o algoritmo que solucionava o problema, o *Método do Simplex*. Tal algoritmo permite resolver qualquer problema de Programação Linear. Esse fato foi muito importante para o desenvolvimento desta linha de pesquisa pois possibilitava a aplicação em inúmeras áreas.

3 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NA GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos alguns problemas de otimização bastantes conhecidos na Geometria. A solução dos problemas apresentados nesta seção, na sua maioria, não requerem o uso do Cálculo Diferencial, o leitor perceberá que quando tratamos acerca dos problemas de otimização, muitas vezes é mais difícil modelar a função que descreve o problema do que resolvê-lo de fato. Sendo assim, esse tipo de problema requer uma certa atenção com os dados que analisamos.

3.1 O Problema de Heron

Esse problema é bastante conhecido na geometria, e leva esse nome em homenagem ao matemático grego **Heron de Alexandria** (10 d.C. - 70 d.C.). Tal problema já era conhecido por matemáticos que o antecederam, mas foi Heron quem o demonstrou por meio de argumentos geométricos simples, em sua obra chamada *Catóptrica* (ou Reflexão), quando estudava acerca da Lei da Reflexão da Luz. Sua solução é uma consequência direta do princípio de Aristóteles, o qual afirma que a natureza nada faz do modo mais difícil. Logo, se a luz precisa ir de uma fonte luminosa A a um espelho r e voltar a um observador B, de certo, ela deve seguir o caminho que seja o mais curto possível.

3.1.1 Solução do Problema de Heron

Para seguirmos com a apresentação do problema vamos enunciar a condição de existência de um triângulo como um lema que será usado a seguir.

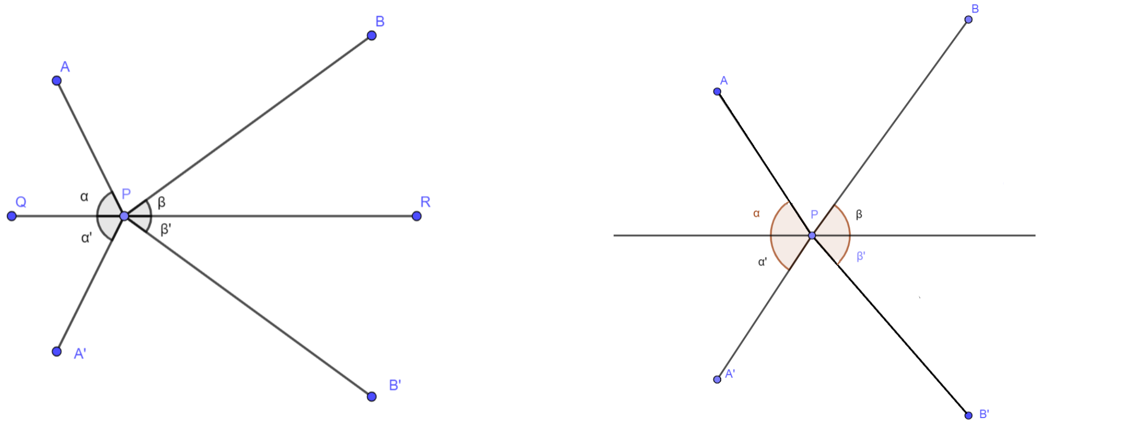
Lema 3.1 (Condição de Existência de Triângulos)**.** *Dados três segmentos de reta distintos, se a soma das medidas de dois deles é sempre maior que a medida do terceiro, então, eles podem formar um triângulo.*

O problema de Heron é descrito da seguinte forma:

Proposição 3.1. *Seja uma reta r e dois pontos A e B localizados no mesmo plano de r. Determine um ponto P sobre a reta r de tal forma que a soma $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja a menor possível.*

Demonstração: Sejam P, Q e R pontos quaisquer sobre uma reta r, tal que P esteja entre Q e R, e sejam também α e β as medidas dos ângulos fomentados entre os segmentos de reta AP e PQ e os segmentos BP e PR, respectivamente.
Agora, se refletirmos os segmentos AP e BP em relação a reta r obtemos respectivamente $A'P$ e $B'P$. Por conseguinte, segue que, α' e β' são as medidas dos ângulos formados entre os segmentos de reta $A'P$ e PQ, e os segmentos $B'P$ e PR respectivamente, conforme ilustra a figura 2 (à esquerda):

Figura 1 – Solução do Problema de Heron



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{B'P}$, e perceba que a soma $\overline{AP} + \overline{B'P}$ é mínima quando os pontos A, P e B' são colineares. Haja vista, que qualquer outra posição que o ponto P se encontre na reta r, implicaria na existência de um triângulo de vértices $AB'P$. Mas pela condição de existência de um triângulo, conforme lema anterior, segue que, $\overline{AB'} < \overline{AP} + \overline{B'P}$, e portanto, a soma $\overline{AP} + \overline{B'P}$ é mínima quando os pontos A, P e B' são colineares.

Analogamente, a soma $\overline{BP} + \overline{A'P}$ é mínima quando os pontos A', P e B são colineares. Todavia, os pontos A, P e B' são colineares ou A', P e B são colineares, exatamente quando os ângulos $\alpha + \alpha'$ e $\beta + \beta'$ são opostos pelo vértice, conforme a figura 2 (à direita):

Daí, segue que, $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Mas $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Então $2\alpha = 2\beta$, e portanto, $\alpha = \beta$. Dessa forma, concluímos que a distância $\overline{AP} + \overline{BP}$ é mínima quando o ponto P é tal que AP, BP formam ângulos congruentes com a reta r. ∎

3.2 O Problema de Steiner

O problema de Steiner é bastante antigo e sempre despertou interesse na comunidade científica. Segundo Fonseca ([8]), talvez **Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855), em 1836, tenha sido o primeiro matemático a formular um problema dessa natureza. Mas **Courant** e **Robbins**, em seu livro *What is Mathematics*? abordaram o problema dando reconhecimento a Steiner, por ter tratado do caso $p = 3$, e deixando de lado as contribuições de **Fermat, Gauss, Jarníc** e **Kossler**. Devido ao grande sucesso do livro o problema acabou ficando conhecido como Problema de Steiner.

Vamos enunciar um lema que nos será útil na solução desse problema.

Lema 3.2. *Toda reta tangente a uma circunferência K é perpendicular ao raio no seu ponto de tangência.*

3.2.1 Solução do Problema de Steiner

O Problema de Steiner, é simples, mas bastante intuitivo, e pode ser enunciado da seguinte forma:

Proposição 3.2. *Dados três pontos A, B e C em um plano, um quarto ponto P é procurado, tal que, a soma $a+b+c$ seja mínima, em que a, b, c representam, respectivamente, as três distâncias de P a A, B, C.*

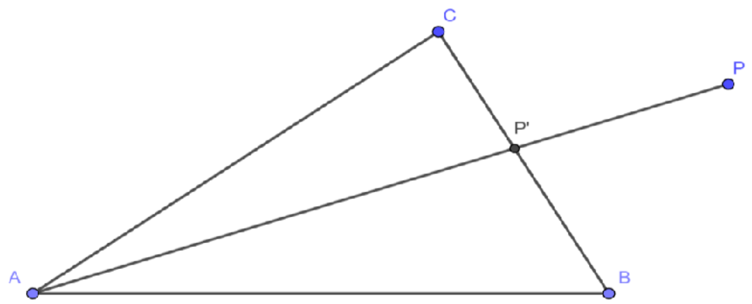
Demonstração: Primeiro vamos analisar o caso trivial, em que os pontos A, B e C são colineares e o B está situado entre A e C. Para este caso, obviamente, o ponto P que procuramos coincide com B, como mostra a figura 2:

Figura 2 – Pontos A, B, C colineares

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, para o caso em que A, B e C são não colineares, consideremos o triângulo de vértices ABC. Dessa forma, temos duas situações para analisar, se P é um ponto interior ou exterior ao triângulo ABC. Note que, se P é um ponto exterior, então existe um ponto P' sobre um lado do triângulo tal que $\overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$. Como mostra a figura 3:

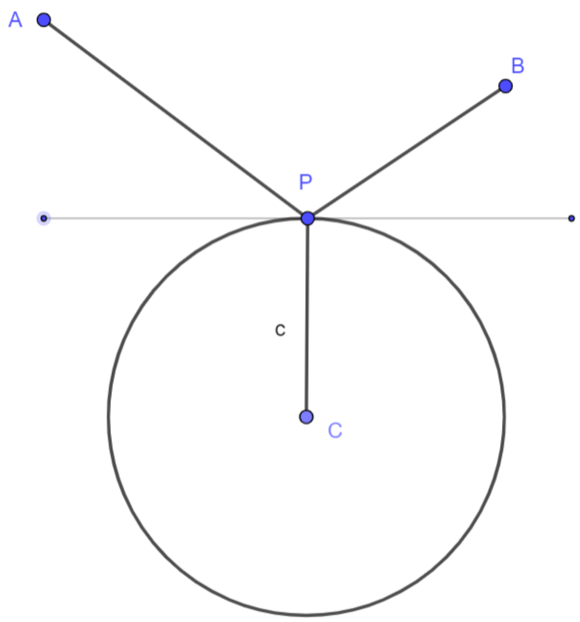
Figura 3 – Ponto P' sobre o segmento BC



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, nos resta verificar o caso em que P é um ponto interior ao triângulo ABC. Considere a circunferência K que tem como centro o vértice C do triângulo e raio c. Então o ponto P que procuramos deve estar sobre a circunferência K de tal modo que $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja a menor distância possível. Se A e B estão fora de K, considere a reta r que tangencia K no ponto P e é perpendicular ao segmento PC, então, pelo Problema de Heron, sabemos que $\overline{PA} + \overline{PB}$ é mínima quando os ângulos formados entre PA e PB com a reta r forem iguais, e consequentemente os ângulos formados com o segmento PC forem iguais. (Veja a figura 4)

