UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VANESSA DA FONSECA SILVA

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS PARA PROBLEMAS DE CAUCHY: ALGUNS CASOS E SUAS LIMITAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2022

VANESSA DA FONSECA SILVA

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS PARA PROBLEMAS DE CAUCHY: ALGUNS CASOS E SUAS LIMITAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Ma. Isabella Silva Duarte

CAMPINA GRANDE
2022

S586e Silva, Vanessa da Fonseca.

Um estudo sobre o método das características para problemas de Cauchy [manuscrito] : alguns casos e suas limitações / Vanessa da Fonseca Silva. - 2022.

61 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Profa. Ma. Isabella Silva Duarte , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Problemas de Cauchy. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Método das características . I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

VANESSA DA FONSECA SILVA

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS PARA PROBLEMAS DE CAUCHY: ALGUNS CASOS E SUAS LIMITAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Aprovado em: 25/03/2022

BANCA EXAMINADORA

Isabella Silva Duarte
____
Prof. Ma. Isabella Silva Duarte (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Onildo dos Reis Freire
____
Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Josyclesio Lima da Silva
____
Prof. Me. Josyclesio Lima da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho, com todo o amor do mundo, aos meus pais, José e Conceição.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, começo agradecendo a quem me deu forças nos momentos de fraqueza e me permitiu chegar nesse momento. Obrigada ao grandioso e bondoso Deus que nunca me deixou desamparada, a Ele minha gratidão.

À minha mãe, Conceição Fonseca, por acreditar em meu potencial, me acalmar muitas vezes e me incentivar durante todo o percurso, sem o seu apoio nada seria possível.

Ao meu pai, José Gomes, que incansavelmente, enfrentou inúmeras madrugadas no frio e na chuva para me levar ao ponto de ônibus. Tenho a convicção de todo o seu esforço para me proporcionar um futuro diferente do seu.

Aos meus irmãos, Eduarda Fonseca e João Pedro Fonseca, por toda compreensão em momentos de estresse e também por toda paciência e carinho comigo. Assim como aos meus avós, tios, primos e familiares em geral dos quais me orgulho em fazer parte.

A Daniel Tales, pessoa de grande importância em minha vida que acompanhou todos os perrengues de perto e foi ouvido para as minhas lamentações.

Aos meus companheiros de graduação, os quais sinto um grande carinho devido à importância em toda minha tragetória acadêmica, em especial, Larissa Costa, Gabriela Velozo e Dielly Ziwane, pessoas que me ajudaram de modo significativo.

À minha querida orientadora, Isabella Duarte, por toda parceria, paciência e cuidado durante a construção do trabalho. Me sinto privilegiada de ter vivenciado essa experiência ao seu lado e sem a sua ajuda nada seria possível. Todos os aprendizados durante esse tempo foram eternizados.

Aos membros da Banca, Prof. Me. Onildo Freire, o qual admiro por sua didática e descontração em sala de aula e Prof. Me. Josyclesio Silva, por ter aceitado o convite para participar desse momento. Tenho certeza que muito acrescentarão em meu trabalho.

Aos meus professores que foram a minha base no meu crescimento profissional.

Enfim, a todos que contribuiram, muito obrigada.

"Que os nossos esforços desafiem as impossibilidades. Lembrai-vos de que as grandes proezas da história foram conquistadas do que parecia impossível."

Charles Chaplin.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar o Método das Curvas Características como instrumento para determinar soluções de Equações Diferenciais Parciais - EDPs de primeira ordem, sujeitas a uma condição inicial, o que chamaremos de Problema de Cauchy. O método em questão reduz a EDP a uma Equação Diferencial Ordinária - EDO ao longo de curvas que cruzam, em um único ponto, uma outra curva pertencente a uma região do domínio da EDP chamada *condição inicial*, a qual, expressa informações sobre o comportamento da solução na região especificada. Aplicamos o método para alguns tipos de EDPs, tais como as lineares e não-lineares, de coeficientes constantes ou variáveis. Também retratamos sobre algumas situações em que o método das características não é capaz de resolver um Problema de Cauchy, o que provoca uma limitação para o método. Inicialmente, faremos uma abordagem dos principais conceitos encontrados no estudo das EDPs. Posteriormente, avançaremos nossos estudos para a temática principal, na qual, resolveremos algumas EDPs através do método apresentado.

Palavras-chave: Problemas de Cauchy. Equações diferenciais parciais. Método das características.

ABSTRACT

This research aims to present the Method of Characteristics as a tool to determine solutions of Partial Differential Equations – first order equation PDEs, subjected to the initial condition, what will be referred to as the Cauchy Problem. The method in question reduces a PDE into a Ordinary Differential Equation – ODE alongside with the curves that it crosses, at an only point, and another curve that belongs to the region of control from a PDE, called initial condition, in which expresses information from the behavior of the specified region. We applied the method to some types of PDEs, such as the linear and nonlinear, from constant coefficient or variables. We have also reported about some situations in which the Method of Characteristics is not able to solve a Cauchy Problem, what incited a limitation to the method. Initially, we are going to approach the main concepts found in the study of PDEs. Next, we are going to advance our studies to the main theme, in which, we are going to solve some PDEs through the presented method.

Keywords: Cauchy Problem. Partial differential equations. Method of characteristics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais surgiram a partir de necessidades humanas advindas de fenômenos naturais, como a Física, por exemplo. Isaac Newton (1642-1727) e Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram os precursores a desenvolver estudos relacionados à área a partir do Cálculo Diferencial. Newton, em suas investigações, elaborou conceitos que foram aplicados fortemente na Medicina. Além disso, ele desenvolveu um método de resolução por séries infinitas para equações do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Por sua vez, Leibniz formulou os métodos da separação de variáveis e de resolução de equações lineares de primeira ordem para as Equações Diferenciais.

Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) ficou conhecido por estudar as cordas de um violino. Segundo IAN STEWART (2013), D'Alembert estava interessado em estudar o comportamento das equações e não em encontrar uma solução. Com isso, surgiu a *equação das ondas* ou equações das ondas vibrantes das Equações Diferenciais Parciais - EDPs. Joseph Fourier (1768-1830), através dos estudos relacionados à propagação do calor em corpos sólidos, que eram sujeitos a determinadas condições iniciais, foi responsável por desenvolver a *equação do calor*.

É fácil reconhecer a importância do estudo das Equações Diferenciais, uma vez que esse ramo sempre esteve relacionado a problemas da nossa realidade, não sendo algo totalmente abstrato. BOYCE e DIPRIMA (1985) alegam que a relevância dessa área se dá devido a sua forte aplicabilidade em modelos físicos e esses, por sua vez, nos ajudam a fazer previsões, descrever ou controlar sistemas.

Um exemplo de uma situação que pode ser modelada por uma EDP seria descrever a quantidade de carros em um trecho de uma cidade. A densidade, que é a quantidade de carros por comprimento, denotada por $u(x,t)$, e o fluxo, sendo a quantidade de carros por unidade de tempo, denotada por $q(x,t)$, estão completamente relacionados, uma vez que a densidade varia acordo com o fluxo de carros. Ao modelar esse problema, obtemos a equação

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = 0,$$

o que significa dizer que a densidade é preservada e depende do fluxo. Por outro lado, se $q(x,t) = \alpha \cdot u(x,t)$, então

$$\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = \alpha \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

recaíndo, portanto, em uma EDP $u_t + \alpha u_x = 0$, que pode ser classificada como uma *equação do transporte*.

Modelar um problema não é foco das EDPs, é importante saber sua aplicabilidade para atribuir sentido às equações. No entanto, o intuito é, na verdade, a partir do problema, estudar os processos que resolvam a EDP. Desse modo, este trabalho tem por objetivo apresentar o Método das Características como instrumento para determinar soluções de Equações Diferenciais Parciais de primeira ordem e evidenciar algumas de suas limitações.

No Capítulo 2, apresentamos a definição de EDP e os conceitos de *ordem*, *grau* e *linearidade*. Posteriormente, aborda-se o conceito de solução, e que toda combinação de um conjunto de soluções de uma EDP, definida por um *operador* L, é também solução. Por fim, discutimos sobre as *condições iniciais* e de *contorno*, uma vez que o intuito aqui será resolver Equações Diferenciais Parciais sujeitas a alguma dessas condições, ao que chamaremos de Problema de Cauchy.

Já no Capítulo 3, apresentamos a temática principal deste trabalho, o Método das Características. A princípio, começamos determinado a solução para EDPs de primeira ordem com coeficientes constantes. Em seguida, aplicamos o método para as EDPs com coeficientes variáveis. Buscamos, nessa capítulo, encontrar soluções únicas locais para Problemas de Cauchy e assim, demostramos o Teorema de Existência e Unicidad. Posteriormente, expadimos os nossos estudos para os Problemas de Cauchy não-homogêneos.

No Capítulo 4, o último, tratraremos sobre alguns exemplos que apresentam certas limitações do método das características. Inicialmente, expomos soluções descontínuas para o caso linear, posteriormente, aplicamos o método em EDPs não-lineares e apontamos suas objeções.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo inicial, pretendemos nos familiarizar com o nosso objeto de estudo: As Equações Diferenciais Parciais - EDPs. Antes de apresentarmos o conceito de EDP, precisamos de algumas definições.

Começamos denotando o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, bem como, o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$, e, por fim, o Espaço Euclidiano de dimensão n, com $n \geq 1$, por $\mathbb{R}^n$. Lembramos que **Espaço Euclidiano** é um espaço vetorial munido de um produto interno.

Definição 2.1. Dados dois vetores $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a **distância** entre x e y é:

$$|x - y| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 2.2. O conjunto de todos os pontos a uma distância menor que $r > 0$ de um ponto fixo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é denominado de **bola aberta** centrada em x_0 de raio r e denotado por $B(x_0, r)$, isto é:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}.$$

Definição 2.3. Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** se, dado qualquer $x_o \in \Omega$, existe uma bola aberta centrada em x_0 tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$.

Definição 2.4. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** se seu complementar é aberto. Ou seja, quando

$$\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n; x \notin F\}$$

é um conjunto aberto.

Definição 2.5. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$

i. O fecho de A, denotado por $\overline{A}$, é o menor conjunto fechado que o contêm.

ii. O **interior de** A, denotado por $int(A)$, é o maior conjunto aberto contido em A.

iii. O **bordo** ou **fronteira** de A, denotado por ∂A, é todo conjunto dado por

$$\partial A = \left\{x \in \overline{A}\ ;\ x \notin int(A)\right\}.$$

Definição 2.6. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. A derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a x no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}, \tag{2.1}$$

desde que o limite exista. Também denotada por: f_x; $\partial_x f$ e D_1.

Ao derivar $f(x,y)$ duas vezes tem-se, assim, as derivadas de segunda ordem e elas são denotas por: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; f_{xx}; ${\partial_x}^2$ ou D_2D_1f.

Denotaremos por $C^k(\Omega)$ o conjunto de funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são k vezes continuamente diferenciáveis.

Definição 2.7. Uma **Equação Diferencial Parcial** (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes, $x, y, z, t, ...$, e derivadas parciais de uma função à variável dependente, isto é, $u = u(x,y,z,t...)$. Em n váriaveis independentes, $x_1, x_2, ...x_n$, a EDP é expressada por:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial {x_n}^k}\right) = 0, \tag{2.2}$$

onde $x = (x_1, x_2..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função a ser determinada.

2.1 Ordem e grau de uma EDP

Nessa seção apresentaremos as definições de *ordem* e *grau* de uma EDP, e exemplos de algumas das principais EDPs que mais se destacam nos estudos da fisíca e outras áreas correlatas.

Definição 2.8. A **ordem** de uma EDP é determinada pela mais alta ordem de derivação da função u, solução da EDP. Ou seja, se uma Equação Diferencial Parcial tem ordem k, significa dizer que a derivada parcial de u, de ordem mais alta, tem ordem k.

Definição 2.9. O **grau** de uma EDP é determinado a partir do expoente da derivada de mais alta ordem que nela aparece.

A ordem da EDP em (2.2) será k se, sendo F uma função de algumas das derivadas de ordem k, F não é constante.

Exemplo 2.1. A Equação Diferencial Parcial

$$D_k u(x) + u = 0,$$

é de ordem k e de primeiro grau. Contudo, a EDP

$$0 \cdot D_k u(x) + D_{k-2} u(x) - 6 = 0,$$

não é de ordem k, uma vez que o termo $D_k u(x)$ está sendo multipicado por 0. Em consequência, a EDP tem ordem $k-2$ e grau 1.

Exemplo 2.2. A *Equação do Transporte*,

$$u_t + c \cdot u_x = 0,$$

onde $u = u(x,t)$, é de primeira ordem e de primeiro grau, pois aparecem apenas derivadas de ordem 1.

