UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIELA CONCEIÇÃO DA SILVA VELOZO

AS INTEGRAIS DE RIEMANN E DE LEBESGUE: COMPARAÇÕES E GENERALIZAÇÃO

CAMPINA GRANDE
2022

GABRIELA CONCEIÇÃO DA SILVA VELOZO

AS INTEGRAIS DE RIEMANN E DE LEBESGUE: COMPARAÇÕES E GENERALIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE
2022

V443i Veloso, Gabriela Conceicao da Silva.
As integrais de Riemann e Lebesgue [manuscrito] : comparações e generalização / Gabriela Conceicao da Silva Veloso. - 2022.
97 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Teoria da Medida. 2. Integral de Lebesgue. 3. Integral de Riemann. I. Título

21. ed. CDD 515.4

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

GABRIELA CONCEIÇÃO DA SILVA VELOZO

AS INTEGRAIS DE RIEMANN E DE LEBESGUE: COMPARAÇÕES E GENERALIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho aos três grandes exemplos de mulheres em minha vida: minha mãe Fernanda, minha avó Lenilda e minha tia Adriana que também foi minha inspiração para escolher a Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente as forças divinas que me guiaram durante todo processo da minha vida, aos que acreditam, Deus.

Em segundo lugar, eu não poderia deixar de citar a mulher que sempre me apoiou e lutou todos os dias para que hoje eu pudesse concluir minha graduação: à minha mãe, todo meu amor, respeito, admiração e reconhecimento.

Agradeço a minha avó Lenilda, minha segunda mãe, por ter me ensinado os valores morais e pelos conselhos que me tornaram a mulher que sou hoje.

Agradeço à minha tia Adriana por ser inspiração em minha vida desde pequena ao me ensinar a ler, escrever e por me ajudar nas minhas atividades de matemática. Obrigada por ter me ajudado em toda minha trajetória acadêmica e por ter sido minha maior inspiração para escolher a Matemática.

Agradeço aos meus irmãos, Guilherme e Júlio, pelos momentos de diversão e distração quando precisei nos dias difícies. Em especial, a Júlio por ser meu motorista nas vezes que me levou ao ponto do ônibus e nos dias de chuva.

Agradeço aos demais familiares que de alguma forma me apoiaram ou que foram essenciais em momentos específicos da minha trajetória.

Agradeço aos amigos que fiz durante o curso em especial: Larissa Costa, que quebrou o nervosismo do primeiro dia de aula conversando e por ser a companhia das idas à xérox; Vanessa da Fonseca, a companheira de reclamações e a pessoa que parava para escutar minhas teorias na resolução de questões que muitas das vezes não faziam sentido; Thálya Millena, grande amiga, que foi parte importante nos dias difícies; Júlia, que fez as tardes de monitoria leves e divertidas; Nielson Alves (grande Jorge) e Hassani Maurício, grandes amigos e parceiros da "zoação"; Ítallo Diniz, pela companhia, conversas no ônibus e durante o PIBID; Vitória Silva, pela parceiria e apoio nos trabalhos e seminários que participamos juntas; Dielly Ziwane, pelos momentos de ajuda antes das provas e pelas "brincadeiras"leves.

Agradeço também aos amigos que fiz no ônibus e de outros cursos, em especial: Ewerton Rafael, pelos momentos de companherismo, apoio e palavras de conforto; Luana Lima, pelas resenhas e conversas aleatórias do caminho para universidade e Arthur Silva, pelas indicações de músicas e "palhaçadas"dentro do ônibus lotado.

Agradeço imensamente ao meu orientador Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, por toda paciência, pela compreensão, por acreditar no meu potencial e pela motivação desde o segundo período. Obrigada pelo tempo que disponibilizou e por toda orientação para construção deste trabalho.

Agradeço aos professores da Universidade Estadual da Paraíba, principalmente, Aldo Trajano, Emanuela Régia, Fernando Luís, Isabella Duarte, Israel Galvão, Joselma Soares, Kátia Suzana, Luciana Freitas, Maria da Conceição e Maxwell Aires por todos os ensinamentos e por serem exemplos de docência que levarei para minha vida. Tenham certeza que cada um me fez ter ainda mais certeza da minha escolha.

Agradeço as professoras Emanuela e Luciana por aceitarem participar da banca bem como todas as sugestões para melhoria deste trabalho.

Aos que mencionei e aos demais, obrigado pelo o apoio e companheirismo durante esta caminhada.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela." Albert Einstein

RESUMO

As ideias do Cálculo foram resultados de apronfundamentos nos estudos de grandes matemáticos ao longo do Século XIX. Um grande destaque para a teoria da integração são as conjecturas estabelecidas por Riemann para a época, pois resolvia grande parte dos problemas propostos. No Século XX, originou-se uma nova teoria que a princípio foi bastante refutada pelos matemáticos, isto é, a Teoria de Lebesgue, que, por sua vez, diferenciava da de Riemann devido a sua fundamentação na teoria da medida. Contudo, ao longo do tempo, o reconhecimento foi surgindo por sanar ou "diminuir"as "fragilidades"da integral de Riemann. Dessa forma, este trabalho tem o objetivo de apresentar, de forma breve, os principais resultados que desenvolvem as duas integrais. O estudo foi dividido em três partes: inicialmente, apresentamos as principais ideias de Riemann, posteriormente, trazemos o desenvolvimento da teoria da integração de Lebesgue e por último, fazemos a comparação das duas integrais bem como verificamos através de um exemplo a diferença entre tais. A fim de apontar que a segunda nada mais é que uma generalização da primeira.

Palavras-chave: Teoria da Medida. Integral de Lebesgue. Integral de Riemann.

ABSTRACT

The ideas of Calculous were the results of deepening research in the studies of the great mathematicians along the 19th century. A big emphasis is given to the integration theory that are the conjectures stablished by Riemann, as it solved a great part of the proposed problems. In the 20th century, a new theory originated and at the beginning was refuted by the mathematicians, namely, the Lebesgue's theory, was by its own, the differentiation from Riemann's Theory due to its fundaments in the measure theory, nevertheless, throughout the time the recognition emerged for it was able to "diminish"the "fragilities"from Riemann integral. Thus, this research aims to present, in a brief way, the main results that develop the two integral. The study was divided into three parts: initially we present the main ideas of Riemann, next we bring the development of the Lebesgue's theory of integration and lately we compare the two integrals and verify the difference between both through an example. Pointing out that the latter is a generalization of the former.

Keywords: Measure Theory. Lebesgue Integral. Riemann Integral.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na História do Cálculo suas origens têm base na Grécia antiga com o chamado "método da exaustão", desenvolvido pelos pioneiros Euxodos (408–355$a.C.$) e Arquimedes (287–212$a.C.$), em que consistia aproximar curvas através de regiões poligonais regulares. Com o passar do tempo outros matemáticos dedicaram seus estudos para formalizar e tornar a teoria de diferenciação e integração mais rigorosas. Dentre os nomes podemos citar: Leibniz (1646 – 1716), Newton (1642 – 1717), Cauchy (1789 – 1857) e Riemann (1826 – 1866).

Assim, as ideias do Cálculo não foram desenvolvidas exclusivamente por Riemann. Esta noção foi resultado de um aprofundamento nos estudos dos matemáticos citados. A teoria desenvolvida por Riemann foi uma ampliação dos resultados de Cauchy que culminaram em uma nova definição para integração que diferencia continuidade de integrabilidade. Vale salientar que nos cursos de Cálculo ofertados pelas Universidades as ideias de Riemann são utilizadas até hoje.

Dessa forma, as ideias desenvolvidas por Riemann foram as teorias mais consistentes para a época, pois resolviam muitos problemas propostos e os demais que iam surgindo, mas, a teoria por trás requer muitas condições e resultados para seu desenvolvimento. E, por esse motivo, surge uma nova teoria originando-se no século XX, tomando como base a teoria da medida, trazida pelo matemático Henri Léon Lebesgue (1845–1941). A princípio suas ideias foram criticadas e refutadas pelos demais matemáticos, mas que ao longo do tempo foram ganhando reconhecimento por sanar ou diminuir as "fragilidades" da integral de Riemann. Como por exemplo, sendo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis não negativas, segundo Lebesgue, vale a condição: $\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. Porém, na integral de Riemann a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do lado esquerdo da igualdade pode não estar definida.

Com isso, este trabalho tem o intuito de apresentar, de forma breve, as teorias de integração advindas de Riemann e Lebesgue, mostrando os principais resultados que as desenvolvem, para então, fazer a comparação entre ambas.

Portanto, a divisão feita tem a seguinte estrutura: no Primeiro Capítulo, apresentamos a teoria de integração de Riemann, com a definição, resultados importantes para elaboração da mesma e, também, algumas propriedades; no Segundo Capítulo, temos a construção da Integral de Lebesgue, através da teoria da medida, funções mensuráveis e as propriedades mais importantes; no Terceiro Capítulo, composto por exemplos em que fazemos as comparações das duas teorias bem como mostramos através de um exemplo onde a teoria de Riemann falha e, por último, são feitas as conclusões, em que notamos que a Integral de Lesbesgue é uma teoria mais ampla que generaliza a Integral de Riemann.

1 A INTEGRAL DE RIEMANN

Na Análise Real, os conceitos mais importantes são as noções de derivada e integral. Na derivada, a correpondência com o meio geométrico está ligada a reta tangente e, na física, temos a ideia de velocidade. Já na integral, associamos a ideia geométrica de área da região abaixo de um gráfico e, na física, a ideia de trabalho. Neste capítulo, trabalhamos os conceitos e resultados que nos levam a definir a integral de Riemann, como também algumas de suas propriedades. Para este estudo, foram utilizadas como referências os livros de Aldo Maciel e Osmundo Lima (2005) e Élon Lima (2006).

1.1 Algumas Propriedades do Supremo e do Ínfimo

Para os resultados que seguirão se faz necessário definir o ínfimo e supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.1. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $M \in \mathbb{R}$, tal que $x \leq M$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que M é uma cota superior para X .

Definição 1.2. Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente quando existe algum $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que m é uma cota inferior para X .

Definição 1.3. Considere um subconjunto X de $\mathbb{R}$, limitado superiormente. Definimos o **supremo** de X como sendo o número real M satisfazendo as seguintes condições:

i) $x \leq M$, $\forall x \in X$;

ii) se S é qualquer cota superior de X então $M \leq S$.

Definição 1.4. Definimos o **ínfimo** de um subconjunto X de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, como sendo o número real m satisfazendo as seguintes condições:

i) $m \leq x$, $\forall x \in X$;

ii) se s é qualquer cota inferior de X então $s \leq m$.

A seguir, todos os conjuntos mencionados serão não-vazios.

Lema 1.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então*

1. $\sup A \leq \inf B$*;*

2. $\sup A = \inf B$ *se, e somente se,* $\forall \epsilon > 0$, *existem* $x \in A$ *e* $y \in B$ *com* $y - x < \epsilon$.

