UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDSON RIBEIRO DA COSTA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU NO NONO ANO: REFLEXÕES SOBRE EXPERIÊNCIAS METODOLÓGICAS COM JOGOS

CAMPINA GRANDE - PB
2021

EDSON RIBEIRO DA COSTA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU NO NONO ANO: REFLEXÕES SOBRE EXPERIÊNCIAS METODOLÓGICAS COM JOGOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes.

CAMPINA GRANDE - PB
2021

C837e Costa, Edson Ribeiro da.

Ensino e aprendizagem da equação do segundo grau no nono ano [manuscrito] : reflexões sobre experiências metodológicas com jogos / Edson Ribeiro da Costa. - 2021.

43 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.

"Orientação : Profa. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Jogos matemáticos. 2. Equação do segundo grau. 3. Ensino de Matemática. 4. Ensino-aprendizagem. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

EDSON RIBEIRO DA COSTA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU NO NONO ANO: REFLEXÕES SOBRE EXPERIÊNCIAS METODOLÓGICAS COM JOGOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado em Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 03/12/2021

BANCA EXAMINADORA

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ma. Joselma Soares dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre iluminar o meu caminho, e me dar forças para enfrentar as dificuldades da vida.

À minha família, em especial aos meus pais Francisca, Mauricio e Pereira (padrasto), e a minha irmã Edilma, por sempre me darem apoio moral e financeiro, pois sem eles eu não teria alcançado esta conquista.

Ao meu amigo João por sempre torcer pelo meu sucesso.

Aos meus colegas tanto do curso de licenciatura em matemática como de outros cursos, pela troca de conhecimentos e esclarecimentos de dúvidas ao longo dessa caminhada.

A todos os professores tanto do curso como do ensino básico que tive o prazer de me ensinarem, que contribuíram para todo o meu processo de aprendizagem.

A minha orientadora profª. MA Maria da Conceição Vieira Fernandes que mesmo diante dos desafios da profissão, contribuiu com afinco e dedicação para a realização deste trabalho, sempre esclarecendo minhas dúvidas.

A Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), por me proporcionar uma formação profissional de qualidade, com funcionários competentes.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de formação.

RESUMO

A equação do segundo grau, que vem sendo desenvolvida através dos tempos e que atualmente é estudada pelos alunos do nono ano, apresenta alguns métodos de resolução que causam dificuldades de aprendizagem por possuírem várias manipulações algébricas, porém, existem metodologias que podem auxiliar no enfrentamento das mesmas, e uma delas, pode ser a utilização de jogos matemáticos, que se forem aplicados de forma correta, podem trazer benefícios para o ensino e a aprendizagem desse assunto. O que nos levou a formular a seguinte questão norteadora: Em que medida os jogos matemáticos contribuem na aprendizagem da equação do segundo grau vista no nono ano? Partindo dessa problemática, este trabalho tem como objetivo refletir sobre as contribuições da utilização dos jogos matemáticos na aprendizagem da equação do segundo grau em turmas do nono ano. Para isso, procuramos entender a equação do segundo grau através de uma abordagem histórica e em seguida, apresentamos sua presença nos dias atuais em documentos oficiais, tanto do ponto de vista do ensino como dos assuntos abordados no nono ano, após isso, identificamos quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos nesse conteúdo, com possíveis erros cometidos e fatores que colaboram para essas dificuldades, e as vantagens que os jogos matemáticos proporcionam na aprendizagem. Foram estudados três trabalhos que contém aplicação de jogos com turmas do nono ano em suas pesquisas, e por fim, realizamos algumas considerações acerca das contribuições dos jogos identificadas durante a pesquisa onde percebemos dentre elas, motivacional, social, interdisciplinaridade, raciocínio lógico e indutivo.

Palavras- chave: Jogos matemáticos. Equação do segundo grau. Ensino e aprendizagem. Ensino de matemática.

ABSTRACT

The high school equation, which has been developed over time and which is currently being studied by ninth grade students, presents some resolution methods that cause learning difficulties because they have several algebraic manipulations, however, there are methodologies that can help in coping with the themselves, and one of them may be the use of mathematical games, which, if applied correctly, can bring benefits to the teaching and learning of this subject. Which led us to formulate the following guiding question: To what extent do mathematical games contribute to learning the second degree equation seen in the ninth grade? Based on this issue, this work aims to reflect on the contributions of the use of mathematical games in learning the high school equation in ninth grade classes. For this, we tried to understand the equation of high school through a historical approach and then present its presence today in official documents, both from the point of view of teaching and the subjects covered in the ninth grade, after that, we identify which are the difficulties faced by students in this content, with possible mistakes made and factors that contribute to these difficulties, and the advantages that mathematical games provide in learning. Three works that contain application of games with ninth grade classes in their research were studied, and finally, we made some considerations about the contributions of the games identified during the research where we noticed among them, motivational, social, interdisciplinary, logical reasoning and inductive.

Keywords: Mathematical games. Second degree equation. Teaching and learning. Mathematics teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Meu interesse pelo tema surgiu devido a experiência que tive como aluno do nono ano, em observar que minha turma apresentou dificuldades de compreender o conteúdo de equação do segundo grau e também como discente do curso de graduação em matemática, por ter trabalhado um jogo envolvendo esse assunto na disciplina de laboratório no ensino de matemática II, onde percebi a possibilidade dos jogos poderem auxiliar na aprendizagem desse conteúdo para amenizar essas dificuldades de compreensão.

A equação do segundo grau atualmente é vista pelos alunos no nono ano, sendo um dos conteúdos mais difíceis de compreender, por se tratar de um assunto com várias manipulações algébricas em seus métodos de resolução, com isso, surge a necessidade de serem adotadas novas metodologias e recursos que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais- PCNs:

> Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão; (BRASIL, 1998, p. 57)

Dentre esses estão os jogos, que se forem bem utilizados de maneira correta, com planejamento, objetivo e dedicação podem gerar resultados significativos no processo de ensino e aprendizagem. Esta temática nos levou a levantar o seguinte problema: Em que medida os jogos matemáticos contribuem na aprendizagem da equação do segundo grau vista no nono ano?

Com base neste problema, este trabalho tem como objetivo de refletir sobre as contribuições da utilização dos jogos matemáticos na aprendizagem da equação do segundo grau em turmas do nono ano. Para isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica em anais de eventos científicos, na busca de autores que trabalharam com jogos matemáticos baseados na equação do segundo grau e utilizaram em turmas do nono ano através de suas pesquisas. Após selecionarmos os trabalhos, com uma abordagem qualitativa e um propósito descritivo, realizamos um estudo de ambos, destacando características similares e particularidades das contribuições dos jogos na aprendizagem dos alunos.

Mas para alcançarmos nosso objetivo foi necessário no capítulo 2 conceituar a equação do segundo grau através do seu surgimento e importância do ponto de vista histórico, com a contribuição das comunidades e matemáticos da época, com suas aplicações em resoluções de problemas e métodos de resolução.

O capítulo 3 apresenta o ensino nos dias atuais de acordo com documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular- BNCC que recomenda para esse conteúdo no nono ano, a compreensão dos processos de fatoração e expressões algébricas dos produtos notáveis para formulação e resolução de problemas, a organização nos livros didáticos com relação a definição e os métodos de resolução, e a presença de questões desse assunto em provas nacionais.

O capítulo 4 busca identificar quais as dificuldades encontradas na aprendizagem da equação do segundo grau no nono ano através de erros cometidos por alunos e fatores que colaboram com essas dificuldades.

O capítulo 5 apresenta a interpretação do que é jogo, sua classificação, características e vantagens que podem contribuir na aprendizagem, assim como, dificuldades que podem surgir ao utilizar nas aulas.

Em sequência, o capítulo 6 elabora os procedimentos da pesquisa com as ferramentas necessárias para sua execução e estudar os trabalhos selecionados através de reflexões das experiências metodológicas obtidas com o uso dos jogos. Por fim, o capítulo 7 expõe as considerações finais da pesquisa, com observações e objetivos alcançados.

2 SURGIMENTO E IMPORTÂNCIA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Neste capítulo, para conceituarmos a equação do segundo grau, optamos por voltar ao passado e investigar seu surgimento, os matemáticos que contribuíram para sua existência, e as comunidades que vivenciaram seu desenvolvimento.

2.1 A equação do segundo grau

O surgimento da equação do segundo grau se deu através da participação de vários estudiosos e de alguns países, que desde a antiguidade, em problemas do dia a dia daquela época, começavam a formular estes em equações quadráticas, como veremos em seguida.