Essa EDP pode modelar diversos problemas físicos que dependem de fatores como velocidade, temperatura e concentração de materiais e que conservam grandezas tais como a massa e a energia, por exemplo. No capítulo seguinte iremos nos deter a compreender o comportamento das soluções para essa EDP, onde c pode ser ou não constante.

Exemplo 2.3. Na *Equação de Sine-Gordon*,

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0,$$

como aparecem derivadas de segunda ordem e essas, por sua vez, são as derivadas de maior ordem, então, a EDP é de segunda ordem e de primeiro grau, uma vez que o expoente dos termos u_{tt} e u_{xx} é 1.

Dentre as diversas aplicações na Física, é possível utilizar a equação de Sine-Gordon para descrever a propagação de movimentos de deslocamentos que acontecem nos cristais.

Exemplo 2.4. A *Equação KdV (Korteweg e de Vries)*,

$$u_t = u_{xxx} + u u_x,$$

possui derivadas de primeira e terceira ordem e é de primeiro grau, nesse caso a maior ordem das derivadas é 3, assim a EDP é de terceira ordem.

Uma curiosidade acerca desta equação é que ela é utilizada para descrever diversos fenômenos físicos, dentre eles, as ondas longitudinais dispersivas em materiais elásticos, como molas, por exemplo.

Exemplo 2.5. A Equação Diferencial Parcial

$$5 \cdot (u_{xx})^2 + u_x = 0,$$

é de segunda ordem e de segundo grau, pois o termo u_{xx} tem expoente 2.

2.2 Linearidade e homogeneidade

Nesta seção, trataremos da classificação das EDPs em lineares e não-lineares e semi-lineares e suas especificações, bem como, abordaremos o conceito de homegeneidade.

Definição 2.10. Seja $u = u(x_1, ..., x_n)$, dizemos que uma EDP é **linear**, quando u e suas derivadas não se multiplicamCaso contrário, é dita **não-linear**.

Exemplo 2.6. A Equação do Transporte,

$$u_t + c \cdot u_x = 0,$$

ilustrada no Exemplo 2.2, é um exemplo de uma equação linear, pois os termos, u_t e u_x, não estão em um produto.

Por outro lado, a equação KdV, dada por

$$u_t = u_{xxx} + uu_x,$$

ilustrada no Exemplo 2.4, é não-linear, pois um dos seus termos é um produto entre u e u_x.

Exemplo 2.7. A *Equação do Calor unidimensional*,

$$u_t = \alpha^2 \cdot u_{xx}, \tag{2.3}$$

é linear. Onde, $u = u(x,t)$ com $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante.

Essa é uma importante equação para descrever o fluxo de calor em um corpo sólido, mais especificamente, em uma barra ferro, na qual, acontece a difusão de calor.

Considerando a variável espacial em dimensão n, para $n \in \mathbb{N}$, a equação (2.3) é dada por:

$$u_t = \alpha^2 \Delta u,$$

em que, $u = (x,t)$, com $x = (x_1, ..., .x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e Δ é o laplaciano em $\mathbb{R}^n$. Perceba que mesmo em dimensões maiores, a EDP continua sendo linear.

De um modo geral, podemos representar uma EDP linear de primeira ordem da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{2.4}$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identificamente nulo e j indica a posição da respectiva coordenada de x. Se $x = (x_1, ..., x_n)$, temos:

$$a_1(x) \cdot D_1 u + ... + a_n(x) \cdot D_n u + b(x) \cdot u + c(x) = 0. \tag{2.5}$$

Se considerarmos agora a equação linear de segunda ordem, então a sua forma geral será:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_ju + b(x) + c(x) = 0. \tag{2.6}$$

em que algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo.

Para equações com duas variáveis independentes, podemos reescrever a equação (2.4) da seguinte forma:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0. \tag{2.7}$$

Analogamente, a equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u+G(x,y) = 0. \tag{2.8}$$

Note que na equação (2.8) não aparece o termo u_{yx}. Isso acontece porque, para uma EDP de segunda ordem, busca-se soluções u que são duas vezes continuamente diferenciáveis em Ω. Nesse caso, $u_{xy} = u_{yx}$.

Exemplo 2.8. Escrevendo a equação do transporte na forma da expressão obtida em (2.7), temos:

$$1 \cdot u_t + 1 \cdot u_x + 0 \cdot u + 0 = 0,$$

onde $A(x,y) = 1;\ B(x,y) = 1;\ C(x,y) = 0$ e $D(x,y) = 0$.

Definição 2.11. Chamamos de **parte principal** da EDP, a parte que contém as derivadas de maior ordem.

As partes principais das equações (2.7) e (2.8) são, respectivamente:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y, \tag{2.9}$$

e

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}. \tag{2.10}$$

Definição 2.12. Chamamos de **equações semi-lineares** aquelas que, não sendo lineares, possuem a parte principal linear.

Uma EDP de primeira ordem e semilinear com três variáveis independentes, ou seja $u = u(x,y,z)$, é expressada por:

$$A(x,y,z)u_x + B(x,y,z)u_y + C(x,y,z)u_z = F(x,y,z,u). \tag{2.11}$$

Exemplo 2.9. A *Equação de Burgers*,

$$u_t + u \cdot u_x = v \cdot u_{xx},$$

com v uma constante positiva que representa viscosidade, é semi-linear e de segunda ordem.

Segundo ESCHENAZI (2011), essa EDP guarda os efeitos não-lineares advectivos, assim como os efeitos viscosos difusivos, dentre eles, a equação consegue modelar uma onda de gás.

Mais adiante, no Exemplo 4.3 voltaremos à discutir sobre essa EDP para o caso em que ela é de primeira ordem.

No estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, classificamos as equações em *homogêneas* e *não-homogêneas* analisando se o termo independente é igual a zero, o mesmo ocorre para as EDPs, como expõe a seguinte definição:

Definição 2.13. Uma EDP linear é **homogênea** se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo.

Exemplo 2.10. A equação (2.7), dada por:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0,$$

só será homogênea se $D(x,y) \equiv 0$.

Exemplo 2.11. A equação

$$xu_x + yu_y = sen(xy)$$

não é homogênea, pois o termo $sen(xy) \neq 0$, para algum $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.12. A *Equação de Poisson*, ilustrada abaixo, recebe esse nome devido à popularização difundida pelo matemático e físico francês Siméon Denis Poisson.

A EDP em questão é de grande relevância para a eletrostática, em outras palavras, ajuda a compreender a relação presente na eletricidade e no magnetismo:

$$u_{xx} + u_{yy} = h(x,y). \tag{2.12}$$

Como podemos observar, a equação (2.12) é linear e de segunda ordem, todavia, só será homogênea se $h(x,y) \equiv 0$.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.13}$$

A equação (2.13) é denominda de *Equação de Laplace*, também aplicada à eletrostática. Além disso, recebe essa designação devido as transformações decorbertas pelo seu criador Simon Pierre Laplace.

Exemplo 2.13. A *Equação da Onda*,

$$u_{tt} = k^2 u_{xx}, \tag{2.14}$$

com $u = u(x,t)$, é de segunda ordem, linear e homogênea. A variável $t > 0$ representa o tempo, $x \in \mathbb{R}$ é a variável espacial e $k > 0$ é uma constante de velocidade de propagação da onda.

Em dimensão n, com $n \in \mathbb{N}$, a equação da onda é dada por

$$u_{tt} = k^2 \Delta u,$$

onde,

$$u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

e Δ é o laplaciano em $\mathbb{R}^n$. Essa EDP descreve a propagação de diversos tipos de ondas, tais como as ondas sonoras, luminosas e aquáticas, por exemplo.

2.3 O Espaço de Soluções para EDPs

Nesta seção, estudaremos o conceito de solução para EDPs e alguns aspectos do conjunto que reúne todas as soluções de uma EDP.

Definição 2.14. Uma função $u = f(x_1, ..., x_n)$ é solução de uma Equação Diferencial Parcial

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ... \frac{\partial^k u}{\partial {x_n}^k}\right) = 0 \tag{2.15}$$

sobre o conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se:

i. $f \in C^n(M)$, é equivalente dizer que f é n vezes continuamente diferenciável sobre o conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$

ii. f satisfaz à Equação Diferencial Parcial dada.

Exemplo 2.14. Uma solução para a equação diferencial parcial,

$$u_{xy}(x,y) = 0, \tag{2.16}$$

é dada por $u(x,y) = x^2 + y^5$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De fato, temos que $u_x = 2x$, logo, $u_{xy} = 0$, satisfazendo, assim, (2.16).

No Exemplo 2.23 veremos o conjunto de todas as solução da EDP (2.16).

A partir de agora, pretendemos definir um operador, L, a partir de uma EDP linear.

Seja a EDP linear de primeira ou segunda ordem com n variáveis independentes, $x_1, ..., x_n$, em que $x = (x_1, ..., x_n)$. Isto é,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0 \tag{2.17}$$

Denotaremos por k a ordem da equação, assim $k = 1$ ou $k = 2$. Se $k = 1$, significa dizer que $a_{ij} \equiv 0$ para quaisquer que sejam $i, j \in \{1, ...n\}$ e existe j, com $1 \leq j \leq n$, tal que $b_j \not\equiv 0$.

A equação (2.17) pode ser reescrita da forma

$$Lu = f, \tag{2.18}$$

onde $f(x) = -d(x)$ e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x). \tag{2.19}$$

Cada função diferenciável u, corresponde a uma única função Lu. Desta maneira, é possível definir o operador ou transformação L.

Definição 2.15. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Da equação (2.17), suponha que as funções a_{ij}, b_j e c, em que, $1 \leq i, j \leq n$ são contínuas em Ω e tomam valores reais. Assim, definimos o **operador** ou **trasformação** L por

$$\begin{array}{rcl} L : C^k(\Omega) & \longrightarrow & C(\Omega) \\ u & \longmapsto & Lu \end{array}, \tag{2.20}$$

onde Lu é expressado como na equação (2.19).

Observação 2.1. *Quando nos referimos ao termo operador ou transformação, significa dizer que a função L está definida entre espaços de funções, ou seja, L leva uma função u, que carrega determindas propriedades, em uma outra função, Lu. Além disso, o operador L é um exemplo de operador diferencial parcial.*

Sabemos que a equação (2.17) é linear e é expressada por

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0,$$

então o operador L, definido na equação (2.19), dado por

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x),$$

corresponde a uma expressão linear. Desta forma, L leva a função identicamente nula nela mesmo. Além disso, a função L é uma transformação linear, isto é,

$$L(u+\alpha v) = Lu + \alpha Lv \tag{2.21}$$

para quaisquer u e v no domínio de L e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

A proposição a seguir nos garante essa afirmação.

Proposição 2.1. *A aplicação* $L : C^k(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$, *dada por*

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x),$$

é linear.

Demonstração.

De fato, sejam u e v soluções de (2.17). Assim,

$$\begin{aligned}
L(u+\alpha v) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot D_i D_j (u+\alpha v)(x) + \sum_{i,j=1}^{n} b_j(x) \cdot D_j (u+\alpha v)(x) + c(x)(u+\alpha v)(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot D_i D_j u(x) + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot D_i D_j v(x) + \sum_{i,j}^{n} b_j(x) \cdot D_j u(x) \\
&\quad + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} b_j(x) \cdot D_j v(x) + c(x) \cdot u(x) + \alpha c(x) \cdot v(x) \\
&= \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot D_i D_j u(x) + \sum_{i,j=1}^{n} b_j(x) \cdot D_j u(x) + c(x)u(x) \right] \\
&\quad + \alpha \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot D_i D_j v(x) + c(x)v(x) \right] \\
&= L(u) + \alpha L(v)
\end{aligned}$$

Logo,

$$L(u+\alpha u) = L(u) + \alpha L(v).$$

Portanto, L é uma transformação linear. ∎

Sabemos que para toda EDO não-homogênea é possível definir uma nova equação, de modo que, esta seja homogênea e denominada **equação homogênea associada** da EDO. Do mesmo modo, para as EDPs também é possível definir uma equação homogênea associada, de maneira semelhante às EDO's.

Definição 2.16. Seja a equação diferencial parcial não-homogênea, $Lu = f$. Podemos associar tal equação à EDP linear homogênea

$$Lu = 0, \tag{2.22}$$

que é denominada **equação homogênea associada à EDP**.

Sendo $\{u_1, u_2.., u_n\}$ um conjunto de soluções para a equação $Lu = 0$, podemos afirmar que qualquer combinação linear desse conjunto de soluções continua sendo uma solução para a equação. Isso é garantido pelo resultado a seguir.