Demonstração:

1. Suponha que $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ temos $x \leq y$. Seja $\sup A$ a menor das cotas superiores de A e $\inf B$ a maior das cotas inferiores de B. Note que, pela definição de cota superior de um conjunto, qualquer $y \in B$ é cota superior de A; ou seja, $\sup A \leq y$, $\forall y \in B$. Como também, pela definição de cota inferior, $\sup A$ é cota inferior de B. Então,

$$\sup A \leq \inf B.$$

2. ($\Leftarrow$) Suponha que $\forall \epsilon > 0$ existam $x \in A$ e $y \in B$ tal que $y - x < \epsilon$. Do item anterior, mostramos que $\sup A \leq \inf B$. Então, vamos supor que

$$\sup A < \inf B \Rightarrow \inf B - \sup A > 0.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon = \inf B - \sup A$. Como supomos que $\sup A < \inf B$ então $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ temos $x \leq \sup A$ e $\inf B \leq y$. Daí,

$$x \leq \sup A < \inf B \leq y.$$

Assim, $\inf B - \sup A \leq y - x \Rightarrow y - x \geq \epsilon$, o que é uma contradição, pois $y - x < \epsilon$. Logo, se existem $x \in A$ e $y \in B$ tal que $y - x < \epsilon$, então $\sup A = \inf B$.

($\Rightarrow$) Suponha que vale $\sup A = \inf B$. Pela **Definição 1.3**, dado $\epsilon > 0$ qualquer, $\sup A - \frac{\epsilon}{2}$ não é cota superior de A. Então, existe $x \in A$ de maneira que

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A.$$

De forma semelhante, segue da **Definição 1.4** que, dado $\epsilon > 0$ qualquer, $\inf B + \frac{\epsilon}{2}$ não é cota inferior de B. Então, existe $y \in B$ que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\inf B \leq y < \inf B + \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, temos

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y - x &< \inf B + \frac{\epsilon}{2} - \left(\sup A - \frac{\epsilon}{2}\right) \\ \Rightarrow y - x &< \inf B + \frac{\epsilon}{2} - \sup A + \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow y - x &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \epsilon$.

□

Lema 1.2. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados não vazios e $c \in \mathbb{R}$. São limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A \, e \, y \in B\}$ e $c \cdot A = \{cx; x \in A\}$. Além disso, tem-se*

1. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *e* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$*;*
2. *se* $c \geq 0, \sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$*;*
3. *se* $c < 0, \sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$*.*

Demonstração: Primeiramente, sendo os conjuntos A e B limitados, mostremos que os conjuntos $A + B$ e $c \cdot A$ são limitados. Ora, para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$, temos que

$$m_1 \leq x \leq M_1 \quad \text{e} \quad m_2 \leq y \leq M_2,$$

com $m_1, m_2, M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \neq M_1$ e $m_2 \neq M_2$. Isto implica em

$$m_1 + m_2 \leq x + y \leq M_1 + M_2.$$

Logo, $A + B$ é limitado. Agora, sendo $c \in \mathbb{R}$, então

- Se $c \geq 0$, temos $c \cdot m_1 \leq c \cdot x \leq c \cdot M_1$;
- Se $c < 0$, temos $c \cdot m_1 \geq c \cdot x \geq c \cdot M_1$.

Portanto, $c \cdot A$ é limitado.

1. Sendo os conjuntos A e B limitados, considere $a \in A$ e $b \in B$ tais que $a = \sup A$ e $b = \sup B$; ou seja,

$$x \leq a, \ \forall x \in A \ \text{ e } \ y \leq b, \ \forall y \in B.$$

Assim, $x + y \leq a + b$. Note que, $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado qualquer $\epsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$, tais que

$$a - \frac{\epsilon}{2} < x \text{ e } b - \frac{\epsilon}{2} < y.$$

Ao qual, $a - \frac{\epsilon}{2}$ não é cota superior de A e, da mesma forma, $b - \frac{\epsilon}{2}$ não é cota superior de B. Isto é, existem $x \in A$ e $y \in B$, tais que

$$a - \frac{\epsilon}{2} < x \leq a \text{ e } b - \frac{\epsilon}{2} < y \leq b.$$

Dessa forma,

$$x + y > a - \frac{\epsilon}{2} + b - \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow x + y > a + b - \epsilon.$$

Daí, $a + b - \epsilon < x + y \leq a + b$. Assim, fica evidente que $a + b - \epsilon$ não é cota superior de $A + B$; logo, $a + b$ é a menor cota superior de $A + B$. Portanto, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
De modo análogo, mostramos que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

2. Seja $a = \sup A$. Então, se $c > 0$, temos

$$c \cdot x \leq c \cdot a, \forall x \in A.$$

Note que, $c \cdot a$ é cota superior de $c \cdot A$. Agora, tome qualquer $d \in \mathbb{R}$ tal que $d < c \cdot a$, ou seja, $\frac{d}{c} < a$. Assim, existe $x \in A$ tal que

$$\frac{d}{c} < x \leq a \Rightarrow d < c \cdot x \leq c \cdot a.$$

Logo, d não é cota superior de $c \cdot A$ e, então, $c \cdot a$ é a menor das cotas superiores. Portanto, $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

De modo análogo, mostramos que $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

3. Seja A um conjunto limitado e $a = \inf A$; ou seja, $\forall x \in A$ temos $x \geq a$. Então, sendo $c < 0$, tem-se que $c \cdot x \leq c \cdot a$; assim, $c \cdot a$ é cota superior de $c \cdot A$. Considere $d \in \mathbb{R}$ qualquer tal que $d < c \cdot a$, então $\frac{d}{c} > a$. Com isso, existe $x \in A$ tal que

$$a \leq x \leq \frac{d}{c} \Rightarrow c \cdot a \geq c \cdot x \geq d.$$

Note que, d não é cota superior de $c \cdot A$. Logo, $c \cdot a$ é a menor das cotas superiores. Portanto, $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

De modo análogo, mostramos que $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

□

Lema 1.3. *Sejam $A \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Então,* $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Demonstração: Pelo fato de A ser um conjunto não-vazio limitado, para todo $x \in A$, existe m, tal que

$$m \leq x, \, m \in \mathbb{R}.$$

Suponha, por contradição, que $\inf A < \inf B$. Dado $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \inf B - \inf A$, o que implica em $\inf A + \epsilon < \inf B$. Ou seja, existe $x \in A$ tal que

$$x < \inf A + \epsilon < \inf B.$$

Então, $x < \inf B$. Mas, é um absurdo, pois $A \subset B$, e deveríamos ter $\inf B \leq x$. Logo, $\inf B \leq \inf A$.

Agora de maneira análoga, sabendo que A é limitado, $\forall x \in A$, temos

$$x \leq M, \text{ para algum } M \in \mathbb{R}.$$

Supondo por contradição que $\sup B < \sup A$, logo, $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \sup A - \sup B$, o que implica em $\sup B < \sup A - \epsilon$. Ou seja, $\exists x \in A$ tal que

$$x > \sup A - \epsilon > \sup B.$$

Então, $x > \sup B$. O que é uma contradição, pois $A \subset B$, e deveríamos ter $x \leq \sup B$. Logo, $\sup A \leq \sup B$.
Portanto, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

□

Definição 1.5. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se limitada superiormente quando existe algum $M \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que M é uma cota superior de f .

Definição 1.6. Uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se limitada inferiormente quando existe algum $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que m é uma cota inferior de f .

Definição 1.7. Considere uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos o **supremo** de f como sendo o $\sup f(X) = \{\sup f(x); x \in X\}$, ou seja, existe M tal que:

i) $f \leq M$;

ii) se s é qualquer cota superior de $f(X)$ então $M \leq s$.

Definição 1.8. Considere uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos o **ínfimo** de f como sendo o $\inf f(X) = \{\inf f(x); x \in X\}$, ou seja, existe m tal que:

i) $m \leq f$;

ii) se s é qualquer cota inferior de $f(X)$ então $s \leq m$.

Corolário 1.0.1. *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e $c \in \mathbb{R}$. São limitadas as funções $f + g$ e $cf : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, tem-se:*

1. $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ *e* $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$*;*

2. *se* $c \geq 0, \sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f$ *e* $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$*;*

3. *se* $c < 0, \sup(c \cdot f) = c \cdot \inf f$ *e* $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$*.*

Demonstração: De início, vamos mostrar que as funções $f + g$ e cf são limitadas. Sabemos que f e g são limitadas; ou seja, para todo $x, y \in X$, temos

$$m_1 \leq f(x) \leq M_1 \ \text{ e } \ m_2 \leq g(x) \leq M_2,$$

com $m_1, m_2, M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \leq M_1$ e $m_2 \leq M_2$. Isto implica em

$$m_1 + m_2 \leq f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2.$$

Logo, $f + g$ é limitada. Agora, sendo $c \in \mathbb{R}$, tem-se

- Se $c \geq 0$ temos $c \cdot m_1 \leq c \cdot f(x) \leq c \cdot M_1$;

- Se $c < 0$ temos $c \cdot m_1 \geq c \cdot f(x) \geq c \cdot M_1$.

Logo, cf é limitada. Considere os conjuntos

$$A = f(X) = \{f(x); x \in X\} \ \text{ e } \ B = g(X) = \{g(y); y \in X\}.$$

1. Seja $C = (f+g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$ e pelo **Lema 1.2**, temos

$$A + B = \{f(x) + g(y); f(x) \in A \ \text{ e } \ g(y) \in B\}.$$

   É evidente que $C \subset A + B$, pois $f(x) + g(x) \in C$ como também $f(x) + g(x) \in A + B$. Assim, $\sup C \leq \sup(A+B)$ e $\inf C \geq \inf(A+B)$, como pode ser visto no **Lema 1.3**. Mas, sabemos que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$, pelo **Lema 1.2**. Logo,

$$\sup C \le \sup A + \sup B \Rightarrow \sup(f+g) \le \sup f + \sup g$$

e

$$\inf C \ge \inf A + \inf B \Rightarrow \inf(f+g) \ge \inf f + \inf g.$$

2. Se $c \ge 0$ temos, do **Lema 1.2**, que

$$\sup(c \cdot f) = \sup\{c \cdot f(x);\, x \in X\} = \sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A = c \cdot \sup f.$$

   De modo análogo, mostramos que $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$.

3. Se $c < 0$ temos, do **Lema 1.2**, que

$$\sup(c \cdot f) = \sup\{c \cdot f(x);\, x \in X\} = \sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A = c \cdot \inf f.$$

   De modo análogo, mostramos que $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$.