Figura 4 – Pontos A e B fora do círculo K



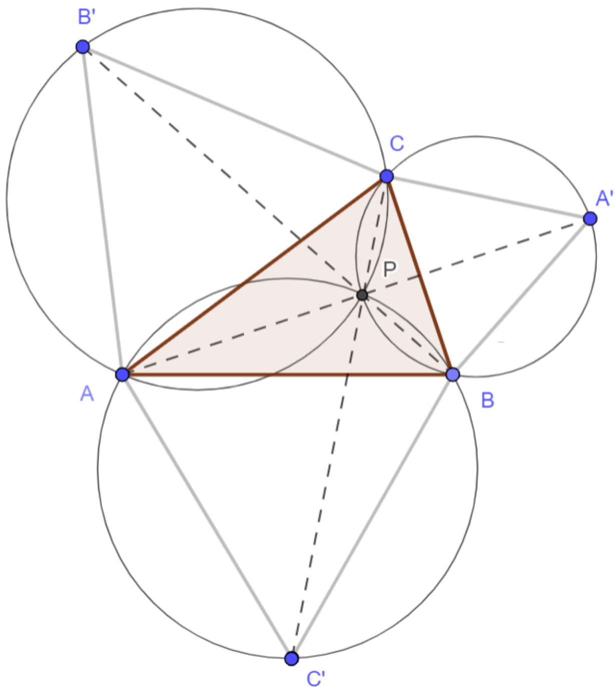
Fonte: Elaborada pelo autor

Aplicando o mesmo raciocínio para a circunferência de raio a e centro no ponto A e para a circunferência de raio b e centro no ponto B, concluímos que os três ângulos formados por PA, PB e PC são iguais e consequentemente iguais a 120°. Note que, a partir dessa construção, nenhum dos dois pontos A ou B poderia pertencer ao interior da circunferência, pois nesse caso os ângulos formados por PA, PB e PC não seriam iguais a 120°, uma vez que se A, por exemplo, estivesse no interior da circunferência, teríamos $C\widehat{P}A < 90°$, contrariando a hipótese.

O matemático inglês **Thomas Simpson** (1710 - 1761) desenvolveu um esquema de construção geométrica que permite obter o ponto P. A construção é bem simples e consiste em criar três triângulos equiláteros a partir dos lados do triângulo formado pelos pontos A, B e C. Simpson mostrou que o ponto P procurado é a interseção das três circunferências circunscritas nos três triângulos equiláteros. (Veja a figura 5)

Simpson mostrou também que o ponto P que procuramos pode ser encontrado criando um segmento de reta unindo os vértices A, B e C aos seus respectivos extremos A', B' e C'. como na figura 5:

Figura 5 – Construção de Simpson para obter o ponto P



Fonte: Elaborada pelo autor

■

3.3 Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos

3.3.1 Solução da Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos

O problema pode ser descrito da seguinte forma:

Proposição 3.3. *Dentre todos os triângulos com apenas um perímetro P fixado, qual o que possui maior área ?*

Demonstração: Considere um triângulo de lados a, b **e** , ao aplicarmos a fórmula de Heron para calcular área de triângulos em função de seus lados, segue:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ com } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Por outro lado, sabemos que a média geométrica e aritmética, por definição, são dadas respectivamente por:

$$m_g(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \text{ e } m_a(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Agora, pelo teorema da desigualdade da médias, temos que, $m_a \geq m_g$. Assim podemos afirmar que:

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

somando os termos semelhantes, obtemos

$$\frac{3p - (a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e como $a + b + c = 2p$ temos

$$\frac{3p - 2p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

que implica

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

e elevando ambos os membros ao cubo, obtemos

$$\frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c).$$

Multiplicando a desigualdade por p, concluímos que:

$$\frac{p^4}{27} \geq p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geq A \tag{3.2}$$

Observe que em (2.2) ocorre a igualdade apenas quando os lados forem iguais, ou seja, $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$. Logo, o triângulo será equilátero, e consequentemente possui lados congruentes a $\frac{1}{3}p$. ■

3.4 Desigualdade Isoperimétrica para Quadriláteros

3.4.1 Solução do Problema Isoperimétrico para Quadriláteros

O problema isoperimétrico para quadriláteros pode ser descrito da seguinte forma:

Proposição 3.4. *Dentre todos os quadriláteros de perímetro fixado, o de maior área é o quadrado.*

Para a demonstração dessa proposição vamos utilizar os seguintes lemas:

Lema 3.3. *Um quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.*

Sua solução será dividida em duas etapas. Inicialmente, vamos demonstrar o lema a seguir:

Lema 3.4. *Dentre todos os quadriláteros de perímetro fixado, o de maior área é o inscritível.*

Demonstração: Vamos utilizar a fórmula de Bretschneider para o cálculo da área de quadriláteros em função de seus lados. A demonstração dessa fórmula pode ser encontrada em (PEDROSO, 2003).

Sejam $A, B, C,$ e D os vértices do quadrilátero convexo de lados

$$a = d(A,B), \quad b = d(B,C), \quad c = d(C,D) \ \text{ e } \ d = d(D,A)$$

e ângulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ e $\widehat{D}$, tais que, o ângulo $\widehat{A}$ é oposto ao ângulo $\widehat{C}$ e o ângulo $\widehat{B}$ é oposto ao ângulo $\widehat{D}$. Temos pela fórmula de Bretschneider, que sua área S é dada por:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd[1+\cos(\widehat{A}+\widehat{C})]},$$

em que $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Como o valor de S é dado por uma subtração, quanto menor for o valor de $\dfrac{1}{2}abcd[1+\cos(\widehat{A}+\widehat{C})]$ maior será o valor de S. Assim, para que o valor de S seja máximo, basta minimizar $1+\cos(\widehat{A}+\widehat{C})$, e isso acontece quando $\cos(\widehat{A}+\widehat{C}) = -1$, ou seja, $\widehat{A}+\widehat{C} = \pi$, que significa que o quadrilátero possui pares de ângulos opostos suplementares. Assim, pelo **Lema 2.3**, conclui-se que o quadrilátero de perímetro fixado com maior área é o inscritível. ■

Agora, vamos provar que dentre os quadriláteros inscritíveis o que possui maior área é o quadrado.

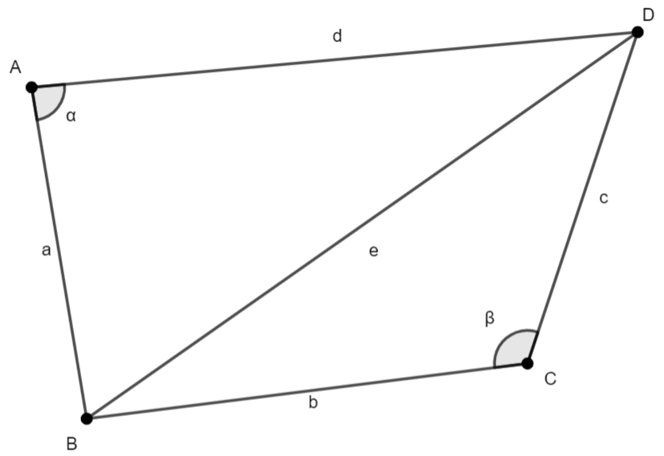
Proposição 3.5. *Dentre todos os quadriláteros inscritíveis, o de maior área é o quadrado.*

Demonstração: Sejam $A, B, C,$ e D os vértices de um quadrilátero inscritível, BD uma diagonal desse quadrilátero, de lados $a = d(A,B)$, $b = d(B,C)$ e $c = d(C,D)$ e $d = d(D,A)$ e ângulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ e $\widehat{D}$, tais que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ são opostos e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ também o são. Assim, sua área pode ser calculada em duas etapas, calculando as áreas dos triângulos (Veja figura 6) ABD e BCD. Temos:

$$A_1 = \frac{ad \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2};$$

$$A_2 = \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \beta}{2};$$

Figura 6 – Quadrilátero de vértices A, B, C e D



Fonte: Elaborada pelo autor

e então

$$A_T = \frac{ad \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}.$$

Daí, para que A_T seja máxima, é preciso que A_1 e A_2 tenham o maior valor possível. Perceba que isso acontece quando $\operatorname{sen} \alpha$ e $\operatorname{sen} \beta$ possuem valor máximo, ou seja, quando $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, e isto nos diz que os triângulos ABD e BCD são retângulos, e consequentemente o quadrilátero é um retângulo, ou seja, possui um par de ângulos opostos suplementares, portanto inscritível.

Para encerrar a demonstração, vamos verificar que o retângulo de maior área é um quadrado. Assim, seja um retângulo de vértices A, B, C e D de lados x e y. Logo, a área e o perímetro são dados respectivamente por

$$A_T = x \cdot y \quad \text{e} \quad p = 2x + 2y.$$

Agora, isolando y em p e substituindo na fórmula da área, obtemos:

$$A_T = \frac{xp - 2x^2}{2}.$$

Dessa equação do segundo grau, podemos determinar seu máximo, uma vez que seu coeficiente líder é negativo, encontrando seu Vértice:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) \quad \Rightarrow \quad V = \left(\frac{p}{4}, \frac{p}{4} \right).$$

Portanto, $x = y = \frac{p}{4}$ e, consequentemente, o quadrilátero é um quadrado. ∎

4 DESIGUALDADES E PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

este capítulo apresentamos e demonstramos o caso geral de algumas desigualdades conhecidas da Matemática. As desigualdades podem ser consideradas ferramentas que podem auxiliar na resolução de alguns problemas extremais, como exemplificaremos ao final deste capítulo. Vejamos, a seguir, algumas desigualdades clássicas da Matemática.