Proposição 2.2. *Sejam*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x),$$

$u_1, u_2, ..., u_m$ *soluções para* $Lu = 0$*, e* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *escalares, então*

$$u = \sum_{j=1}^{m} = \alpha_j u_j$$

é também solução para $Lu = 0$.

Demonstração.

Vamos utilizar o método de indução finita sobre o número m de soluções.

i. Passo base: Seja u_1 e u_2 soluções para a equação (2.22), desse modo, $Lu_1 = 0$ e $Lu_2 = 0$. Assim, pela linearidade de L, temos

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

ii. Hipótese de Indução: suponha que

$$w = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j$$

é solução para (2.22), ou seja,

$$Lw = L\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j\right) = 0$$

iii. Passo indutivo: Seja

$$w = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j w_j,$$

devemos provar que

$$L\left(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j w_j\right) = 0.$$

De fato, pela lineardade de L:

$$L\left(\sum_{j=1}^{m+1}\alpha_j w_j\right) = L\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j w_j + \alpha_{m+1}w_{m+1}\right) = \underbrace{L\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j w_j\right)}_{0} + \underbrace{L\left(\alpha_{m+1}w_{m+1}\right)}_{0} = 0 + 0 = 0$$

A parcela $L\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j w_j\right)$ é solução, por hípotese de indução, e $L\left(\alpha_{m+1}w_{m+1}\right) = 0$, por w_{m+1} também ser solução, desse modo, toda combinação linear de um conjunto de soluções é também solução para $Lu = 0$.

$\blacksquare$

Observação 2.2. *Diferente do que acontece com EDO's, o espaço de soluções das EDPs, pode ter dimensão infinita. Além disso, existem EDPs que não possuem solução. De acordo com IÓRIO (2007), H. Lewy* (1957) *mostrou que existe uma função f, em que a EDP*

$$u_x + iu_y - 2i(x+iy)u_y = f,$$

com coeficientes complexos, não apresenta solução.

Exemplo 2.15. Considere a equação linear homogênea

$$u_{xy}(x,y) = 0. \tag{2.23}$$

O nosso objetivo será encontar as soluções clássicas quando $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução.

Aqui, o operador L é dado por

$$\begin{aligned} L:\ & C^2(\mathbb{R}^2) && \longrightarrow C(\mathbb{R}^2) \\ & u(x,y) && \longmapsto Lu = u_{xy}, \end{aligned}$$

em que $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Desta forma, integrando a equação dada com relação a y, de modo que a variável x seja fixada, temos:

$$\int u_{xy}dy = u_x.$$

Assim,

$$u_x = F(x)$$

onde, F é uma função arbitrária em $C^1(\mathbb{R})$.

Por conseguinte, vamos agora fixar a variável y e realizar a integração em relação a x.

$$\int u_x dx = \int F(x)dx$$

Daí,

$$u(x,y) = f(x) + g(y),$$

onde f é uma primitiva de F em $C^2(\mathbb{R})$ e g é uma função arbitrária em $C^2(\mathbb{R})$. Desse modo, como F é uma função arbitrária, então f e g também são funções arbitrárias em $C^2(\mathbb{R})$. Em vista disso, todas as soluções para u_{xy} serão do modo $u(x,y) = f(x) + g(y)$. Assim, o espaço de soluções clássicas é dado pelo conjunto:

$$U = \left\{u \in C^2(\mathbb{R}^2) : u(x,y) = f(x) + g(y), \quad \text{com} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f, g \in C^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Logo, para essa equação, o espaço de soluções tem dimensão infinita.

Acabamos de ver um exemplo em que o conjunto de soluções é infinito, e na Proposição 2.2, vimos que qualquer combinação linear de um conjunto finito de soluções, também é solução. O Princípio da Superposição, a seguir, nos mostra que é possível formar combinações lineares infinitas que também serão soluções.

Proposição 2.3. *(Princípio da Superposição) Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k, cujos coeficientes estão definidos em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções da classe $C^k(\Omega)$ satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$, onde $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω. Então, u satisfaz a equação

$$Lu = 0.$$

O resultado da proposição é válido para qualquer k. Para efeito de sintetizar as contas, a demonstração será feita para o caso em que $k = 1$ ou $k = 2$.

Demonstração.

Considere a aplicação L como

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x).$$

Por hipótese, para quaisquer que sejam $x \in \Omega$ e $1 \leq i, j \leq n$,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x).$$

Logo,

$$D_i u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x)$$

e

$$D_i D_j u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x),$$

são séries convergentes. Portanto, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
(Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x) \\
&\quad + c(x) u_m(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u_m(x) + c(m) u_m(x) \right] \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (L u_m)(x) = 0,
\end{aligned}$$

o que demostra o resultado quando $k = 1$ ou $k = 2$.

■

A demonstração segue análoga para $k > 2$.

2.4 Condições de Contorno e Iniciais

Nesta seção, iremos abordar dois tipos de condições que são frequentemente utilizadas no estudo das equações diferenciais: as *condições iniciais* e as *condições de contorno.*

Condições Inicias são informações associadas ao tempo inicial. Os dados, geralmente, são relacionados ao valor da função no tempo $t = 0$, ou à derivada da função no tempo $t = 0$ e, assim por diante.

As **Condições de Contorno** são valores que são impostos sobre u e suas derivadas no *bordo* ou *fronteira* de uma determinada região. Frequentemente, nos problemas com condições de contorno, nos deparamos com condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.24}$$

onde, α e β são constantes dadas, f é uma função em $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$.

Quando $\alpha = 0$, na equação (2.24), obtemos

$$\beta\frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x),$$

que é denominada de *Condição de Neumann*.

Quando $\beta = 0$, tem-se

$$\alpha u(x) = f(x),$$

a qual é chamada de *Condição de Dirichlet*.

Diferentemente do estudo para EDO's, nas EDPs costumamos estudar os casos com mais de uma variável. Em uma função que depende de x e t, por exemplo, naturalmente fixamos uma das variáveis, digamos $t = 0$, assim, determinamos o valor da solução e de suas derivadas em relação à variável fixa, no nosso caso a variável t. Desse modo, temos

$$u(x,0) = f(x) \text{ e } u_t(x,0) = g(x),$$

em que f e g são funções dadas.

Citemos como exemplo uma função cujo domínio é de dimensão 2 ($n = 2$), com t sendo a variável temporal e x a variável espacial. Ao fixar t, impomos o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t = 0$. Para $n = 3$, o processo é o mesmo, neste caso, ao fixar a variável t, a solução e suas derivadas normais estão determinadas ao longo da superfície $t = 0$.

Diante disso, quando estabelecemos o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva se $n = 2$ ou de uma superfície se $n = 3$, estamos com um **Problema de Cauchy** ou **Problema de Valor Inicial**, e assim, generalizamos o conceito de condição inicial.

Exemplo 2.16. Considere o problema

$$\begin{array}{rcl} u_y(x,y) & = & 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2 \\ u(x,p(x)) & = & f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

onde, $p, f \in C^1(\mathbb{R})$. A EDP é de primeira ordem e possui duas váriaveis, x e $p(x)$, assim, nos foi dada a solução na curva inicial, $y = p(x)$, no plano. Desse modo, estamos diante de um Problema de Cauchy.

Exemplo 2.17. O problema

$$\begin{array}{rcl} u_x(x,t) & = & 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) & = & f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

é um Problema de Cauchy que envolve uma EDP linear de primeira ordem e uma informação da solução sobre a curva inicial se dá no eixo-x. Veremos, no Exemplo 3.4, que esse problema não terá solução se f for constante, e terá uma infinidade de soluções se f não for constante.

Além dos Problemas de Cauchy, existem também os **Problemas Mistos** que são aqueles que dispõem tanto de condições iniciais quanto de condições de contorno, simultaneamente. Esses tipos de problemas, geralmente, discutem situações de problemas fisícos que dependem do tempo, ou seja, fenômenos de difusão e problemas oscilatórios, onde, habitualmente, separa-se a variável de tempo, t, das demais variáveis espaciais x, y, z.

Exemplo 2.18. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado (Ω é o interior de um sólido $\overline{\Omega}$). Vamos denotar por $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e por Δ o laplaciano em $\mathbb{R}^3$. Assim, temos que

$$u_t = \alpha^2 \Delta u, \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \tag{2.25}$$

$$u(X, t) = 0, \qquad \text{com} \quad X \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad t \geq 0, \tag{2.26}$$

$$u(X, 0) = f(X), \qquad \text{onde} \quad X \in \overline{\Omega}, \tag{2.27}$$

é um problema misto, em que a função f é dada e α^2 é uma constante positiva.

A condição $u(X, t) = 0$, para $X \in \partial\Omega$ e $t \geq 0$, é uma condição de contorno, enquanto que a condição $u(X, 0) = f(X)$ para $X \in \overline{\Omega}$ é uma condição inicial.

Pela equação (2.27),

$$u \in C(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)). \tag{2.28}$$

Além disso, como pela equação (2.25), u é duas vezes diferencial, temos

$$u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty)). \tag{2.29}$$

Logo, por (2.28) e (2.29), a solução procurada é $u \in D$, onde

$$D = C(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty)).$$

Portanto, f deve pertencer a $C(\overline{\Omega})$. Observe que, para que haja solução , f deve satisfazer uma condição de compatibilidade

$$f(X) = 0, \ \ \forall X \in \partial\Omega.$$

No Capítulo 3, o nosso principal objetivo será estudar os Problemas de Cauchy que envolvem EDPs de primeira ordem cuja solução esteja definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Contudo, IÓRIO (2007) faz uma abordagem aprofundada no estudo dos Problemas Mistos.

No momento em que é posto um problema de EDP que envolve condições inicias ou condições de contorno, ou ambas condições, verificamos as seguintes questões:

i. *Existência de Soluções*: consiste em especificar a classe de funções onde estão as soluções e o sentido em que as condições de contorno e/ou iniciais são satisfeitas

ii. *Unicidade de Soluções*: a partir a da existência de soluções, o objetivo é verificar se a solução é única dentro da classe especificada.

iii. *Dependência de solução nos dados iniciais e/ou de contorno*: sempre que estamos diante de um problema físico, estamos trabalhando com dados experimentais que necessariamente contêm erros de medida, desse modo, se torna fundamental questionar se pequenas variações nos dados influenciam em pequenas variações na solução, se caso isso ocorra, dizemos que a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou de contorno.

Quando um problema satisfaz a existência, unicidade e depêndencia contínua dos dados iniciais e/ou de contorno, esse problema recebe o nome de *problema bem posto.* Caso não ocorra, o problema é denominado *mal posto.*

3 O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Neste capítulo, apresentaremos o *metódo das características*, que tem por finalidade determinar soluções para alguns tipos de EDPs. Abordaremos o método para solucionar Problemas de Cauchy que envolvem EDPs de primeira ordem, cuja solução esteja definida num aberto, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Contudo, existem versões do método das características para EDPs cuja solução esteja definida para conjuntos de dimensões maiores, assim como, para EDPs de outras ordens, conforme IÓRIO (2007) desenvolve no seu estudo. O objetivo do método é estabelecer a solução de u através de curvas que à caracterizam, denominadas, *curvas características*. Provaremos que uma solução, u, é constante ao longo dessas curvas. e através delas, conseguiremos reduzir a EDP à uma EDO.

Em resumo, o método funciona transportando, atráves das curvas características, as informações de u numa curva inicial, expressa pela *condição inicial* imposta à u, para uma vizinhança dessa curva em questão.

3.1 EDPs lineares homogêneas com coeficientes constantes

Nesta seção, pretendemos construir, intuitivamente, a solução de EDPs com coeficientes constantes através do método das características.

Seja

$$au_x(x,y) + bu_y(x,y) = 0, \tag{3.1}$$

com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ e não simultaneamente nulos. Desejamos encontrar uma solução $u = u(x,y)$ para (3.1).