□

Lema 1.4. *Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, sejam $m = \inf f$, $M = \sup f$ e, a oscilação de f, $w = M - m$. Então, $w = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in X$ arbitrários e suponha que $f(x) \ge f(y)$. Então, $m \le f(y) \le f(x) \le M$. Assim,

$$|f(x) - f(y)| \le M - m = w.$$

Note que, w é uma cota superior do conjunto $A = \{|f(x) - f(y)|; \forall x, y \in X\}$. Primeirante, mostremos que A é limitado superiormente. Ora, temos que

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| \le 2M,$$

pois, pela hipótese, f é limitada. Logo, A é limitado.

Agora, para todo $\epsilon > 0$ existem $x, y \in X$ tais que

$$f(y) < m + \frac{\epsilon}{2} \;\text{ e }\; f(x) > M - \frac{\epsilon}{2}.$$

Então,

$$|f(x) - f(y)| \ge f(x) - f(y) > -m - \frac{\epsilon}{2} + M - \frac{\epsilon}{2} = -m + M - \epsilon = w - \epsilon.$$

Daí, $w - \epsilon < |f(x) - f(y)| \leq w$. Note que, $w - \epsilon$ não é cota superior de A. Então, w é a menor das cotas superiores de A. Portanto,

$$w = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}.$$

$\square$

Lema 1.5. *Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.*

Demonstração: Suponha que para cada $a \in A$ existe $a' \in A'$ tal que $a \leq a'$. Assim, pelo **Lema 1.3**, perceba que $\sup A$ é uma cota superior de A', ou seja, $a' \leq \sup A$. Dado $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\sup A - \epsilon \leq a \leq \sup A$. Por hipótese, existe $a' \in A'$ tal que $\sup A - \epsilon \leq a \leq a' \leq \sup A$. Logo, $\sup A$ é a menor das cotas superiores para o conjunto A'. Portanto, $\sup A = \sup A'$.

De maneira análoga, provamos que $\inf B' = \inf B$. Ora, para cada $b \in B$ existe $b' \in B'$ com $b' \leq b$. Dessa forma, pelo **Lema 1.3**, $\inf B$ é cota inferior de B', ou melhor, $\inf B \leq b'$, $\forall b' \in B'$. Dado $\epsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $\inf B \leq b \leq \inf B + \epsilon$. Por hipótese, existe $b' \in B'$ tal que $\inf B \leq b \leq b' \leq \inf B + \epsilon$. Logo, $\inf B$ é a maior das cotas inferiores para o conjunto B'. Portanto, $\inf B' = \inf B$.

$\square$

1.2 A Integral de Riemann

Uma partição de um intervalo fechado e limitado, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ satisfazendo a condição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, com $i = \{1, 2, \ldots, n\}$, tem comprimento $t_i - t_{i-1}$ e será chamado de i-ésimo intervalo da partição P. Nota-se que

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Sejam P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Dizemos que Q é um refinamento de P quando $P \subset Q$.

Considere a função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Temos que f é limitada em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, com $i = 1, 2, \ldots, n$; e, portanto, existem m_i e M_i, respectivamente o ínfimo e o supremo de f em $[t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. De forma que,

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

e

$$M_i = \sup\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

A **oscilação de f no i-ésimo** intervalo de P é definida por $w_i = M_i - m_i$.

Definimos a **soma inferior** de f, relativamente à partição P, como sendo

$$s(f;P) = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

e analogamente, definimos a **soma superior** de f, relativamente à partição P, como sendo

$$S(f;P) = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Os números $s(f;P)$ e $S(f;P)$ são denominados, respectivamente, de somas de *Riemann-Darboux* inferior e superior de f, relativas à partição P.

Lema 1.6. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada então para qualquer partição P de $[a,b]$, tem-se*

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$$

onde

$$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$$

e

$$M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}.$$

Demonstração: Sabe-se que m_i e M_i são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f em $[t_{i-1}, t_i]$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, e que m e M são o ínfimo e o supremo de f no intervalo $[a,b]$. Com isso, para cada $i = 1, 2, ..., n$ temos $m \leq m_i$. Da mesma forma, temos $M_i \leq M$, isso pelo fato de $[t_{i-1}, t_i] \subset [a,b]$ e pelo **Lema 1.3**. Como consequência, $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.

Note que,

$$\begin{aligned}
m(t_1 - t_0) \leq m_1(t_1 - t_0) \leq M_1(t_1 - t_0) \leq M(t_1 - t_0) \\
m(t_2 - t_1) \leq m_2(t_2 - t_1) \leq M_2(t_2 - t_1) \leq M(t_2 - t_1) \\
\vdots \\
m(t_n - t_{n-1}) \leq m_n(t_n - t_{n-1}) \leq M_n(t_n - t_{n-1}) \leq M(t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
& m\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \leq m_i\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \leq M_i\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\
\Rightarrow \quad & m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq M(b-a).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$m(b-a) \le s(f;P) \le S(f;P) \le M(b-a).$$

□

Teorema 1.1. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada e sejam* P *e* Q *duas partições de* $[a,b]$*. Se* $P\subset Q$ *então*

1. $s(f;P)\le s(f;Q)$*;*
2. $S(f;Q)\le S(f;P)$*.*

Demonstração: Considere a partição $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ e suponha que a partição Q resulte de P com acréscimo de um ponto r, ou seja, $Q=P\cup\{r\}$, donde $t_{j-1}<r<t_j$, para algum $j=1,2,\ldots,n$.

1. Sejam m' e m'', respectivamente, os ínfimos de f nos subintervalos $[t_{j-1},r]$ e $[r,t_j]$, de $[a,b]$. Note que m_j é uma cota inferior do subintervalo $[t_{j-1},r]$ como também de $[r,t_j]$, e dessa forma, por definição de ínfimo, temos que $m_j\le m'$ e $m_j\le m''$. Sendo t_j-t_{j-1} o comprimento do intervalo podemos escrever $t_j-t_{j-1}=(t_j-r)+(r-t_{j-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}
s(f;Q)-s(f;P) &= \sum_{i\neq j}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) + m''(t_j-r)+m'(r-t_{j-1})\\
&\quad -\left[\sum_{i\neq j}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) + m_j(t_j-t_{j-1})\right]\\
&= m''(t_j-r)+m'(r-t_{j-1})-m_j(t_j+t_{j-1})+m_jr-m_jr\\
&= m''(t_j-r)+m'(r-t_{j-1})-m_j(t_j-r)-m_j(r-t_{j-1})\\
&= (m''-m_j)(t_j-r)+(m'-m_j)(r-t_{j-1})\ge 0,
\end{aligned}$$

   e, portanto, $s(f;P)\le s(f;Q)$. Para o caso geral, prosseguimos com esse raciocínio um número finito de vezes.

2. Sejam M' e M'', respectivamente, os supremos de f nos subintervalos $[t_{j-1},r]$ e $[r,t_j]$, de $[a,b]$. Note que M_j é uma cota superior do subintervalo $[t_{j-1},r]$ como também de $[r,t_j]$ e, dessa forma, por definição do supremo, temos $M'\le M_j$ e $M''\le M_j$. Sendo t_j-t_{j-1} o comprimento do intervalo podemos reescrê-lo como

$t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}
S(f;P) - S(f;Q) &= \sum_{i\neq j}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_j(t_j - t_{j-1}) \\
&\quad - \left[\sum_{i\neq j}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + M''(t_j - r) + M'(r - t_{j-1})\right] \\
&= M_j(t_j - t_{j-1}) - M''(t_j - r) - M'(r - t_{j-1}) + M_j r - M_j r \\
&= M_j(t_j - r) + M_j(r - t_{j-1}) - M''(t_j - r) - M'(r - t_{j-1}) \\
&= (M_j - M'')(t_j - r) + (M_j - M')(r - t_{j-1}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim, $S(f;Q) \leq S(f;P)$. Para o caso geral, prosseguimos com esse raciocínio um número finito de vezes.

□

Corolário 1.1.1. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e sejam* P *e* Q *duas partições quaisquer de* $[a,b]$. *Então* $s(f;P) \leq S(f,Q)$.

Demonstração: Como $P \cup Q$ é um refinamento simultâneo das partições P e Q, temos, pelo **Teorema 1.1**, que

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \;\; \text{e} \;\; S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

Pelo **Lema 1.6**, segue que $s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q)$. Como consequência, segue que

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

Portanto, $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

□

Definição 1.9. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Sendo $\mathcal{P}$ o conjunto das partições do intervalo $[a,b]$, definimos

i) a **integral inferior** f por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{s(f;P)\};$$

ii) a **integral superior** f por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} \{S(f;P)\}.$$

Corolário 1.1.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam m, $M \in \mathbb{R}$ tais que $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. Então,*

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M(b-a).$$

Demonstração: Uma vez que $m \le inff$ e $supf \le M$, em $[a,b]$, pelo **Lema 1.6**, temos

$$m(b-a) \le s(f;P) \le S(f;P) \le M(b-a)$$

para qualquer $P \in \mathcal{P}$. Sabendo que $\sup_{P \in \mathcal{P}}\{s(f;P)\} \le \inf_{P \in \mathcal{P}}\{S(f;P)\}$, pelo **Lema 1.1**, temos

$$m(b-a) \le \sup_{P \in \mathcal{P}}\{s(f;P)\} \le \inf_{P \in \mathcal{P}}\{S(f;P)\} \le M(b-a).$$

Portanto, pela **Definição 1.9**, concluímos que

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le M(b-a).$$

□

Corolário 1.1.3. *Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0, obteremos os mesmos valores para $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.*

Demonstração: Considere os conjuntos,

$$A = \{s(f;Q); Q \in \mathcal{P}\}$$

e

$$A' = \{s(f;P); P \in \mathcal{P}, \text{ tais que } P_0 \subset P\}.$$

Note que $A' \subset A$. Além disso, para cada $Q \in \mathcal{P}$, tomando $P = P_0 \cup Q$, de modo que, para cada $s(f;Q) \in A$ existe $s(f;P) \in A'$ tal que $s(f;Q) \le s(f;P)$. Portanto, pelo **Lema 1.5**, tem-se $\sup A = \sup A'$. Logo,

$$\sup A = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup A'.$$

De maneira análoga, mostramos que o mesmo vale para $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ independente da partição que seja tomada.

□

Definição 1.10 (A Integral de Riemann). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável à Riemann, em $[a,b]$, quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

e o valor comum será denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 1.2 (Condição Imediata de Integrabilidade). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é integrável;*

2. *$\forall \epsilon > 0$, existem partições P e Q, de $[a,b]$, tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \epsilon$;*

3. *$\forall \epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$, de $[a,b]$, tal que*

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam

$$A = \{s(f;P); P \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

e

$$B = \{S(f;Q); Q \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

respectivamente, os conjuntos das somas inferiores e das somas superiores de f. Pelo **Corolário 1.1.1** para quaisquer partições P e Q, temos

$$s(f;P) \le S(f;Q).$$

Porém, sendo f integrável, então $\sup A = \inf B$, ou melhor,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existem partições P_1 e P_2, de $[a,b]$, tais que

$$\begin{aligned} S(f;P_1) < \inf_P\{S(f;P)\} + \frac{\epsilon}{2} \quad &\Rightarrow \quad S(f;P_1) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow S(f;P_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} \quad &\Rightarrow \quad S(f;P_1) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sup_P\{s(f;P)\} - \frac{\epsilon}{2} < s(f;P_2) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s(f;P_2) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s(f;P_2) \quad &\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx - s(f;P_2) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim, temos $S(f;P_1) - s(f;P_2) < \epsilon$. Tomando $Q = P_1$ e $P = P_2$ o resultado segue.

