UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ

CENTRO DE CIENCIAS EXATS E SOCIAIS APLICADAS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSÉ EUGÊNIO CALDEIRA SANTANA

CÍRCULOS DE FORD E A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

PATOS – PB

2021

JOSÉ EUGÊNIO CALDEIRA SANTANA

CÍRCULOS DE FORD E A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial à obtenção do titulo de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias

PATOS – PB

2021

S232c Santana, Jose Eugenio Caldeira.
Círculos de Ford e a construção geométrica dos números racionais [manuscrito] / Jose Eugenio Caldeira Santana. - 2021.
26 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Ciências Exatas - CCEA."

1. Círculos de Ford. 2. Números racionais. 3. Sequências de Farey. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Kléber T. de Sousa - CRB - 15/472 BSC5/UEPB

JOSÉ EUGÊNIO CALDEIRA SANTANA

CÍRCULOS DE FORD E A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial à obtenção do titulo de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Aprovada em: 08/10/2021.

BANCA EXAMINADORA

José Ginaldo de Souza Farias

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Cícero dos Santos

Me. Cícero dos Santos
Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia – PB (SEECTPB)

“Que Deus perdoe essas pessoas ruins.”

(Adriano Ribeiro Leite, “O Imperador”)

SUMÁRIO

CIRCULOS DE FORD E A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

José Eugênio Caldeira Santana[1]

RESUMO

O presente artigo apresenta como conteúdo central os círculos de Ford. Que tem como objetivo apresentar de forma geométrica a construção dos números racionais. Para tal apresentação vamos primeiro formalizar a construção dos números racionais trazendo as devidas formalidades e definições. Em seguida nos é apresentado as sequências de Farey, que é uma sequência finita de todas as frações irredutíveis do intervalo [0,1] e, com isso, entendermos como são gerados os números racionais desse intervalo. Alias, tomaremos como de entendimento do leitor o conhecimento do teorema de Bézout. Daí, relacionaremos os termos da sequência de Farey com os círculos de Ford, mostrando que os círculos de Ford tangentes correspondem a frações consecutivas da sequência de Farey. Sendo assim, trazendo uma representação geométrica dos números racionais.

Palavras-chave: Circulos de Ford. Números Racionais. Sequências de Farey.

ABSTRACT

This article presents ford circles as the central content. Which aims to present in a geometric way the construction of rational numbers. For this presentation we will first formalize the construction of rational numbers bringing the appropriate formalities and definitions. Next we are presented with the sequences of Farey, which is a finite sequence of all irreducible fractions of the range [0.1] and, with this, we understand how rational numbers of this range are generated. By the way, we will take as a reader understanding the knowledge of Bézout's theorem. Hence, we will relate the terms of Farey's sequence to Ford's circles, showing that the tangent Ford circles correspond to consecutive fractions of Farey's sequence. Thus, bringing a geometric representation of rational numbers

Keywords: Ford Circles. Rational Numbers. Farey Sequences.

[1] Aluno de graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campos VII – Governador Antônio Mariz (Patos – PB), Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: caldeiraeugenio@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números racionais, sempre nos é apresentado no ensino fundamental e médio como o conjunto que acolhe todas as frações. O universo dos racionais, normalmente, tem-se o primeiro contato quando transformamos frações em números decimais. Ou seja, aprendemos a fazer a transformação dos seguintes tipos de frações: $\frac{12}{10}, \frac{1}{100}, \frac{678}{100}, \frac{8531}{1000}$ ... e em seguida sua localização na reta numérica, fazendo uso dos valores que estão no denominador e numerador da fração e posteriormente apenas com o valor obtido através da transformação. Por exemplo, a fração $\frac{5}{10}$ é associada ao decimal 0,5 que se localiza no intervalo [0,1] onde alem de localizarmos mais especificamente com o decimal 0,5 também podemos inferir que a fração $\frac{5}{10}$ também esta localizada nesse intervalo, pelo simples fato do numerador ser menor que o denominador.

As formas de localizarmos e posicionarmos as frações em uma reta ou simplesmente localizarmos são diversas, outra bem comum, mas "cansativa", é a de dividirmos nosso intervalo com pontos na mesma quantidade que há no denominador da fração e em seguida utilizarmos o numerador para contar as divisões e, de forma precisa, indicar a localização dessa fração. Bem, com isso e todas essas maneiras apresentadas surge à indagação: temos uma forma geométrica de localizarmos os números racionais na reta?

Bem, para respondermos essa pergunta, vamos apresentar nesse artigo uma construção geométrica dos números racionais na reta numérica utilizando frações ao invés de números decimais. Para tal apresentação falaremos sobre as sequências de Frey. Entenderemos como se da à construção dos números racionais no intervalo $[0,1]$ formalmente e utilizaremos as sequências de Farey para ficar mais visível o fato dos racionais desse intervalo ser enumeráveis.

Deixaremos por conta do leitor o conhecimento do teorema de Bézout, que nos fala $mdc(a, b) = 1$ se e somente se, existirem inteiros r e s tais que $ra + sb = 1$. Em seguida faremos uma associação aos círculos de Ford, mostrando que círculos de Ford que se tangenciam correspondem a frações de Farey consecutivas. Obtendo uma representação geométrica dos números racionais. Donde com esses resultados podemos mostrar de forma mais criativa e visionaria a construção dos racionais, para que despertemos a curiosidade e criatividade de nossos discentes.

2 OS NÚMEROS RACIONAIS

Antes de procedermos com a construção formal do conjunto dos números racionais Q a partir do conjunto dos inteiros Z. O apresentaremos como é usual, ou seja, como um conjunto junto a duas operações binárias gozando axiomas que fazem dele um corpo.