4.1 Desigualdade de Bernoulli

A desigualdade que apresentamos nesta seção recebe este nome por causa dos irmãos Bernoulli (Jacob e Johann Bernoulli, matemáticos suíços do século XVIII). Essa desigualdade tem muitas aplicações em problemas de vários ramos da Matemática, pcomo roblemas relacionados à Análise Combinatória entre outros. E pode ser enunciada da seguinte forma:

Proposição 4.1. *Dados n natural e $x > -1$ real, temos $(1+x)^n \geq 1+nx$, sendo que a igualdade só ocorre para $n > 1$ se, e somente se, $x = 0$.*

Demonstração: Podemos provar esta desigualdade usando indução matemática. Se $n = 1$, vale a igualdade, já que

$$(1+x) = 1+x \;\Rightarrow\; (1+x)^1 = 1+1\cdot x.$$

Agora, suponha que $(1+x)^k \geq 1+kx$ seja verdade, com $k \in \mathbb{N}$; como $1+x > 0$, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $(1+x)$, temos:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) \;&\Rightarrow\; (1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx)\\ &\Rightarrow\; (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2\end{aligned}$$

Como o termo $kx^2 \geq 0$, segue que

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

Assim, como $f(k) \Rightarrow f(k+1)$, segue, que o resultado vale para todo inteiro $n \geq 0$.
Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, $(1+x)^k = 1+kx$ e $kx^2 = 0$. Ou seja, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = 0$. ∎

4.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz é uma ferramenta que auxilia na prova de outras desigualdades, além de servir como alternativa na determinação de valores extremos de funções sem a necessidade de recorrer ao uso do Cálculo Diferencial. Ela leva esse nome em homenagem aos matemáticos Augustin Cauchy e Hermann Amandus Schwarz, principais nomes do seu estudo. Esse teorema é enunciado da seguinte forma:

Proposição 4.2. *Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e $y_1, y_2, \cdots, y_n$ reais dados $n > 1$, então*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Além disso, teremos a igualdade se, e somente se os x_i e os y_i forem proporcionais, isto é, se, e somente se, existir um real positivo λ tal que $y_i = \lambda x_i$ para todo i.

Demonstração: Vamos considerar a seguinte função f do segundo grau

$$f(t) = (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \cdots + (x_nt - y_n)^2.$$

Desenvolvendo os binômios, segue

$$f(t) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)t + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Agora, perceba que $f(t)$ se trata de uma soma de quadrados, logo, temos $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, devemos ter $\Delta \leq 0$, o que implica

$$4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_+^2 \cdots + y_n^2).$$

Dividindo esta inequação por 4 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

como queríamos.

Por outro lado, se houver igualdade, teremos $\Delta = 0$, e o trinômio terá uma raiz real λ :

$$(x_1\lambda - y_1)^2 + (x_2\lambda - y_2)^2 + \cdots + (x_n\lambda - y_n)^2 = 0.$$

Mas para essa igualdade acontecer todos os binômios devem ser nulos, ou seja, $y_i = \lambda x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, se houver a igualdade, os x_i e y_i devem ser proporcionais. E logicamente, se eles forem proporcionais a igualdade ocorrerá. ∎

Também podemos escrever esta desigualdade em uma composição diferente, por meio de uma forma alternativa que apresenta um formato característico. Esse formato da desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser vantajoso por possibilitar a sua associação com problemas geométricos, principalmente no que se refere a triângulos. Assim, veremos que a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser escrita como:

$$(m_1+m_2+\cdots+m_n)^2 \le \left(\frac{m_1}{k_1}+\frac{m_2}{k_2}+\cdots+\frac{m_n}{k_n}\right)(m_1k_1+m_2k_2+\cdots+m_nk_n),\ \text{com } k_i,k\in\mathbb{R}_+^*.$$

Agora, observe que, se considerarmos o caso $n=3$, segue a seguinte desigualdade:

$$(m_1+m_2+m_3)^2 \le \left(\frac{m_1}{k_1}+\frac{m_2}{k_2}+\frac{m_3}{k_3}\right)(m_1k_1+m_2k_2+m_3k_3),$$

que ratifica a possibilidade de aplicação direta em problemas de cunho geométrico, principalmente para o caso de triângulos, uma vez que, observamos a existência da notação de semiperímetro, da razão entre lado e altura do triângulo e das áreas dos triângulos m_i com alturas k_i nessa desigualdade.

Vejamos, agora, como obter essa configuração a partir da desigualdade de Cauuchy-Schwarz. Inicialmente, considere as seguintes indentidades:

$$a_1^2=\frac{m_1}{k_1},\ a_2^2=\frac{m_2}{k_2},\ \ldots\ a_n^2=\frac{m_n}{k_n},$$

além disso,

$$b_1^2=m_1k_1,\ b_2^2=m_2k_2,\ \ldots\ b_n^2=m_nk_n.$$

Agora, observe que, ao calcularmos o produto entre as indentidads de índices correspondentes, teremos:

$$a_1^2b_1^2=m_1^2,\ a_2^2b_2^2=m_2^2,\ \ldots\ a_n^2b_n^2=m_n^2.$$

Ademais, extraíndo a raíz dessas indentidades, concluímos que:

$$a_1b_1=m_1,\ a_2b_2=m_2,\ \ldots\ a_nb_n=m_n.$$

Por fim, basta observar que

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

é equivalente a

$$(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

e substituir as indentidades encontradas, que teremos

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^2 \leq \left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \cdots + \frac{m_n}{k_n}\right)(m_1k_1 + m_2k_2 + \cdots + m_nk_n),$$

como queríamos.

4.3 Desigualdade entre as Médias

O conceito de média é bastante importante na matemática, pois permite representar uma sequência de números por um número que atende a uma determinada característica. Assim, dada uma sequência finita de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e uma operação $\star$ definida sobre os números dessa sequência, definimos uma Média dos elementos dessa sequência com respeito a operação $\star$ como sendo um número real M tal que:

$$x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n = \underbrace{M \star M \star \cdots \star M}_{n\text{-termos}}$$

Vale a pena destacar uma propriedade importante de uma Média que diz que: $\min\{x_i\} \leq M \leq \max\{x_i\}$, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, logicamente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, a média é igual a estes números, conforme (MORGADO, 2001).

4.3.1 Médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática

Inicialmente, vamos definir o que são médias, definições que foram extraídas de (CARTAGENES, 2014).

Definição 4.1. *Dada a sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, $n > 1$, chamamos de média aritmética o número real, que indicamos por $\overline{x}$, tal que*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n\ termos} = n\overline{x}.$$

ou seja,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1,}^{n} x_i.$$

Definição 4.2. *Dada uma sequência de números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com $n > 1$ chamamos de média geométrica o número real $\overline{x}_g$ associado a essa sequência, através da operação de multiplicação, tal que*

$$x_1x_2\ldots x_n = \underbrace{\overline{x}_g\overline{x}_g\ldots\overline{x}_g}_{n\text{-}termos} = \overline{x}_g^n$$

então,

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Definição 4.3. *Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com $n > 1$ chamamos de média harmônica o número real $\overline{x}_h$ associado a essa sequência, através da operação adição de seus inversos, tal que*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\overline{x}_h} + \frac{1}{\overline{x}_h} + \cdots + \frac{1}{\overline{x}_h}}_{n \ \textit{termos}} = \frac{n}{\overline{x}_h},$$

isto é,

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}} = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Definição 4.4. *Dada uma sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com $n > 1$ chamamos de média quadrática o número real $\overline{x}_q$ associado a essa sequência, através da operação adição dos quadrados, tal que*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \underbrace{\overline{x}_q^2 + \overline{x}_q^2 + \cdots + \overline{x}_q^2}_{n \ \textit{termos}} = n\overline{x}_q^2,$$

em outras palavras,

$$\overline{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$$

4.3.2 Desigualdade entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática

As desigualdades das médias podem ser enunciadas da seguinte forma:

Teorema 4.1. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos e Q, A, G e H são suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, então $Q \geq A \geq G \geq H$. Além disso, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Vamos demonstrar cada desigualdade do teorema anterior separadamente como a seguir:

Do **Teorema 3.2** devemos ter $M_q \geq M_a$. Para demonstrar esta parte do teorema faremos uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vamos a demonstração:

Demonstração: $(M_q \geq M_a)$ Fazendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{n}.$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, existir um número real positivo λ tal que $x_i = \lambda$ para todo $1 \leq i \leq n$, ou seja, se, e somente se, os números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ forem todos iguais.

Dividindo ambos os membros da desigualdade por n, temos

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ou seja, $M_q \geq M_a$, sendo a igualdade é verdadeira se, e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

■

Do **Teorema 3.2** devemos ter $M_a \geq M_g$. Para demonstrar esta desigualdade faremos uso do seguinte lema:

Lema 4.1. *Dados $a_1, a_2, \ldots a_n$ números reais positivos, se $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, então $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.*

Demonstração: Vamos demonstrar este lema fazendo uso de indução matemática. Para o caso $n = 1$ é imediato que $a_1 = 1$, logo, $1 \geq 1$. Agora, suponhamos verdade para $n = k$, ou seja, se temos para $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} = 1$, então $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq k$.
Note que se $a_1 = a_2 = \ldots\ a_k = a_k = 1$, a desigualdade está provada. Mas, se nem todos forem iguais a 1, devemos considerar duas situações:

1ª Situação: Não pode ocorrer de todos os números serem maiores que 1, pois o produto de todos eles seria maior que 1. Daí, concluímos que pelo menos um destes números não é maior que 1: admitamos, sem perda de generalidade, que $a_{k+1} \leq 1$;

2ª Situação: Não pode ocorrer de todos os números serem menores que 1, pois o produto de todos eles seria menor que 1. Daí, concluímos que pelo menos um destes números não é menor que 1: admitamos, sem perda de generalidade, que $a_k \geq 1$.