(2) ⇒ (3) Suponha que $S(f,Q) - s(f;P) < \epsilon$ e seja $P_0 = P \cup Q$ uma partição que refina P e Q. Então, segue, do **Teorema 1.1**, que

$$s(f;P) \leq s(f;P_0) \leq S(f;P_0) \leq S(f;P).$$

Com isso, temos

$$S(f;P_0) - s(f;P_0) \leq S(f;P) - s(f;P) < \epsilon$$

Logo, $S(f;P_0) - s(f;P_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon$.

(3) ⇒ (1) Por fim, suponha que dado $\epsilon > 0$ exista uma partição P_0 de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P_0) - s(f;P_0) < \epsilon.$$

Considere os conjuntos,

$$A = \{s(f;P); P \text{ é uma partição de } [a,b] \text{ e } P \subset P_0\}$$

e

$$B = \{S(f;P); P \text{ é uma partição de } [a,b] \text{ e } P \subset P_0\}$$

respectivamente, os conjuntos das somas inferiores e superiores de f, restritos às partições refinadas por P_0. Por hipótese, $S(f;P_0) - s(f;P_0) < \epsilon$ e ainda, temos que $s(f;P_0) \in A$ e $S(f;P_0) \in B$. Então, pelo **Lema 1.1**,

$$\inf B = \sup A,$$

ou melhor,

$$\inf_{P \subset P_0} \{S(f;P)\} = \sup_{P \subset P_0} \{s(f;P)\}.$$

Com isso, pelo **Corolário 1.1.3**, consideramos apenas as partições que refinam P_0 e obtemos o seguinte resultado

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Logo, f é integrável.

□

1.3 Propriedades da Integral

Nesta seção, apresentamos as principais propriedades da Integral de Riemann.

Teorema 1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < c < b$. A função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Sejam

$$\alpha = \underline{\int_a^c} f(x)dx, \quad A = \overline{\int_a^c} f(x)dx$$

e

$$\beta = \underline{\int_c^b} f(x)dx, \quad B = \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Considerando as partições $P_1 = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_p = c\}$ e $P_2 = \{c = t_p, t_{p+1}, \ldots, t_n = b\}$, respectivamente, dos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Sendo, $\alpha = \sup_{P_1 \in \mathcal{P}} \{s(f; P_1)\}$ e $\beta = \sup_{P_2 \in \mathcal{P}} \{s(f; P_2)\}$. Seja $P = P_1 \cup P_2$, tome $s(f; P_1) \in \alpha$ e $s(f; P_2) \in \beta$, então

$$\begin{aligned} s(f; P_1) + s(f; P_2) &= \sum_{i=1}^{p} m_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{j=p+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= m_1(t_1 - a) + \cdots + m_p(c - t_{p-1}) + m_{p+1}(t_{p+1} - c) + \cdots + m_n(b - t_{n-1}) \\ &= s(f; P_1 \cup P_2) = s(f; P). \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo raciocínio para $A = \inf_{P_1 \in \mathcal{P}} \{S(f; P_1)\}$ e $B = \inf_{P_2 \in \mathcal{P}} \{S(f; P_2)\}$, obtemos $S(f; P_1) + S(f; P_2) = S(f; P)$. Segue, do **Lema 1.2**, (1), que

$$\alpha + \beta = \underline{\int_a^b} f(x)dx \ \text{ e } \ A + B = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ora, pelo **Corolário 1.1.2**, temos que $\alpha \leq A$ e $\beta \leq B$.

($\Rightarrow$) Se f é integrável, então

$$\alpha + \beta = A + B \Rightarrow \alpha = A \ \text{ e } \ \beta = B.$$

Logo, $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis.

($\Leftarrow$) Se $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis, então

$$\alpha = A \ \text{ e } \ \beta = B \Rightarrow \alpha + \beta = A + B.$$

Logo, f é integrável.

$\square$

Teorema 1.4 (**Propriedades da Integral de Riemann**)**.** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:*

1. *A soma $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

2. *O produto $f \cdot g$ é integrável e*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;$$

3. *Se $0 < k \leq |g(x)|, \forall x \in [a,b]$, então $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é integrável;*

4. *Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

5. *$|f|$ é integrável e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Demonstração: Vamos denotar por m_i', M_i', w_i', m_i'', M_i'' e w_i'' e m_i, M_i e w_i, os ínfimos, os supremos e as oscilações das funções f, g e $f+g$, respectivamente, no i-ésimo intervalo de uma partição qualquer P, de $[a,b]$.

1. Pelo **Teorema 1.2**, sendo f e g integráveis, então para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$S(g;P) - s(g;P) = \sum_{i=1}^{n} w_i''(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Do **Corolário 1.0.1**, temos $f+g$ limitada e ainda,

$$m_i = \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g = m_i' + m_i''$$

e

$$M_i = \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g = M_i' + M_i''.$$

Isto implica em

$$s(f+g;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i''(t_i - t_{i-1}) = s(f;P) + s(g;P) \tag{1.1}$$

e

$$S(f+g;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i''(t_i - t_{i-1}) = S(f;P) + S(g;P). \tag{1.2}$$

Subtraindo (1.1) de (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} S(f+g;P) - s(f+g;P) &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(M_i'' - m_i'')(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} w_i''(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $S(f+g;P) - s(f+g;P) < \epsilon$ e, pelo **Teorema 1.2**, concluímos que $f+g$ é integrável.

Agora, tomando f, g e $f+g$ funções limitadas e integráveis, e ainda considerando duas partições P e Q de $[a,b]$, pelo **Teorema 1.1**, temos

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \;\text{ e }\; s(g;Q) \leq s(g;P \cup Q).$$

De (1.1), obtemos

$$s(f;P) + s(g;Q) \leq s(f;P\cup Q) + s(g;P\cup Q) \leq s(f+g;P\cup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)dx.$$

Como consequência, temos

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx &= \sup_P\{s(f;P)\} + \sup_Q\{s(g;Q)\} \\ &\leq \sup_{P,Q}\{s(f;P) + s(g;Q)\} \\ &\leq \underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]dx \end{aligned}$$

De modo análogo, pelo **Teorema 1.1** temos

$$S(f;P\cup Q)\leq S(f;P) \ \text{ e } \ S(g;P\cup Q)\leq S(g;Q).$$

De (1.2), obtemos

$$S(f;P)+S(g;Q)\geq S(f;P\cup Q)+S(g;P\cup Q)\geq S(f+g;P\cup Q)\geq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Como consequência, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)dx+\overline{\int_a^b} g(x)dx &= \inf_P\{S(f;P)\}+\inf_Q\{S(g;Q)\}\\
&\geq \inf_{P,Q}\{S(f;P)+S(g;Q)\}\\
&\geq \overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]dx
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f(x)dx+\underline{\int_a^b} g(x)dx &\leq \underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]dx\leq\\
&\leq \overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]dx\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx+\overline{\int_a^b} g(x)dx.
\end{aligned}$$

Como consideramos f, g e $f+g$ funções limitadas e integráveis as desigualdades acima se reduzem a igualdades, ou seja, as integrais inferiores e superiores são iguais, pela **Definição 1.10**. Portanto,

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

2. Supondo que f e g são funções limitadas e integráveis então existem $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ tais que, $\forall x\in[a,b]$

$$-k_1\leq f(x)\leq k_1, \ \text{ ou seja, } |f(x)|\leq k_1$$

e

$$-k_2\leq g(x)\leq k_2, \ \text{ ou seja, } |g(x)|\leq k_2.$$

Sendo $K=max\{k_1,k_2\}$ então temos $|f(x)|\leq K$ e $|g(x)|\leq K$, $\forall x\in[a,b]$.

Além disso, como f e g são integráveis para todo $\epsilon>0$ existe uma partição $P=$

$\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, de $[a,b]$, tal que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} w'(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2K}$$

e

$$S(g,P) - s(g,P) = \sum_{i=1}^{n} w''(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Com isso, para quaisquer $x, y \in [t_i - t_{i-1}]$, temos

$$\begin{aligned}
|f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)| &= |f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(y) + f(x)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)| \\
&= |[f(y) - f(x)]g(y) + f(x)[g(y) - g(x)]| \\
&\leq |f(y) - f(x)|\,|g(y)| + |f(x)|\,|g(y) - g(x)| \\
&\leq K(w_i' + w_i''),
\end{aligned}$$

pois, pelo **Lema 1.4**, temos

$$w_i''' = \sup\{|f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)|\,; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Sabendo que x e y foram tomados arbitrariamente, podemos concluir que $w_i''' \leq K(w_i' + w_i'')$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i'''(t_i - t_{i-1}) &\leq K\left[\sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} w_i''(t_i - t_{i-1})\right] \\
&< K\left[\frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2K}\right] = \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i'''(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Portanto, $f \cdot g$ é integrável pelo **Teorema 1.2**.

Por fim, considere as funções integráveis f e $c \cdot f$, essa última por consequência do que foi provado, para o caso em que $g(x) = c$, $\forall x \in [a,b]$. Sendo $c \in \mathbb{R}$, pelo **Lema 1.2**, temos que, se $c > 0$, $\sup\{s(c \cdot f; P)\} = c \cdot \sup\{s(f,P)\}$ para toda partição P, de $[a,b]$. Logo,

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = \underline{\int_a^b} c\cdot f(x)dx = c\cdot \underline{\int_a^b} f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Por outro lado, se $c < 0$, temos $\sup\{s(c\cdot f;P)\} = c\cdot \inf\{S(f,P)\}$. Logo,

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = \overline{\int_a^b} c\cdot f(x)dx = c\cdot \underline{\int_a^b} f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3. Uma vez que $f\cdot g$ é integrável, então, como $\dfrac{f}{g} = f\cdot\dfrac{1}{g}$, basta mostrar que $\dfrac{1}{g}$ é integrável. Seja g uma função integrável tal que $0 < k \le |g(x)|$, $\forall x \in [a,b]$. Considere w_i'' e w_i^4 as oscilações, respectivamente, de g e $\dfrac{1}{g}$ no i-ésimo intervalo de uma partição P, de $[a,b]$. Como g é integrável, pelo **Teorema 1.2**, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i''(t_i - t_{i-1}) < \epsilon\cdot k^2.$$

Além disso, para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, temos

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x)-g(y)|}{|g(y)g(x)|} \le \frac{|g(x)-g(y)|}{k^2}.$$

Pelo **Lema 1.4**, temos

$$w_i^4 = \sup\left\{\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right|; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\right\}.$$

Porém, tomamos x e y arbitrários. Daí, $w_i^4 \le \dfrac{w_i''}{k^2}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^4(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Portanto, as funções $\dfrac{1}{g}$ e f são integráveis e, pelo item anterior, $\dfrac{f}{g}$ é integrável.