2.1 Os Números Racionais

Um *número racional* é um número que pode ser expresso como o quociente ou fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros *a* e *b*, com $b \neq 0$. O conjunto de todos os racionais é denotado por

$$Q = \left\{\frac{a}{b};\, a \ \in Z, b \neq 0\right\}.$$

Notação devida a Guiseppe Peano em 1895, do italiano *quoziente*. O termo *racional* provém do fato de *a*/*b* representar a *razão* ou proporção entre dois inteiros *a* e *b*.

2.1.1 Q como estrutura algébrica

Antes de darmos inicio a construção algébrica dos racionais, passamos a seguinte definição.

Definição 2.1 Um corpo é um conjunto K, cujos elementos são chamados escalares, com um par de operações:

$$\begin{array}{rccc} + : & K \times K & \rightarrow & K \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & K \times K & \rightarrow & K \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

chamamos de ***adição* "+"** e ***multiplicação* "·"**, que satisfazem as seguintes condições:

1. A adição é comutativa:

$$x + y = y + x, \forall\, x, y \in K.$$

2. A adição é associativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall\, x, y, z \in K$$

3. Existe um único elemento $0 \ \in K$ (zero), tal que

$$x + 0 = x, \forall\, x \in K$$

4. A cada $x \in K$ corresponde um único elemento $-x \in K$, tal que

$$x + (-x) = 0$$

5. A multiplicação é comutativa

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall\, x, y \ \in K$$

6. A multiplicação é associativa

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall\, x, y, z \in K$$

7. Existe um único elemento $1 \in K - \{0\}$, tal que

$$x \cdot 1 = x, \forall\ x \in K$$

8. A cada $x \in K \setminus \{0\}$ $(x\ não\ nulo)$ corresponde um único elemento x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ em K, tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

9. A multiplicação é distributiva em relação à adição

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall\, x, y, z \in K$$

No conjunto Q dos números racionais podemos definir duas operações adição " $+$ " e a multiplicação " $\cdot$ "

$$\begin{array}{rcl} +:\ Q \times Q & \rightarrow & Q \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cdot :\ Q \times Q & \rightarrow & Q \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

Adição

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ $\in Q$ então a *adição*, +, lhes associa o elemento

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\ \in\ Q.$$

Multiplicação

Sejam $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ $\in Q$ então a *multiplicação*, ·, lhes associa o elemento *a*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\ \in Q$$

Diremos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ ⇔ *ad* = *bc*.

Proposição 2.1. *O conjunto dos racionais* Q *com as duas operações de adição e multiplicação, acima definidas, é um corpo.*

A Proposição 2.1 nos diz que as duas operações em Q gozam das seguintes propriedades.

1. *Associatividade*. Para todo $x, y, z \in Q$ valem

$$(x + y) + z = x + (y + z) \; e \; (xy)z = x(yz)$$

2. *Comutatividade*. Para todo $x, y \in Q$

$$x + y = y + x \; e \; xy = yx$$

3. *Existência de elementos neutros*. Existem $0 = \frac{0}{1} \in Q$ e $1 = \frac{1}{1} \in Q$ tais que

$$x + 0 = x \text{ e } x \cdot 1 = x, \; \forall x = \frac{a}{b} \in Q.$$

4. *Existência dos inversos*.

Para todo $x = \frac{a}{b} \in Q$, existe $-x = -\frac{a}{b} \in Q$ tal que $x + (-x) = 0$.

Para todo $x = \frac{a}{b} \in Q, x \neq 0$, existe $x^{-1} = \frac{a}{b} \in Q$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

5. *Distributividade*. Para todo $x, y, z \in Q$

$$x(y + z) = xy + xz$$

2.1.2 Z como subconjunto de Q

Cada inteiro n pode ser identificado com o racional $\frac{n}{1}$. De fato, pelo algoritmo da divisão $n = \frac{n}{1} \Leftrightarrow n = n \cdot 1$. Portanto, os elementos de Z fazem parte de Q.

2.2 Construção dos Números Racionais

A construção dos números racionais é realizada a partir do domínio de integridade dos inteiros $(Z, +, \cdot)$. O conjunto dos inteiros diferentes de zero, denotamos por $Z_* = Z \setminus \{0\}$.

Proposição 2.2. *A relação $\sim$ em $Z \times Z_*$ definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Para todo $(a, b) \in Z \times Z_* \, (a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$ de onde segue que $\sim$ é reflexiva. Para a simetria, se $(a, b), (c, d) \in Z \times Z_*$ temos

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \sim (\mathrm{c}, \mathrm{d}) \Leftrightarrow \mathrm{ad} = \mathrm{bc} \Leftrightarrow \mathrm{cb} = \mathrm{da} \Leftrightarrow (\mathrm{c}, \mathrm{d}) \Leftrightarrow (\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

Finalmente, sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in Z \times Z_*$. Tal que $(a, b) \sim (c, d) \; e \; (c, d) \sim (e, f)$ Assim, $ad = bc \; e \; c f = de$. Com isso

$$ad = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow (af)d = b(cf) \Rightarrow (af)d = b(de) \Rightarrow (af)d = (be)d.$$

Como $d \neq 0$ e a lei do corte sendo válida em Z então, $(a\,f)d = (be)d$ implica $a\,f = be$. Ou seja, $(a,b) \sim (e,f)$. O que mostra a transitividade.

A relação de equivalência $\sim$ induz uma partição em $Z \times Z_*$. Assim, obtemos o conjunto quociente

$$(Z \times Z_*)/\sim = \{[(a,b)];\ (a,b) \in Z \times Z_*\}$$

2.3 Operações em $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*)/\sim$

2.3.1 Adição e multiplicação $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}^*)/\sim$

Proposição 2.3 (Adição)**.** *Em $(Z \times Z^*)/\sim$ a operação dada por*

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad + bc, bd)]$$

é bem definida.

Demonstração. Sejam $[(a,b)] = [(a',b')]$ *e* $[(c,d)] = [(c',d')]$. Mostramos que $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a',b')] + [(c',d')]$.