Assim, podemos afirmar que $a_k - 1 \geq 0$ e $1 - a_{k+1} \geq 0$, e por conseguinte, o produto $(a_k - 1) \cdot (1 - a_{k+1}) \geq 0$. Logo, desenvolvendo esse produto, temos:

$$a_k - a_k \cdot a_{k+1} - 1 + a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow a_k + a_{k+1} - a_k \cdot a_{k+1} \geq 1 \tag{4.1}$$

Por outro lado, perceba que, se considerarmos o produto $a_k \cdot a_{k+1}$ como sendo um único número, o produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = 1$, terá k fatores e será igual a 1:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot (a_k \cdot a_{k+1}) = 1.$$

Dessa forma, considerando a hipótese de indução, temos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k \cdot a_{k+1}) \geq k,$$

Logo,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \geq k - a_k \cdot a_{k+1}.$$

Somando $a_k + a_{k+1}$ a ambos os lados dessa desigualdade, segue que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} \geq k - a_k \cdot a_{k+1} + a_k + a_{k+1} \tag{4.2}$$

Note que, por (3.1) e (3.2),

$$\begin{aligned} a_k + a_{k+1} - a_k \cdot a_{k+1} \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad a_k + a_{k+1} - a_k \cdot a_{k+1} + k \geq 1 + k \\ &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} \geq k + 1 \end{aligned}$$

e segue o resultado. ■

Agora, podemos concluir a demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Demonstração: Sabemos que $M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n}$, logo, $(M_g)^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, assim:

$$\frac{a_1}{M_g} \cdot \frac{a_2}{M_g} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{a_n}{M_g} = 1.$$

Note que, temos um produto de n parcelas igual a 1. Assim, pelo lema demonstrado anteriormente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{M_g} + \frac{a_2}{M_g} + \cdots + \frac{a_n}{M_g} \geq n \quad &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \cdot M_g \\ &\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq M_g \\ &\Rightarrow \quad M_a \geq M_g, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Do **Teorema 3.2** devemos ter $M_g \geq M_h$. Essa desigualdade segue em decorrência da desigualdade entre as médias geométrica e aritméticas. Vamos à demonstração.

Demonstração: Aplicando a desigualdade $M_a \geq M_g$ para os números reais positivos

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n},$$

obtemos:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}},$$

donde segue

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}}$$

e finalmente

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\geq\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

Note que a igualdade na só ocorre para $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n$. ■

4.4 Desigualdade de Abel

Esta desigualdade que apresentaremos aqui é devida ao matemático norueguês do século XIX **Niels Henrik Abel** (1802, 1829), que leva esse nome em sua homenagem. A Desigualdade de Abel pode ser enunciada do seguinte modo:

Proposição 4.3. *Sejam $n>1$ natural e $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ números reais dados, com $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$. Se M e m denotam respectivamente os elementos máximo e mínimo do conjunto de somas $\{b_1,b_1+b_2,\dots,b_1+b_2+\cdots+b_n\}$, então*

$$ma_1\leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leq Ma_1.$$

Demonstração: Vamos provar inicialmente a desigualdade da direita. A prova da desigualdade da esquerda é análoga, como mostraremos. Seja $s_0=0$ e $s_i=b_1+\cdots+b_i$, para $1\leq i\leq n$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,}^{n}a_ib_i &= \sum_{i=1,}^{n}a_i(s_i-s_{i-1})\\ &= \sum_{i=1,}^{n}a_is_i-\sum_{i=0,}^{n-1}a_{i+1}s_i\\ &= \sum_{i=1,}^{n}(a_i-a_{i+1})s_i+a_ns_n\\ &\leq \sum_{i=1,}^{n}M(a_i-a_{i+1})+Ma_n=Ma_1.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1,}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1,}^{n} a_i(s_i - s_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1,}^{n} a_i s_i - \sum_{i=0,}^{n-1} a_{i+1} s_i \\
&= \sum_{i=1,}^{n} (a_i - a_{i+1}) s_i + a_n s_n \\
&\geq \sum_{i=1,}^{n} m(a_i - a_{i+1}) + m a_n = m a_1.
\end{aligned}$$

■

4.5 Aplicações das Desigualdades na resolução de Problemas de Otimização

Nesta seção apresentamos algumas aplicações das desigualdes supracitadas na resolução de Problemas de Otimização. Os problemas apresentados a seguir envolvem diversas áreas da Matemática básica.

Aplicação 4.1. *Se* $1200cm^2$ *de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensoes para que isso ocorra.*

Solução: Seja A a medida da area da superfície e V a medida do volume da caixa. Se h é a altura da caixa, temos

$$A = x^2 + 4xh = 1200 \text{ e } V = x^2 h.$$

Aplicando desigualdade $M_a \geq M_g$, obtemos:

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xh \cdot 2xh} = \sqrt[3]{4V^2}.$$

Logo,

$$4V^2 \leq 400^3 \text{ ou } V \leq 4000.$$

Esse resultado nos diz que o volume é menor ou igual a $4000cm^3$, e o volume será máximo se, e quando, a igualdade ocorrer. A igualdade acontece quando os termos forem iguais, $x^2 = 2xh$. Resolvendo sistema

$$\begin{cases} x^2 = 2xh \\ x^2 + 4xh = 1200 \end{cases}$$

Obtemos $x = 20cm$ e $h = 10cm$ e constata-se que, de fato, ocorre o valor máximo, $V = 4000cm^3$, para esses valores. ■

Aplicação 4.2. *Sejam a, b e c números reais positivos e suponha que $ax^2 + by^2 = c$, determine x e y reais positivos, tais que $P = xy$ seja máximo.*

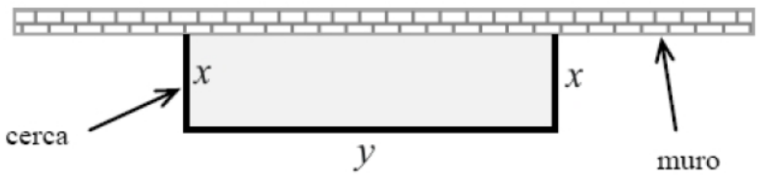
Solução: Utilizando a desigualdade $M_g \leq M_a$, temos,

$$P\sqrt{ab} = \sqrt{ax^2by^2} \leq \frac{ax^2 + by^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Logo, o valor máximo para P ocorre quando $ax^2 = by^2 = \dfrac{c}{2}$, ou seja quando $x = \sqrt{\dfrac{c}{2a}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{c}{2b}}$. ■

Aplicação 4.3. *Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

Figura 1 – Aplicação 3.3



Fonte: (COSTA DA FONTE, P. 54, 2013)

Solução: Conforme indicado na figura temos $2x + y = 40$. Pela desigualdade $M_a \geq M_g$ temos,

$$20 = \frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2A},$$

logo a área será máxima, quando $\sqrt{2A} = 20$. Portanto, $A = 200$, e acontece quando $2x = y = 20$. ■

Aplicação 4.4. *No problema anterior, qual o menor comprimento de cerca necessário para que o fazendeiro cerque uma área de $162m^2$?*

Solução: Aplicando novamente a desigualdade $M_a \geq M_g$, temos

$$\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2A} = \sqrt{324} = 18.$$

o valor mínimo para a cerca acontece quando a igualdade acima ocorrer, ou seja, $2x+y = 36$, com $2x = y = 18$. ■

Aplicação 4.5. *Qual o maior valor possível para $S = sen\,x + cos\,x$, com $x \in \mathbb{R}$?*

Solução: Aplicando a desigualdade $M_a \leq M_q$ temos,

$$\frac{sen\,x + cos\,x}{2} \leq \sqrt{\frac{sen^2 x + cos^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo o valor máximo para S é $\sqrt{2}$ e ocorre quando $sen\,x = cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Aplicação 4.6. *Suponha que $x^2 + y^2 = R^2$, com R ¿ 0. Determine reais positivos x e y tais que $S = x + y$ seja máximo.*

Solução: Aplicando a desigualdade $M_a \leq M_q$. Temos,

$$\frac{S}{2} = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ou seja, S será máximo quando a igualdade ocorrer e isso só acontece quando $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Observação 4.1. *O problema supracitado pode ser interpretado, através da Geometria Analítica, da seguinte forma: "Quais as coordenadas (x, y) de um ponto sobre uma circunferência de centro na origem e raio R, de modo que a soma S = x + y seja máxima ?"*

■

Aplicação 4.7. *Encontre as dimensões de um retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados,do Plano Cartesiano, que esteja inscrito em uma elipse de equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Solução: Como os vértices estão sobre a elipse, as coordenadas satisfazem a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aplicando a desigualdade $M_q \geq M_g$ aos termos $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ temos,

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{y}{b}\right)}.$$

Como a área do nosso retângulo é dada por $A = (2x)(2y)$ temos da desigualdade acima,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{xy}{ab}} \geq \sqrt{\frac{A}{4ab}}.$$

Logo, a área máxima acontece quando a igualdade acima ocorre, ou seja, quando $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ e é igual a $A = 2ab$. Nesse caso temos $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $b = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. ∎

Aplicação 4.8. *Determine o menor e o maior valor da expressão* $2x+3y+6z$ *para valores de* x, y, z *que satisfaçam a condição* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solução: Perceba que condição imposta sobre x, y, z pode ser entendida geometricamente, sendo que esses valores representam coordenadas de um ponto sobre a esfera de centro na origem e raio 1. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, teremos:

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2 + 3 + 6)^2(x + y + z)^2 \Leftrightarrow (2x + 3y + 6z)^2 \leq (49)(1),$$

e, por fim:

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (49).$$

Podemos concluir que a expressão E tem -7 e 7 como valores mínimo e máximo. Contudo, podemos empregar a condição de proporcionalidade para verificar quais x, y, z determinam esses valores. Como os membros da desigualdade de Cauchy se tornam iguais diante da existência de proporcionalidade entre seus termos, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}, \text{ onde } y = \frac{3x}{2} \text{ e } z = 3x.$$