De acordo com Pedroso (2010), os historiadores acreditam que por volta de 1950 A.C, os egípcios já dominavam algumas técnicas de resolução de problemas[1], registrados em papiros, entre os quais podemos destacar: *Rhind*, Moscou, Berlim e *Kahun*, onde neste último, foram encontrados indícios do método da falsa posição, que nos dias de hoje conhecemos como sendo $x2 + y2 = k$, onde k é um número positivo.

Figura 1: papiro de kahun

Fonte: http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm

Já os demais, traziam alguns problemas envolvendo equações do segundo grau.

[1] Resolução de problemas é a utilização de métodos matemáticos para solucionar impasses específicos do cotidiano.

> A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desses quadrados.
> Em simbologia atual o sistema de equações que representa o problema é
> $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$$
> A seguir o procedimento retórico dado pelo escriba para a resolução do problema:
> 1. Tome $x = 3$, então, $y = 4$
> 2. Assim, $32 + 42 = 25 \cdot (25 \neq 100)$
> 3. $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$
> 4. $10 \div 5 = 2$
> 5. Os lados são $2 \times 3 = 6\ e\ 2 \times 4 = 8$. (Papiro de Berlim)
> (PEDROSO, 2010, p. 2).

Também os babilônios por volta de 1700 A.C, através de tábuas de argila e palavras, registraram em forma de receitas, problemas cuja raiz era somente uma e positiva, sendo que nessa época não conheciam ainda os números negativos.

Figura 2: tábua de argila

Fonte: https://matematica.br/historia/babilonia.html

Pitombeira (2004) nos traz na linguagem atual, um dos problemas encontrados que envolvem a equação do 2º grau que é encontrar o lado de um quadrado sabendo que sua área menos seu lado resulta em 870, ou seja, $x2 - x = 870$, considerando um quadrado cuja medida do lado é x.

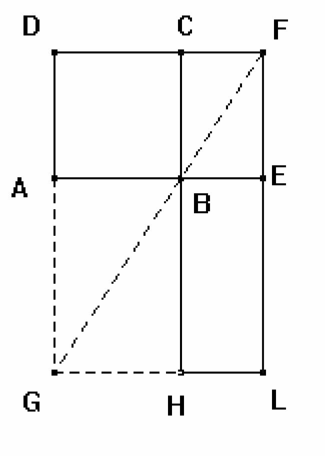
Como os babilônios não possuíam conhecimento das formulações algébricas, eles faziam descrições de como resolver o problema: tome a unidade: 1, divida a unidade em duas partes: $1/2$, cruze (multiplique) $1/2$ por $1/2$: $1/4$, some $1/4$ com 870: $3481/4$, isso é o quadrado de $59/2$, some $1/2$ que você multiplicou, com 59: o lado do quadrado é $30/2$.

Já os gregos entre 500 a 200 A.C, utilizando-se da geometria de Euclides, relacionaram medidas de figuras geométricas para montar situações envolvendo a equação do segundo grau, além de evidentemente, utilizar propriedades da própria geometria euclidiana, para encontrar uma única raiz positiva.

Ainda de acordo com Pitombeira (2004), o método utilizado pelos gregos para resolver equações do 2º grau, era a aplicação de áreas, que como exemplo, temos a aplicação de áreas parabólicas que consistia em um retângulo com área definida sobre um segmento com comprimento conhecido, que na nossa linguagem fica da seguinte maneira: Considerando a o lado do retângulo e b^2 sua área, o problema se resume na equação $ax = b^2$.

Para achar sua solução, considere ABCD um quadrado e b sendo o valor do lado. Prolonguemos de AB até E de forma que, o comprimento de BE seja a. Façamos a complementação do quadrado ABCD em relação a BE, obtendo o retângulo DGLF, sendo que a diagonal FG passa por B. Seja x o comprimento de BH. Note que à área do quadrado ABCD é igual à área do retângulo BELH, no qual, BE é um dos lados, e sendo assim, $ax = b^2$.

Figura 3: retângulo $DGLF$



Fonte: http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf

Os hindus contribuíram muito para a formulação da equação do segundo grau, com os matemáticos *Aryabhata* (476-550), *Brahmagupta* (598-668), *Sridhara* (870-930) e *Bhaskara* (1114-1185), que mais se destacou por criar a solução geral da equação $x^2 = 1 + py^2$ e de várias outras equações diofantinas[2]. Contribuiu para o desenvolvimento da notação algébrica e de abreviações. Produziu seis obras ao todo, entre as quais se destacam *Lilavati* e *Vija-ganita* que trazem problemas sobre equações lineares e quadráticas, mensuração, progressões aritméticas e

[2] Equação diofantina é uma equação polinomial composta de duas ou mais variáveis cuja suas soluções são permitidas apenas valores inteiros.

geométricas, radicais, ternas pitagóricas, regra de três e muitos outros tópicos da época.

A fórmula de *Bhaskara* que conhecemos não é propriamente sua, de acordo com ele, *Sridhara* foi quem criou a regra que originou essa fórmula. Em sequência, apresentamos um exemplo de como encontrar a solução geral da equação do segundo grau com base em um dos problemas da época:

> Bhaskara apresentou a solução de equações do 2º grau ao resolver problemas de ordem comercial/financeira. Apresentamos um deles com linguagem de hoje:
> Um capital de 100 foi emprestado a uma certa taxa de juro ao ano. Após 1 ano, o capital foi retirado; e o juro obtido foi aplicado durante mais 1 ano. Se o juro total foi de 75, qual foi a taxa ao ano?
> Sendo essa taxa $x\%$, tem-se que o juro no 1° ano será de x e no 2° ano será de $x.x/100$, ou seja, a equação em linguagem algébrica hoje seria: $x + x.x/100 = 75$ ou $x^2 \ + 100x - 7500 = 0$.
> E a solução era enunciada também em palavras, o que seria, na linguagem atual, algo como:
> Eleve a metade do capital (coeficiente de x) ao quadrado, acrescente o resultado ao produto dos juros totais (termo independente) pelo capital, extraia a raiz quadrada e diminua a metade do capital, o que leva à solução procurada ($\sqrt{50^2 + 75x100} - 50 = 50$). (FRAGOSO, 2000, p. 22).

Entre os árabes destaca-se o matemático *Mohamed Ibn- Musa Al-Khowarizmi* (780-850), que em sua obra intitulada de *Hisab al- jabr wa'lmuqabalah* escrito em 825, nos traz a equação do 2º grau com sua resolução de forma retórica e o método de completar quadrados, que se utilizava da geometria plana para solucionar problemas associando valores numéricos e incógnitas com figuras geométricas, mas diferentemente dos gregos, a ideia era adicionar quadrados para encontrar duas raízes positivas. Como exemplo da resolução retórica, temos no capítulo IV dessa obra, a apresentação e resolução da equação $x^2 + 10x = 39$:

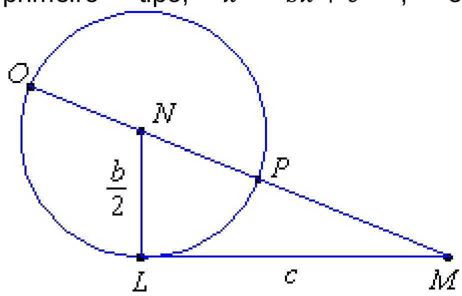
> Por exemplo: um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares; ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez de suas próprias raízes, é equivalente a trinta e nove?
> A solução é: tome a metade do número de raízes, o que neste exemplo é igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes, que é quatro. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove. (PITOMBEIRA, 2004, p.26).

Na China, em 1303, o matemático *Chu Shih Chieh* (1249-1314), em seu trabalho *Ssu- yÜ na yá- chieng*, apresenta o método *fan- fan* que consistia em aproximações sucessivas, onde era encontrada uma única raiz positiva. Mas em 1819, o inglês *William George Horner* reivindicou esse método e o renomeou de *horner*.

Na Europa ocidental, surgiram vários matemáticos que construíram diferentes formas de resolução para a equação do segundo grau, onde os que mais se destacaram foram: O francês *François Viète* (1540-1603), que através da mudança de variáveis, transformava a equação dada, considerando novas variáveis u e v em uma equação incompleta da forma $x = u + v$. De acordo com Pedroso (2010), os passos que eram utilizados para resolver a equação do tipo $x^2 + 2ax = b$, em relação a escrita atual eram:

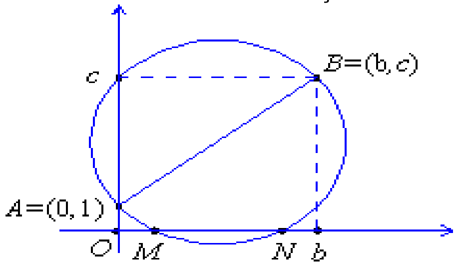
1. Considere $x + a = u$
2. Logo $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. Através da equação dada, fazemos a substituição por b no passo 2, sendo assim, $u^2 = b + a^2$
4. Temos $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$ e $x = \sqrt{b + a^2} - a$.