De fato, $(a,b) \sim (a',b')$ *e* $(c,d) \sim (c',d')$ implicam

$$ab' = ba' \quad \text{e} \quad cd' = dc'. \qquad (1)$$

Multiplicando os termos dd' e bb' em (1)

$$(ab')(dd') = (ba')(dd') \text{ e } (cd')(bb') = (dc)(bb) \qquad (2)$$

Usando (2) temos

$$\begin{aligned}
(ad + bc)(b'd') &= adb'd' + bcb'd' \\
&= (ab')(dd') + (cd')(bb') \\
&= (ba')(dd') + (dc')(bb') \\
&= bda'd' + bdb'c' \\
&= (bd)(a'd' + b'c').
\end{aligned}$$

Como $(ad + bc)(b'd') = (bd)(a'd' + b'c') \Leftrightarrow (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$. Logo, $[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')]$. Ou seja, $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a',b')] + [(c',d')]$. ■

Proposição 2.4. *Em $(Z \times Z^*)/$, a operação dada por*

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$$

é bem definida.

Demonstração. Se $[(a,b)] = [(a',b')]$ *e* $[(c,d)] = [(c',d')]$, então $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ o que implica

$$ab' = ba' \quad \text{e} \quad cd' = dc'. \quad (3)$$

Usando (3) obtemos $(ab')(cd') = (ba')(dc')$.

Desse modo,

$$\begin{aligned}[(a,\, b)] \cdot [(c,\, d)] = [(a',\, b')] \cdot [(c',\, d')] &\Leftrightarrow [(ac, bd)] = [(a'c', b'd')] \\ &\Leftrightarrow (ac)(b'd') = (bd)(a'c') \\ &\Leftrightarrow (ab')(cd') = (ba')(dc').\end{aligned}$$

Portanto o produto independe dos representantes das classes de equivalência. ■

Observação. Como estamos construindo o conjunto dos racionais, grosso modo, justificaremos como cada elemento de $(Z \times Z^*)/\sim$ se identifica com um elemento de Q (onde Q é o conjunto definido na Seção 2.1.1).

Sejam $a, m \in Z; b, n \in Z^*$ e seja Q o conjunto definido na seção 2.1.1. Como $Z \subset Q$, podemos observar na subseção 2.1.2, então $a, b, m, n \in Q$. Sejam $[(m, n)], [(a, b)] \in (Z \times Z^*)/\sim$ tal que $[(m, n)] = [(a, b)]$.

Considerando $a, b, m, n \in Q$ então,

$$[(m, n)] = [(a, b)] \leftrightarrow mb = na \leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

Cada elemento $[(m, n)]$ de $(Z \times Z^*)/\sim$ pode ser com o quociente $\frac{m}{n} \in Q.$ Note que a classe $[(m, n)]$ é o conjunto solução da equação

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \text{ onde } (x, y) \in Z \times Z^*.$$

Com isso, as classes de equivalência $[(m, n)]$ são retas $Z \times Z^*$. Cada classe $[(m, n)]$ representa o racional $\frac{m}{n}$. Aproveitamos tal identificação para definir o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto $(Z \times Z^*)/\sim$.

Definição 2.2. O conjunto dos números racionais, denotado por Q, é definido como sendo o conjunto das classes de equivalência $[(a, b)]$ dos elementos (a, b) de $Z \times Z^*$ respeito à relação de equivalência. Ou seja,

$$Q = (Z \times Z*)/\sim .$$

A *adição* + e *multiplicação* · em Q é definido, respectivamente, por

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \text{ e } [(a, b)] \cdot (c, d)] = [(ac, bd)].$$

Teorema 2.1 (Propriedades da adição em $Q = (Z \times Z*)/\sim$)**.** *A adição + em Z tem as seguintes propriedades:*

(1) *Associativa.*

(2) *Comutativa.*

(3) *Existência do elemento neutro da adição* $0 := [(0,1)]$.

(4) *Existência do inverso aditivo. Para cada* $x = [(a,b)] \in Z$ *existe* $-x := [(b,a)]$ *tal que* $x + (-x) = 0$. *O elemento* $-x$ *é o inverso aditivo de* x.

Demonstração.

(1) Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= \Big([(a,b)]+[(c,d)]\Big)+[(e,f)]\\ &= [(ad+bc,bd)]+[(e,f)]\\ &= \big[\big((ad+bc)f+(bd)e\ ,\ (bd)f\big)\big]\\ &= \big[\big(adf+bcf+bde\ ,\ bdf\big)\big]\\ &= \big[\big(a(df)+b(cf+de)\ ,\ b(df)\big)\big]\\ &= [(a,b)]+[(cf+de,df)]\\ &= [(a,b)]+\Big([(c,d)]+[(e,f)]\Big)\\ &= x+(y+z).\end{aligned}$$

(2) Sejam $x = [(a,b)]$ *e* $y = [(c,d)]$

$$\begin{aligned}x+y &= [(a,b)]+[(c,d)]\\ &= [(ad+bc,bd)]\\ &= [(cb+da,db)]\\ &= [(c,d)]+[(a,b)]\\ &= y+x.\end{aligned}$$

(3) Existe $0 := [(0,1)]$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x = [(a,b)] \in Q$. De fato,

$$x + 0 = [(a,b)] + [(0,1)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)] = [(a,b)] = x.$$

(4) Dado $x = [(a,b)] \in Q$ seja $-x := [(-a,b)]$.