Substituíndo $y = \frac{3x}{2}$ e $z = 3x$ em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e resolvendo em função de x, obtemos as soluções:

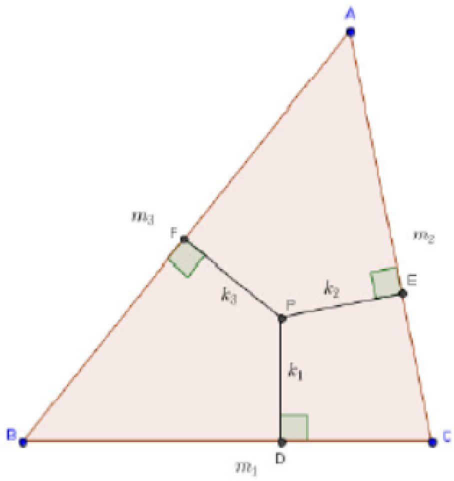
$$\left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7},\right) \text{ e } \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7},\right).$$

Assim, temos que a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ admite como valor mínimo -7 e como valor máximo 7. ■

Aplicação 4.9. *Considere um triângulo de vértices A, B, C. Seja P um ponto interior a esse triângulo, com D, E, e F, sendo pés das perpendiculares aos lados BC, CA, e AB, respectivamente, pelo ponto P. Encontre o ponto P que minimiza a expressão:* $\dfrac{BC}{PD} + \dfrac{CA}{PE} + \dfrac{AB}{PF}$.

Solução: Fazendo $\overline{BC} = m_1, \overline{CA} = m_2$, e $\overline{AB} = m_3$ e $\overline{PD} = k_1, \overline{PE} = k_2$, e $\overline{PF} = k_3$, conforme mostrado na figura 2.

Figura 2 – Triângulo do enunciado



Fonte: (BRITO, P. 23, 2016)

Podemos, ainda, destacar os triângulos BPC, CPA e APB, o que nos possibilitará trabalhar suas áreas em função de m_1, m_2 e m_3 que são suas respectivas bases; e k_1, k_2 e k_3 suas respectivas alturas, como mostrado na figura 3.

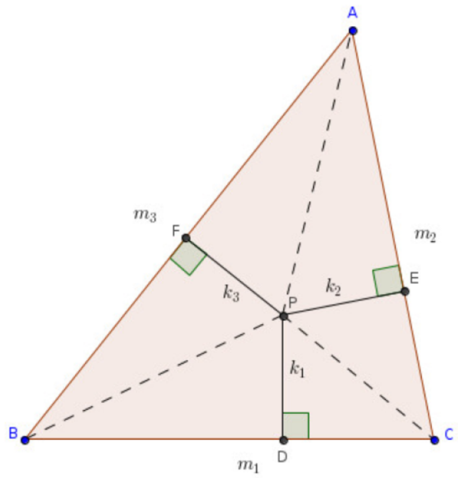
Isto nos dá que a área do triângulo ABC, S_{ABC}, será:

$$S_{ABC} = \frac{m_1 k_1}{2} + \frac{m_2 k_2}{2} + \frac{m_3 k_3}{2}.$$

Ou seja,

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3 = 2 S_{ABC}.$$

Figura 3 – Triângulos BPC, CPA e APB



Fonte: (BRITO, P. 23, 2016)

Ademais, já temos o semiperímetro do triângulo ABC, que $m_1 + m_2 + m_3$. Daí, aplicando a versão alternativa da desigualdade de Cauchy para o caso $n = 3$, teremos:

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 \leq \left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}\right)(m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3),$$

que após feita as devidas substituições, obtemos:

$$P^2 \leq \left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}\right)(2S_{ABC}).$$

Isolando o fator $\left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}\right)$ no primeiro membro dessa desigualdade, temos:

$$\left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}\right) \geq \frac{P^2}{2SABC}.$$

Por outro lado, sabendo que r é o raio da circunferência inscrita, temos que $S_{ABC} = Pr$. Assim, chegamos que:

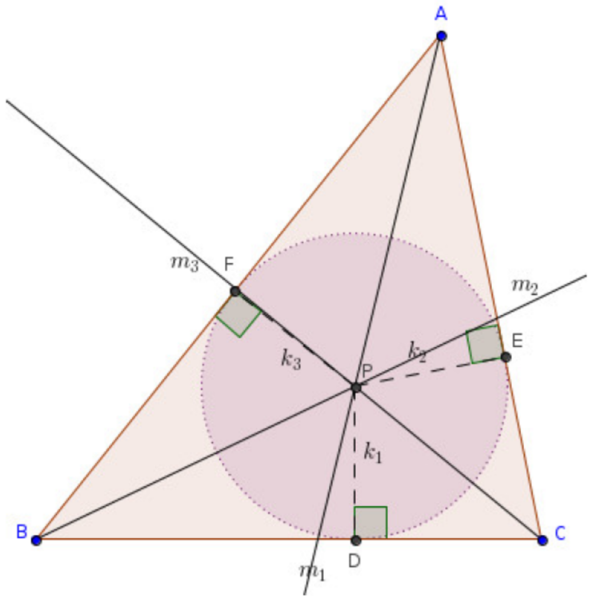
$$\left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}\right) \geq \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2r} = \left(\frac{m_1}{2r} + \frac{m_2}{2r} + \frac{m_3}{2r}\right),$$

em que, $2r = q, q$ real e não nulo. Conforme o enunciado, obtivemos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}} \geq \left(\frac{m_1}{q} + \frac{m_2}{q} + \frac{m_3}{q}\right),$$

donde podemos concluir que a soma $\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$ terá valor mínimo de $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = q$ e essa indentidade só ocorre quando P é incentro, já que tais congruências para o triângulo dado impõem que AP, EP e DP sejam bissetrizes, conforme a figura 4.

Figura 4 – Incentro do Triângulo ABC



Fonte: (BRITO, P. 23, 2016)

5 CÁLCULO DIFERENCIAL E OS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresentamos a fundamentação teórica que servirá de base para resolução de problemas extremais através dos Multiplicadores de Lagrange. Citamos as principais definições e conceitos preliminares acerca das funções de várias variáveis, as quais podem ser vistas com maiores detalhes em STEWART (2016) , MUNEM (1992), GONÇALVES (2007) e em THOMAS (2008).

5.1 Definições Preliminares

Definição 5.1 (Funções reais de Três Variáveis)**.** *Uma função com três variáveis, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ um único número real denotado por $f(x, y, z)$.*

Definição 5.2 (Derivadas Parciais)**.** *Seja f uma função de três variáveis e (x, y, z) um ponto no domínio de f, então as derivadas parciais $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ de f em (x, y, z) em relação à primeira, à segunda e à terceira variável da seguinte forma:*

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta y) - f(x,y,z)}{\Delta z},$$

contanto que os limites existam.

O procedimento para calcular as derivadas parciais é denominado diferenciação parcial.

Definição 5.3 (Derivadas direcionais)**.** *A Derivada Direcional de f em (x_0, y_0, z_0) na direção e sentido do vetor unitário $u = (a, b, c)$ é*

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

se esse limite existir.

Note que, se $u = i = (1, 0, 0)$, então $D_i f = f_x$, se $u = j = (0, 1, 0)$, então $D_j f = f_y$ e se $u = k = (0, 0, 1)$, então $D_k f = f_z$. Ou seja, as derivadas parciais de f em relação a x, y e z são casos particulares da derivada direcional.

Teorema 5.1. *Se f é uma função diferenciável em x, y e z, então f tem derivada direcional na direção e sentido de qualquer vetor $u = (a, b, c)$ e*

$$D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em STEWART (2016).

Analisando o Teorema 4.1 percebemos que a derivada direcional de uma função diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_u f(x,y,z) &= f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c \\ &= (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \cdot (a,b,c) \\ &= (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \cdot u \end{aligned}$$

Perceba que o primeiro vetor do produto escalar é formado pelas derivadas parciais da função $f(x,y,z)$, ao qual, dá-se o nome **Gradiente de** f. Daí, vem a seguinte definição:

Definição 5.4 (Vetor gradiente)**.** *Se f é uma função de três variáveis x, y e z, o gradiente de f é a função vetorial denotada por ∇f e definida por:*

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k.$$

Agora vejamos a seguinte situação: Seja f uma função de três variáveis, considere todas as derivadas direcionais possíveis de f em um ponto dado. Isso nos dará exatamente a taxa de variação de f em todas as direções possíveis. Para saber em qual direção f varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2. *Suponha que f seja uma função diferenciável de três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_u f(x)$ é $|\nabla f(x)|$ e ocorre quando u tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(x)$.*

Demonstração: Sabemos que o produto escalar entre dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é dado por $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)\cos\theta$. Portanto, temos

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \cos\theta$$

Como u é unitário, segue

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \|\nabla f\| \cdot \cos\theta$$

Em que θ é o ângulo formado entre ∇f e u. Daí, vem que o valor máximo desse produto se dá quando $\cos\theta = 1$ e isso ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando u tem o mesmo sentido que f. ∎

5.2 Máximos e Mínimos de funções de três variáveis

Um dos usos mais importantes das derivadas ordinárias são a determinação dos valores máximo e mínimo (valores extremos). Uma função pode apresentar dois tipos de máximos e mínimos: o máximo ou mínimo local, ou seja, onde $f(a,b,c)$ é maior que os valores próximos a uma vizinhança de $f(a,b,c)$, e máximo ou mínimo absoluto, ou seja, é onde $f(a,b,c)$ tem o maior ou menor valor dentre todos os pontos da função f. Daí, vem as seguintes definições:

Definição 5.5. *Seja f uma função de três variáveis. Diz-se que $(x_0,y_0,z_0) \in D(f)$ é ponto de máximo absoluto ou global de f se,*

$$\forall\ (x,y,z) \in D(f), f(x,y,z) \leq f(x_0,y_0,z_0).$$

Diz-se ainda que $f(x_0,y_0,z_0)$ é o valor máximo de f.