Temos também *René Descartes* (1596-1650), que se baseando na geometria e utilizando o símbolo da igualdade, desenvolveu o seguinte método:

> Descartes resolve equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do primeiro tipo, $x^2 = bx + c^2$, ele usou o seguinte método:
>
> 
>
>
> Traça-se um segmento LM, de comprimento c, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a $b/2$ e perpendicular a LM. Com centro em N, construímos um círculo de raio $b/2$ e traçamos a reta por M e N que corta o círculo em O e P. Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triangulo retângulo MLN, se $OM = x$, tem-se: $(x - b/2)^2 = (b/2)^2 + c^2$ e daí: $x^2 - bx = c^2$. (FRAGOSO, 2000, p. 24).

E por fim, no século XVIII, o inglês *Sir Jonh Leslie* (1766-1832) que, utilizando-se de figuras geométricas no plano cartesiano, em sua obra, *Elements of Geometry*, nos traz outro método de resolução de problemas, que consistia em utilizar o plano cartesiano e o círculo para encontrar as raízes. Sendo uma equação quadrática do tipo $x^2 - bx + c = 0$, utilizando o plano cartesiano, marcamos os pontos $A = (0,1)$ e $B = (b, c)$, com isso, traçamos o círculo de diâmetro AB. Os pontos de interseção do círculo com eixo X são as raízes da equação.

FIGURA 4: Método de resolução de Leslie



Fonte: https://www.rpm.org.br/cdrpm/43/4.htm

Após esta viagem no tempo sobre os métodos de resolução, no próximo capítulo falamos como a equação do segundo grau está organizada no ensino brasileiro em documentos oficiais, em livros didáticos do nono ano e sua presença em avaliações nacionais.

3 O ENSINO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Neste capítulo, veremos como a equação do segundo grau é vista de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), quais métodos são vistos nos livros didáticos do nono ano e sua presença em provas de âmbito nacional.

3.1 O ensino e presença da equação do segundo grau em documentos oficiais

Nos dias atuais, de acordo com a BNCC (2018), a equação do segundo grau é estudada nos 8º e 9º anos do ensino fundamental e no 1° ano do ensino médio, onde no 8º ano, os alunos estudam a equação polinomial de segundo grau do tipo $ax^2 = b$ e no 9º ano, resoluções de equações do segundo grau por meio de fatorações.

No 8º ano, a BNCC (2017) propõe que os professores trabalhem, com ou sem uso de tecnologias, a resolução e a elaboração de problemas que possibilitem serem representados por equações de segundo grau do tipo $ax^2 = b$. Já em relação ao 9º ano, há a recomendação de que os alunos compreendam os processos de fatoração e de expressões algébricas com relação aos produtos notáveis, para a resolução e a elaboração de problemas que possam ser representados por equações do segundo grau.

3.2 Definição e métodos de resolução vistos nos livros didáticos do 9º ano

Os livros matemáticos didáticos do nono ano que escolhemos para definirmos e apresentarmos os métodos de resolução da equação do segundo grau foram Bianchini (2015) e Silveira (2015), onde este define a equação do segundo grau da seguinte forma:

“Denominamos **equação do 2° grau** na incógnita x aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$.” (SILVEIRA, 2015, p. 45)

Método da fatoração: Silveira (2015), nos traz esse conteúdo através de exemplos, onde um deles é como achar as raízes da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$. Demonstremos essa resolução:

Observe que o primeiro membro dessa equação se trata de um trinômio quadrado perfeito, logo:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 - 2.x.5 + 5^2 = 0.$$

Agora, podemos reduzir a um produto notável e, consequentemente, a sua forma fatorada:

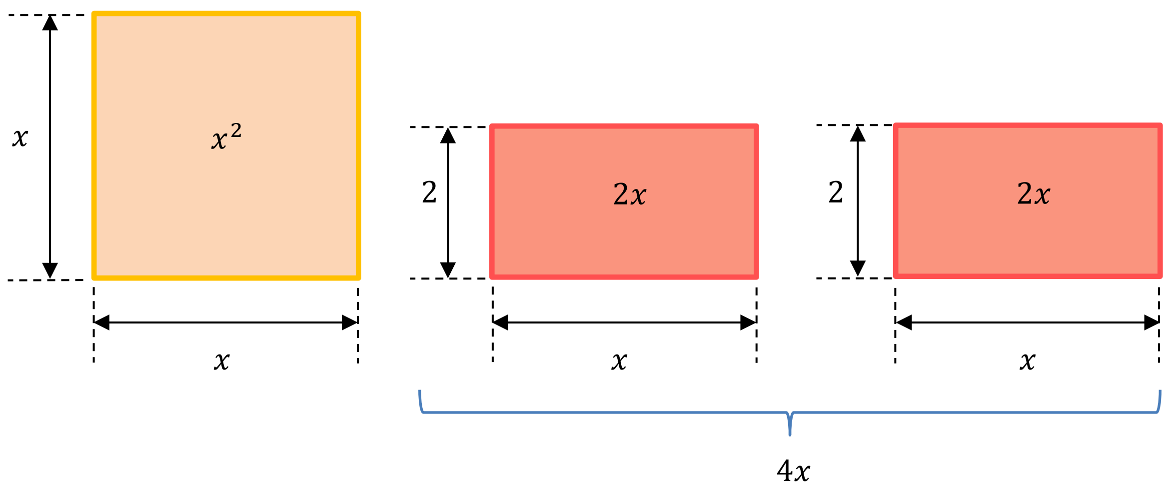
$$(x - 5)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \ (x - 5).(x - 5) = 0.$$

Como os fatores resultantes foram iguais, temos duas raízes reais e iguais a 5.

Método de completar quadrados: Bianchini (2015) aborda esse assunto com exemplos mostrando também a parte geométrica para a compreensão do método, como veremos a seguir:

Encontremos a solução da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$.

E representaremos sua forma geométrica:



Em seguida, agruparemos as figuras acima de modo que formem um único quadrado que é a figura 1. Note que a o quadrado em branco tem medidas 2 de lados, de acordo com as medidas dos dois retângulos em comum, e sendo assim, possui área de 2^2, e de acordo com esses dados, temos a figura 2, um quadrado perfeito.

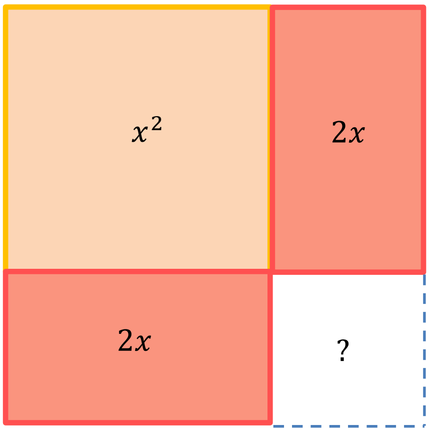


Figura 1

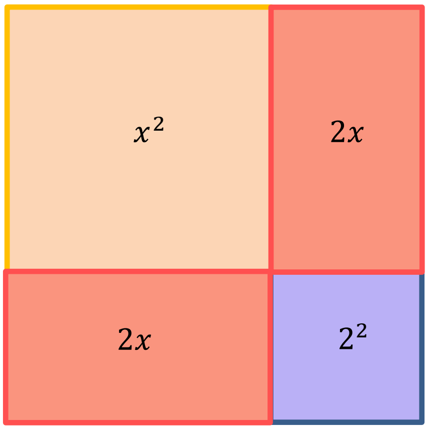


Figura 2

Somando 2^2 nos dois membros da igualdade, teremos um quadrado perfeito:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$
$$\Longrightarrow\ x^2 + 4x + 4 = 21 + 4$$
$$\Longrightarrow\ x^2 + 4x + 4 = 25.$$

Fazendo a fatoração do primeiro membro da última igualdade:

$$(x + 2)^2 = 25$$
$$\Longrightarrow\ x + 2 = \pm\sqrt{25}$$
$$\Longrightarrow\ x + 2 = \pm 5.$$

Logo, as raízes são:

$$x + 2 = 5$$
$$\Longrightarrow\ x = 5 - 2$$
$$\Longrightarrow\ x = 3.$$

ou

$$x + 2 = -5$$
$$\Longrightarrow\ x = -5 - 2$$
$$\Longrightarrow\ x = -7.$$

Vale salientar nesse método, que as figuras utilizadas ajudam o aluno a compreender e interpretar os dados da questão.