4. Considere m_i' e M_i', m_i'' e M_i'' os ínfimos e supremos, respectivamente, das funções f e g no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, definidos por uma partição de P de $[a,b]$. Se $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então $m_i' \le m_i''$ e $M_i' \le M_i''$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i''(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow s(f;P) \le s(g;P)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} M_i'(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i''(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow S(f;P) \leq S(g;P).$$

Por resultado, conforme **Corolário 1.0.1**, temos

$$\sup_P\{s(f;P)\} \leq \sup_P\{s(g;P)\} \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx$$

e

$$\inf_P\{S(f;P)\} \leq \inf_P\{S(g;P)\} \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

Portanto, como f e g são integráveis concluímos que

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5. Inicialmente, mostraremos que $|f|$ é integrável. Para isso, considere f uma função integrável e sejam w_i' e w_i^5 as oscilações de f e $|f|$, respectivamente, no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, definidos por uma partição P de $[a,b]$. Pelo **Teorema 1.2**, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, temos

$$\begin{aligned}
|f(y)| = |[f(y) - f(x)] + f(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x)| \quad &\Rightarrow \quad |f(y)| - |f(x)| \leq |f(y) - f(x)| \\
|f(x)| = |[f(x) - f(y)] + f(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)| \quad &\Rightarrow \quad |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \\
&\Rightarrow \quad |f(y)| - |f(x)| \geq -|f(y) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Donde, $-|f(y) - f(x)| \leq |f(y)| - |f(x)| \leq |f(y) - f(x)|$. Logo, $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)|$. Assim,

$$||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)| < w_i'.$$

Pelo **Lema 1.4**, $w_i^5 = \sup\{||f(y)| - |f(x)||; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e pelo fato de termos tomado x e y arbitrários, segue que $w_i^5 \leq w_i'$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^5(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Logo, $|f|$ e integrável.

Agora, como $f(x) \leq |f(x)|$, então $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$ e, por consequência do item anterior, (4), temos

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Portanto,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Corolário 1.4.1. *Se* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável e* $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in [a,b]$, *então*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a).$$

Demonstração: Seja f uma função integrável e para a qual vale $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in [a,b]$. Temos também que para todo $x \in [a,b]$ vale que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Logo, pela monotonicidade da integral, **Teorema 1.4** (**5**), tem-se que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

ou seja,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq K(b-a).$$

Portanto,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a).$$

□

1.4 Condições Suficientes de Integrabilidade

Nesta seção, apresentamos resultados que permitem mostrar condições de funções integravéis à Riemann.

Teorema 1.5. *Toda função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Suponha que a função f seja contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$, ou seja, intervalo compacto. Neste caso, f é uniformemente contínua, ver (Élon Lima (1989), p. 151), de modo que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \; \forall x, y \in [a, b]. \tag{1.3}$$

Considere $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ donde temos $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$. Além disso, como pode ser visto em (Élon Lima (1989), pg 187), existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $f(x_i) = m_i$ e $f(y_i) = M_i$, onde m_i e M_i são respectivamente os ínfimos e supremos do mesmo.

Pelo fato de f ser uniformemente contínua, temos $|y_i - x_i| \leq |t_i - t_{i-1}| < \delta$. Segue da expressão (1.3) que

$$|y_i - x_i| < \delta \Rightarrow |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Porém, lembre que $w_i = M_i - m_i = |f(y_i) - f(x_i)|$ é a oscilação de f no i-ésimo intervalo definido por P e, também, que $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$; o implica em

$$\begin{aligned}
w_i = |f(y_i) - f(x_i)| &< \frac{\epsilon}{b-a} \\
\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\
\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo **Teorema 1.2** f é integrável.

□

Teorema 1.6. *Toda função monótona $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Seja f uma função monótona não-decrescente. Considere $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, de modo que, dado $\epsilon > 0$ tem-se

$$|t_i - t_{i-1}| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Como f é uma função monótona não-decrescente então em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ temos

$w_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$. Isto implica em

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[f(t_i) - f(t_{i-1})] &= [f(t_1) - f(t_0)] + [f(t_2) - f(t_1)] + [f(t_3) - f(t_2)] + \\ &+ \cdots + [f(t_n) - f(t_{n-1})] = f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Dessa forma, $\sum_{i=1}^{n}[f(t_i) - f(t_{i-1})] = f(b) - f(a)$ e daí

$$\begin{aligned} t_i - t_{i-1} &< \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}\sum_{i=1}^{n} w_i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}[f(b) - f(a)] \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo **Teorema 1.2** f, é integrável.

□

2 A INTEGRAL DE LEBESGUE

A Integral de Riemann surgiu no século XIX pelo "método da exaustão" inventado por Eudoxos, depois desenvolvido por Arquimedes e posteriormente nos trabalhos de Newton e Leibniz tornando-se uma ferramenta para os cálculos de áreas e volumes. Porém, esta integral apresenta limitações e por esta causa surge, no século XX, a teoria da integração na definição da Integral de Lebesgue que apresenta uma estrutura semelhante a Integral de Riemann mas, tornando-se uma generalização da mesma.

Neste capítulo apresentaremos a teoria que constitue a construção desta integral, sendo a teoria da medida, o conceito de funções mensuráveis e as propriedades fundamentais à Lebesgue. Como base para o estudo utilizamos como referências o livro de Bartle (1995) e trabalho de Coelho (2012). Após, será feita a comparação entre as duas integrais.

2.1 Funções Mensuráveis

Para o desenvolvimento da Integral de Lebesgue nos atentemos às classes de funções de valores reais definidas sobre um conjunto X, $f : X \to \mathbb{R}$. Na maioria das aplicações, o conjunto X pode ser definido como sendo o intervalo unitário $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$; pode ser o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$; pode ser os números reais $\mathbb{R}$; pode ser todo um plano; ou pode ser outro tipo de conjunto não-vazio. Nesse trabalho, não serão feitas suposições específicas a respeito do conjunto X subjacente e, portanto, o desenvolvimento da integral não dependerá de tal conjunto.

Sobre esse conjunto X evidenciamos uma família $\mathcal{X}$ formada por subconjuntos de X de tal forma que inclui o conjunto vazio $\varnothing$ e o próprio conjunto X, e mais, a família $\mathcal{X}$ é fechada sob complementação ou uniões enumeráveis.

Definição 2.1. Dizemos que uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-álgebra se satisfazem os seguintes itens:

i) $\varnothing, X \in \mathcal{X}$;

ii) Se $A \in \mathcal{X}$, então o complemento $A^{\complement} \in \mathcal{X}$;

iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

O par ordenado $(X, \mathcal{X})$ formado pelo conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é chamado de **Espaço Mensurável**. Um conjunto qualquer em $\mathcal{X}$ é chamado de **Conjunto $\mathcal{X}$-Mensurável**, porém quando a σ-álgebra $\mathcal{X}$ é fixa (como geralmente é o caso), chamaremos qualquer conjunto da família $\mathcal{X}$ de **Mensurável**.

A partir das *Regras de De Morgan*, é que podemos afirmar que a interseção de uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$ também pertence a $\mathcal{X}$.

Definição 2.2 (Números Reais Extendidos). O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dito o sistema númerico extendido definido pelo conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \text{ou ainda} \quad \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

Exemplo 2.1. Alguns exemplos de σ-álgebras:

a) Seja X um conjunto qualquer e considere que $\mathcal{X}$ é a família de todos subconjuntos de X.

Solução: O conjunto composto por todos os subconjuntos de X é chamado de conjunto das partes, denotada por $\mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$. Assim, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$. Mostremos que $\mathcal{P}(X)$ é uma ϕ-álgebra:

i) Por definição, os conjuntos $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{P}(X)$;

ii) Consideremos um conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$. Ao tomarmos $A^{\complement}$, obtemos um novo subconjunto de X, o qual pertence a $\mathcal{P}(X)$;

iii) Seja (A_n) uma sequência composta por elementos de $\mathcal{X}$; ou seja, composta por subconjuntos de X. Como $\mathcal{P}(X)$ é composto por todos os subconjuntos de X, então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}(X)$.

Portanto, $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra.

b) Seja $\mathcal{X}$ a família constituída precisamente por dois subconjuntos de X, nomeadamente $\varnothing$ e X.

Solução:

i) Por consideração, $\varnothing$ e X pertencem a σ-álgebra;

ii) Consideremos o subconjunto $A = \varnothing$. Então, $A^{\complement} = X \in \mathcal{X}$. Por outro lado, tomando o subconjunto $B = X$, então $B^{\complement} = \varnothing \in \mathcal{X}$;

iii) Seja (A_n) de conjuntos em $\mathcal{X}$. Temos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$, pois $A_n = \varnothing$ ou $A_n = X$, para cada $n = 1, 2, \cdots$.

Portanto, $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra.

c) Se $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são σ-álgebras de subconjuntos X, seja $\mathcal{X}_3$ a interseção de $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$. $\mathcal{X}_3$ é uma σ-álgebra.

Solução:

i) Como $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são σ-álgebras, os conjuntos $\varnothing$ e X estão contidos em ambas e, como $\mathcal{X}_3$ é a interseção das duas σ-álgebras, temos que $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{X}_3$;

ii) Consideremos A um subconjunto de $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$. Então, $A^{\complement} \in \mathcal{X}_1$, como também $A^{\complement} \in \mathcal{X}_2$. Com isso, $A, A^{\complement} \in \mathcal{X}_3$, pois $\mathcal{X}_3$ é a interseção de $\mathcal{X}_1$ com $\mathcal{X}_2$;

iii) Tome uma sequência (A_n) de conjuntos em $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$. Sabemos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathcal{X}_1$ como também pertence a $\mathcal{X}_2$, pois, $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são σ-álgebras. Logo, $A_n \in \mathcal{X}_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}_3$, pois, $\mathcal{X}_3$ é a interseção de $\mathcal{X}_1$ com $\mathcal{X}_2$.

Portanto, $\mathcal{X}_3$ é uma σ-álgebra.

d) Seja A uma família não-vazia de subconjuntos de X. Observamos que existe uma σ-álgebra menor de subconjuntos de X contendo A. Para ver isto, observe que a família de todos os subconjuntos de X é uma σ-álgebra contendo A e a interseção de todas as σ-álgebras contendo A é também uma σ-álgebra contendo A. Esta álgebra menor é por vezes chamada de **σ-álgebra gerada por** A.