Considerando que $[(0,n)] = 0$, para todo $n \in Z^*$

$$x + (-x) = [(a,b)] + [(-a,b)] = [(ab + b(-a), bb)] = [(0,bb)] = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2 (Propriedades da multiplicação em $Q = (Z \times Z*)/\sim$)**.** *A multiplicação* $\cdot$ *em* Q *tem as seguintes propriedades:*

(1) *é associativa;*

(2) *comutativa;*

(3) $1 := [(1,1)]$ *é elemento neutro da multiplicação;*

(4) *existe o inverso multiplicativo. Isto é,*

para cada $x = [(a,b)] \in Q \backslash \{0\}$, *existe* $x^{-1} = [(b,a)] \in Q$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$, *é*

(5) *é distributiva sobre a adição.*

Demonstração.

(1) Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)]$ *e* $z = [(e,f)]$.

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= \Big([(a,b)] \cdot [(c,d)]\Big) \cdot [(e,f)] \\ &= [(ac, bd)] \cdot [(e,f)] \\ &= [((ac)e,\ (bd)f)] \\ &= [(a(ce),\ b(df))] \\ &= [(a,b)] \cdot [(ce,\ df\ )] \\ &= [(a,b)] \cdot \Big([(c,d)] \cdot [(e,f)]\Big) \\ &= x \cdot (y \cdot z).\end{aligned}$$

(2) Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)]$.

$$\begin{aligned}x \cdot y &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] \\ &= [(ac,\ bd)] \\ &= [(ca,\ db)] \\ &= [(c,d)] \cdot [(a,b)] \\ &= y \cdot x.\end{aligned}$$

(3) Se $x = [(a,b)] \in Q$ e $1 = [(1,1)]$.

$$\begin{aligned}x \cdot 1 &= [(a,b)] \cdot [(1,1)] \\ &= [(a \cdot 1, b \cdot 1)] \\ &= [(a,b)] \\ &= x.\end{aligned}$$

(4) Se $x = [(a,b)] \in Q \setminus \{0\}$, se $x^{-1} = [(b,a)]$ $(x^{-1} \in Q, pois\ a \neq 0)$

$$x \cdot x^{-1} = [(a,b)] \cdot [(b,a)] = [(ab,ba)] = [(ab,ab)] = [(1,1)] = 1.$$

Note que $ab \neq 0$ e $(ab,ab) \sim (1,1)$.

(5) Sejam $x = [(a,b)], y = [(c,d)]$ e $z = [(e,f)]$. Como $b \neq 0, 1 = [(b,b)]$, segue

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y+z) &= [(a,b)] \cdot \Big([(c,d)] + [(e,f)]\Big) \\
&= [(a,b)] \cdot [(cf+de,\ df)] \\
&= \big[\big(a(cf+de),\ b(df)\big)\big] \\
&= [(acf+ade+bdf,\ bdf)] \\
&= [(acf+ade+bdf,\ bdf)] \cdot 1 \\
&= [(acf+ade+bdf,\ bdf)] \cdot [(b,b)] \\
&= \big[\big((acf+ade+bdf)b,\ (bdf)b\big)\big] \\
&= \big[\big(acfb+adeb+bdfb,\ bdfb\big)\big] \\
&= \big[\big((ac)(bf)+(bd)(ae),\ (bd)(bf)\big)\big] \\
&= [(ac,\ bd)] + [(ae,\ bf)] \\
&= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)] \\
&= x \cdot y + x \cdot z.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.5 *O conjunto* $Q = (Z \times Z^*)/\sim$ *junto às duas operações,* $+$ *e* $\cdot$ *é um corpo.*

Demonstração. A prova segue dos teoremas 2.1 e 2.2 ■

Definição 2.3. A estrutura algébrica $Q = (Z \times Z^*)/\sim$ junto às operações de adição e multiplicação definidas é chamada *corpo dos números racionais.*

2.3.2 A subtração e divisão em $\boldsymbol{Q = (Z \times Z^*)/\sim}$

Definição 2.4 Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)]$ elementos de Q. A operação *subtração*, $-$, é definida por

$$x - y := x + (-y).$$

O elemento $x - y \in Q$ é chamado à *diferença* e de x e y. Desse modo

$$[(a,b)] - [(c,d)] = [(a,b)] + ([(d,c)]) = [(a + d, b + c)].$$

Definição 2.5 Sejam $x = [(a,b)]$ e $y = [(c,d)] \neq 0$ elementos de Q. A *divisão*, de x e y é definida por

$$x/y := x \cdot y^{-1}.$$

Desse modo

$$[(a,b)]/[(c,d)] = [(a,b)] \cdot ([(d,c)]) = [(ad,bc)].$$

O elemento $x/y \in Q$ é chamado o quociente de x e y.

Em Q a subtração e divisão são operações binárias. Em Z, a divisão não é binária.

3 SEQUÊNCIAS DE FAREY

Uma sequência de Farey de ordem *n*, denotada por F_n, é a sequência finita de todas as frações irredutíveis do intervalo [0,1], ordenados de forma crescente, cujos denominadores são menores ou iguais a *n*, isto é, F_n é a sequência de todas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ tais que $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1; 1 \leq b \leq n$, em ordem crescente.

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{2}{n}, \frac{2}{n-1}, \dots, 1$$

Vejamos:

f_1 $\quad \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

f_2 $\quad \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

f_3 $\quad \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

f_4 $\quad \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$

f_5 $\quad \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

A partir dessas sequências podemos tirar algumas observações, vejamos a seguir.

Observação 1: quaisquer sequências de Farey tem-se $\frac{1}{2}$ como termo central.

É perceptível pelo seu modo de construção, pois faz com que tenhamos o mesmo numero de elementos à direita e à esquerda de $\frac{1}{2}$.