Método de resolução convencional: Ainda, em relação a Bianchini (2015), nesse conteúdo, nos é apresentado como a fórmula de resolução é obtida a partir da equação completa do segundo grau, que mostraremos a seguir.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Subtraindo c nos dois lados da igualdade, temos:

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$$
$$\Longrightarrow \; ax^2 + bx = -c.$$

Com isso, multiplicaremos a expressão por $4a$:

$$4a.(ax^2 + bx) = 4a(-c)$$
$$\Longrightarrow \; 4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Adicionando b^2 em ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Note que temos um quadrado perfeito no primeiro membro, logo podemos fazer a fatoração:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Longrightarrow \; 2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$$
$$\Longrightarrow \; 2ax = -b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}.$$

Por fim, basta isolarmos x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta é a fórmula resolutiva da equação do segundo grau ou fórmula de *Bhaskara*, onde $b^2 - 4ac$ é conhecida como discriminante e representada por $\Delta = b2 - 4ac$.

Observe que;

i) Se $\Delta \geq 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas.

ii) Se $\Delta = 0$, a fórmula resulta em $x = \frac{\pm\, b}{2a}$, obtendo- se duas raízes reais e iguais.

iii) Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, devido a não estar definida no conjunto dos números reais para valores de Δ negativos.

Bianchini (2015) também nos traz as relações de *Girard*, com suas demonstrações e a composição destas em uma equação do segundo grau.

Relação da soma: Seja S a soma das raízes de uma equação do segundo grau, logo:

$$S = x1 + x2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} + \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{(\Delta)} - b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(-2b)}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

Relação do produto: Considere P o produto entre as raízes da equação do segundo grau, então:

$$P = x1.x2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Agora que conhecemos as relações de Girard, podemos descobrir a composição da equação do segundo grau.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Fazendo a divisão por a:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$
$$\Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Pelas relações de *Girard*, obtemos:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

3.3 A presença da equação do segundo grau em avaliações nacionais

Ela está presente em avaliações de nível nacional, no formato de questões contextualizadas em função de representações de problemas, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Exame Nacional do Ensino Médio- ENEM (2015).

> Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, $R\$\,300{,}00$. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação
> $$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.
A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.
O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:
a) $R\$\,0{,}50 \leq p < R\$\,1{,}50$
b) $R\$\,1{,}50 \leq p < R\$\,2{,}50$
c) $R\$\,2{,}50 \leq p < R\$\,3{,}50$
d) $R\$\,3{,}50 \leq p < R\$\,4{,}50$
e) $R\$\,4{,}50 \leq p < R\$\,5{,}50$
(ENEM 2015, caderno amarelo, questão 157).

Solução: Sabendo que a padaria vende em média 100 pães especiais por dia e arrecada em média, $R\$\,300{,}00$, podemos perceber que na situação atual, o preço de um pão é:

$$p = \frac{300}{100}$$

$$\Longrightarrow\ p = R\$\,3{,}00.$$

Então, o novo preço deverá ser menor que $R\$\,3{,}00$.

Sendo $q = 400 - 100p$, a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais, ao final do dia o valor arrecadado será:

$$p.(400 - 100p) = 300$$

$$\Longrightarrow\ 400p - 100p^2 = 300$$

$$\Longrightarrow\ 100p^2 - 400p + 300 = 0.$$

Fazendo a divisão por 100 de ambos os membros da última igualdade, obtemos:

$$p^2 - 4p + 3 = 0.$$

Utilizando o método da fatoração, temos:

$$p^2 - 4p + 3 + 1 = 0 + 1$$

$$\Longrightarrow p^2 - 4p + 4 = 1$$

$$\Longrightarrow p^2 - 2.2.p + 2^2 = 1$$

$$\Longrightarrow (p - 2)^2 = 1^2.$$

Pelo fato de termos uma igualdade entre dois quadrados:

$$(p - 2)^2 - 1^2 = 0$$

$$\Longrightarrow\ [(p-2+(+1))].[(p-2+(-1))]=0$$
$$\Longrightarrow\ (p-1).(p-3)=0.$$

Com isso, encontramos as raízes:

$$p-1=0$$
$$\Longrightarrow\ p=1.$$

Ou

$$p-3=0$$
$$\Longrightarrow\ p=3.$$

Para que a quantidade de pães vendida diariamente seja a maior possível sem diminuir a média de arrecadação desse produto, o preço do pão deve ser de $R\$\ 1{,}00$, pois vimos no inicio da solução que o preço deve ser menor que 3. Portanto a alternativa correta é a letra A).

Exemplo 2: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas- OBMEP (2013).

> O número de alunos matriculados na Escola Municipal de Pirajuba permanece o mesmo desde 2011. Em 2012, foram construídas 5 novas salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 6 alunos em relação à média de 2011. Em 2013, foram construídas mais 5 salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 5 alunos em relação à média de 2012. Quantos alunos tem a Escola Municipal de Pirajuba?
> A) 3150
> B) 3180
> C) 3240
> D) 3300
> E) 3350
> (OBMEP 2013, nível 3, questão 18).

Solução: Considere y o número de alunos e x a quantidade de salas de 2011. Sabendo que o número de alunos matriculados desde 2011 é o mesmo, obtemos a seguinte relação para a metade de alunos por sala de 2011 a 2012:

$$\frac{y}{x+5}=\frac{y}{x-6}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{y}{x+5}=\frac{y-6x}{x}$$
$$\Longrightarrow\ (y-6x).(x+5)=x.y$$

$$\Rightarrow (x.y) - 6x^2 + 5y - 30x = x.y$$
$$\Rightarrow (x.y - x.y) - 6x^2 - 30x + 5y = 0$$
$$\Rightarrow 6x^2 + 30x = 5y. \quad (i)$$

Da maneira análoga de 2012 a 2013:

$$\frac{y}{x+10} = \frac{y}{x+5} - 5$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x+10} = \frac{y - 5x - 25}{x+5}$$
$$\Rightarrow (y - 5x - 25).(x + 10) = y.(x + 5)$$
$$\Rightarrow (x.y) - 5x^2 - 25x + 10y - 50x - 250 = (x.y) + 5y$$
$$\Rightarrow (x.y - x.y) - 5x^2 - 25x - 50x - 250 = 5y - 10y$$
$$\Rightarrow -(5x^2) - (75x) - 250 = -5y$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 75x + 250 = 5y. \quad (ii)$$

Fazendo a divisão por 5 de ambos os membros da última igualdade, temos:

$$x^2 + 15x + 50 = y. \quad (iii)$$

Observe que as equações (i) e (ii) encontradas, representam o valor de $5y$, ou seja, podemos fazer a igualdade entre as duas:

$$6x^2 + 30x = 5x^2 + 75x + 250$$
$$\Rightarrow 6x^2 - 5x^2 + 30x - 75x - 250 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 45x - 250 = 0.$$

Agora, encontremos as raízes da equação:

$$x^2 - 45x - 250 = 0.$$

Temos,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow \Delta = (-45)^2 - [4.1.(-250)]$$
$$\Rightarrow \Delta = 2025 + 1000$$
$$\Rightarrow \Delta = 3025$$

e

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{45 \pm \sqrt{3025}}{2.1}$$
$$\Longrightarrow\ x = \frac{45 \pm 55}{2}.$$

Com isso, encontramos as duas raízes:

$$x1 = \frac{45 - 55}{2}$$
$$\Longrightarrow\ x1 = \frac{(-10)}{2}$$
$$\Longrightarrow\ x1 = -5.$$

ou,

$$x2 = \frac{45 + 55}{2}$$
$$\Longrightarrow\ x2 = \frac{100}{2}$$
$$\Longrightarrow\ x2 = 50.$$

Como o valor de x não pode ser negativo devido ao problema proposto, logo $x = 50$. Por fim, para encontrar o número de alunos matriculados, basta substituir o valor de x em (iii):

$$50^2 + (15.50) + 50 = 3300.$$

Portanto, o número total de alunos matriculados na escola municipal de Pirajuba é de 3300. (alternativa D).

No capítulo seguinte, abordamos quais as dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem da equação do segundo grau, e alguns fatores que podem contribuir para existirem essas dificuldades.

4 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU NO NONO ANO

Os alunos ao verem pela primeira vez a equação do segundo grau, geralmente no nono ano, utilizam de conhecimentos advindos de outros conteúdos algébricos, porém, têm dificuldades de visualizarem letra e incógnitas como valores numéricos, o que acaba induzindo a não compreensão das expressões numéricas.