Isto posto, podemos reescrever a equação (3.1) da seguinte forma:

$$(a,b).(u_x,u_y) = 0. \tag{3.2}$$

Como $a, b \in \mathbb{R}$, o par (a,b) é um vetor do $\mathbb{R}^2$. Multiplicando os dois lados da igualdade (3.2) por $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b).(u_x,u_y) = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{(a,b)}{|(a,b)|}\nabla u(x,y) = 0. \tag{3.3}$$

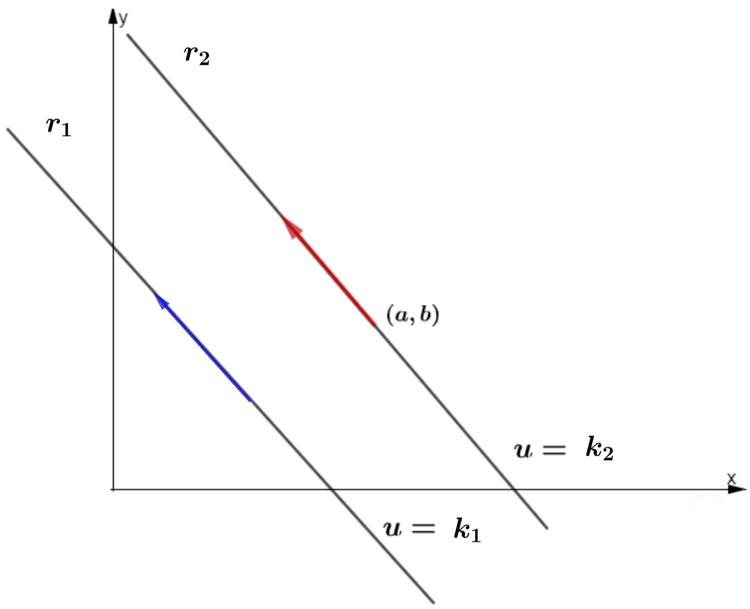
Nesse sentido, a equação (3.3) é, na verdade, a *derivada direcional* (consultar Definição A.3 no Apêndice) de u na direção de (a,b), ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial (a,b)} = 0.$$

Desta forma, como a derivada direcional é 0, dado um ponto (x, y) no plano, a função u é constante quando percorre na direção do vetor (a, b), onde a e b são valores fixados da própria EDP.

É importante mencionar que para cada ponto (x, y) fixado, u será constante ao longo de cada reta, porém não significa dizer que assumirá sempre os mesmos valores. Na Figura 1, temos a representação de dois vetores que caminham na direção do vetor (a, b) sobre o plano-xy, onde em cada reta, u assume um valor constante distinto das demais.

Figura 1 – A função u é constante em relação às retas



Fonte: Da Autora, 2022

Sabemos que

$$u = k_1 \text{ e } u = k_2.$$

sobre as retas r_1 e r_2, respectivamente. Podemos notar que, para esse caso, $k_1 \neq k_2$. Porém ao longo de cada reta dentro do domínio, a função u é constante e assume valor único. Logo, se conhecermos o valor de u em qualquer ponto de uma dessas retas, conheceremos o valor de u em todos os pontos da reta.

Além disso, todas as retas para essa EDP compõem um conjunto denominado *família de equações características*, pois elas caracterizam a equação. Assim, concluímos que para EDPs como em (3.1), as curvas características são retas.

Na Figura 1, as retas r_1 e r_2 têm a direção do vetor (a, b), assim, pela equação geral da reta, as retas mencionadas podem ser descritas por

$$bx - ay = q_1 \quad \text{e} \quad bx - ay = q_2,$$

respectivamente, onde q_1 e q_2 são constantes. Conforme já mencionado, a solução em questão irá depender de qual reta característica está sendo considerada. Como u assume valores constantes em cada reta da família de curvas, então a solução de (3.1) será da seguinte maneira:

$$u(x,y) = f(bx - ay). \tag{3.4}$$

De fato, se consideramos u ao longo da reta r_1, então

$$u(x,y) = f(bx - ay) = f(q_1) = k_1.$$

O mesmo ocorre para cada uma das retas da família de equações características. Assim, a solução da EDP é dada por $u(x,y) = f(bx - ay)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= f'(bx - ay)b \\ u_y(x,y) &= -f'(bx - ay)a \end{aligned}$$

Daí,

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = af'(bx - ay)b - bf'(bc - ay)a = 0.$$

$\blacksquare$

Observação 3.1. *A equação $a \cdot u_x(x,y) + b \cdot u_y(x,y) = 0$ pode ser reescrita como sendo: $u_x(x,y) + c \cdot u_y(x,y) = 0$. De fato,*

$$\frac{1}{a} \cdot au_x + \frac{1}{a} \cdot bu_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x + \frac{b}{a}u_y = 0,$$

onde, $c = \dfrac{b}{a}$ e $a \neq 0$. Por essa razão, a família de curvas características para EDPs, como em (3.1), também pode ser expressada da forma

$$u(x,y) = f(x - cy). \tag{3.5}$$

Exemplo 3.1. Vamos determinar a solução parao seguinte Problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2u_x(x,y) + 3u_y(x,y) &= 0 \\ u(x,x) &= \exp(2x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Solução: Vejamos que a solução para a EDP (3.6) será caracterizada por

$$u(x,y) = f(3x - 2y). \tag{3.7}$$

Assim,

$$u(x,x) = f(3x - 2x) = f(x). \tag{3.8}$$

Pela condição inicial e (3.8) segue que

$$f(x) = \exp(2x).$$

Daí,

$$f(3x - 2y) = \exp(6x - 4y).$$

Portanto, a solução do problema é dada por

$$u(x, y) = \exp(6x - 4y).$$

□

Observação 3.2. *Pelas discussões acima, podemos concluir que a solução geral para a equação do tranporte,*

$$u_x(x,t) + c \cdot u_t(x,t) = 0,$$

onde x é uma variável espacial e t uma variável de tempo, é dada por

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

para alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

3.2 EDPs lineares homogêneas com coeficientes variáveis

Nesta seção, iremos abordar alguns casos de EDPs de primeira ordem com coeficientes variáveis e determinar suas respectivas soluções sujeitas à condição inicial, ou seja, lidaremos com os Problemas de Cauchy.

De um modo semelhante ao caso de EDPs com coeficiantes constantes, apresentado na Seção 3.1, as soluções para a equação do transporte,

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0, \tag{3.9}$$

onde $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$, são constantes ao longo das curvas características, como veremos a seguir. Mas, neste caso, tais curvas podem ou não ser retas.

Num comparativo entre as EDPs (3.1) e (3.9), podemos observar que agora, a função c depende de (x,t).

Sendo $(x(t),t)$ uma curva arbitrária do plano xt, a derivada de u, com relação a t, ao longo desta curva é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= x'(t)u_x(x(t),t) + u_t(x(t),t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo, se u satisfaz a equação (3.9), então $\dfrac{du}{dt} = 0$ ao longo das curvas para as quais $x'(t) = c(x,t)$. Desse modo, reduzimos a EDP

$$u_t + c(x,t)u_x = 0$$

à uma EDO simples,

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0,$$

ao longo das curvas $(x(t),t)$, chamadas de *curvas características da equação* (3.9). Logo, u é constante ao longo das curvas em que $x'(t) = c(x,y)$.

Com isso, a ideia para solucionar EDPs desse tipo, será resolver a EDO associada e obter, assim, a equação das curvas características e, posteriormente, utilizar a informação da solução em um ponto fixado pertencente ao domínio da EDP, dada pela condição inicial. Como u é constante ao longo das características, iremos determinar a solução da EDP no ponto de interseção, (x_0,y_0), entre cada curva característica e a curva inicial.

Definição 3.1. As curvas $x = x(t)$ que são soluções para a EDO

$$x'(t) = c(x,t),$$

são chamadas as **curvas características** da EDP

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0.$$

Como as curvas características são definidas a partir uma EDO, que não tem garantia de ser linear, $c(x,t)$ pode não ser uma função linear. Nesse sentido, não conseguimos assegurar que as curvas características estejam definidas ao longo de todo domínio do problema. Assim, geralmente, as curvas características são definidas apenas localmente.

Observação 3.3. *Vamos encontrar as soluções para as EDPs com coeficientes variáveis da seguinte forma:*

i. *Encontrar a família de curvas características, a partir da relação $c(x,t) = x'(t)$.*

ii. *Determinar a solução em um ponto fixado pertencente ao domínio da EDP, sobre a curva característica.*

iii. *Estabelecer a solução para a EDP a partir da condição inicial fornecida no problema de Cauchy.*

Exemplo 3.2. Considere

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \left(\dfrac{t}{x}\right)^2 u_x(x,t) & = & 0, \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(x,0) & = & \exp(x) \end{cases}. \tag{3.11}$$

Solução:

i. Inicialmente, temos que

$$c(x,t) = \left(\frac{t}{x}\right)^2,$$

assim, as curvas características que são solução para a EDO são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x^2}.$$

Por separação de variáveis, temos que

$$x^2 dx = t^2 dt. \tag{3.12}$$

Integrando (3.12), obtemos:

$$\frac{x^3}{3} = \frac{t^3}{3} + k_1$$

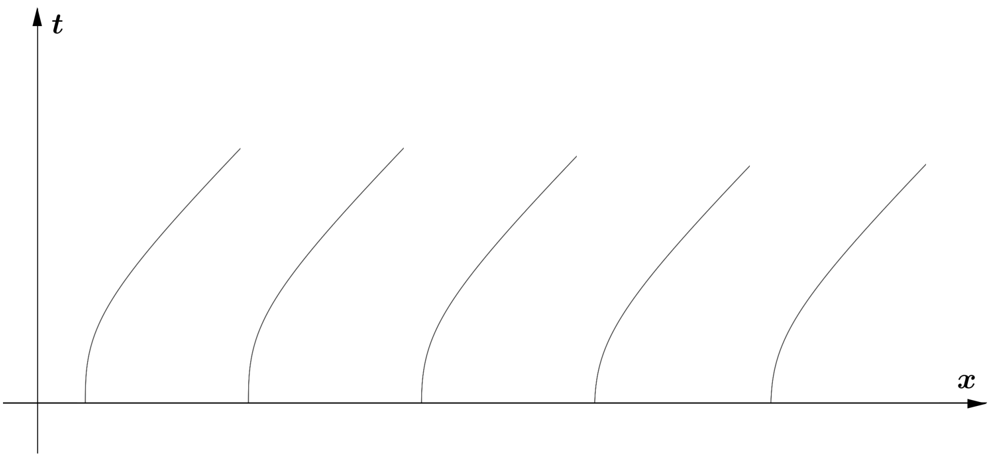
Ou ainda,

$$x^3 = t^3 + 3k_2$$

Logo, a família de curvas características, ilustrada na Figura 2, é dada por

$$x(t) = \sqrt[3]{t^3 + k}. \tag{3.13}$$

Figura 2 – Curvas características para (3.13)



Fonte: Da autora, 2022

ii. Fixado (x_0, t_0), ao substituir tal ponto em (3.13), temos que

$$x(t_0) = x_0 = \sqrt[3]{t_0^3 + k} \quad \Rightarrow \quad k = x_0^3 - t_0^3.$$

Desta forma, podemos reescrever (3.13) do seguinte modo:

$$x(t) = \sqrt[3]{t^3 + (x_0^3 - t_0^3)}$$

iii. Pela condição inicial em (3.11), sabemos que $u(x,0) = \exp(x)$, além disso, $x(t) = \sqrt[3]{t^3 + (x_0^3 - t_0^3)}$, assim

$$x(0) = \sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}.$$

Por conseguinte,

$$u(x(0),0) = \exp(x(0)) = \exp\left(\sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}\right).$$

Uma vez que u é constante ao longo de curvas características, então

$$u(x_0,y_0) = u(x(0),0) = \exp\left(\sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}\right)$$

Ou ainda,

$$u(x,t) = \exp\left(\sqrt[3]{x^3 - t^3}\right).$$

□

Exemplo 3.3. Vamos encontrar a solução para o problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - xtu_x(x,t) & = & 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x) \end{cases} . \tag{3.14}$$

Solução:

Seguindo os passos elencados na Observação 3.3, temos

i. Pela Definição 3.1 segue que

$$x'(t) = -xt.$$

Por separação de variáveis, obtemos:

$$\frac{dx}{x} = -tdt \tag{3.15}$$

Ao resolver (3.15), por integração simples, tem-se

$$\int \frac{dx}{x} = \int -tdt \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = \frac{-t^2}{2} + k$$

Ou ainda,

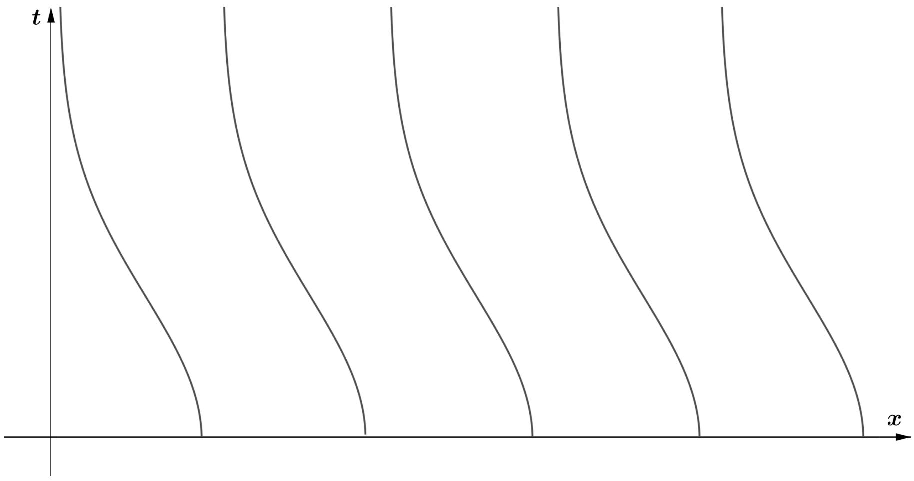
$$\exp(\ln(x)) = \exp\left(\frac{-t^2}{2} + k\right) \quad \Rightarrow \quad x = \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \cdot \underbrace{\exp(k)}_{k_0}.$$

Logo,

$$x(t) = k_0 \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \tag{3.16}$$

Desta forma, u é constante ao longo das curvas $x(t) = k_0 \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$, ilustradas na Figura 3 abaixo.