Observação 2: As frações eqüidistantes de $\frac{1}{2}$ possuem o mesmo denominador e a soma dessas frações é igual a 1. Vejamos:

$$f_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

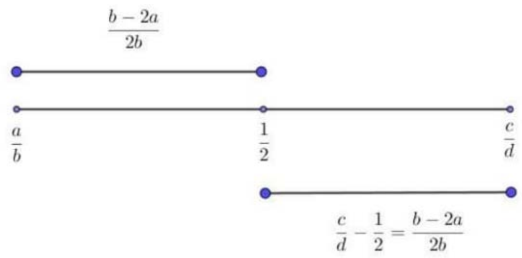
$\frac{0}{1}$ *e* $\frac{1}{1}$ são eqüidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{0}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$\frac{1}{4}$ *e* $\frac{3}{4}$ são eqüidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\frac{1}{3}$ *e* $\frac{2}{3}$ são eqüidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

De fato, sejam $\frac{a}{b}$ um termo de uma sequencia onde $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$. A distancia entre essa duas frações é dada por $\frac{1}{2} - \frac{a}{b} = \frac{b-2a}{2b}$. Tomando uma fração $\frac{c}{d}$ à direita de $\frac{1}{2}$, devemos ter que a distancia entre $\frac{c}{d}$ e $\frac{1}{2}$ é a mesma entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja,

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{2} + \frac{b-2a}{2b} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{2(b-a)}{2b} = \frac{b-a}{b}$$



Somando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$: $\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} = \frac{a+b-a}{b} = \frac{b}{b} = 1$.

Portanto a soma de quaisquer duas frações eqüidistantes de $\frac{1}{2}$ é sempre 1. ■

Observação 3: Será que existe uma forma de calcular a soma de todas as frações de uma certa sequência, sem enumerar seus elementos?

Tendo em vista o que já estudamos ate aqui, em qualquer sequência F_n, temos $\frac{1}{2}$ como termo central, ou seja, à sua direita e à sua esquerda existe o mesmo número de termos. Sabemos também que, a soma dos termos equidistantes de $\frac{1}{2}$ é igual a 1. Logo, a soma dos n termos de F_n será igual a $\frac{1}{2} + \frac{f_n - 1}{2} = \frac{f_n}{2}$.

3.1 Números de termos

Consideremos N_n o némero de termos de uma sequência de Farey F_n.

Como o número de termos à direita e à esquerda de é o mesmo, concluímos que o número total de frações é ímpar.

Para mais, sabendo-se que todas as frações $\frac{a}{b}$ tais que $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ e $1 \leq b \leq n$ relacionados à tal sequência estão na forma irredutível, podemos concluir que $mdc(a, b) = 1$. Portanto, para identificar o número de frações de uma sequencia de ordem n, precisamos determinar, para cada denominador $b \leq n$, quantos são os numeradores a, onde $1 \leq a \leq b$ e tal que $mdc(a, b) = 1$. Atribuído por $\varphi(b)$ essa quantidade, pode ser escrita $\varphi(b) = |\{1 \leq i \leq b : mdc(i, b) = 1\}|$, onde, para um conjunto X, $|X|$ represente o seu cardinal.

Vejamos para o caso de $n = 6$, obtemos

$\varphi(1) = 1$;

$\varphi(2) = 1$ pois $mdc(1,2) = 1$;

$\varphi(3) = 2$ pois $mdc(i, 3) = 2$ onde $1 \leq i \leq 3$, ou seja, apenas 1 e 2 são primos com 3;

$\varphi(4) = 2$ pois $mdc(i, 4) = 2$ onde $1 \leq i \leq 4$, ou seja, apenas 1 e 3 são primos com 4;

$\varphi(5) = 4$ pois $mdc(i, 5) = 4$ onde $1 \leq i \leq 5$, ou seja, temos 1, 2, 3 e 4 primos com 5;

$\varphi(6) = 3$ pois $mdc(i, 6) = 2$ onde $1 \leq i \leq 6$, ou seja, apenas 1 e 5 são primos com 6;

Assim, $N_5 = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 = 13$.

Em geral, para $n \geq 1, N_n = 1 + \sum_{b=1}^{n} \varphi(b)$.

3.1.1 Construção das sequências de Farey

Antes de enunciar o processo de construção, vejamos uma definição para o termo mediante.

Definição 3.1: Dadas duas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, chamaremos de mediante a fração $\frac{a+c}{b+d}$.

Proposição 3.1: Se $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ são frações irredutíveis então a fração mediante $\frac{a+c}{b+d}$ satisfaz a condição $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Prova: Faça-se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frações irredutíveis, com $a, b, c, d \in Z_0^+$ e consideremos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Dito isto, vamos mostrar que valem as duas desigualdades,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \text{ e } \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Temos que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0 \text{ pois } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Do mesmo modo

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{cb + cd - da - dc}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0.$$

Portanto, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

As sequências podem ser construídas partindo das frações $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$, que formam a primeira sequência de Farey. Daí em diante, cada sequência de Farey pode ser obtida da sequência anterior ou cada sequência de Farey de ordem n pode ser obtida a partir da sequência de Farey de ordem $n-1$, inserindo entre cada par de frações consecutivas a fração a fração mediana, coma condição de que o denominador dessa fração mediana não ultrapasse a ordem dessa sequência.

3.1.2 Teorema (termos consecutivos)

Teorema: Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são termos consecutivos em uma sequencia de Farey então $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$, isto é, $bc - ad = 1$.

Prova: já vimos que para $n = 1$ é valido. Vamos supor, então, que a afirmação seja verdadeira para duas frações consecutivas de uma sequencia de Farey de ordem $n - 1$. Dito isto, vamos mostrar que para uma sequencia de Farey de ordem n, essa afirmação é verdadeira.

Qualquer par de frações consecutivas da sequencia F_n é uma das opções $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}$, em que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são frações consecutivas de F_{n-1}.