Apesar de muitas das vezes essas dificuldades estarem relacionadas as operações básicas, ainda assim, é possível por parte do professor perceber que há outras dificuldades, tais quais, de acordo com *Vayavutjamai & Clements* (2006) e *Ochoviet & Oçtak* (2009) (apud GARCEZ MARTINS, 2014, p.12) são:

- Muitos alunos não compreendem que os valores presentes na solução de uma equação são os valores que transformam a igualdade inicial numa igualdade verdadeira;

  Exemplo de solução como igualdade verdadeira:

$$x^2 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x1 = 1\ e\ x2 = 0.$$

  Para $x1 = 1$,

$$1^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow\ 1 - 1 = 0.$$

  Para $x2 = 0$,

$$0^2 - 0 = 0$$
$$\Rightarrow\ 0 - 0 = 0.$$

- O símbolo “=’’ tem significados diferentes, tanto pode representar uma indicação de ação (como no calculo do valor de expressões numéricas, por exemplo) como, no caso das equações, representa na verdade, um equilíbrio que se deve manter;

  Exemplo do símbolo “=” como indicação de ação:

$$2x^2 + 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 + 3x = (2x + 3).\,x = 0.$$

A ação no símbolo de igualdade, e a operação sucessiva utilizando igualdades até encontrar o resultado, o que não é possível para encontrar os valores da incógnita x. Por isso, em uma equação, a igualdade representa um equilíbrio que deve permanecer e não para encontrar uma solução imediata.

- Depois de aprenderem a resolver equações de primeiro grau, os alunos habituam-se a “por as letras no primeiro membro e os números no segundo’’, ao transporem este raciocínio para as equações de 2.° grau os alunos caem no erro de operar com termos não semelhantes;
  Exemplo desse erro:

$$2x^2 + 5 = x + 8$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2 - x = 8 - 5$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 = 3.$$

- Usar expressões menos rigorosas como ”só podemos somar os x’s do mesmo tipo’’, quando na verdade o que quer dizer adicionar monômios com incógnita de graus diferentes

- É difícil para os alunos entenderem que um polinômio e a sua fatoração são expressões equivalentes, ou seja, são interpretações diferentes de uma mesma estrutura;
  Exemplo de um polinômio e sua fatoração:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 3x.(x-3) + 1.(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (3x+1).(x-3) = 0.$$

- A lei do anulamento do produto é vista como um processo e não é, na verdade, compreendida, o que faz com que os alunos não identifiquem uma equação do tipo $(x-a)(x-b) = 0$ como uma equação e tenham, assim, necessidade de transformar a fatoração num polinômio;
  Lei do anulamento do produto: Se o produto de dois ou mais números é zero, pelo menos um desses números é zero.
  Exemplo algébrico:

$$(x-4).(-5x+1)=0$$

Pela lei do anulamento do produto, temos;

$$x-4=0.$$

ou

$$-5x+1=0.$$

Para $x-4=0$,

$$\Longrightarrow\ x=\ 4.$$

Para $(-5x+1=0).(-1)$,

$$\Longrightarrow\ 5x-1=0$$

$$\Longrightarrow\ 5x=1$$

$$\Longrightarrow\ x=\frac{1}{5}\ .$$

Portanto, o conjunto solução será $S=\ \{\frac{1}{5},4\}$.

- Regra como “troca de membro, troca de sinal’’, “se está a dividir, passa para o outro lado a multiplicar’’, “tem de se fazer a operação inversa’’, não privilegiam a compreensão e levam à mecanização dos procedimentos;
  Exemplo: Em uma equação, na “troca de membro, troca de sinal”, o que ocorre na verdade é;

$$7x^2+10x=\ -8$$

$$\Longleftrightarrow\ 7x^2+10x+8=\ -8+8$$

$$\Longleftrightarrow\ 7x^2+10x+8=0.$$

- As regras do ponto anterior podem levar também a falhas como o desrespeito das prioridades das operações;

- Apresentar regras algébricas antes de os alunos precisarem dela faz com que a memorização se destaque na aprendizagem dos alunos. Se por outro lado as regras surgem da necessidade dos alunos resolverem um problema, é muito mais provável que os alunos descubram a regra por si e, por isso, se apropriem dela sem ter de memorizar.

Um estudo investigativo realizado com alunos na Tailândia, Brunei Darussalam e Estados Unidos, intitulado de "*Student's attempts to solve two elementar quadratic equations: A study in three nations", Vaiavutjamai, Ellerton & Clements* (2006), (apud GARCEZ MARTINS, 2014, p.10-11), identificou também algumas dificuldades, em particular, das equações de 2° grau:

1. Depois das aulas sobre equações de 2° grau, muitos dos alunos revelam dificuldade em compreender a existência de duas soluções para a mesma equação.
2. Muitos dos alunos que resolveram as equações corretamente revelaram dificuldade em verificar a solução das mesmas, não compreendendo o que a solução representava na equação.
3. A maioria dos alunos não compreendeu que uma mesma incógnita colocada diversas vezes na mesma equação representaria o mesmo valor.
4. Ao tentar resolver a equação $(x-3)(x-5)=0$ alguns alunos optaram por transformar, em primeiro lugar, o primeiro termo num polinômio voltando depois a fatorar, e aplicando posteriormente a lei do anulamento do produto.

Com base na lei do anulamento do produto, ainda podemos destacar que os alunos ao tentarem solucionar equações do tipo $(ax+b).(cx+d)=0$, utilizam a propriedade distributiva, ou seja, as transformam em uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, para em seguida aplicarem os métodos de resolução de equações lineares em vez de utilizar a lei citada acima.

Em muitos casos, os professores ensinam o conteúdo de forma tradicional, levando o aluno à apenas reproduzir, sem compreender os conceitos existentes no mesmo. Por se tornar repetitivo, acaba ocasionando a não motivação do aluno em aprender, trazendo consequências como desatenção, falta de tempo, não cumprimento de tarefas de casa, dentre outros.

> Assim, é muito importante que o professor esteja atento e que olhe para as equações do 2.º como um assunto de difícil aprendizagem. É preciso ser sensível a estas dificuldades e sobretudo não nos esquecermos que a riqueza da álgebra está nos raciocínios que desenvolve e não na acumulação de procedimentos memorizados sem sentido ou significado. (MARTINS, 2014, p.13).

Essas dificuldades existem por que não há estímulo de raciocínio lógico neste tipo de ensino, que leve o aluno a despertar a curiosidade e incentivar a reflexão para se atingir uma melhor compreensão do conteúdo. Por isso, é importante que o professor observe as dificuldades da turma e procure inovar em suas aulas.

Existem também alguns fatores que colaboram para essas dificuldades, como a autora KUROIWA (2016, p.88-89) cita:

- Apresentação, exposição e encaminhamento do professor;
- Experiências vividas e presenciadas pelos alunos;
- A presença e atitude da família na vida escolar do estudante;
- O compromisso e a responsabilidade do aluno para com seu aprendizado;
- Os materiais e recursos utilizados pelo professor;
- Ausência de conhecimentos prévios demonstrada por alguns estudantes;
- A conduta, personalidade e paciência do professor;
- A descrição das atividades propostas, bem como sua sequência;
- As diferenças na faixa etária dos alunos, levando a discordâncias de pensamentos e posturas na sala de aula decorrentes da naturalidade apresentada por eles;
- Comportamento da turma, referente a condições educacionais e temperamentais;
- Instalações físicas da escola, condições de uso e aparência dos materiais e ambientes disponíveis;
- A formação do professor, bem como seu trato na transmissão do conteúdo (didática).

Com isso, percebemos que as dificuldades de aprendizado estão relacionadas também com o professor, a família do aluno, com o ambiente escolar, e não somente ao conteúdo. No próximo capítulo, falamos sobre uma ferramenta que pode contribuir para sanar algumas dessas dificuldades.

5 JOGOS MATEMÁTICOS COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Existem várias interpretações para a palavra jogo, que podem ser de vários tipos, que vão desde jogos infantis, por exemplo, Pique- Esconde, até jogos que envolvem toda uma sociedade como é o caso da política, dentre outros. Vai depender da cultura na qual ele está inserido.

O jogo pode ser utilizado com a finalidade de entretenimento como para facilitar o ensino e aprendizagem através do desenvolvimento de habilidades e conceitos, sendo aplicado antes de iniciar o conteúdo para motivar o estudante, ou no fim, com o propósito de fixação e memorização de processos.

Desde a antiguidade já se usavam jogos com o objetivo de facilitar a aprendizagem. Platão utilizava jogos para mostrar a matemática de forma concreta antes de ir para as abstrações, na Roma antiga, eram usados para passar valores e costumes, há também relatos de que os jesuítas jogavam jogos de emulação.