Solução: Considere o conjunto $\mathcal{C}_A = \{\mathcal{X}_i, i \in I\}$ de todas σ-álgebras de X que contém a família A. Como mostrado no *Exemplo 2.1 (a)*, o conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra que contém a família A. Logo, $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C}_A$; assim $\mathcal{C}_A \neq \varnothing$. Precisamos mostrar que, a interseção de todas as σ-álgebras $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i$ contendo A é uma σ-álgebra que também contém a família A. Para isso,

i) Como $\mathcal{X}_i$ é uma σ-álgebra que contém a família A, então o conjunto vazio $\varnothing$ pertence a $\mathcal{X}_i$ e o conjunto X pertence a $\mathcal{X}_i$, $\forall i \in I$. Seja $\mathcal{X}_A$ a interseção de todas as σ-álgebras do conjunto $\mathcal{C}_A$, ou seja, $\mathcal{X}_A = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i$, dessa forma, $\varnothing \in \mathcal{X}_A$ e $X \in \mathcal{X}_A$;

ii) Considerando o conjunto B pertencente a σ-álgebra $\mathcal{X}_i$, $\forall i \in I$, temos que, o complemento $B^{\complement}$ também pertence a $\mathcal{X}_i$, $\forall i \in I$. Como sabemos que a interseção de todas as σ-álgebras de $\mathcal{C}_A$ é o conjunto $\mathcal{X}_A$, então, $B \in \mathcal{X}_A$ e $B^{\complement} \in \mathcal{X}_A$;

iii) Tomemos uma sequência (A_n) de conjuntos em $\mathcal{X}_i$, $\forall i \in I$. Como $\mathcal{X}_i$ é uma σ-álgebra então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ também pertence a X_i. Logo, $\bigcup\limits_{n} A_n \in \mathcal{X}_A$.

Portanto, $\mathcal{X}_A$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X que contém a família A. Agora, basta mostrar que $\mathcal{X}_A$ é a menor σ-álgebra gerada por A. Como $\mathcal{X}_A = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_i$, $\forall i \in I$, então $\mathcal{X}_A$ é a menor σ-álgebra gerada por A.

e) Seja X o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A **Álgebra de Borel** é a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por todos os intervalos abertos (a, b) em $\mathbb{R}$. Observe que a Álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é também a σ-álgebra gerada por todos os intervalos fechados $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Qualquer conjunto em $\mathcal{B}$ é chamado **Conjunto de Borel**.

Solução: Seguindo a prova do exemplo anterior, com $X = \mathbb{R}$, para a família A temos $A = \{A_i, i \in I\}$, onde A_i é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. E a interseção de todas σ-álgebras do tipo $\mathcal{X}_i$ que contém a família A é denominada de σ-álgebra $\mathcal{B}$, ou seja, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i = \mathcal{B}$. Assim, basta mostrar que o conjunto de intervalos fechados do tipo $[a, b]$ pertencem a σ-álgebra $\mathcal{B}$. Para isso, considere os intervalos abertos $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$; por estarem na σ-álgebra $\mathcal{B}$ seus complementos, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$ pertencem a $\mathcal{B}$. Segue que:

$$[(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]^{\mathsf{C}} = [a, +\infty) \cap (-\infty, b] = [a, b], \text{ desde que } a < b$$

e, portanto, $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos X que contém os intervalos fechados $[a, b]$.

f) Seja X o conjunto dos números reais estendidos $\overline{\mathbb{R}}$. Se E for um subconjunto de Borel, definamos

$$E_1 = E \cup \{-\infty\},\ E_2 = E \cup \{+\infty\},\ E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\} \tag{2.1}$$

e seja $\overline{\mathcal{B}}$ a família de todos os conjuntos E, E_1, E_2, E_3, com E variando ao longo de $\mathcal{B}$. Vê-se prontamente que $\overline{\mathcal{B}}$ é uma σ-álgebra e que será chamada a **Álgebra de Borel extendida**.

Solução:

i) Pelo fato de E ser um suconjunto de Borel, então, necessariamente $\varnothing, \overline{\mathbb{R}} \in \overline{\mathcal{B}}$;

ii) Para verificamos os complementos dos conjuntos E, E_1, E_2, E_3, precisamos analisar caso a caso, sendo assim:

- Como E é um suconjunto de Borel, então, por construção, seu complemento pertence a $\overline{\mathcal{B}}$, ou melhor, $E^{\mathsf{C}} \in \overline{\mathcal{B}}$;
- Para o conjunto E_1 temos

$$E_1^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} \cap \{-\infty\}^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} \cap [\mathbb{R} \cup \{+\infty\}] = E^{\mathsf{C}} \in \overline{\mathcal{B}};$$

- Para o conjunto E_2 temos

$$E_2^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} \cap \{+\infty\}^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} \cap [(-\infty) \cup \mathbb{R}] = E^{\mathsf{C}} \in \overline{\mathcal{B}};$$

- Para o conjunto E_3 temos

$$\begin{aligned} E_3^{\mathsf{C}} &= E^{\mathsf{C}} \cap [\{-\infty\} \cup \{+\infty\}]^{\mathsf{C}} \\ &= E^{\mathsf{C}} \cap [\{-\infty\}^{\mathsf{C}} \cap \{+\infty\}^{\mathsf{C}}] = E^{\mathsf{C}} \cap \mathbb{R} = E^{\mathsf{C}} \in \overline{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

iii) Considerando sequências (A_n) formadas de elementos E, E_1, E_2, E_3, então, a união de todos os elementos dessas sequências pertencem a $\overline{\mathcal{B}}$, pois E, E_1, E_2, E_3 são elementos de $\overline{\mathcal{B}}$; assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{\mathcal{B}}$.

Portanto, $\overline{\mathcal{B}}$ é uma σ-álgebra denominada de **Álgebra de Borel extendida**.

Seguindo, considere um espaço mensurável fixo, $(X, \mathcal{X})$.

Definição 2.3. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **$\mathcal{X}$-Mensurável** (ou simplesmente **Mensurável**) se para cada número real α o conjunto

$$\{x \in X | f(x) > \alpha\} \tag{2.2}$$

pertence a $\mathcal{X}$.

Observação 2.1. Note que $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$.

Com o lema a seguir é possível redefinir a mensurabilidade da função f.

Lema 2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$:*

a) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$;*

b) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $B_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$;*

c) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $C_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$;*

d) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $D_\alpha = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ pertence a $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Se $A_\alpha \in \mathcal{X}$ então, pela **Definição 2.1**, seu complemento $A_\alpha^\complement = B_\alpha \in \mathcal{X}$, assim como, se $C_\alpha \in \mathcal{X}$ então seu complemento $C_\alpha^\complement = D_\alpha \in \mathcal{X}$ e vice-versa. Portanto, $a) \Leftrightarrow b)$ e $c) \Leftrightarrow d)$. Mostremos, agora, que $a) \Leftrightarrow c)$. Supondo que (a) vale, então $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Precisamos mostrar que

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X; f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}};$$

ou seja,

$$f^{-1}([\alpha, +\infty)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right).$$

Para isso, note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right) = [\alpha, +\infty).$$

$(\Rightarrow)$ Seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right)$. Então, $x \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De modo que,

$$\alpha - \frac{1}{n} < x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso,

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \to +\infty} x = x.$$

Ou seja, $\alpha \leq x$. Assim, $x \in [\alpha, +\infty)$, de onde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \subset [\alpha, +\infty). \tag{2.3}$$

($\Leftarrow$) Por outro lado, seja $x \in [\alpha, +\infty)$. Neste caso,

$$\alpha - \frac{1}{n} < \alpha \leq x, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

o que implica que $x \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $x \in \cap_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, de onde se conclui que

$$[\alpha, +\infty) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right). \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4), temos que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) = [\alpha, +\infty).$$

Agora, note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} = f^{-1} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) = C_{\alpha}. \tag{2.5}$$

De fato:

($\Rightarrow$) Se $x \in f^{-1} \left(\cap_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right)$, então $f(x) \in \cap_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$. Logo, $f(x) \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de modo que $x \in f^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \in f^{-1} \left(\cap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right)$, de onde

$$f^{-1} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right).$$

Por outro lado, seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1} \left(\alpha - \dfrac{1}{n}, +\infty \right)$. Então, $x \in f^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de modo que $f(x) \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Daí, $f(x) \in \cap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right)$ e, assim, $x \in f^{-1} \left(\cap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right)$. Portanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \subset f^{-1} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right).$$

Com isso, temos a igualdade em (2.5).

Daí, como por hipótese $A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, então $C_\alpha \in \mathcal{X}$, provando que $a) \Rightarrow c)$.

Por outro lado, provemos que $c) \Rightarrow a)$. Para ver isto, mostremos que:

$$A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{x \in X; f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}.$$

Primeiramente, vamos verificar que

$$(\alpha, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right).$$

De fato,

($\Rightarrow$) Se $x \in (\alpha, +\infty)$, então $\alpha < x$ de modo que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} \leq x;$$

ou seja, $x \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$, de onde $x \in \cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$.

Por outro lado, se $x \in \cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$; ou seja,

$$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} \leq x,$$

mostrando que $x \in (\alpha, +\infty)$.

Por fim, mostremos que

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right).$$

Com efeito,

($\Rightarrow$) Se $x \in f^{-1}((\alpha, +\infty))$, então $f(x) \in (\alpha, +\infty)$. Logo, $\alpha < f(x)$, de onde existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} \leq f(x);$$

ou seja, $f(x) \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$ de onde $f(x) \in \cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$. Neste caso, $x \in f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$.

Agora, se $x \in f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$, então $f(x) \in \cup_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$ de modo que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f(x) \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)$. Neste caso,

$$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} \leq f(x)$$

de onde $f(x) \in (\alpha, +\infty)$ e, portanto, $x \in f^{-1}((\alpha, +\infty))$. Com isso, conclui-se que

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$$

e, como, por hipótese, $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, então $A_\alpha \in \mathcal{X}$, provando $c) \Rightarrow a)$.

□

Exemplo 2.2. **a)** Qualquer função constante é mensurável.

Solução: Seja $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = c$, $\forall x \in X$. Temos duas possibilidades:

- Se $\alpha \geq c$, então

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty) = \varnothing;$$

- Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty) = X, \text{ pois } c \in (\alpha, +\infty).$$

Logo, f é uma função mensurável.

b) Se $E \in \mathcal{X}$ então a **função característica** $\mathcal{X}_E : X \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x \notin E \end{cases}$$

é mensurável.