Figura 3 – Características Planas para (3.16)



Fonte: Da Autora, 2022

ii. Fixado um ponto (x_0, t_0), a curva característica que passa por esse ponto é dada por

$$x_0 = k_0 \exp\left(\frac{-{t_0}^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad k_0 = x_0 \exp\left(\frac{{t_0}^2}{2}\right). \tag{3.17}$$

Por (3.16) e (3.17), temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp\left(\frac{{t_0}^2}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \\ &= x_0 \exp\left(\frac{t_0^2 - t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

iii. Pela condição inicial para a EDP em (3.14), quando $t = 0$, tem-se $u(x, 0) = f(x)$. Além disso, da equação (3.16), temos que $x(0) = k_0$. Logo,

$$u(x(0), 0) = f(x(0)) = f(k_0) = f\left(x_0 \exp\left(\frac{{t_0}^2}{2}\right)\right),$$

e, como u é constante ao longo de curvas características, segue que

$$u(x_0, t_0) = u(k_0, 0) = u\left(x_0 \exp\left(\frac{{t_0}^2}{2}\right), 0\right) = f\left(x_0 \exp\left(\frac{{t_0}^2}{2}\right)\right).$$

Portanto, a solução de (3.14) é dada por

$$u(x,t) = f\left(x\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right).$$

□

O Exemplo a seguir nos permitirá observar, que nem sempre conseguimos uma solução genérica para a EDP, isto é, que satisfaça de modo geral a EDP. Nesse sentido, fica evidente que as soluções muito dependem da condição inicial dada.

Exemplo 3.4. Considere o problema

$$\begin{cases} u_x(x,t) &= 0, \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{cases}, \tag{3.18}$$

onde, $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função dada.

Solução.

Como a EDP é simples de ser resolvida, basta utilizar a integração simples para encontrar a solução.

Uma vez que $u_x = 0$, concluímos que u é constante como função de x. Logo, u depende apenas de t, ou melhor dizendo, a solução geral da equação (3.18) é dada por

$$u(x,t) = g(t), \quad \text{com} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0, \tag{3.19}$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Porém, pela condição inicial

$$u(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u_x(x,0) = f'(x). \tag{3.20}$$

Como $u_x(x,t) = 0$, obtemos $u_x(x,0) = 0$. Assim, por (3.20), $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. O que nos diz que f é uma função constante em relação a x, ou seja,

$$f(x) = k, \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Donde, pelas igualdades obtidas em (3.20) e (3.21), obtemos

$$u(x,0) = f(x) = k.$$

Desta forma,

$$u(x,0) = k. \tag{3.22}$$

Como a solução é dada por $u(x,t) = g(t)$. Por (3.21), em particular,

$$u(x,0) = g(0). \tag{3.23}$$

Então, pelas igualdades de (3.22) e (3.23), necessariamente,

$$g(0) = k. \tag{3.24}$$

Nesse sentido, concluímos que para que o problema admita soluções, f deve ser uma função constante. Desta forma, a solução do problema (3.18), será dada por

$$u(x,t) = g(t), \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0,$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R})$ é qualquer função que satisfaça $g(0) = k$. Logo, o problema (3.18) admite uma infinidade de soluções quando f é constante; e não admite solução quando f não é constante.

□

3.3 O Problema de Cauchy homogêneo

Nesta seção, iremos estudar a EDP linear de primeira ordem homogênea em sua forma geral

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= 0, \qquad se\ (x,y)\ \in \Omega \\ u(\alpha(s),\beta(s)) &= f(s), \qquad se\ s \in I \end{cases}, \tag{3.25}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $\gamma(s) = (\alpha(s),\beta(s))$ é uma parametrização de uma curva qualquer em Ω, chamada de *curva inicial* e a solução a ser determinada é uma função $u = u(x,y)$.

Na seção anterior, determinamos algumas soluções de EDPs de primeira ordem com coeficientes variáveis ao longo da curva $(x(t),t)$, isto é, a variável espacial depende da variável temporal. Contudo, nesta seção, estamos considerando EDPs que dependem de duas variáveis espaciais, x e y, onde, os coeficientes a e b dependem de (x,y). Logo, teremos $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Diante disso, nosso intuito, a partir de agora, é determinar, quando possível, curvas características da forma

$$C(t) = (x(t),y(t)).$$

Assim, pela regra da cadeia (consultar Teorema A.4 no Apêndice) , a derivada de u ao longo de C é dada por

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = x'(t)u_x(x(t),y(t)) + y'(t)u_y(x(t),y(t)). \tag{3.26}$$

Num comparativo entre (3.25) e (3.26), podemos definir as curvas características para (3.25), como segue.

Definição 3.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. As *curvas características* da EDP de primeira ordem linear homogênea

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0,$$

com coeficientes variáveis $a, b \in C^1(\Omega)$, são as curvas $C(t) = (x(t), y(t))$, soluções do sistema de equações diferencias ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}. \tag{3.27}$$

Proposição 3.1. *Uma solução u para a equação de primeira ordem linear homogênea*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{3.28}$$

é constante ao longo de uma curva $C(t)$ se, e somente se, $C(t)$ é uma curva característica da equação.

Prova.

($\Leftarrow$) Sendo uma curva característica, $C(t) = (x(t), y(t))$ é solução para o sistema de equações em (3.27), então, pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)(x(t), y(t)). \tag{3.29}$$

Pelas expressões dadas em (3.27) e (3.29), obtemos

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = a(x(t), y(t))u_x + b(x(t), y(t))u_y. \tag{3.30}$$

Assim, de (3.28), segue que

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = 0$$

e, portanto, u é constante ao longo da curva C.

($\Rightarrow$) Considere $C(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada em Ω e assuma que C seja uma curva de nível de u. Desta forma, u sendo solução ao longo desta curva tem-se,

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = 0.$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)).$$

Ou ainda,
$$\frac{d}{dt}u(C(t) = (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla u(x(t), y(t)).$$
Consequentemente,
$$(x'(t), y'(t)) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 0. \tag{3.31}$$
Desta forma, o vetor gradiente (Consultar Definição A.4 do Apêndice)
$$\nabla u(x(t), y(t))$$
é perpendicular à curva C em cada ponto $(x(t), y(t))$. Além disso, u é solução para a EDP, nesse sentido, o vetor $(a(x,y), b(x,y))$ é também perpendicular ao vetor $\nabla u(a(x,y), b(x,y))$. De fato,
$$\begin{aligned} 0 &= a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) \\ &= (a(x,y), b(x,y)) \cdot \nabla u(a(x,y), b(x,y)). \end{aligned} \tag{3.32}$$
Como nas expressões (3.31) e (3.32), os vetores
$$(x'(t), y'(t)) \quad \text{e} \quad (a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$$
são perpendiculares ao vetor gradiente de u em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Concluímos, que sendo u uma solução da equação, os respectivos vetores são paralelos, em vista disso, existe uma função $\lambda(t)$ tal que
$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = \lambda(t)b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$
Tomando um vetor representante de (a, b), fazendo $\lambda(t) = 1$, obtemos
$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$
Portanto, $C(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva característica para a EDP
$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0.$$
■

Tendo em vista que as soluções das EDPs muito dependem do comportamento das curvas características próximo a determinadas curvas iniciais, é, muitas vezes, complicado obter soluções gerais. Neste sentido, é habitualmente mais prático e fácil conseguir resultados locais. Para isso, o teorema a seguir garante a existência de solução única em uma determinda vizinhança da curva inicial para Problemas de Cauchy.

Teorema 3.1. *(Existência e Unicidade Locais para o Problema de Cauchy) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto e* $\Gamma \subset \Omega$ *uma curva da classe* C^1. *Seja* $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ *uma parametrização de* Γ *de classe* C^1, *definida em um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$. *Suponha que* $f \in C^1(I)$ *e que* $a, b \in C^1(\Omega)$ *não se anulam simultaneamente em qualquer ponto* $(x, y) \in \Omega$ *e satisfazem*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0, \ \forall \ s \in I. \tag{3.33}$$

Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= 0, \qquad \forall \ (x,y) \ \in \Omega \\ u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(s), \quad s \in I, \end{cases} \tag{3.34}$$

tem uma única solução de classe C^1 *em uma vizinhança de* Γ.

Demonstração.

Pela Definição 3.2, as curvas características da equação

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

são soluções das EDO's lineares

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}. \tag{3.35}$$

A princípio, vamos admitir que $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ seja ponto de interseção entre a curva inicial e uma curva característica arbitrária, ou seja,

$$(x(0), y(0)) = (\alpha(0), \beta(0)). \tag{3.36}$$

Além disso, como o determinante em (3.33) é, por hipótese, diferente de zero, significa dizer que quando tais curvas se intersectam, seus vetores tangentes são linearmente independentes. De fato,

$$\alpha'(s) \cdot b(\alpha(s), \beta(s)) - \beta'(s) \cdot a(\alpha(s), \beta(s)) \neq 0.$$

Desta forma, o vetor tangente da curva característica,

$$(x'(0), y'(0)) = (a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s))),$$

nunca é pararelo ao vetor tangente à curva inicial, $(\alpha'(s), \beta'(s))$. Por conseguinte, o teorema de existência e unicidade para EDO's, Teorema de Picard (Teorema A.6 do Apêndice), garante que para cada $s \in I$, existe um único ponto correspondente $(x(t), y(t))$. Ou seja, para cada $s \in I$, há uma única curva característica $(x_s(t), y_s(t))$ que satisfaz a condição inicial,

$$x(0), y(0)) = (\alpha(s), \beta(s)). \tag{3.37}$$

Nesse sentido, é possível cobrir uma vizinhança da curva inicial Γ por curvas características que não se intercectam entre si. Desse modo, cada ponto desta vizinhança, pode ser expressado pelas variáveis (s, t), onde é possível definir uma nova função, Φ, que representa uma mudança de variáveis e que associa cada par (s, t) a um único ponto $(x(s, t), y(s, t))$, ou seja,

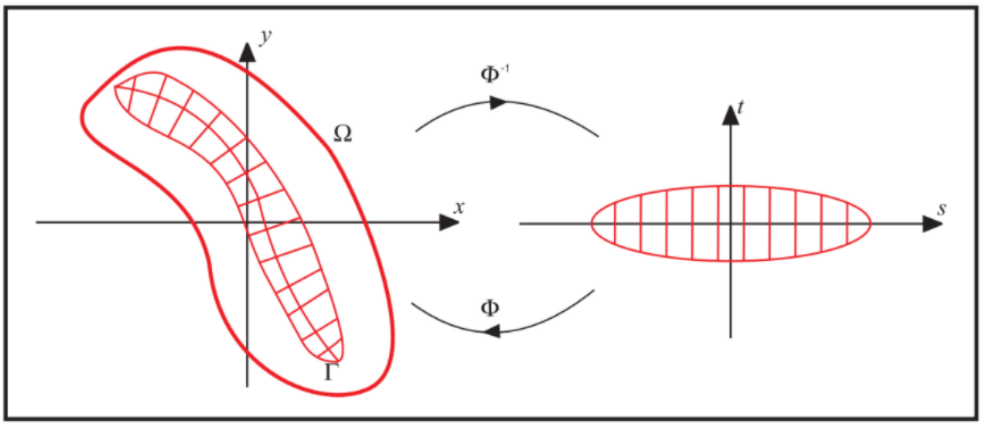
$$\Phi : (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)).$$

De fato, para cada s fixado, usando a hipótese do determinante em (3.33) e substituindo as igualdades em (3.35) e (3.36), segue que

$$\det \begin{bmatrix} x_s(s,0) & x_t(s,0) \\ y_s(s,0) & y_t(s,0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Logo, o $\det D\Phi(s, t) \neq 0$ em uma vizinhança de Γ. Com isso, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema A.5 do Apêndice), Φ é um difeomorfismo (Definição A.7 do Apêndice) de classe C^1 em uma vizinhança, provalmente menor, de Γ, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4 – Construção do Difeomorfismo



Fonte: Notas de Aula - Equações Diferenciais Parciais I/II - Rodney Biezuner

Vamos supor que nessa vizinhança, exista uma solução u para o Problema de Cauchy (3.34). Tendo em vista que Φ é um difeomorfismo em uma vizinhança de Γ, considerando $v \circ \Phi$, podemos fazer tal mudança de variável, seja ela,

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)).$$

Afirmação: v coincide com u ao longo de uma curva característica.