O jogo contém regras com várias finalidades, que desenvolvem atividades e que devem ser cumpridas, pois caso contrário, ele perde seu objetivo levando ao conflito entre os jogadores. Um jogo se diferencia de um brinquedo por ter um sistema linguístico em sociedade, por conter regras e ter um objetivo. Quanto a classificação dos jogos em relação ao contexto social, didático e metodológico, temos, segundo GRANDO (1995) :

- Jogos de azar: São jogos que tem como fator principal a sorte.
- Jogos de quebra cabeça: Levam a busca de soluções e que muitas das vezes é jogado por um único jogador.
- Jogos estratégicos: Dependem unicamente da formação de estratégias por parte do jogador em busca da vitória.
- Jogos para fixar conceitos: São aplicados depois de serem apresentados os conceitos com a finalidade de fixação.
- Jogos computacionais: São aqueles jogados virtualmente através do computador.
- Jogos pedagógicos: São jogos que visam trabalhar com a pedagogia, contribuindo com o ensino e aprendizagem.

Já em relação aos jogos matemáticos, são aqueles que envolvem pelo menos duas pessoas, que se constituem de quebra cabeça ou utilização de peças, contém desafios e enigmas relacionados a conceitos matemáticos.

Existem várias metodologias diferentes para trabalhar os conceitos matemáticos como a resolução de problemas, a etnomatemática, o uso de computadores, a modelagem e o uso de jogos matemáticos. O professor deve escolher a metodologia que seja ideal em relação ao conteúdo e aos alunos, onde uma dessas alternativas são os jogos, que podem contribuir para o aluno em vários âmbitos, que de acordo com os PCNs:

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes- enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e de possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório- necessárias para a aprendizagem da matemática. (BRASIL, 1998, p.47).

Uma das características dos jogos é o desafio, que faz com que o aluno se interesse e tenha prazer, enquanto interage com colegas e professor na busca de solucionar os desafios propostos pelos jogos, além de gerar uma visão diferente, onde a matemática deixa de ser uma disciplina muito difícil. Ou seja, ajuda o aluno a fixar conceitos, se sentir motivado a aprender, a ser crítico e criativo, instigar o raciocínio, encontrar novos conceitos, melhorar a interação entre os colegas e professor, favorece a observação e avaliação, aumentar a concentração, autoestima e autoconfiança.

O jogo faz com que o aluno desenvolva o raciocínio reflexivo, pelo fato de que para realizar uma jogada, é preciso raciocinar logicamente, de forma que ao longo do jogo, eles vão se modificando e que se assemelham aos raciocínios utilizados em resolução de problemas.

De acordo com Luiz (2001), também proporciona a concentração, observação e generalização que resultam em um raciocínio indutivo, importante na formação de hipóteses. Ao jogar em grupo, o aluno desenvolve uma interação social, fazendo com que cada um se desenvolva individualmente, debatendo as dúvidas, procurando construir suas ideias e aceitando soluções dos outros, criar soluções alternativas aumentando o entendimento em relação aos conceitos envolvidos, sendo essas características importantes para atingir a construção da cidadania e fazem parte dos objetivos contidos nos PCN’s:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p. 48)

Entre essas vantagens, vale destacar também a possibilidade de se trabalhar os jogos de forma interdisciplinar, relacionando- os com outras disciplinas, como por exemplo, Artes, ao confeccionar o jogo com os alunos, Ciências, onde se pode utilizar materiais recicláveis na construção do jogo, Educação Física, com a interação entre os alunos e as regras do jogo, Geografia onde o professor pode apresentar em qual país surgiu o jogo bem como os costumes dos povos tanto no passado como no presente, História, em relação ao surgimento do jogo, Língua Estrangeira, com palavras utilizadas no jogo em outros países, Português, com a leitura e interpretação das regras.

A aprendizagem não está no jogo, mas sim, nas reflexões elaboradas e significados estabelecidos a partir do conhecimento prévio do aluno. Com isso, o sucesso nesse método estará na confiança e no conhecimento do professor acerca do potencial que este pode alcançar, mas isso só será possível, se o professor procurar conhecer o jogo com antecedência, identificando as possíveis dificuldades que podem surgir ao decorrer do jogo, para que no momento da aplicação, ele possa orientar os alunos de forma mais eficaz, onde o professor deixa de ser uma autoridade do ensino para ser um mediador na aprendizagem construída por eles.

Também não podemos deixar de lado que podem surgir alguns problemas em utilizar jogos ao ensinar matemática, que de acordo com Grando (2016) seriam:

- Utilizar o jogo de forma aleatória, sem um objetivo, levando o aluno a apenas se sentir motivado, sem entender o significado do jogo para o conteúdo.
- O tempo utilizado na aplicação do jogo, que se não for bem planejado, pode acabar prejudicando o cronograma de conteúdos a serem vistos.
- A ideia de que todos os conceitos devem ser ensinados através dos jogos, o que acaba ficando sem sentido para o aluno.
- O professor interferir constantemente no jogo, levando a perda da dinâmica do jogo.
- A exigência do professor de que o aluno participe do jogo contra sua própria vontade, tirando a liberdade que o jogo proporciona.

- A dificuldade de encontrar material que auxilie na utilização de jogos no ensino.

Essas dificuldades podem ser superadas pela pesquisa, estudo e organização por parte do professor. Por isso, alguns fatores devem ser levados em conta na hora de escolher qual jogo utilizar: O jogo deve ser coletivo, ou seja, com no mínimo dois jogadores, conter regras predefinidas de forma que não possam ser modificadas durante uma rodada e devem levar a apenas um ganhador, deve ter um objetivo a atingir e não apenas ser mecânico, e por fim, a sorte no jogo não pode ser um fator determinante.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E REFLEXÕES DE ALGUMAS EXPERIÊNCIAS DE ENSINO COM JOGOS

A técnica utilizada neste trabalho foi a pesquisa bibliográfica, devido a impossibilidade de realizarmos qualquer atividade presencial nas escolas por conta da COVID- 19. Este tipo de pesquisa, segundo Marconi e Lakatos (2003), é a pesquisa de toda obra tornada pública relacionada ao tema de estudo que podem ser desde jornais, revistas, livros, monografias, teses, até meios de comunicações orais como rádio, gravações em fitas magnéticas e audiovisuais.

Com base nisso, pesquisamos em anais de eventos científicos através da internet, por trabalhos de autores, que em suas pesquisas, utilizaram de forma metodológica jogos matemáticos envolvendo a equação do segundo grau, em turmas do nono ano, com a finalidade de contribuir no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Após essa etapa, selecionamos três trabalhos os quais foram Silva et al (2015), Marta et al (2016) e Morais, Santos e Braz (2019).

Através da abordagem qualitativa e da utilização da técnica descritiva, realizamos o estudo dos trabalhos selecionados, apresentando a fonte, o local da pesquisa, o objetivo geral, o desenvolvimento, o modo como foi realizada a pesquisa e os resultados obtidos, organizando essas informações em um quadro para facilitar a compreensão do leitor.

Apresentamos alguns jogos trabalhados por esses autores que foram: trilha das equações, baralho das equações e dominó das equações, o qual, por falta de informações em Morais (2019), foi detalhado com base na produção didático-pedagógica de Peres (2014a).

Por fim, realizamos um estudo dos trabalhos de forma comparativa, observando características que contribuem para sanar dificuldades e enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da equação do segundo grau.

Inicialmente, realizamos um estudo dos trabalhos selecionados apresentando as fontes e os resultados obtidos em cada um organizados no quadro seguinte:

Quadro 1: Estudo das aplicações dos jogos com turmas do nono ano.

FONTE	RESULTADOS
SILVA, Rafael Pereira da et al. Aplicação de equação do segundo grau com materiais manipuláveis: jogo trilha das equações. **Anais V ENID & III ENFOPROF/ UEPB...** Campina Grande: Realize, 2015. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/11567. Acesso em: 30 nov. 2020.	Esse estudo foi realizado em escola pública, com uma turma do 9° ano do ensino fundamental, com o objetivo de fazer com que os alunos se interessem pelo conteúdo para atingir uma aprendizagem significativa. Foi aplicado um jogo envolvendo o conteúdo de equação do 2º grau e em seguida, um questionário, onde foi identificado que, mesmo com as dificuldades de cada aluno sobre o assunto, tiveram interesse em participar do jogo em grupo e fazer a atividade.
MARTA, Débora Adriana Alves da Silva Ribeiro, et al. **Construção de jogos no estudo da equação do segundo grau.** Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência- PIBID. SP: Fundação Educacional de Fernandópolis, 2016. Disponível em: http://www.fef.br/upload_arquivos/geral/arq_58822b094544a.pdf. Acesso em: 30 nov. 2020.	Com a necessidade de aprofundamento dos conceitos e métodos das equações do segundo grau, esse trabalho propôs, em uma turma do nono ano da Escola Estadual "Líbero de Almeida Silvares", que os alunos divididos em grupos, construíssem jogos relacionados com o conteúdo, que foram validados por alunos da FIFE bolsistas do PIBID, e encaminhados a um designer para a adequação visual do jogo. Por fim, foi realizado um campeonato com os jogos, envolvendo equipes formadas por alunos de todas as turmas de nono ano desta mesma escola, onde foi constatado a eficácia da utilização de jogos como metodologia capaz de substanciar e auxiliar a compreensão, e fixação de conteúdos matemáticos.
MORAIS, Álida Rinara Souza; SANTOS, Thalita Oliveira; BRAZ, Lúcia Helena Costa. Dominó no estudo de equações do 2º grau. In: SEMINÁRIO DE EXTENSÃO (SemEx), **III.**, 2019. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *campus* Formiga, 2019. ISSN – 2674 – 7111.	Nesse trabalho, é produzido um relato de experiência, vivenciada por alunos do programa residência pedagógica, na aplicação do jogo dominó de equações do 2º grau, tendo como objetivo, reforçar o conteúdo de equações do 2º grau em duas turmas do nono ano, numa escola pública da cidade de Formiga- MG. Nas atividades desenvolvidas, foram encontrados alguns erros, mas ao transcorrer das atividades, houve a diminuição dessas falhas, resultando no avanço da fixação do calculo de raízes de equações do segundo grau.