Para a primeira opção já notamos que é valido pela nossa hipótese de indução, isto é, dada as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ temos $bc - ad = 1$. No segundo caso temos

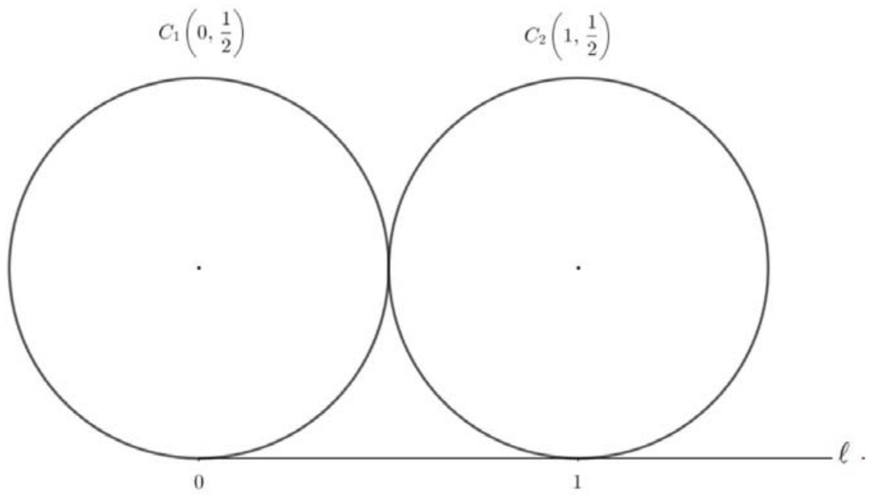
$$b(a+c) - a(b+d) = ba + bd - ab - ad = bd - ad = 1.$$

Com isso também temos uma afirmação verdadeira. Já no terceiro caso temos

$$(b+d)c - (a+c)d = bc + dc - ad - cd = bc - ad = 1. \quad \blacksquare$$

4 CÍRCULOS DE FORD

Sejam l a reta $\{(x, y) \in R^2 \ / \ y = 0\}$, C_1 o circulo centrado em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de raio $\frac{1}{2}$ e C_2 o circulo centrado em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ de raio $\frac{1}{2}$.



Seja F o conjunto dos círculos em R^2 com as seguintes propriedades:

I. $\{C_1, C_2\} \subset F$.

II. Se C e C' pertencem a F, são tangentes entre si e tangentes a l então o circulo $\widetilde{C}$ tangentes aos dois círculos C e C' e à reta l, e contido na região delimitada por C, C' e l, pertence a F.

III. Se $\widetilde{F}$ é um conjunto de círculos satisfazendo as propriedades I e II acima então $F \subset \widetilde{F}$.

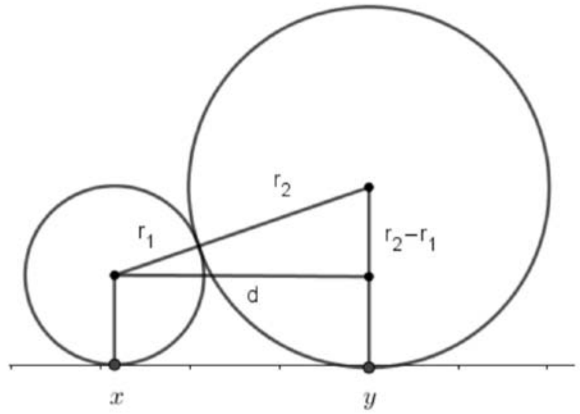
Teorema 4.1: O conjunto dos pontos de tangência dos círculos $C \in F$ com a reta l é o conjunto $\{(x, 0),\ x \in Q \cap [0, 1]\}$.

Prova: Vamos representar cada número racional $x \in [0, 1]$ como $\frac{p}{q}$, onde p é inteiro, q é inteiro positivo e o $mdc(p, q) = 1$. Iremos demonstrar por indução as seguintes situações:

i) O circulo tangente em $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ terá raio $\frac{1}{2q^2}$.

ii) Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$.

Para isso, notemos que dois círculos centrados em (x, r_1) e (y, r_2) são tangentes à reta l e a tangente entre si então $(r_1 - r_2)^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow 4r_1r_2 \Rightarrow d = 2\sqrt{r_1r_2}$, onde $d = |x - y|$. Geometricamente falando:



Com isso podemos observar que as afirmativas i) e ii) são verídicas para os círculos iniciais C_1 e C_2. Se o circulo C é tangente a l e tem centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, o círculo C' é tangente a l e tem centro $\left(\frac{r}{s}, \frac{1}{2s^2}\right)$, e $qr - ps = 1$ então, se o círculo $\widetilde{C}$ tangente a C e C' e à reta l tem centro (x, y) com $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ então, se $d' = x - \frac{p}{q}$ e $d'' = \frac{r}{s} - x$, como os círculos centrados em $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ e (x, y) são tangentes a reta l e tangentes entre si então $\left(\frac{1}{2q^2} - y\right)^2 + (d')^2 = \left(\frac{1}{2q^2} + y\right)^2 \Rightarrow (d')^2 = \frac{2y}{2q^2} + \frac{2y}{2q^2} \Rightarrow (d') = \sqrt{\frac{4y}{2q^2}} \Rightarrow (d') = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{y}{2}}$ de maneira análoga teremos $d'' = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{y}{2}}$, portanto $d' + d'' = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}$, por esse motivo $\frac{2(q+s)}{qs}\sqrt{\frac{y}{2}} = \frac{1}{qs} \Rightarrow y = \frac{1}{2(q+s)^2}$ e $d' = \frac{1}{q(q+s)} \Rightarrow x = \frac{p}{q} + d' = \frac{p(q+s)+1}{q(q+s)} = \frac{pq + ps + 1}{q(q+s)} = \frac{p+r}{q+s}$ já que $qr - ps = 1$. Deste modo, $\widetilde{C}$ é tangente em $\left(\frac{p+r}{q+s}, 0\right)$ e tem raio $\frac{1}{2(q+s)^2}$.

Como $q(p + r) - p(q + s) = qr - ps = 1$ e $(q + s)r - (p + r)s = qr - ps = 1$ observamos que $\widetilde{C}$ satisfaz i) e ii).