Definição 5.6. *Seja f uma função de três variáveis. Diz-se que $(x_0,y_0,z_0) \in D(f)$ é ponto de mínimo absoluto ou global de f se, $\forall\ (x,y,z) \in D(f), f(x,y,z) \geq f(x_0,y_0,z_0)$. Diz-se ainda que $f(x_0,y_0,z_0)$ é o valor mínimo de f.*

Definição 5.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}^3$, chama-se Bola Aberta de centro no ponto $a = (x_0,y_0,z_0)$ e raio $r > 0$, denotado por*

$$B(a;r)$$

ao seguinte conjunto:

$$B(a;r) = \{x \in X\ ;\ d(a,x) < r\}.$$

Definição 5.8. *Seja f uma função de três variáveis. Diz-se que:*

(1) $(x_0,y_0,z_0) \in D(f)$ *é ponto de máximo relativo ou local de f se existir um ponto aberto* $B((x_0,y_0,z_0);r) \mid f(x,y,z) \leq f(x_0,y_0,z_0),\ \forall\ (x,y,z) \in B \cap D(f)$;

(2) $(x_0,y_0,z_0) \in D(f)$ *é ponto de mínimo relativo ou local de f se existir um ponto aberto* $B((x_0,y_0,z_0);r) \mid f(x,y,z) \geq f(x_0,y_0,z_0),\ \forall\ (x,y,z) \in B \cap D(f)$.

5.3 Ponto crítico de uma função de três variáveis

Quando queremos encontrar os pontos críticos de uma função de três variáveis podemos aplicar o teste da primeira derivada que é enunciado da seguinte forma:

Teorema 5.3. *Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (x_0,y_0,z_0) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(x_0,y_0,z_0) = 0$, $f_y(x_0,y_0,z_0) = 0$ e $f_z(x_0,y_0,z_0) = 0$*

Demonstração: Pode ser encontrada em STEWART (2006).

Também é preciso ser capaz de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico. Para isso podemos usar o teste da segunda derivada como enunciado no teorema a seguir.

Teorema 5.4. *Seja f uma função cujas derivadas parciais de primeira e segunda ordem são contínuas em um conjunto aberto que contém (x_0, y_0, z_0) e este seja um ponto crítico de f. Considera-se $H(x, y, z)$ o determinante*

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} = (f_{xx}f_{yy}f_{zz} + f_{xy}f_{yz}f_{xz} + f_{xz}f_{xy}f_{yz}) - (f_{xz}^2 f_{yy} + f_{xy}^2 f_{zz} + f_{yz}^2 f_{xx}).$$

Então,

(1) *Se $H(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$, então $f(x_0, y_0, z_0)$ é um mínimo local;*

(2) *Se $H(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$, então $f(x_0, y_0, z_0)$ é um máximo local;*

(3) *Se $H(x_0, y_0, z_0) < 0$, então (x_0, y_0, z_0) não é extremante local. Nesse caso (x_0, y_0, z_0) é um ponto sela;*

(4) *Se $H(x_0, y_0, z_0) = 0$, nada se pode afirmar.*

Observação 5.1. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

é conhecida como matriz Hessiana. O seu determinante, $H(x, y, z)$, é chamado determinante Hessiano da função f

Além disso vamos analisar quando um ponto de uma função é um extremo absoluto de um conjunto limitado. Um conjunto limitado em $\mathbb{R}^3$ é aquele que está contido em alguma bola aberta, ou seja, ele é finito em extensão. Então, em termos de conjuntos fechados e limitados, podemos enunciar o correspondente ao Teorema do Valor Extremo para três dimensões.

Teorema 5.5 (Teorema do Valor Extremo para as Funções de três Variáveis)**.** *Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^3$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1, z_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2, z_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) de D.*

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D devemos seguir os seguintes passos:

(1) Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D;

(2) Determine os valores extremos de f na fronteira de D;

(3) O maior dos valores dos passos (1) e (2) é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

5.4 Multiplicadores de Lagrange

Não há um método geral para determinar a solução de todas as classes de problemas de otimização sujeita a uma ou mais restrições, haja vista o grau de complexidade que estes podem tomar. Em algumas situações menos complexas, é possível chegar a um resultado explicitando uma variável em função das outras na restrição; substituindo este resultado na função objetivo e resolvendo o problema de otimização irrestrita (ou não restrita) resultante, conforme MARCHAND (2016).

O método dos Multiplicadores de Lagrange permite analisar situações mais gerais, transformando um problema de otimização restrita em um problema sem restrição, através da inserção de um novo parâmetro: o Multiplicador de Lagrange, λ.

5.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange

O método dos Multiplicadores de Lagrange pode ser enunciado da seguinte forma, conforme THOMAS (2006):

Teorema 5.6 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)**.** *Suponha que f e g sejam funções de três variáveis diferenciáveis e*

$$\nabla g \neq \mathbf{0} \quad \textit{quando} \quad g(x,y,z) = 0.$$

Para encontrar os valores máximo e mínimo de f sujeitos à restrição $g(x,y,z) = 0$, encontre os valores de x, y, z e λ que satisfaçam simultaneamente as equações

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad e \quad g(x,y,z) = 0.$$

Demonstração: Perceba que $g(x,y,z)$ é uma superfície S de nível, assim é possível mostrar que S admite, de acordo com as condições dadas, uma parametrização suave do tipo

$$x = h(t), y = m(t), z = n(t)$$

para um t pertencente ao intervalo I. Daí, seja

$$r(t) = xi + yj + zk = h(t)i + m(t)j + n(t)k$$

o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ em S e admitamos que o ponto $P_0(x_0, y_0.z_0)$ em que f tem um extremo seja correspondente a $t = t_0$, ou seja,

$$r(t_0) = x_0 i + y_0 j + z_0 k = h(t_0)i + m(t_0)j + n(t_0)k$$

definindo assim uma função F de uma variável por

$$F(t) = f(h(t), m(t), n(t)).$$

Logo, quando t varia, encontramos valores funcionais $f(x, y, z)$ que correspondem a (x, y, z) em S, ou seja, $f(x, y, z)$ está sujeita ao vínculo $g(x, y, z) = 0$. como $f(x_0, y_0, z_0)$ é um extremo de f, nessas condições, segue-se que, $F(t_0) = f(h(t_0), m(t_0), n(t_0)$ é um extremo de $F(t)$. Assim, $F'(t_0) = 0$. Se encararmos F como uma função composta, então, pela regra da cadeia.

$$F'(t) = f_x(x, y, z)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y, z)\frac{dy}{dt} + f(z)(x, y, z)\frac{dz}{dt}$$

$$= f_x(x, y, z)h'(t) + f_y(x, y, z)m'(t) + f_z(x, y, z)n'(t)$$

e fazendo $t = t_0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)m'(t_0) + f(z)(x_0, y_0, z_0)n'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t). \end{aligned}$$

Isto mostra que o vetor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao vetor $r'(t_0)$ e tangente a S. entretanto, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ é também ortogonal a $r'(t_0)$ porque S é uma curva de nível para g. como $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ são ortogonais ao mesmo vetor, então são paralelos, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ para algum λ. O número λ é chamado **Multiplicador de Lagrange**.

■

A equação $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ pode ser escrita como

$$f_x(x_0, y_0, z_0)i + f_y(x_0, y_0, z_0)j + f_z(x_0, y_0, z_0)k$$

ou ainda

$$\lambda g_x(x_0, y_0, z_0)i + \lambda g_y(x_0, y_0, z_0)j + \lambda g_z(x_0, y_0, z_0)k$$

Isolando as componentes i, j e k e considerando o vínculo $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ chegamos ao seguinte enunciado não vetorial do teorema de Lagrange, em que se supõe que f e g tenham derivadas parciais primeiras contínuas e $g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 \neq 0$, ou seja, g_x, g_y e g_z não são nulas simultaneamente. Daí, temos que, os pontos em que uma função f de três variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo $g(x, y, z) = 0$ estão incluídos entre os pontos (x, y, z) determinados pelas três primeiras coordenadas das soluções (x, y, z, λ) do sistema de equações

$$\begin{aligned} &f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ &f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ &f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ &g(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

Para resolver esse sistema começamos achando todas as soluções

$$(x_1, y_1, z_1, \lambda_1), (x_2, y_2, z_2, \lambda_2), (x_3, y_3, z_3, \lambda_3), \ldots$$

do sistema de equações apresentado. Os pontos em que ocorrem os extremos relativos de f estão entre

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \ldots$$

Assim, os Multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são descartados após achadas as soluções $(x_k, y_k, z_k, \lambda_k)$. Cada ponto (x_k, y_k, z_k) deve ser estudado para que possamos determinar se $f(x_k, y_k, z_k)$ é máximo relativo, mínimo relativo ou nenhum dos dois.

5.6 Aplicação do método dos Multiplicadores de Lagrange na resolução de problemas

Vamos apresentar aqui alguns exemplos de problemas que podem ser resolvidos através do método dos Multiplicadores de Lagrange demonstrado anteriormente.

Aplicação 5.1. *Sejam α, β, e γ ângulos de um triângulo. Use os Multiplicadores de Lagrange para determinar o valor máximo da função $f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ e determine o valor máximo dos ângulos. Em seguida, expresse $f(\alpha, \beta, \gamma)$ em função apenas de α e β.*

Solução: Vamos utilizar o método dos Multiplicadores de Lagrange para resolver esse problema. Queremos encontrar o valor máximo da função $f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ sujeita a restrição $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, pois sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π. Assim vamos calcular as derivadas parciais das funções indicadas.