Fonte: próprio autor.

Os jogos matemáticos utilizados nos referidos trabalhos em turmas do nono ano foram:

a) Trilha das equações, Silva et al (2015):

Figura 5: trilha das equações

Fonte: SILVA et al (2015).

Materiais utilizados: uma folha com a trilha, 26 cartas, um dado e marcadores, que podem ser botões, tampinhas de canetas e dentre outros materiais.

Regras do jogo: o jogo deve ser jogado em grupos, preferencialmente, de 4 jogadores. Eles devem combinar entre si, quem iniciará o jogo e a ordem dos demais. O primeiro a jogar, lança o dado e anda com seu marcador na trilha, a quantidade de casas do valor obtido. Em seguida, observa qual número da trilha o marcador atingiu na jogada e pega a carta correspondente, que contém uma equação, obedecendo as orientações desta carta que pode ser verificar se um dado valor é raiz da equação, se a equação é do segundo grau, resolver e somar suas raízes, perguntar alguma propriedade da discriminante. Dependendo da resposta, o jogador avança uma determinada quantidade de casas no tabuleiro determinada pela carta. Após ser resolvida, esta deve voltar ao monte, pois algum outro jogador pode alcançar o mesmo valor na trilha. Depois, o próximo jogador na sequência, repete o mesmo procedimento do primeiro e assim por diante, até que um dos jogadores alcance a chegada, o qual será o ganhador. O jogo continua para ser definida a posição dos jogadores restantes. Com o fim do jogo.
É importante que sejam desenvolvidas atividades sobre o jogo, para que o aluno que estava jogando só por jogar faça uma reflexão sobre o trabalho proposto neste jogo.

b) Baralho das equações, Marta et al (2016):

Figura 6: baralho das equações

Fonte: http://pibidmath.blogspot.com/2014/03/baralho-das-equacoes-do-2-grau.html

Materiais utilizados: 30 cartas, destas, 15 são de equações e 15 com suas respectivas raízes.

Regras do jogo: para jogar esse jogo, é necessário de 2 a 4 jogadores. Um dos jogadores embaralha as cartas e entrega 4 delas para cada pessoa, em seguida, coloca outras 4 sobre a mesa com as raízes ou equações viradas para cima. O jogador à esquerda de quem distribuiu as cartas, começa a partida. Este deve verificar se há alguma carta na mesa correspondente a uma das equações ou raízes das que estão em sua mão. Se houver, deverá pegar e coloca-la em seu monte. Nas rodadas seguintes, devem ser obedecidas as mesmas condições. Se alguma das cartas na mão de um dos jogadores corresponder a raíz ou equação da primeira carta do monte de seus adversários, este obterá todo o monte. Caso não possua nenhuma carta na mesa que corresponda a da mão, o jogador deve descartar sobre a mesa virada para cima. Não havendo mais cartas na mesa, compra-se do monte das cartas restantes. O jogo é finalizado quando não houver possibilidade de jogada. Ganha quem tiver a maior quantidade de cartas em seu monte.

c) Dominó de equações, Peres (2014):

Figura 7: dominó de equações do 2º grau

Fonte: PERES (2014).

Materiais utilizados: 28 cartões, onde cada cartão é composto por duas partes, uma contendo uma equação e a outra uma raíz de forma que toda equação e solução possuam seu correspondente em um outro cartão.

Regras do jogo: o jogo deve conter 4 jogadores, onde cada jogador resolve todas as equações envolvidas utilizando a fórmula. Cada pessoa escolhe sete cartões. O primeiro jogador coloca um cartão sobre a mesa. O jogador seguinte verifica se possui algum cartão que tenha uma equação ou raíz do cartão que está na mesa, se caso não tiver, passa a vez para o próximo, e assim, continua da mesma forma com os demais, sempre encaixando os cartões nos lados livres dos que estão na mesa. Vence quem descarta todas as peças e o jogo termina quando não restarem peças por jogar.

Em dois dos três trabalhos não ficou determinado o tempo gasto para a aplicação dos jogos de forma detalhada, porém, em Morais, Santos e Braz (2019), houve um planejamento de 3 horas/ aulas em cada turma.

Como vimos no quadro 1, os mesmos utilizaram os jogos após o conhecimento prévio dos alunos em relação ao conteúdo, uma vez que seu objetivo é o de reforçar o conteúdo. Em Silva et al (2015), com o objetivo de fazer os alunos se interessem pelo conteúdo para alcançar uma aprendizagem significativa, foram definidos os conceitos iniciais de equação do segundo grau antes de ser aplicado o jogo trilha das equações, mesmo estando no inicio do assunto, os alunos compreenderam o que foi transmitido antes da aplicação do jogo. Da mesma forma em Marta et al (2016), o jogo foi utilizado após os alunos terem o conhecimento do conteúdo, pois seu objetivo é de aprofundar conceitos e métodos de resolução das equações do segundo grau.

Tanto Silva et al (2015) como Marta et al (2016), apresentam regras em seus jogos, Morais, Santos e Braz (2019), no jogo dominó das equações, não apresenta essas regras de forma detalhada, devido as mesmas serem semelhantes as de um dominó comum, diferenciando- se pelas peças, que são compostas de equações e raízes.

Com todas essas observações, percebemos que no geral não houve problemas na utilização dos jogos matemáticos nas turmas do nono ano, com relação a alguns problemas que poderiam surgir, apontados por Grando (2000).

Em Silva et al (2015), são apontados quais assuntos da equação do segundo grau foram abordados no jogo trilha das equações, que é o método de resolução convencional, que assim como vimos nos livros didáticos abordados no capítulo 3, compreende: a fórmula geral da equação, a fórmula de *bhaskara* e o comportamento da discriminante. Os demais autores não fazem esse detalhamento dos assuntos envolvidos.

Percebemos que nos três trabalhos, nenhum dos jogos apresentados foi trabalhado a história da equação do segundo grau, assim como outros assuntos não foram abordados, tais quais: o método de completar quadrados, método da fatoração e as relações de Girard, todos estes como vimos, presentes em livros didáticos. O que dar a entender que à maioria dos jogos matemáticos existentes envolvendo a equação do segundo grau, só trabalham com o método de resolução convencional.

Seria importante que também fossem explorados nos jogos que envolvem a equação do segundo grau, esses outros métodos, sendo que a BNCC (2017), traz a proposta de que os alunos compreendam os processos de fatoração e expressões algébricas com relação aos produtos notáveis, e ao trabalhar a história da equação do segundo grau com jogos, surge a possibilidade da interação interdisciplinar com a disciplina de História.

Silva et al (2015), através de questionários tanto para os alunos como para o professor da turma, identificou que os alunos gostaram do jogo, compreenderam o que o jogo os desafiava a fazer a partir de estudos e resolução das questões e a concordância do professor de que os alunos podem compreender e memorizar alguns assuntos matemáticos ao utilizarem materiais didáticos, constatou o interesse dos alunos pelo conteúdo.

O mesmo ocorre em Marta et al (2016), onde fica implícita as contribuições dos jogos nos depoimentos registrados dos alunos, que afirmaram que a construção dos jogos, os desafios encontrados e a colaboração dos colegas, contribuiu na melhora da aprendizagem e no entendimento das equações, enquanto outros relataram que foi divertido, não foi difícil e ajudou na rapidez do raciocínio lógico.