A partir dessas situações podemos concluir que todos os círculos criados terão centro em pontos racionais. Então, com isso teremos agora que provar para todo racional $\frac{p}{q} \in [0, 1]$, o ponto $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ é ponto de tangencia de algum dos círculos. Formalizaremos essa prova através de indução em q. Notamos que para $q = 1$ é bem obvio; então só precisamos mostrar que se o $mdc(p,q) = 1$ e $q \geq 2$, é possível escrever $p = p' + p''$ e $q = q' + q''$ com $p', p'', q', q'' \in Z, p', p'' \geq 0, q', q'' > 0$ e $q'p'' - p'q'' = 1$.

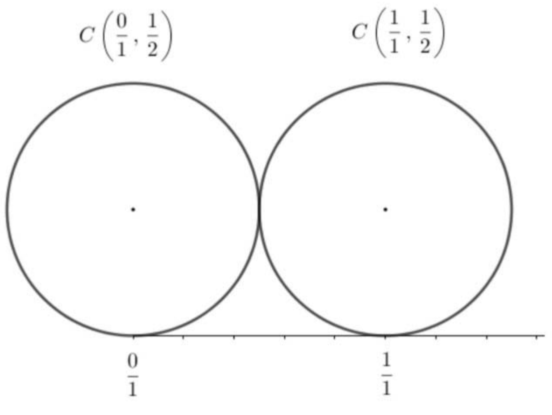
Podemos escrever essas equações da seguinte forma $q'(p - p') - p'(q - q') = 1$, ou seja, $q'p - p'q = 1$, onde $0 < q' < q$ e $0 \leq p' < p$. Como $mdc(p,q) = 1$, exitem $x, y \in Z$, com $px - qy = 1$. Logo, $\forall\, k \in Z, p(x + kq) + q(y - kp) = 1$.

Decerto podemos escolher k de modo que $0 < x + kq < q$ (agora perceba que x não é múltiplo de q, senão $1 = px + qy$ tambem seria), e então consideramos $q' = x - kq$ e $p' = kp - y$ (temos $p' = \frac{pq' - 1}{q}$, mas $1 \leq q' < q$, donde $0 \leq p' < p$).

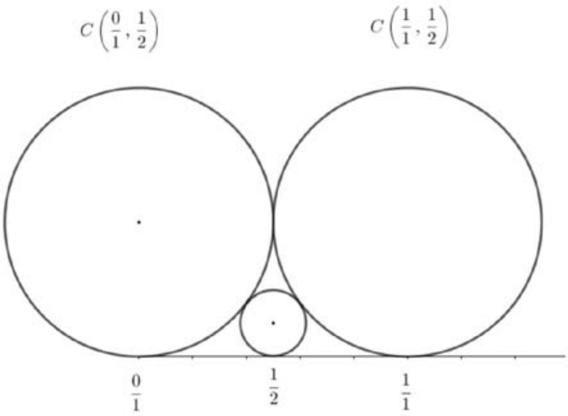
Dada essas informações, temos agora uma notação para os círculos definidos dessa forma. Vejamos:

Definição 4.1: Dado um número racional irredutível $\frac{a}{b}$, o circulo de Ford correspondente a esta fração é denotado por $C(a,b)$, tem raio $\frac{1}{2b^2}$ e centro $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$.

Abaixo temos os círculos correspondentes aos racionais $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$.

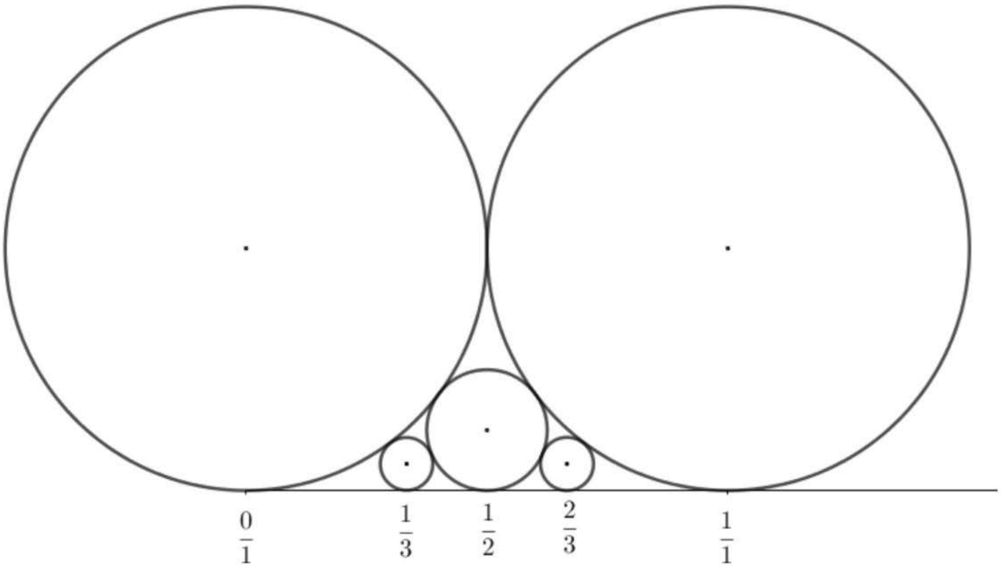


Em seguida, o circulo tangente aos dois iniciais e ao eixo das abscissas, com centro de abscissas $\frac{1}{2}$ e raio $\frac{1}{8}$.



Observemos a situação ii) " Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$", tem relação ao conteúdo anterior, das frações de Farey, onde temos que se $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são termos consecutivos em uma sequência de Farey então$|ps - qr| = 1$.

Com isso, círculos de Ford tangentes correspondem a frações de Farey consecutivas.



Círculos de Ford tangentes, correspondentes a sequência de Farey $F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$.