Solução: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

- Se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X; \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X};$$

- Se $0 \leq \alpha < 1$, então

$$\{x \in X; \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{X};$$

- Se $\alpha > 1$, então

$$\{x \in X; \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = \varnothing \in \mathcal{X}.$$

c) Se X é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e $\mathcal{X}$ é a álgebra de Borel $\mathcal{B}$, então qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Borel mensurável (ou seja, $\mathcal{B}$-mensurável).

Solução: A imagem inversa de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, por uma função contínua, é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, como pode ser visto em Élon Lima (1989), p. 193.

O lema a seguir diz respeito a combinações algébricas simples entre funções mensuráveis que também resultam em uma função mensurável.

Lema 2.2. *Sejam* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções mensuráveis e* c *um número real. Assim,*

$$c\,f, f^2, f+g, fg, |\,f\,|$$

são funções mensuráveis.

Demonstração: Para melhor compreensão, enumeramos cada caso por (1), (2), (3), (4) e (5), respectivamente:

1. Para o caso $c = 0$, temos a função constante $cf(x) = 0$, logo, é mensurável. Agora, para $c > 0$, temos
$$\{x \in X; c\ f(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$
e, pela **Definição 2.3**, é mensurável.
Se $c < 0$ temos o seguinte:
$$\{x \in X; c\ f(x) < \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$
e, pela **Definição 2.3**, é mensurável.
2. Se $\alpha < 0$ então
$$\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X}.$$
Para $\alpha \geq 0$ temos
$$\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}.$$
Como o conjunto acima é formado pela união de conjuntos mensuráveis, então f^2 também é mensurável.
3. Note que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$ então o conjunto
$$S_r = \{x \in X;\ f(x) > r\} \cap \{x \in X;\ g(x) > \alpha - r\} \in \mathcal{X}.$$
Agora, mostremos que $\{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$.

Como $f(x) > r$, com $r \in \mathbb{Q}$, temos $f(x)+g(x) > r+g(x)$. Além disso, para $g(x) > \alpha - r$, com $r \in \mathbb{Q}$, tem-se que

$$f(x) + g(x) > r + (\alpha - r) \Rightarrow f(x) + g(x) > \alpha.$$

Como $\{x \in X; f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, então $f + g$ é mensurável.

4. Considerando $fg = \dfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, segue dos itens (1), (2) e (3) que fg é mensurável.

5. Para $\alpha < 0$ temos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Agora, se $\alpha \geq 0$ temos

$$\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\}.$$

Portanto, $|f|$ é mensurável.

$\square$

Definição 2.4. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer e as funções não-negativas $f^+, f^- : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em X por

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}.$$

Em que, f^+ é a **parte positiva** e f^- é a **parte negativa** da função f.

Mas, é claro que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-. \tag{2.6}$$

Como consequência obtemos

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{e} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Assim, pelo **Lema 2.2**, f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Quando tratamos de sequências de funções mensuráveis em várias ocasiões desejamos usar supremos, limites, etc, e se torna pertinente utilizarmos a extensão dos números reais; isto é, tomar $-\infty$ e $+\infty$ como "valores".

Definição 2.5. Uma função de valores reais estendidos em X é **$\mathcal{X}$-mensurável** se o conjunto

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.2. Denotaremos por $M(X,\mathcal{X})$ a família de todas funções $\mathcal{X}$-mensuráveis de valores reais estendidos em X.

Observe que para toda $f \in M(X,\mathcal{X})$, tem-se

$$\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathcal{X}$$

e

$$\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > -n\}\right]^{\complement} \in \mathcal{X}.$$

Lema 2.3. *Uma função $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{x \in X; f(x) = +\infty\} \ \text{ e } \ B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$$

pertencem a $\mathcal{X}$ e a função $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & se \ x \in [A \cup B]^{\complement} \\ 0, & se \ x \in A \cup B \end{cases}$$

pertence a $M(X,\mathcal{X})$.

Demonstração:($\Rightarrow$) É de imediato, pois temos, da **Observação 2.2.**, que $A, B \in \mathcal{X}$. Agora, precisamos mostrar que f_1 é mensurável. Para isso, considere os casos a seguir:

- Se $\alpha \geq 0$ então

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement} \in \mathcal{X}.$$

Ora, considerando $x_0 \in \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = f_1^{-1}((\alpha,+\infty))$, então $f_1(x_0) > \alpha \geq 0$; ou melhor, $f_1(x_0) > \alpha$, donde $x_0 \notin A$, porque nesse caso teríamos $f(x_0) = +\infty$ e, por definição $f_1(x) = 0$. Assim, se $x_0 \in f_1^{-1}((\alpha,+\infty))$, então

$$x_0 \in f^{-1}((\alpha,+\infty)) \ \text{ e } \ x_0 \notin f^{-1}(\{+\infty\}).$$

Note que temos

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \subset \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement}. \tag{2.7}$$

Já por outro lado, se

$$x_0 \in \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement}$$

então $f(x_0) > \alpha$ e $f(x_0) \neq +\infty$ de forma que, por definição

$$f_1(x_0) = f(x_0) > \alpha \geq 0;$$

ou seja,

$$x_0 \in \{x \in X; f_1(x) > \alpha\};$$

implicando em

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \supset \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement}. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) segue que

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \setminus A;$$

- Se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B \in \mathcal{X}.$$

Para isso, note que

$$f_1^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \tag{2.9}$$

onde

$$C_1 = \{x \in X; \alpha < f_1(x) < 0\} = f_1^{-1}((\alpha, 0));$$
$$C_2 = \{x \in X; f_1(x) = 0\} = f_1^{-1}(\{0\});$$
$$C_3 = \{x \in X; f_1(x) > 0\} = f_1^{-1}((0, +\infty)).$$

Agora, analisemos os casos

a) Se $x \in C_1$, então $f_1(x) = f(x)$; ou melhor

$$C_1 = \{x \in X; \alpha < f(x) < 0\} = f^{-1}((\alpha, 0)); \tag{2.10}$$

b) Se $x \in C_2$, da mesma forma, $f_1(x) = f(x)$; ou melhor

$$C_2 = \{x \in X; f(x) = 0\} \cup A \cup B = f^{-1}(\{0\}) \cup A \cup B; \tag{2.11}$$

c) Se $x \in C_3$, então

$$C_3 = \{x \in X; f(x) > 0 \,\mathrm{e}\, f(x) \neq +\infty\};$$

ou seja,

$$C_3 = \{x \in X; f(x) > 0\} \cap A^{\complement} = f^{-1}((0,+\infty)) \cap A^{\complement}. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.10), (2.11) e (2.19) em (2.9), temos que:

$$\begin{aligned} f_1^{-1}((\alpha,+\infty)) &= f^{-1}((\alpha,0)) \cup f^{-1}(\{0\}) \cup A \cup B \cup (f^{-1}((0,+\infty)) \cap A^{\complement}) \\ &= \left[f^{-1}((\alpha,0)) \cup f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}((0,+\infty)) \cup A \cup B\right] \cap \\ &\quad \cap \left[f^{-1}((\alpha,0)) \cup f^{-1}(\{0\}) \cup A \cup B \cup A^{\complement}\right] \\ &= \left[f^{-1}((\alpha,+\infty)) \cup A \cup B\right] \cap X = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$$

é mensurável. Portanto, f_1 é mensurável.

($\Leftarrow$) Supondo que $A, B \in \mathcal{X}$ e f_1 é mensurável, queremos mostrar que f também é mensurável. Para isso,

a) Se $\alpha \geqslant 0$, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A \in \mathcal{X}.$$

De fato, como vimos anteriormente

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} &\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A = (\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap A^{\complement}) \cup A \\ \Rightarrow\ &\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A = (\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup A) \cap (A^{\complement} \cup A) \\ \Rightarrow\ &\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A = (\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup A) \cap X. \end{aligned}$$

Obtemos assim,

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A$$

que, por hipotése, implica que f é mensurável.

b) Se $\alpha < 0$ então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cap B^{\complement} \in \mathcal{X}.$$

De fato, pelo resultado demonstrado anteriormente,

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} [\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B] \cap B^{\complement} &= \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cap B^{\complement} \\ \Rightarrow \quad [\{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap B^{\complement}] \cup (B \cap B^{\complement}) &= \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cap B^{\complement}; \end{aligned}$$

ou seja,

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cap B^{\complement}$$

que é mensurável. Portanto, se A, B e f_1 são mensuráveis então f é mensurável.

□

Observação 2.3. Uma consequência imediata dos **Lemas** **2.2** e **2.3** é que se f é uma função mensurável, então as funções

$$cf, f^2, |f|, f^+, f^-$$

também pertencem a $M(X, \mathcal{X})$.

Adotamos o produto $0(\pm\infty) = 0$ para que cf seja identicamente nula quando $c = 0$.

Se f e g são funções pertencentes a $M(X, \mathcal{X})$ então a soma $f + g$ não está bem definida pela fórmula $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ nos conjuntos

$$E_1 = \{x \in X; f(x) = -\infty \ \text{ e } \ g(x) = +\infty\} \in \mathcal{X}$$

e

$$E_2 = \{x \in X; f(x) = +\infty \ \text{ e } \ g(x) = -\infty\} \in \mathcal{X}.$$

Mas, se definirmos $f + g$ como sendo zero em $E_1 \cup E_2$, obtemos uma função em X que é mensurável.

Lema 2.4. *Seja (f_n) uma sequência em $M(X, \mathcal{X})$. Então, as seguintes funções são mensuráveis:*

1. $f(x) = \inf f_n(x)$;

2. $F(x) = \sup f_n(x)$;

3. $f^*(x) = \liminf f_n(x)$;

4. $F^*(x) = \limsup f_n(x)$.

Demonstração:

1. Precisamos mostrar que f é mensurável. Para isso, note que

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

De fato, tome $x \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$; ou seja, α é uma cota inferior de $(f_n(x))$, pois temos que $f(x) = \inf f_n(x)$. Assim, $f_n(x) \geq f(x) \geq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\},$$

ao qual obtemos a relação

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Agora, tomando $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ então $f_n(x) \geq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$; ou seja, α é cota inferior da sequência $f_n(x)$. Porém, o ínfimo é a maior de todas as cotas inferiores. Como $f(x) = \inf f_n(x)$, implica em $f(x) \geq \alpha$ e dessa forma, $x \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$. Isto significa dizer que

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente,

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f é mensurável se f_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Observe que

$$\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}.$$

Com efeito, tome $x \in \{x \in X; F(x) > \alpha\}$. Então, $F(x) > \alpha$, mas temos $F(x) = \sup f_n(x)$ o que implica em $\sup f_n(x) > \alpha$. Pela definição de supremo, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) > \alpha$, ou seja

$$\alpha < f_{n_0}(x) \leq F(x).$$

Logo, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$. Assim, $\{x \in X; F(x) > \alpha\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$.