Percebemos que esses alunos se sentiram motivados, houve o desenvolvimento do raciocínio lógico que são similares aos utilizados na resolução de problemas e houve a interação entre os alunos, o que aumenta o entendimento dos conceitos envolvidos. Com isso, o projeto foi eficaz como metodologia diferenciada para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos e métodos de resolução das equações do segundo grau.

E essas contribuições estão de acordo com as apontadas nos PCNs que como vimos, compreendem a formação de atitudes, o enfrentamento de desafios, a busca de soluções e a criação de estratégias, necessárias para a aprendizagem.

Em Morais, Santos e Braz (2019), foram identificados, através de folhas de atividades contendo perguntas relacionadas ao conteúdo, alguns erros dos alunos como identificar os coeficientes de uma equação incompleta, havendo confusão entre os coeficientes b e c; falta de atenção; confusão com a fórmula; escreviam as equações do jogo de forma errada; dificuldades com as operações básicas; nas multiplicações por números negativos, se atrapalhavam com o jogo de sinal; confundiam potência com multiplicação. Porém, durante o desenvolvimento do jogo, os alunos foram sanando as duvidas e os erros foram diminuindo nos registros.

Alguns desses erros vão de encontro com as dificuldades apresentadas por Martins (2014), como apresentar regras algébricas antes dos alunos precisarem delas, fazendo com que a memorização se destaque na aprendizagem dos alunos, o que acaba levando o aluno a apenas reproduzir, sem compreender as regras e conceitos.

Supõe se, que essa falta de atenção seja ocasionada pela falta de estimulo do aluno em aprender devido ao ensino tradicional que não contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico levando a falta de estímulo em aprender por parte do aluno, uma vez em que a riqueza da álgebra esta no raciocínio desenvolvido e a falta do mesmo, acarreta em consequências para a compreensão do conteúdo.

Ressaltando também que como Kuroiwa (2016) aponta, podem existir interferências externas para a existência dessas dificuldades, como os conhecimentos prévios do aluno, a formação do professor, o incentivo familiar e o ambiente escolar seus materiais e recursos.

Ainda com relação aos alunos envolvidos na pesquisa de Morais, Santos e Braz (2019), todos firmaram ter gostado das atividades e um deles disse que o motivo foi que o dominó mudou a rotina da aula. Através dos relatos e registros, foi comprovado que as atividades auxiliaram em uma melhor compreensão dos processos de resolução das equações do segundo grau, sendo que alguns afirmaram que só conseguiram entender o conteúdo depois de participarem do jogo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nos fez perceber que os alunos do nono ano apresentam dificuldades ao estudarem o conteúdo de equação do segundo grau que os levam a cometerem erros, e que existem vários fatores externos ao assunto no âmbito do próprio professor, familiar e escola, contribuintes para o agravamento da mesma.

Sabemos que existem várias metodologias de ensino que visam contribuir no processo de ensino aprendizagem, dentre elas a utilização de jogos nas aulas de matemática, a qual foi defendida nesse trabalho, apresentando várias contribuições dentre elas motivacional, social, interdisciplinaridade, raciocínio logico e indutivo.

Durante a pesquisa, notamos que nos três trabalhos foram identificadas essas contribuições e que através dos jogos foram atingidos seus objetivos mostrando a eficácia que os jogos possuem no processo de ensino e aprendizagem, onde os alunos se sentiram motivados, enfrentaram desafios e superaram dificuldades que apresentavam em relação ao conteúdo antes de serem aplicados os jogos.

Em um dos trabalhos, foram identificados os erros que os alunos cometeram durante os registros das atividades, mas que na medida em que eles foram jogando o jogo, conseguiram esclarecer suas duvidas e houve uma redução de erros nas atividades, evidenciando a necessidade do professor de inovar e buscar novas metodologias de ensino, abandonando o ensino tradicional que causa o desinteresse do aluno pelo assunto estudado levando a apenas memorizar e reproduzir.

Ao jogar em grupo, os alunos se desenvolvem individualmente, debatendo, construindo, e aceitando as ideias dos colegas que levam o melhor entendimento dos conceitos envolvidos e que de acordo com os PCNs (1998), são importantes na construção da cidadania. Com todas essas observações, consideramos que os resultados obtidos na pesquisa foram satisfatórios e concluímos que este trabalho atingiu o objetivo de mostrar que os jogos matemáticos contribuem na aprendizagem da equação do segundo grau.

Deixamos aqui a dica para o leitor que tiver interesse em construir jogos envolvendo a equação do segundo grau, que procure na medida do que for possível, diversificar mais os conteúdos da equação do segundo grau e não apenas trabalhar com o assunto do método convencional.

REFERÊNCIAS

BAUMGARTEL, Priscila. O uso de jogos como metodologia de ensino da matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20, 2016, Curitiba. **Anais...** Curitiba, PR: UFPR. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf. Acesso em: 05 out. 2020.

BIANCHINI, Edwaldo. Equações do 2° grau. In: BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini,** 9° ano. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 01 abr. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** MEC/SEF, 1998.

ENEM 2015 – **Exame Nacional do Ensino Médio.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 10 abr. 2020.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. Uma abordagem histórica da equação do 2° grau. **Revista do Professor de Matemática.** Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo: Associação Palas. Athena do Brasil, 43, p. 20- 25, 2000.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. 239f. Tese (doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

______ **O jogo [e] suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática.** 1995. 175f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253786. Acesso em: 19 jul. 2020.

KUROIWA, Elisabete Tiyoko Nishimura. **Uma abordagem peculiar da equação do segundo grau no ensino fundamental e médio.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Presidente Prudente, SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2016.

LUIZ, Learcino dos Santos. **O jogo no ensino fundamental:** alternativa para uma aprendizagem significativa da matemática. Trabalho de Conclusão de Curso habilitação licenciatura em matemática. Departamento de Matemática. Florianópolis, SC: Universidade de Santa Catarina, 2001.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia cientifica.** 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTA, Débora Adriana Alves da Silva Ribeiro, et al. **Construção de jogos no estudo da equação do segundo grau.** Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência- PIBID. SP: Fundação Educacional de Fernandópolis, 2016. Disponível em: http://www.fef.br/upload_arquivos/geral/arq_58822b094544a.pdf. Acesso em: 30 nov. 2020.

MARTINS, Helena Sofia Sousa Garcez. **Dificuldades na resolução de equações de 2.º grau dos alunos do 8.º ano.** 2014. Relatório da prática de ensino supervisionada (mestrado em ensino da matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

MORAIS, Álida Rinara Souza; SANTOS, Thalita Oliveira; BRAZ, Lúcia Helena Costa. Dominó no estudo de equações do 2º grau. In: SEMINÁRIO DE EXTENSÃO (SemEx), III., 2019. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *campus* Formiga, 2019. ISSN – 2674 – 7111.

OBMEP 2013- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** Provas e soluções. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 10 abr. 2020.

PEDROSO, Hermes Antonio. Uma breve história da equação do 2º grau. In: **Revista eletrônica de matemática**, v.2, p. 1-13, 2010. Disponível em: http://sinop.unemat.br/site_antigo/prof/foto_p_downloads/fot_125651_pdf.1.pdf. Acesso em: 30 mar. 2019.

PERES, Eliana Cristina; TRIVIZZOLI, Lucieli Maria. Jogos matemáticos e equação do segundo grau. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**: Produção Didático-pedagógica, 2014a. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.2. (cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_pdp_eliana_cristina_peres.pdf. Acesso em: 30 nov. 2020. ISBN 978-85-8015-079-7.

PERES, Eliana Cristina; TRIVIZZOLI, Lucieli Maria. Jogos matemáticos e equação do segundo grau. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**, 2014b. Curitiba: SEED/ PR., 2016. V.1. (cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_artigo_eliana_cristina_peres.pdf. Acesso em: 10 out. 2020. ISBN 978-85-8015-080-3.

PITOMBEIRA, João Bosco. Revisitando uma velha conhecida. Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2, Salvador. **Anais...** Salvador: UFBA, 2004. p. 1-49. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf. Acesso em: 02 mai. 2021.

SANTANA, Onelcy Aparecia Tiburcio. Usando jogos para ensinar matemática. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**, 2007. Curitiba:

SEED/PR, 2011. v.1. (cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2007_uel_mat_artigo_onelcy_aparecida_tiburcio_santana.pdf. Acesso em: 05 out. 2020. ISBN 978-85-8015-037-7.

SILVA, Rafael Pereira da et al. Aplicação de equação do segundo grau com materiais manipuláveis: jogo trilha das equações. **Anais V ENID & III ENFOPROF/ UEPB...** Campina Grande: Realize, 2015. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/11567. Acesso em: 30 nov. 2020.

SILVEIRA, Ênio. Equações do 2º grau. In: SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática, 9º ano.** 3ª. ed. São Paulo: Modena, 2015.