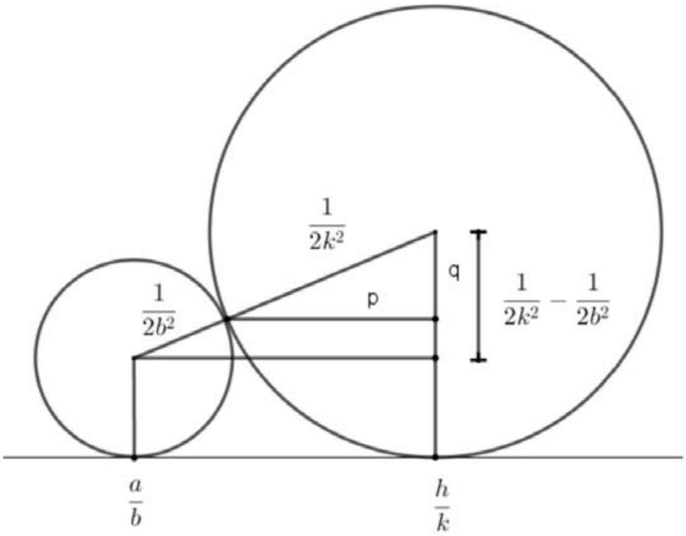
Vejamos os cálculos dos pontos de tangencia será visto no teorema a seguir.

Teorema 4.2: Sejam $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ três frações de Farey de ordem n consecutivas. Os pontos de tangência dos círculos $C(a, b)$ e $C(h, k)$ s dos circulos $C(h, k)$ e $C(c, d)$ são, respectivamente,

$$\alpha_1 = \left(\frac{h}{k} - \frac{b}{k(k^2 + b^2)}, \frac{1}{k^2 + b^2}\right)$$

e

$$\alpha_2 = \left(\frac{h}{k} - \frac{d}{k(k^2 + d^2)}, \frac{1}{k^2 + d^2}\right)$$



Prova: Conforme a figura acima se tem $\alpha_1 = \left(\frac{h}{k} - p, \frac{1}{2k^2} - q\right)$.

Vamos utilizar a semelhança de triângulos para determinar p e q. Temos que

$$\frac{p}{\frac{h}{k} - \frac{a}{b}} = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2b^2}} = \frac{b^2}{k^2 + b^2}$$

Portanto $q = \frac{b}{k(k^2+b^2)}$

Aplicando-se mais uma vez a semelhança, obtemos

$$\frac{q}{\frac{1}{2k^2}} = \frac{\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2b^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2b^2}} = \frac{b^2 - k^2}{b^2+k^2}$$

Portanto $q = \frac{1}{2k^2} \frac{b^2-k^2}{b^2+k^2}$

Com isso, basta agora substituir os valores de p e q na expressão α_1 e obtemos a fórmula desejada.

De maneira análoga obtemos, também, a fórmula para α_2.

5 COCLUSÃO

Para finalizar concluímos que a partir dos resultados a cima obtidos as sequências de Farey de ordem n nada mais é que a sequencia F_n obtida das frações irredutíveis no intervalo $[0,1]$ onde o numerador é menor que n e em ordem crescente. Também nos foi mostrado um modo de construção para F_n a partir de F_{n-1}, inserindo entre cada par de frações consecutivas sua fração mediana com a condição de que o denominador dessa fração não ultrapasse a ordem dessa sequência.

Dessa forma aplicamos os conhecimentos obtidos sobre as sequências de Farey aos círculos de Ford obtendo assim o seguinte resultado: Círculos de Ford que se tangenciam correspondem a frações de Farey consecutivas. Obtendo uma representação geométrica dos números racionais.

Esses resultados se mostram bem relevantes para nossas aulas do ensino fundamental e médio, para aguçarmos a curiosidade de nossos alunos vós tirado do trivial abordado no inicio do artigo, trazendo com si uma forma diferenciada de apresentar os números racionais e sua localização na reta. Com essa abordagem, podemos também trazer ferramentas de auxilio para o docente como o aplicativo Geogebra, dentre outros, mostrado essa representação sobre a reta real. Por fim, que esse trabalho sirva de inspiração não só para professores, mas também alunos que tenham novas idéias quanto ao tema e a outras aplicações lindas da matemática

REFERÊNCIAS

RUDIN, W. Princípios de Análise Matemática. Ao Livro Técnico S.A. e Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, 1971.

LIMA, E. L. Análise Real, volume 1. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 2012.

HAVIL, J. The Irrationals. Princeton University Press., New Jersey, 2012

BROCHERO, F.; MOREIRA, C.G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. Teoria dos Números – um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 4ª edição. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

OLIVEIRA, Everton Franco de. Sequências de Farey e Circunferências de Ford. USP, 2011. Disponível em:< https://docslide.com.br/documents/trabalho-analise-real2.html>. Acesso em 10 de jun 2021.

RIPOLL, J.B.; RIPOLL, C.C.; SILVEIRA, J.F.P. da. Números Racionais, Reais e Complexos. 2ª ed. Porto Alegre: UFRGS, 2010

VIEIRA, V. L. Álgebra Abstrata para Licenciatura (2ª edição). Editora da Universidade Estadual da Paraíba (coedição. Editora livraria da Física), Campina Grande/São Paulo, 2015.

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A construção dos números reais e suas extensões. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste: Universidade Federal Fluminense, novembro de 2015

RODRIGUES, Nathercia Custodio. Algumas questões sobre frações. Impa, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC_2018_Nathercia-Rodrigues.pdf> . Acesso em: 19 jun. 2021.

OLIVEIRA, Glenice Ferreira. (Re)construção do conjunto dos Números Racionais: uma proposta pedagógica sob a luz da aprendizagem significativa. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 28 set. 2017. Disponível em: < https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6116#preview-link0>. Acesso em: 19 ago. 2021.