Segue que:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma;$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma;$$
$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = -\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma;$$
$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 1,\ \frac{\partial g}{\partial \beta} = 1,\ \frac{\partial g}{\partial \gamma} = 1.$$

Portanto,

$$\nabla f = (-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma, -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma, -\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma)$$

$$\nabla g = (1,1,1).$$

Agora, basta resolver a seguinte igualdade:

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

ou seja

$$(-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma, -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma, -\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma) = \lambda(1,1,1)$$

equivalendo a resolver e seguinte sistema

$$-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \lambda$$
$$-\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma = \lambda$$
$$-\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma = \lambda$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma &= -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma \\ &= -\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \end{aligned}$$

Vamos usar a primeira igualdade. Dividindo a igualdade por $\cos\gamma$ temos

$$-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta = -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Agora, dividindo por $-\cos\alpha\cdot\cos\beta$ vem

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

O que implica que $\tan\alpha=\tan\beta$. Aplicando arctan em ambos os lados da igualdade concluímos que $\alpha=\beta$. Usando o mesmo raciocínio na segunda igualdade concluímos que $\beta=\gamma$, e portanto $\alpha=\beta=\gamma$, e pela equação da restrição segue que

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha+\alpha=\pi &\Rightarrow 3\alpha=\pi\\ &\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Por conseguinte, substituindo o valor de α,β e γ na função f, concluímos que

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

é o valor máximo da função f. Para finalizar a resolução do problema vamos escrever $f(\alpha,\beta,\gamma)$ em função de α e β. Note que $\gamma=\alpha$, logo podemos fazer

$$f(\alpha,\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos\beta.$$

■

Aplicação 5.2. *Mostre que o exercício anterior possui a mesma solução para o caso da função* $f(\alpha,\beta,\gamma)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma$.

Solução: Esse exercício é análogo ao anterior. Vamos encontrar o valor máximo da função f sujeita a restrição $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Calculando as derivadas parciais das funções indicadas, temos

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma;$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma;$$

$$\frac{\partial f}{\partial\gamma}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha}=1,\ \frac{\partial g}{\partial\beta}=1,\ \frac{\partial g}{\partial\gamma}=1.$$

Logo,

$$\nabla f=(\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma,\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma,\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\gamma)$$

$$\nabla g=(1,1,1)$$

Daí, resolvendo a igualdade

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

que equivale a resolver o sistema

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma = \lambda$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma = \lambda$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma = \lambda$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

vem que

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \\ &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Dividindo a primeira igualdade por $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma$ temos

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

e portanto $\cot\alpha = \cot\beta$. Aplicando $\cot^{-1}$ em ambos os lados da igualdade concluímos que $\alpha = \beta$. Usando o mesmo raciocínio na segunda igualdade concluímos que $\beta = \gamma$, e portanto $\alpha = \beta = \gamma$, e pela equação da restrição segue que

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \alpha = \pi &\Rightarrow 3\alpha = \pi \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, substituindo o valor de α, β e γ na função f, concluímos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

é o valor máximo da função f. Ademais vamos expressar $f(\alpha, \beta, \gamma)$ em função de α e β. Note que $\gamma = \alpha$, logo podemos fazer

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ &= \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta. \end{aligned}$$

■

Aplicação 5.3. *Um disco circular é a região limitada pela circunferência*

$$C : x^2 + y^2 = 1.$$

Se a temperatura $T(x,y)$, em qualquer ponto do disco, dada em graus celsius, é determinada pela equação $T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$, determine o ponto mais quente e o ponto mais frio do disco.

Solução: Vamos utilizar o método dos Multiplicadores de Lagrange para resolver o problema. Queremos encontrar os valores máximo e mínimo da função T sujeita a restrição $f(x,y) = 0$, em que $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \nabla T &= (2x, 2y) \\ \nabla f &= (4x, 2y - 1) \end{aligned}$$

Queremos determinar os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, na qual vale a seguinte igualdade

$$\nabla T = \lambda \nabla f,$$

e isso equivale a resolver o sistema

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 4x \\ 2y &= \lambda(2y - 1) \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Da primeira equação concluímos que $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 0$. Daí, segue que se $x = 0$, pela terceira equação, temos: $y = \pm 1$. Se $\lambda = \dfrac{1}{2}$, pela segunda equação temos

$$\begin{aligned} 2y = \frac{1}{2} \cdot (2y - 1) \quad &\Rightarrow \quad 2y = y - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2y - y = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

E portanto, pela terceira equação, segue que

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right) \\ &\Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos 4 pontos: $(0,-1), (0,1), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Dentre esses pontos, temos os valores de máximo e de mínimo da função T. Assim, vamos testar cada um deles:

$$\begin{aligned} &\text{Para } T(0,-1) = 2; \\ &\text{Para } T(0,1) = 0; \\ &\text{Para } T\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}; \\ &\text{Para } T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que os pontos mais quentes do disco são $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Ademais, o ponto mais frio do disco é $(0,1)$.
■

Aplicação 5.4. *Mostre que o valor máximo de $f(a,b,c) = a^2b^2c^2$ em uma esfera de centro na origem e raio $r > 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas (a,b,c) é*

$$\left(\frac{r^2}{3}\right)^3.$$

Solução: Vamos usar o método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar o valor máximo da função $f(a,b,c) = a^2b^2c^2$ sujeita a restrição $g(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 = r^2$. Assim, calculando o gradiente das funções f e g temos:

$$\begin{aligned} \nabla f &= (b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2) \\ \nabla g &= (2a, 2b, 2c). \end{aligned}$$

Assim, queremos determinar o ponto da esfera $a^2 + b^2 + c^2 > r^2$ em que o valor de f é máximo, para isso basta resolver a igualdade

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

o que equivale a resolver o sistema

$$\begin{aligned}
b^2c^2 &= \lambda 2a \\
a^2c^2 &= \lambda 2b \\
a^2b^2 &= \lambda 2c \\
a^2 + b^2 + c^2 &= r^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira igualdade por a^2, a segunda por b^2 e a terceira por c^2 vem

$$\begin{aligned}
a^2b^2c^2 &= \lambda 2a^3 \\
a^2b^2c^2 &= \lambda 2b^3 \\
a^2b^2c^2 &= \lambda 2c^3 \\
a^2 + b^2 + c^2 &= r^2,
\end{aligned}$$

o que implica que $\lambda^3 = \lambda^3 = \lambda^3$. Agora, note que, $\lambda \neq 0$, pois se $\lambda = 0$ implicaria que $a = b = c = 0$ o que é um absurdo, pois $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ com $r > 0$. Assim podemos dividir toda igualdade por 2λ. Daí, segue que

$$a^3 = b^3 = c^3,$$

o que implica que

$$a = b = c$$

Agora, substituindo na equação da restrição, temos

$$\begin{aligned}
a^2 + a^2 + a^2 &= r^2 \\
3a^2 &= r^2 \\
a^2 &= \frac{r^2}{3} \\
a = b = c &= \pm\sqrt{\frac{r^2}{3}} = \pm\frac{r}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos os seguintes pontos possíveis

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_2 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_3 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_4 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_5 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_6 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_7 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right);\\
P_8 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

Como $a^2 = (-a)^2$, todos os pontos tem o mesmo valor. Calculando f nesses pontos temos $f(a,b,c) = \left(\frac{r^2}{3}\cdot\frac{r^2}{3}\cdot\frac{r^2}{3}\right) = \frac{(r^2)^3}{3^3} = \left(\frac{r^2}{3}\right)^3$. ■

Aplicação 5.5. *Usando os Multiplicadores de Lagrange, mostre que*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Solução: No capítulo anterior já demonstramos esta desigualdade através de argumentos algébricos, agora vamos demonstrá-la através do método dos Multiplicadores de Lagrange. Assim, podemos perceber que esse método além de resolver os problemas mais atuais acerca da otimização também resolve os problemas mais antigos que já haviam sido resolvidos por outros métodos.

Como já falamos no início do trabalho, nesse tipo de problema as vezes é mais difícil modelar a função que desejamos otimizar do que resolvê-la de fato. Vamos tomar a função $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ sujeita à restrição

$$g(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c,$$

com $x_i > 0$. Calculando o gradiente da função f temos

$$\nabla f = \frac{1}{n}\left((x_1 x_2 \cdots x_n)^{(1/n)-1}(x_2 \cdots x_n), \ldots, (x_1 x_2 \cdots x_n)^{(1/n)-1}(x_1 \cdots x_{n-1})\right)$$

e calculando o gradiente da função g temos

$$\nabla g = (1, 1, \ldots, 1).$$

Agora, para otimizar a função, basta resolver a seguinte equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

que equivale a resolver o sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{(1/n)-1}(x_2\cdots x_n) = \lambda \Rightarrow x_1^{1/n}x_2^{1/n}\cdots x_n^{1/n} = n\lambda x_1\\
&\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{(1/n)-1}(x_1x_3\cdots x_n) = \lambda \Rightarrow x_1^{1/n}x_2^{1/n}\cdots x_n^{1/n} = n\lambda x_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{(1/n)-1}(x_1\cdots x_{n-1}) = \lambda \Rightarrow x_1^{1/n}x_2^{1/n}\cdots x_n^{1/n} = n\lambda x_n
\end{aligned}$$

Esse sistema de equações implica que $n\lambda x_1 = n\lambda x_2 = \cdots = n\lambda x_n$. Note que $\lambda \neq 0$, pois caso contrário não teríamos $x_i > 0$. Portanto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Mas,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c \Rightarrow nx_1 = c \Rightarrow x_1 = \frac{c}{n} = x_2 = x_3 = \cdots = x_n.$$