Com efeito, aqui considere $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$. Derivando v em relação a t, pela regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(s,t) &= u_x(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + u_y(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= u_x(x,y)\cdot a(x,y) + u_y(x,y)\cdot b(x,y)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, considerando um s fixo, v satisfaz a equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}(s,t) = 0\\ v(s,0) = f(s)\end{cases}. \tag{3.38}$$

Visto que $\dfrac{dv}{dt} = 0$, então v é constante como função de t. Nesse sentido, a solução para o problema (3.38) é expressada por

$$v(s,t) = f(s).$$

Donde concluímos que, nesta vizinhança, u tem solução única e, ainda, tal solução é constante ao longo das curvas características da equação.

De modo recíproco, vamos supor que para cada $s \in I$, v é solução de (3.38). Como Φ é um difeomorfismo em uma vizinhança de Γ, podemos definir u, de modo que $u = v\circ\Phi^{-1}$, ou seja,

$$u(x(s,t), y(s,t)) = v(s,t). \tag{3.39}$$

Temos

$$u(\alpha(s),\beta(s)) = u(x(s,0), y(s,0)). \tag{3.40}$$

Por (3.39) segue que

$$u(x(s,0), y(s,0)) = v(s,0).$$

Assim, de (3.39) e (3.40), e como $v(s,0) = f(s)$, obtemos:

$$u(\alpha(s),\beta(s)) = u(x(s,0), y(s,0)) = u(x(s,0), y(s,0)) = f(s),$$

para todo $s \in I$. Considere $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} a(x,y)\cdot u_x(x,y) + b(x,y)\cdot u_y(x,y) &= \frac{\partial x}{\partial t}\cdot u_x(x,y) + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot u_y(x,y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(s,t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, diante das hipóteses, sabemos que f é de classe C^1, em consequência, v é de classe C^1. Logo, como u foi definida a partir de uma composição de v e Φ, sendo Φ, um difeomorfismo de classe C^1, segue que u é também de classe C^1.

■

3.4 O Problema de Cauchy não-homogêneo

Nesta seção, iremos estudar o caso não-homogêneo para o Problema de Cauchy para EDP de primeira ordem definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Considerando a equação do transporte não-homogênea,

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = h(x,y), \tag{3.41}$$

segue de forma análoga aos cálculos em (3.10) que $\dfrac{du}{dt} = h(x,t)$ ao longo de $x'(t) = c(x,t)$.

Donde, concluímos que a EDP (3.41) foi reduzida à EDO $u'(t) = h(x,t)$ ao longo das curvas características da equação, que são as curvas $(x(t),t)$ que satisfazem a EDO $x'(t) = c(x,t)$.

Exemplo 3.5. Vamos encontrar a solução da equação do transporte não-homogênea com coeficientes variáveis pelo método das características.

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = t, & x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(s,0) = s^2, & \text{com} \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Solução.

Inicialmente, temos que as curvas características satisfazem

$$x'(t) = 1. \tag{3.42}$$

Integrando ambos os lados obtemos,

$$x(t) = t + k, \;\; k \in \mathbb{R}\ .$$

Quando, $t = 0$, segue que

$$x(0) = k.$$

Contudo, pela condição inicial, quando $t = 0$, $x(0) = s$, assim, $s = k$. Logo, no ponto $(s, 0)$ a reta característica é dada por

$$x(t) = t + s. \tag{3.43}$$

Ao longo dessas curvas características, é válido que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = t.$$

Desta forma, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Consultar Teorema A.1 no Apêndice), integrando a equação acima de 0 a t, tem-se:

$$u(x(t), t) - u(x(0), 0) = \frac{t^2}{2},$$

Pela condição inicial,

$$u(x(t), t) = \frac{t^2}{2} + s^2.$$

De (3.43), obtemos $s = x(t) - t$, segue que

$$u(x(t), t) = \frac{t^2}{2} + (x(t) - t)^2.$$

Usando o fato de que todo ponto (x, t) corresponde de maneira única a um ponto $(x(t), t)$, tem-se, portanto

$$u(x, t) = \frac{t^2}{2} + (x - t)^2.$$

□

Os resultados apresentados, daqui em diante, estão relacionados ao Problema de Cauchy não-homogêneo,

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= g(x,y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(s), s \in I, \end{cases} \tag{3.44}$$

com a, b, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ é uma parametrização de uma curva qualquer em Ω, denominada de curva inicial.

Em suma, o resultado a seguir nos diz que, no caso não-homogêneo, a EDP de primeira ordem é transformada numa EDO não-homogênea.

Proposição 3.2. *Considere a equação de primeira ordem linear não-homogênea*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y); \quad (x,y) \in \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Se u é uma solução para esta equação, então ao longo das curvas características para a correspondente equação homogênea, u satisfaz *a equação diferencial ordinária*

$$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = c(x(t),y(t))$$

Demostração.

Suponha que as curvas características , $C(t) = (x(t),y(t))$, são solução para

$$\begin{cases} x'(t) &= a(x(t),y(t)) \\ y'(t) &= b(x(t),y(t)) \end{cases}.$$

Assim, pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(C(t)) &= \frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = x'(t)u_x(x(t),y(t)) + y'(t)u_y(x(t),y(t)) \\ &= a(x(t),y(t))u_x(x(t),y(t)) + b(x(t),y(t))u_y(x(t),y(t)) \\ &= c(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2. *(Existência e Unicidade Locais para o Problema de Cauchy não-homogêneo) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $\Gamma \subset \Omega$ uma curva de classe C^1. Seja $\gamma(s) = (\alpha(s),\beta(s))$ uma parametrização de Γ de classe C^1, definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que $f \in C^1(I)$ e que $a,b,c \in C^1(\Omega)$ e que a e b não se anulam simultaneamente em nenhum ponto $(x,y) \in \Omega$ e satisfazem*

$$\det\begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s),\beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s),\beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0,\ \forall\ s \in I. \tag{3.45}$$

Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= c(x,y) \quad , \quad \forall\ (x,y)\ \in \Omega \\ u(\alpha(s),\beta(s)) &= f(s) \quad , \quad s \in I \end{cases}, \tag{3.46}$$

tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança de Γ.

Demostração.

A construção do difeomorfismo $\Phi : \Omega \to C^1(\Omega)$, definido por

$$\Phi : (s,t) \mapsto (x(s,t),y(s,t)).$$

segue análogo ao da demonstração de Teorema 3.1. Vamos apenas mostrar que uma solução para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(s,t) &= c(x(s,t), y(s,t)), \\ v(s,0) &= f(s) \end{cases},$$

no plano st, corresponde a uma solução para o problema

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y(x,y) &= c(x,y) \\ u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(s) \end{cases},$$

no plano xy.

Com efeito, usando a regra da cadeia para derivação em relação a variável t e tomando $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(s,t) &= u_x(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + u_y(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= u_x(x,y) \cdot a(x,y) + u_y(x,y) \cdot b(x,y) \\ &= c(x,y). \end{aligned}$$

Nesse sentido, fixando t, v satisfaz equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(s,t) = c(x(s,t), y(s,t)), \\ v(s,0) = f(s) \end{cases}. \tag{3.47}$$

Particulamente, v é uma solução única. Por esse motivo, nessa região a solução u é única. Recipocramente, admita que para cada $s \in I$, v é solução para (3.47). Assim, defina

$$u(x(s,t), y(s,t) = v(s,t),$$

ou melhor, $u = v \circ \Phi^{-1}$. Desta forma

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u(x(s,0), y(s,0)) = u(x(s,0), y(s,0)) = f(s),$$

para todo $s \in I$. Tomando $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} a(x,y)\cdot u_x(x,y) + b(x,y)\cdot u_y(x,y) &= \frac{\partial x}{\partial t}\cdot u_x(x,y) + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot u_y(x,y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(s,t) \\ &= c(x,y). \end{aligned}$$

Como f e c são, por hipótese, de classe C^1 então v é de classe C^1. Além disso, u foi definida por meio da composição de Φ, difeomorfismo de classe C^1, e v também de classe C^1, logo u é de classe C^1. ■

Exemplo 3.6. Seja

$$\begin{cases} 3u_x - 4u_y &= x^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u\left(s, \dfrac{3}{4}s\right) &= \dfrac{s^3}{9}, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{3.48}$$

Vamos resolver o problema não-homogêneo pelo método das características.

Solução.

Inicialmente, consideremos a equação homogênea associada

$$3u_x - 4u_y = 0$$

Isto posto, pelo Teorema 3.1, as curvas características para a equação satisfazem o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x'(t) = 3 \\ y'(t) = -4 \end{cases}.$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} x(t) &= 3t + k_1 \\ y(t) &= -4t + k_2 \end{cases},$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. As curvas características para este caso são retas. Nesse sentido vamos considerar que os pontos (x_0, y_0) sejam os pontos de interseção entre a curva característica e a condição inicial, ou seja,

$$\begin{cases} x(0) &= k_1 \\ y(0) &= k_2 \end{cases}. \tag{3.49}$$

Por outro lado, pela condição inicial,

$$\begin{cases} x(0) = s \\ y(0) = \dfrac{3}{4}s \end{cases}. \tag{3.50}$$

Logo, de (3.49) e (3.50), segue que

$$\begin{cases} x(t) = 3t + s \\ y(t) = -4t + \dfrac{3}{4}s \end{cases}.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x^2(t).$$

Como $x(t) = 3t + s$, consequentemente,

$$\frac{d}{dt}u(x(t)y(t)) = (3t + s)^2.$$

Integrando ambos os lados, de 0 a t, pelo T.F.C, obtemos,

$$u(x(t), y(t)) - u(x(0), y(0)) = \frac{(3t + s)^3}{9} - \frac{s^3}{9}.$$

Pela condição inicial,

$$u(x(0), y(0)) = \frac{s^3}{9}.$$

Assim,

$$u(x(t), y(t)) = \frac{(3t + s)^3}{9} - \frac{s^3}{9} + \frac{s^3}{9}.$$

Ou ainda,

$$u(x(t), y(t)) = \frac{(3t + s)^3}{9} = \frac{(x(t))^3}{9}.$$

Diante disso, a solução de (3.48) é dada por

$$u(x, y) = \frac{x^3}{9}.$$

□

4 LIMITAÇÕES DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Neste capítulo, iremos estudar alguns casos de problemas de Cauchy com EDPs de primeira ordem lineares e não-lineares, em que o método das características apresenta limitações ao determinar a solução das EDPs. A saber, as limitações abordadas serão: *propagação de singularidades*, *choque entre as curvas* e *ondas de rarefação*.

4.1 Propagação de Singularidades

Nessa seção iremos abordar alguns situações em que as EDPs de primeira ordem apresentam soluções descontínuas ao longo das curvas características.

O Teorema 3.2 nos garante que quando os vetores tangentes entre a curva inicial Γ, parametrizada por $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$, e as curvas características planas não são paralelos, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y &= c(x,y) \\ u(\alpha(s), \beta(s) &= f(s) \end{cases}, \tag{4.1}$$

tem solução única de classe C^1 em uma vizinhança de Γ, onde a, b e $c \in C^1(\Omega)$ e $f \in C^1(I)$.

Além disso, diante dos estudos realizados no Capítulo 3, sabemos que num problema de Cauchy, as soluções das EDPs dependem das condições iniciais que são impostas no problema. Logo, procuramos soluções através da interseção entre curva característica e a curva inicial. Ou seja, quando

$$(x_0, y_0) = (\alpha(s), \beta(s)).$$

Com isso, chamamos o ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ de **domínio de dependência** de (x_0, y_0).

Até o momento, estamos encontrando soluções que são contínuas e possuem derivada em todos os pontos de seu domínio, ou seja, $f \in C^1(I)$. Iremos, daqui em diante, retirar essa hipótese, ainda considerando γ uma parametrização de Γ, em que $\Gamma \in C^1$, e verificar o que acontece com as soluções.

Vamos considerar o problema de condição inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c \cdot u_x(x,t) &= 0, \qquad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

cuja EDP é uma equação do transporte com coeficientes constantes.