Logo, o único ponto em que f assume um valor extremo é $\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \cdots, \frac{c}{n}\right)$. Como podemos escolher valores para $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que tornam f tão próximo de zero (mas não igual) quanto quisermos, então f não tem valor mínimo. portanto, o valor máximo é

$$f\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \cdots, \frac{c}{n}\right) = \sqrt[n]{\frac{c}{n} \cdot \frac{c}{n} \cdots \frac{c}{n}} = \frac{c}{n}.$$

$\frac{c}{n}$ é o valor máximo de f, mas

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{c}{n},$$

e como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, obtemos

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Ademais, essas duas médias são iguais quando f atinge seu valor máximo $\frac{c}{n}$, mas isso ocorre apenas no ponto $\left(\frac{c}{n}, \frac{c}{n}, \cdots, \frac{c}{n}\right)$. Ou seja, as médias são iguais apenas quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{c}{n}$. ■

Aplicação 5.6. *Em Economia, um modelo de produção é uma relação matemática entre o produto de uma companhia ou um país e o trabalho e equipamento de capital necessário* *para produzir aquele produto. Muito do trabalho pioneiro no campo de modelos de produção ocorreu em torno de* 1920*, quando Paul Douglas* $(1892-1976)$*, da Universidade de Chicago, e seu colaborador Charles Cobb* $(1875-1949)$ *propuseram que o produto* $f(x,y)$ *pode ser expresso em termos do trabalho* x *e o equipamento de capital* y *por uma equação da forma*

$$f(x,y) = kx^a y^b,$$

em que k *é uma constante de proporcionalidade e* a,b *são números positivos tais que* $a+b=1$*. Isso é chamado de Modelo de Produção de Cobb-Douglas. Suponha que* $f(x,y) = x^{1/5}y^{4/5}$ *e que cada unidade de capital custe* m *reais e cada unidade de trabalho custe* n *reais. Se o total disponível para tais custos é de* p *reais, então* $mx+ny=p$*. Diante disso, determine quantas unidades de trabalho maximizarão a produção.*

Solução: Vamos resolver este problema através do método dos Multiplicadores de Lagrange. Queremos encontrar o valor máximo da função $f(x,y) = x^{1/5}y^{4/5}$ sujeita a restrição $g(x,y) = mx+ny = p$.
Inicialmente vamos encontrar o gradiente das funções dadas. Assim, temos:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{5}x^{-4/5}y^{4/5}, \frac{4}{5}x^{1/5}y^{-1/5}\right) \quad \text{e} \quad \nabla g = (m,n)$$

Agora, resolvendo a equação $\nabla f = \lambda \nabla g$, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5}x^{-4/5}y^{4/5} = \lambda m \\
&\frac{4}{5}x^{1/5}y^{-1/5} = \lambda n \\
&mx + ny = p.
\end{aligned}$$

Dividindo a primeira equação por m e a segunda por n, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^{4/5}}{m} = \lambda \\
&\frac{\frac{4}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/5}}{n} = \lambda \\
&mx + ny = p.
\end{aligned}$$

E, por conseguinte, segue

$$\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^{4/5}}{m} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/5}}{n},$$

então, vem

$$\frac{n \cdot \dfrac{1}{5}}{m \cdot \dfrac{4}{5}} = \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/5}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{4/5}},$$

o que implica que

$$\frac{\dfrac{n}{5}}{\dfrac{4m}{5}} = \frac{x}{y},$$

ou seja,

$$\frac{n}{4m} = \frac{x}{y}$$

E, por conseguinte,

$$4mx = ny \Rightarrow x = \frac{ny}{4m}.$$

Agora, substituindo x na equação da restrição, temos

$$m \cdot \frac{ny}{4m} + ny = p \Rightarrow \frac{ny}{4} + ny = p \Rightarrow \frac{5ny}{4} = p \Rightarrow y = \frac{4p}{5n}.$$

Daí, segue que

$$mx + n \cdot \frac{4p}{5n} = p \Rightarrow x = \frac{p}{5m}.$$

Portanto, a produção é máxima quando tivermos $\dfrac{p}{5m}$ unidades de trabalho. ■

Observação 5.2. *Mesmo que a condição $\nabla f = \lambda \nabla g$ seja necessária para que exista um valor extremo em $f(x,y,z)$ sujeita a restrição $g(x,y,z)$ e $\nabla g \neq 0$ essa condição por si só não garante essa existência ou seja, a condição $\nabla f = \lambda \nabla g$ é necessária, mas não suficiente.*

Vejamos um exemplo que mostra essa situação:

Aplicação 5.7. *Utilizando o método ds Multiplicadores de Lagrange encontre (se possível) o valor máximo da função $f(x,y) = x + y$ sujeita a restrição $xy = 16$.*

Solução: Calculando o gradiente das funções f e g temos

$$\nabla f = (1,1), \ \nabla g = (y,x)$$

Daí, resolvendo a equação $\nabla f = \lambda \nabla g$, segue que

$$1 = \lambda y$$

$$1 = \lambda x$$

$$xy = 16$$

Logo, vem que $x = y = \dfrac{1}{\lambda}$, substituindo em g segue que

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = 16 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = 16 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

Portanto, para $\lambda = \pm\dfrac{1}{4}$, temos $x = 4$ ou $x = -4$. Por outro lado, para $\lambda = \pm\dfrac{1}{4}$, temos $y = 4$ ou $y = -4$. Então, concluímos que os possíveis candidatos a extremos são $(4, 4)$ e $(-4, -4)$. Analisando esses pontos na função f, temos

$$f(4, 4) = 8$$

$$f(-4, -4) = -8$$

Dessa forma, teríamos o valor de máximo de f no ponto $f(4, 4)$ e o valor de mínimo de f no ponto $f(-4, -4)$. Mas perceba que, $(x + y)$ não possui valor máximo na hipérbole $xy = 16$, haja vista, que no primeiro quadrante quanto mais se distancia da origem percorrendo por essa hipérbole maior será o valor da soma $x + y$. ∎

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, cada vez mais tem crescido a busca pelo aumento da eficiência dos processos, sendo assim, a sociedade está sempre procurando obter um melhor aproveitamento do tempo e dos recursos empregados em algum processo.

Diante disso, este trabalho buscou apresentar conceitos e técnicas que mostram que a Matemática é uma ferramenta de grande valia na resolução de problemas extremais, ou seja, problemas que versam a respeito da detrminação de máximos e mínimos, auxiliando, assim, no processo de tomada de decisões. Foram abordados problemas em várias áreas da Matemática, explicitando, assim, a grande versatilidade dessa área de estudo.

Durante o trabalho foi visto que desde o início dos estudos acerca dos Problemas de Otimização, os métodos usados para determinar as soluções ótimas para as questões se desenvolveram significativamente, partindo de procedimentos puramente analíticos até o desenvolvimento de roteiros que fornecem a solução procurada.

Mediante o exposto, considera-se que os objetivos do trabalho foram alcançados, haja vista que, por meio da utilização dos métodos supracitados, obteve-se resultados esperados.

Diante do que foi apresentado, podemos indagar: *qual o próximo passo*? para um aprofundamento do tema, o leitor poderá pesquisar acerca do método dos Multiplicadores de Lagrange para a determinação de soluções ótimas em funções com duas ou mais restrições.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO JUNIOR, F. P. S. *Máximos e mínimos aplicados em geometria.* Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual do Piauí. Terezina, p.15, 2018.

[2] BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda. 1986.

[3] BRITO, F. W. M. *Otimização: uma aplicação para desigualdade das médias e para desigualdade de Cauchy Schwarz* Dissertação (mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal da Pareíba. João Pessoa, p. 23, 2016.

[4] CARTAGENES, E. S. *Desigualdades entre Médias e Aplicações no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Maranhão. São Luis, p.10, 2014.

[5] CORRÊA, S. D. *O USO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: Aplicações no Ensino Médio.* dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas. Campinas, p.16, 2016.

[6] COSTA DA FONTE, A. *Médias, desigualdades e problemas de otimização* dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, p. 23, 2013.

[7] FEITOSA, O.L. *Algumas técnicas de resolução de problemas de mínimo e máximo na geometria euclidiana.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, p.29, p.31, 2015.

[8] FONSECA, R.S. *Problemas de otimização na geometria: uma abordagem para o ensino médio.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Amazonas. Manaus, p.10, 2016.

[9] GALÉEV, E. TIJOMÍROV, V. *Breve curso de la teoría de problemas extremales.* Moscou: MIR, 1991.

[10] GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B.* 2ª. ed. São Paulo: Pearson, Prentice Hall, 2007.

[11] GONZÁLEZ, M.T.; SANTIAGO, A. *ENTRE EUCLIDES E A ACTUALIDADE: UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.* Researchgate, Lisboa, jan. de 2013. disponível em: https://www.researchgate.net/publication/292994526_ENTRE_EUCLIDES_E_A_ACTUALIDADE_UM_PROBLEMA_DE_OTIMIZACAO. Acesso em: 21 de fev. de 2021.

[12] MARCHAND, L. *Multiplicadores de Lagrange: uma aplicação em problemas de otimização global restrita.* Dissertação (Mestrado), Universidde Federal do Rio Grande. Rio Grande, p. 24, 2016.

[13] MORGADO, A. C., PINTO, P. C. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[14] MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. *Cálculo, Volume* 2. Rio de Janeiro: Guanabara, 1982.

[15] PEDROSO, H. A. PEREIRA, J. C. P *Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica* C. Q. D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru. Vol. 2. N.1, p.32-48, Jul.2003.

[16] POMPEU, O. D. *Fundamentos de Matemática Elementar* Vol. 9. São Paulo: Atual. 1980.

[17] STEWART, J. *Cálculo: volume* 2. 5ª. ed. São Paulo: Thomson, 2006.

[18] THOMAS, G. B. *Cálculo: volume* 2. 11ª ed. São Paulo: pearson, 2008.