Pela Observação 3.2, sabemos que a solução geral para essa EDP é dada por

$$u(x,t) = f(x - ct). \tag{4.2}$$

Se, por um acaso, f deixa de ter derivadas em um número finito de pontos da curva, a expressão (4.2) ainda continua sendo uma solução para a EDP em questão. Para isso basta que nos pontos em que f é derivável, a equação seja satisfeita. Isso é possível porque quando f é contínua e de classe C^1 em um determinado intervalo, a solução u também será contínua e de classe C^1 nesse mesmo intervalo. O que nos diz que, nos pontos em que f não possui derivada, u, igualmente, deixa de possuir derivadas em um número finito de curvas características de classe C^1.

Vejamos os Exemplos 4.1 e 4.2 para observar esse fato.

Exemplo 4.1. Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c \cdot u_x(x,t) &= 0, \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ 1 - x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Verificamos que f não possui derivadas nos pontos 0 e 1 . De fato, calculando as derivadas laterais para $x = 0$, obtemos

$$f'(0)^- = 0 \neq -1 = f'(0)^+.$$

Para $x = 1$, tem-se

$$f'(1)^- = -1 \neq 0 = f'(1)^+.$$

Como as derivadas laterais nos pontos 0 e 1 foram distintas, consequentemente, f não é derivável nesses pontos.

Além disso, sempre que $x = ct$,

$$u(x,t) = f(ct - ct) = f(0) = 1,$$

e quando $x = 1 + ct$,

$$u(x,t) = f(1 + ct - ct) = f(1) = 0.$$

Logo, no instante de tempo t, u não é derivável nos pontos ct e $1 + ct$, uma vez que a derivada para os pontos 0 e 1 não está definida.

□

Exemplo 4.2. Seja

$$\begin{cases} u_x(x,y) + b \cdot u_y(x,y) & = & 0 \\ u(0,y) & = & \dfrac{1}{y}, \quad y \neq 0 \end{cases}, \tag{4.3}$$

onde b é constante e $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

A curva inicial para o problema é o eixo-y, além disso, a função $u(0,y)$ é descontínua na origem. Nesse sentido, as curvas características são as retas

$$y = bx + k \tag{4.4}$$

onde k é constante. Por essa razão, a solução u de (4.3) não está definida ao longo da reta $y = bx$. De fato, por (4.4)

$$u(0,y) = \frac{1}{y - bx}, \quad \text{com } y \neq bx,$$

é solução da EDP, onde u satisfaz (4.3) fora da reta $y = bx$.

□

Com os Exemplos 4.1 e 4.2, constatamos que ainda é possível determinar soluções pelo método das características, contudo não serão soluções consideradas *clássicas*, pois não estão estabelecidas para todo domínio Ω. Sendo assim, no ponto em que f ou sua derivada tiver uma descontinuidade, digamos, s_0, então u, ou alguma de suas derivadas, terá descontinuidades ao longo da característica que passa por esse ponto, isto é, $(\alpha(s_0), \beta(s_0))$. Logo, essas descontinuidades, que chamaremos de **singularidades**, são propagadas ao longo das características planas.

No Exemplo 4.1, a solução $u(x,t) = f(x - ct)$ propaga singularidades ao longo das retas características $x - ct = k$, onde k é uma constante, uma vez que f não é derivável nos pontos 0 e 1.

Já para o Exemplo 4.2, as singularidades são propagadas ao longo da reta $y = bx$.

4.2 Choque entre as Curvas Características

Nessa seção, pretendemos utilizar o método das características em EDPs não-lineares e verificar até onde é possível determinar soluções.

Seja

$$u_t + (F(u))_x = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

onde F é uma função dada de classe C^2.

Pela Regra da Cadeia, (4.5) é dada por:

$$u_t + F'(u) \cdot u_x = 0. \tag{4.6}$$

Desta forma, fazendo $b(u) = F'(u)$ em (4.6), obtemos

$$u_t + b(u)u_x = 0. \tag{4.7}$$

Sendo assim, as curvas características, para esse caso, são as curvas no plano xt que satisfazem

$$\frac{dx}{dt} = b(u), \tag{4.8}$$

em que $u = u(x(t), t)$. De fato, derivando u pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t.$$

Por (4.8) e (4.7) segue que

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t) = u_t + b(u)u_x = 0.$$

Donde, concluímos que u é constante ao longo das curvas características e mais, podemos utilizar essas curvas para encontrar a solução de (4.5), considerando que tal equação satifaz a condição inicial abaixo:

$$u(x, 0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

De maneira análoga ao contexto de EDPs lineares, iremos determinar as soluções para as EDPs não-lineares utilizando as curvas características planas que intersectam a curva inicial plana em $t = 0$. Nesse sentido, ao integrar ambos os lados da igualdade (4.8) em relação a t, temos

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int b(u) dt,$$

ou ainda,

$$x(t) = b(u)t + k; \quad k \in \mathbb{R}.$$

No ponto $(x(0), 0)$, obtemos

$$k = x_0 \tag{4.10}$$

Assim, por (4.9) e (4.10), as curvas características serão expressadas mediante a equação

$$x(t) = b(u_0(x_0))t + x_0. \tag{4.11}$$

Desse modo, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, u é constante ao longo da reta que contém o ponto $(x_0, 0)$, isto é,

$$u = u_0(x_0),$$

além disso, u satisfaz (4.8).

Com base no caso linear, é esperado que as curvas características e a condição inicial determinem a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) + b(u)u_x(x,t) &= 0 \quad \text{com} \quad (x,t) \in (\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \\ u(x,0) &= u_0(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.12}$$

ao menos em uma faixa $t \in (0,T)$, uma vez que, diferente do caso linear, as curvas características podem se intersectar.

Exemplo 4.3. Considere a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u \cdot u_x(x,t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad e \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{4.13}$$

onde,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x < 0 \\ 1-x, & se \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & se \quad x > 1 \end{cases} . \tag{4.14}$$

Inicialmente, note que (4.13) é da forma (4.7), onde

$$b(u) = u. \tag{4.15}$$

Assim, pelas equações (4.11) e (4.15), segue que

$$x = u_0(x)t + x_0.$$

Logo, as características planas para o problema (4.13) são dadas por

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0, & \text{se} \quad x_0 < 0 \\ (1-x_0)t + x_0, & \text{se} \quad 0 \le x_0 \le 1 \\ x_0, & \text{se} \quad x_0 > 1 \end{cases} . \tag{4.16}$$

Tais curvas se intersectam para $t \ge 1$, desse modo a solução na curva inicial, $u = u_0(x_0)$, só é válida para $t < 1$.

A partir de agora iremos encontrar a solução para o problema (4.13) a partir de cada sentença em que as curvas características foram definidas.

(i) Se $x < t < 1$, então $x = t + x_0$ para algum $x_0 < 0$. Logo, pela condição, obtemos

$$u = u_0(x_0) = 1$$

(ii) Se $t < x < 1$, temos que

$$\begin{aligned} x &= (1 - x_0)t + x_0 \\ &= t - tx_0 + x_0 \\ &= (1 - t)x_0 + t \end{aligned}$$

para algum $x_0 \in [0, 1]$.

Portanto,

$$x_0 = \frac{x - t}{1 - t}.$$

Desta forma, pela condição inicial, segue que

$$u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}$$

(iii) Se $t < 1 < x$, então

$$u = u_0(x) = 0.$$

De (i), (ii) e (iii), a solução definida para $0 \leq t < 1$ é, portanto,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < t < 1 \\ \dfrac{1 - x}{1 - t}, & \text{se} \quad t \leq x < 1 \\ 0, & \text{se} \quad t < 1 \leq x \end{cases} . \tag{4.17}$$

Observe que para $x = 0$ e $x = 1$, a condição inicial não é diferenciável.

Com efeito,

$$[u_0'(x)]^-|_{x=0} = -1 \neq 0 = [u_0'(x)]^+|_{x=0},$$

e

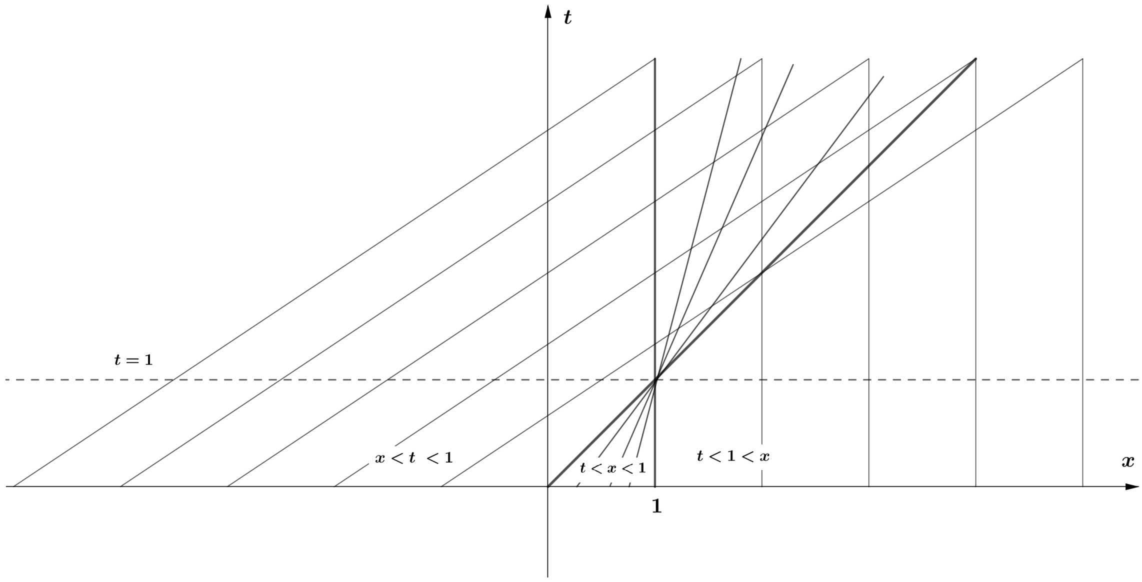
$$[u_0'(x)]^-|_{x=1} = 0 \neq -1 = [u_0'(x)]^+|_{x=1}.$$

Logo, como as derivadas laterais são distintas, $u_0(x)$ não é derivável nos pontos $x = 0$ e $x = 1$ e, consequentemente, não é diferenciável.

Conforme ilustra a Figura 1, a seguir, no ponto de interseção entre as características que contém os segmentos de reta $\{(t, t) : 0 \leq t < 1\}$ e $\{(1, t) : 0 \leq t < 1\}$, há um conflito de informações e, com isso, a derivada não está definida para os segmentos em questão. Por consequência, a derivada de u também não está definida ao longo desses segmentos.

Portanto, $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0,1))$. Contudo, no intervalo $[0,1)$, u satisfaz a EDP, desta forma, $u \in C(\mathbb{R} \times [0,1))$ e continua sendo uma solução.

Figura 1 – Características Planas para o Exemplo 4.3



Fonte: Adaptado de IÓRIO (2007)

Exemplo 4.4. Vamos considerar a equação de Burgers do Exemplo 4.3, sujeita a uma nova condição inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u \cdot u_x(x,t) = 0, \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad e \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} . \tag{4.18}$$

em que

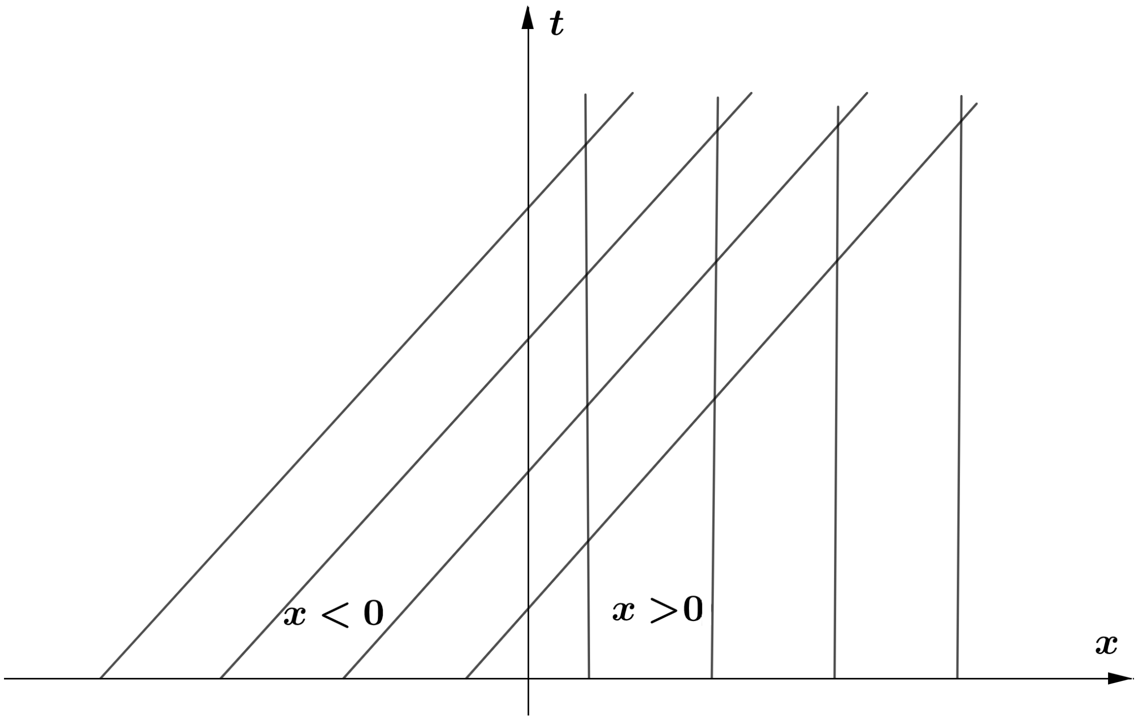
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 0, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} .$$

Para esse caso, por (4.11), as curvas características são,

$$x = \begin{cases} t + x_0 & \text{para} \quad x_0 < 0 \\ x_0 & \text{para} \quad x_0 > 0 \end{cases} .$$

No instante $t = 0$ as características colidem de imediato, conforme ilustra a Figura 2. Com isso, se torna inviável utilizar o método, uma vez que cada reta característica deve assumir um único valor constante para u, e para esse caso, nos pontos de interseção das características, u assume dois valores distintos. Logo, não é possível encontrar uma solução de classe C^1 definida em qualquer instante de tempo.

Figura 2 – Características para o Exemplo 4.4



Fonte: Da Autora, 2022

Segundo os exemplos apresentados, vimos que método das características não é suficiente para determinar soluções para EDPs não-lineares quando as curvas características se intersectam. O Exemplo 4.3 apresentou solução para $t < 1$, contudo não foi uma solução clássica. Por outro lado, não foi possível obter solução para o Exemplo 4.4, uma vez que não existe qualquer intervalo para $t > 0$ em que as curvas não se intersectem.

Aos acontecimentos retratados nos Exemplos 4.3 e 4.4, em que há cruzamento de informações através das interseções das curvas características, dizemos que estamos diante de **ondas de choque**.

4.3 Ondas de Rarefação

Nesta seção, apresentaremos um outro caso de limitação do método das curvas características: da ausência dessas curvas em uma determinada região do domínio da Equação Diferencial Parcial.

Retornaremos à equação de Burgers apresentada nos Exemplos 4.3 e 4.4 sujeita a uma nova condição inicial. Seja

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u \cdot u_x &= 0, \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \quad e \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{cases} \tag{4.19}$$

em que

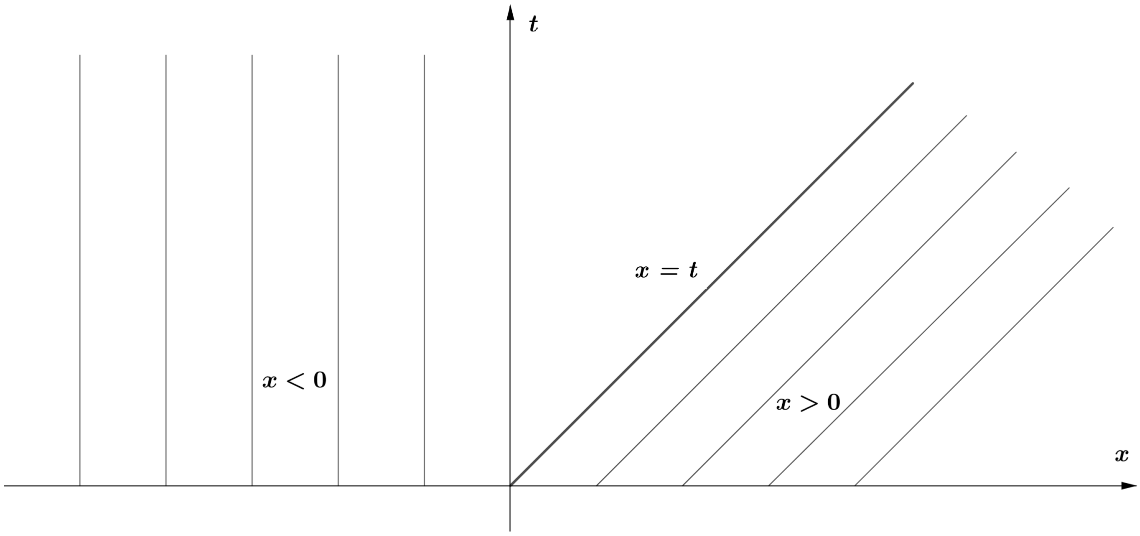
$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Note que as curvas características para (4.19) são quase as mesmas curvas do Problema (4.18), sendo dispostas em partes diferentes do domínio. Assim, temos:

$$x = \begin{cases} x_0 & \text{com} \quad x_0 < 0 \\ t + x_0 & \text{com} \quad x_0 > 0 \end{cases}. \tag{4.20}$$

Diferente do Exemplo 4.4, as curvas características não se intersectam, porém, na região compreendida entre o eixo-t e a reta $x = t$, há uma ausência de curvas características, como ilustra a Figura 3, impossibilitando de resolver o problema pelo método nessa região do domínio.

Figura 3 – Ilustração para as Curvas Características em (4.20)



Fonte: Da Autora, 2022

Dizemos que existe uma **onda de rarefação** quando as curvas características deixam de existir em uma determinada região do domínio da EDP. Desta forma, não obtemos informações de u nessa região.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos os conceitos básicos para um estudo introdutório sobre Equações Diferenciais Parciais - EDP's. Para exemplificar esses conceitos, trouxemos algumas das equações relevantes no campo da Física, tais como a equação do transporte, equação do calor, equação de Burgers, entre outras. Com o intuito de solucionar algumas EDPs de primeira ordem, sujeitas à condições iniciais, os Problemas de Cauchy, abordamos o método das curvas características.

Inicialmente, vimos que as soluções das EDPs são constantes ao longo de cada curva característica da família de curvas, assim, utilizando esse fato, o método consiste em determinar as soluções dessas EDP's no ponto de encontro entre uma curva que compõe a família de curvas características e a curva inicial, pertencente a uma região do domínio da EDP. O nosso próposito, efetivamente, foi determinar soluções únicas e, para obtê-las, o Teorema de Existência e Unicidade enunciado e demonstrado no Capítulo 3, nos assegurou que o Problema de Cauchy possui solução única contínua e diferenciável em uma vizinhança da curva inicial no domínio da EDP, sempre que os vetores tangentes entre à curva inicial e às curvas características são linearmente independentes, sendo este fato crucial para a utilização desse método.

Constatamos uma limitação para o método das características ao aplicá-lo em algumas EDPs não-lineares. As objeções aconteceram no momento em que as curvas características se intersectaram, ocasionado choques, o que chamamos de *ondas de choque*, bem como, quando tais curvas deixaram de existir em uma determinada região do domínio, provocando *ondas de rarefação*. Em ambos os casos, tornando-se inviável utilizar o método para encontrar soluções. Sanar essa deficiência do método requer um aprofundamento maior que pode gerar uma continuação para esse estudo, seja para a autora, ou demais interessados. Para um primeira associação, no caso em que acontece ondas de choque, é necessário estebelecer um *caminho de choque*, que carrega a descontinuidade com a solução. Diante de ondas de rarefação, é possível preencher a região vazia com novas curvas que forcem a EDP a apresentar solução. Desta forma, é possível obter as chamadas *soluções fracas*, que serão as soluções obtidas pelo método das características, acrescidas dessas condições supracitadas. Para um embasamento inicial, autores como BIEZUNER (2010) e DUARTE (2017), apoiados em EVANS (1998), podem auxiliar nos estudos a serem desenvolvidos daqui em diante.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Claúdia R. O. **Teorema da Função Implícita e suas aplicações.** Dissertação de Mestrado. UFMG. 2016

BIEZUNER, Rodney. J. **Equações Diferenciais Parciais I/II**. Notas de aula. UFMG, 2010.

BOLDRINI, José L. COSTA, Sueli I. R. FIGUEIREDO, Vera L. WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

BOYCE, Willian.; DIPRIMA, Richard. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Guanabara Dois, 1985.

DUARTE, Isabella S. **Leis de Conservação Unidimensionais**. Dissertação de Mestrado. UFBA, 2017.

ESCHENAZI, Cesar S. **Leis de Conservação e Aplicações ao Tráfego nas Cidades**. 1º Colóquio da Região Sudeste. UFMG, 2011.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. AMS, 1998.

IÓRIO, Valéria. **EDP: Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária: IMPA. Rio de Janeiro, 2007.

LIMA, Élon L. **Curso de Análise**. 6. ed. IMPA. Rio de Janeiro, 1989.

MEDEIROS, Elisa F. **Uma Introdução ao Estudo das Equações Diferenciais Parciais Usando o Modelo de Euler-Bernoulli para a Vibração Transversal de uma Barra Flexível**.Trabalho de Conclusão de Curso. FURG, 2016.

SODRÉ, Ulysses. **Equações Diferencias Parciais**. Notas de aula. UEL, 2003.

SOTOMAYOR, Jorge. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Livraria da Física. USP, 2011.

STEWART, Ian. **Dezessete equações que mudaram o mundo**. Zahar, 2013.

STEWART. James. **Cálculo**. Tradução EZ2 Translate. vol. 1 e 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, George B. **Cálculo**. Editora americana, vol 11. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

APÊNDICE

Definição A.1. Seja V um espaço vetorial. Um **produto interno** sobre V é uma aplicação $\langle . \ , \ . \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(u,v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u,v \rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle, \ \forall \ u,v,w \in V;$

ii. $\langle \alpha u,v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle, \ \forall u,v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R};$

iii. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle, \ \forall u,v \in V;$

iv. Se $u \neq \overrightarrow{0}$ então $\langle u,u \rangle > 0;$

v. $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}.$

Definição A.2. Considere, x e y, duas funções, dadas por outra variável, t, denominada parâmetro, isto é,

$$x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t),$$

tais funções são chamadas **equações paramétricas**. Cada valor de t determina um ponto (x,y), que podemos marcar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x,y) = (x(t),y(t))$ varia e traça a curva C, a qual chamamos de **curva parametrizada**.

Teorema A.1. *(Teorema Fundamental do Cálculo). Suponha que f seja contínua em* $[a,b]$

1. *Se* $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, *então* $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função que* $F' = f$.

Para obter a demonstração, consultar STEWART (2013), páginas 350 à 356.

Teorema A.2. *(Regra de Substituição). Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)u\,dx.$$

Em STEWART (2013), página 369, encontra-se a demonstração.

Definição A.3. A **derivada direcional** de f em $P_0(x_0,y_0)$ na direção do versor $v = v_1 i + v_2 j$ é o número

$$\left(\frac{df}{fs}\right)_{v,P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0+sv_1,y_0+sv_2) - f(x_0,y_0)}{s},$$

desde que o limite exista.

Definição A.4. O **vetor gradiente** de $f(x,y)$ no ponto $P_0(x_0,y_0)$ é o vetor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j,$$

obtido por meio dos cálculo das derivadas parciais de f em P_0.

Definição A.5. (Funções contínuas de duas variáveis). Uma função $f(x,y)$ é **contínua no ponto** (x_0,y_0) se

1. f for definida em (x_0,y_0);

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe;

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Uma função é **contínua** quando é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Definição A.6. Se $z = f(x,y)$, então f é diferenciável em (x_0,y_0) se Δz puder ser expresso na forma:

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde ϵ_1 e $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Teorema A.3. *Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (x_0,y_0) e forem contínuas em (x_0,y_0), então f é diferenciável em (x_0,y_0).*

O Teorema A.3 encontra na página 826 de STEWART (2013) e sua demostração no Apêndice F da referida obra.

Teorema A.4. *(Regra da cadeia para funções de duas variáveis independentes). Se $w = f(x,y)$ possuir derivadas parciais contínuas f_x e f_y e se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem funções diferenciáveis de t, então a composta $w = f(x(t),y(t))$ será uma função diferenciável de t e*

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t),$$

ou

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Consultar THOMAS (2008), página 320, para obter a demonstração.

Definição A.7. Sejam $U, V \subset R$, abertos. Um **difeomorfismo** $f : U \longrightarrow V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Se f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Teorema A.5. *(Teorema da Função Inversa). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $(1 \leq k < \infty)$ tal que, em um ponto $x_0 \in U$, $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.*

Para obter a demostração, consultar AMORIM (2016), página 17.

Teorema A.6. *(Teorema de Picard). Seja f contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b$. Se $|f| \leq M$ em Ω, existe uma única solução de*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

em I_a, onde $a = min\{a, b/M\}$.

A demostração encontra-se em SOTOMAYOR (2011), nas páginas 16, 17 e 18.