Agora, para a inclusão contrária, seja $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$ então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < f_{n_0}(x) \leq F(x).$$

Então, $\sup f_n(x) > \alpha$, mas pela hipótese, $F(x) = \sup f_n(x)$. Logo, $F(x) > \alpha$. Assim, $x \in \{x \in X; F(x) > \alpha\}$, ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} \subset \{x \in X; F(x) > \alpha\}$.

Portanto, F é mensurável se f_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Temos, por definição, que:

$$f^*(x) = \liminf f_n = \sup_{n \geq 1}\left\{\inf_{m \geq n} f_m(x)\right\}.$$

Defina a sequência:

$$f_1^* = \inf_{m \geq 1}\{f_m(x)\};$$

$$f_2^* = \inf_{m \geq 2}\{f_m(x)\};$$

$$\vdots$$

$$f_n^* = \inf_{m \geq n}\{f_n(x)\}.$$

Observe que, pelo **Lema 2.4**, (f_n^*) é uma sequência monótona crescente de funções. Além disso, segue do *item (1)* que f_n^* é mensurável, para cada $n \in \mathbb{N}$ e é tal que $\sup\{f_n^*\} = f^*(x)$. Assim, pelo *item (2)* tem-se que $f^*(x) = \sup_{n \geq 1}\{f_n^*\}$, a qual é mensurável.

4. Por definição, temos

$$F^*(x) = \limsup f_n = \inf_{n \geq 1}\left\{\sup_{m \geq n} f_m(x)\right\}.$$

Defina a sequência:

$$F_1^* = \sup_{m\geq 1}\{f_m(x)\};$$

$$F_2^* = \sup_{m\geq 2}\{f_m(x)\};$$

$$\vdots$$

$$F_n^* = \sup_{m\geq n}\{f_n(x)\}.$$

Observe que, pelo **Lema 2.4**, (F_n^*), é uma sequência monótona decrescente de funções. Além disso, segue do *item (2)* que F_n^* é mensurável, para cada $n \in \mathbb{N}$ e é tal que $\inf\{F_n^*\} = F^*(x)$. Assim, pelo *item (1)* tem-se que $F^*(x) = \inf_{n\geq 1}\{F_n^*\}$.

□

Corolário 2.0.1. *Se (f_n) é uma sequência em $M(X,\mathcal{X})$ e $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo x, então $f \in M(X,\mathcal{X})$.*

Demonstração: Neste caso, para que $\lim f_n(x) = f(x)$ devemos ter

$$\liminf f_n(x) = f(x) = \limsup f_n(x),\ \forall x \in X.$$

E pelo **Lema 2.4**, concluímos que $f \in M(X,\mathcal{X})$.

□

O próximo resultado irá permitir provar a mensurabilidade do produto de duas funções mensuráveis.

Lema 2.5. *Seja $f \in M(X,\mathcal{X})$. A sequência (f_n), definida da forma:*

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & se & |f(x)| & \leq & n \\ n & se & f(x) & > & n \\ -n & se & f(x) & < & -n \end{cases}$$

é $\mathcal{X}$-mensurável, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para isso, considere $\alpha \in \mathbb{R}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, analisemos os seguintes casos:

i) Se $\alpha > n$ então

$$\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_n(x) > n\} = \varnothing$$

o qual é mensurável;

ii) Se $-n \le \alpha \le n$, note que

$$\begin{aligned}\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} &= \{x \in X; \alpha < f_n(x) \le n\} \cup \{x \in X; f_n(x) > n\} \\ &= \{x \in X; \alpha < f(x) \le n\} \cup \varnothing \\ &= \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X; f(x) \le n\}.\end{aligned}$$

Como $f \in M(X, \mathcal{X})$, então

$$\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{X};$$

iii) Se $\alpha < -n$ vemos que

$$\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_n(x) = -n\} \cup \{x \in X; -n \le f_n(x) \le n\} \cup \{x \in X; f_n(x) = n\};$$

ou seja,

$$\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) < -n\} \cup \{x \in X; -n \le f(x) \le n\} \cup \{x \in X; f(x) > n\}.$$

Sendo, por hipótese, f mensurável, então

$$\{x \in X; f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}.$$

Assim, dos três casos podemos concluir que $f_n \in M(X, \mathcal{X})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

Se g_m for definido da mesma forma que no **Lema 2.5**, então f_n e g_m são mensuráveis. Resulta do **Lema 2.2** que o produto $f_n g_m$ é mensurável. Desde que

$$f(x)g_m(x) = \lim_n f_n(x)g_m(x), \ \forall x \in X$$

procede do **Corolário 2.0.1** que o produto $fg_m \in M(X, \mathcal{X})$. Mas ainda,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \lim_m f(x)g_m(x), \ \forall x \in X$$

e outra aplicação do **Corolário 2.0.1** acarreta que o produto $fg \in M(X, \mathcal{X})$.

Vimos no **Corolário 2.0.1** que o limite de uma sequência de funções em $M(X, \mathcal{X})$ pertence a $M(X, \mathcal{X})$. A partir de agora, mostraremos que uma função não-negativa $f \in M(X, \mathcal{X})$ é o limite de uma sequência monótona crescente (φ_n) em $M(X, \mathcal{X})$.

Além disso, cada sequência (φ_n) pode ser escolhida como sendo não-negativa e assumir apenas um número finito de valores reais.

Lema 2.6. *Se f é uma função não-negativa em $M(X,\mathcal{X})$, então existe uma sequência (φ_n) contida em $M(X,\mathcal{X})$ tal que*

(a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *para* $x \in X$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *para cada* $x \in X$;

(c) Cada φ_n *assume apenas um número finito de valores reais.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Se $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$ considere o conjunto

$$E_{k,n} = \left\{x \in X; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \left\{x \in X; f(x) \geq \frac{k}{2^n}\right\} \bigcap \left\{x \in X; f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\},$$

e, se $k = n2^n$, seja

$$E_{n2^n,n} = \{x \in X; f(x) \geq n\};$$

ou melhor,

$$E_{0,n} = \left\{x \in X; 0 \leq f(x) < \frac{1}{2^n}\right\} = \{x \in X; f(x) \geq 0\} \bigcap \left\{x \in X; f(x) < \frac{1}{2^n}\right\},$$

$$E_{1,n} = \left\{x \in X; \frac{1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2}{2^n}\right\} = \left\{x \in X; f(x) \geq \frac{1}{2^n}\right\} \bigcap \left\{x \in X; f(x) < \frac{2}{2^n}\right\},$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} E_{n2^n-1,n} &= \left\{x \in X; \frac{n2^n-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{n2^n}{2^n}\right\} \\ &= \left\{x \in X; f(x) \geq \frac{n2^n-1}{2^n}\right\} \bigcap \left\{x \in X; f(x) < \frac{n2^n}{2^n}\right\}, \end{aligned}$$

donde notamos que, $E_{k,n} \cap E_{j,n} = \varnothing$ com $k \neq j$ e $X = \bigcup_{k=0}^{n2^n} E_{k,n}$.

Como sabemos $f \in M(X,\mathcal{X})$. Então, como descrito acima para cada $k \in \{0, 1, ..., n2^n\}$, $E_{k,n} \in \mathcal{X}$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $\varphi_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \quad \in \quad E_{0,n} \\ \dfrac{1}{2^n}, & se \quad x \quad \in \quad E_{1,n} \\ \dfrac{2}{2^n}, & se \quad x \quad \in \quad E_{2,n} \\ \vdots & \\ \dfrac{n2^n - 1}{2^n}, & se \quad x \quad \in \quad E_{n2^n-1,n} \\ n, & se \quad x \quad \in \quad E_{n2^n,n} \end{cases} .$$

Observe que, se $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que

i) Se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\} = X \in \mathcal{X};$$

ii) Se $\alpha = 0$, então

$$\{x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\} = X \in \mathcal{X};$$

iii) Se $\alpha > 0$, então

$$\{x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{j}^{n2^n} E_{j,n} \in \mathcal{X};$$

em que $j \in \{0, 1, ..., n2^n\}$ é tal que

$$\frac{j-1}{2^n} < \alpha \leq \frac{j}{2^n}.$$

De qualquer forma, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\{x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X},$$

o que implica que φ_n é uma função de $M(X, \mathcal{X})$. Além disso, por definição, φ_n assume apenas quantidade finita de números reais.

Dessa forma, as propriedades (4a), (4b) e (4c) são válidas, como segue:

(a) Nota-se que $\varphi_n(x) \geq 0$ pela forma que foi definida e, cada $E_{k,n}$ é descrito como a interseção de conjuntos cuja imagem, por $\varphi(x)$, é um valor não negativo. Por definição $\varphi_n(x)$ e $\varphi_{n+1}(x)$ são dadas por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in E_{0,n} \\ \dfrac{1}{2^n}, & se \quad x \in E_{1,n} \\ \dfrac{2}{2^n}, & se \quad x \in E_{2,n} \\ \vdots & \\ \dfrac{n2^n - 1}{2^n}, & se \quad x \in E_{n2^n-1,n} \\ n, & se \quad x \in E_{n2^n,n} \end{cases}$$

e

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in E_{0,\,n+1} \\ \dfrac{1}{2^{n+1}}, & se \quad x \in E_{1,\,n+1} \\ \dfrac{2}{2^{n+1}}, & se \quad x \in E_{2,\,n+1} \\ \vdots & \\ \dfrac{(n+1)2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}, & se \quad x \in E_{(n+1)2^{n+1}-1,\,n+1} \\ n+1, & se \quad x \in E_{(n+1)2^{n+1},\,n+1} \end{cases}$$

Queremos mostrar que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para isso, considere um x arbitrário em X. Então, $x \in E_{k_1,n}$ e $x \in E_{k_2,\,n+1}$, com $k_1 \in \{0,1,2,...,n2^n\}$ e $k_2 \in \{0,1,2,...,(n+1)2^{n+1}\}$. De fato, observe que

i) Se $n = 1$ então:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in E_{0,1} \\ \dfrac{1}{2}, & se \quad x \in E_{1,1} \\ 1, & se \quad x \in E_{2,1} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in E_{0,2} \\ \dfrac{1}{4}, & se \quad x \in E_{1,2} \\ \dfrac{2}{4}, & se \quad x \in E_{2,2} \\ \dfrac{3}{4}, & se \quad x \in E_{3,2} \\ 1, & se \quad x \in E_{4,2} \\ \dfrac{5}{4}, & se \quad x \in E_{5,2} \\ \dfrac{6}{4}, & se \quad x \in E_{6,2} \\ \dfrac{7}{4}, & se \quad x \in E_{7,2} \\ 2, & se \quad x \in E_{8,2} \end{cases}$$

Uma vez que,

$$E_{0,1} = \left\{x \in X; 0 \le f(x) < \frac{1}{2}\right\},\ E_{1,1} = \left\{x \in X; \frac{1}{2} \le f(x) < 1\right\},\ E_{2,1} = \{x \in X; f(x) \ge 1\};$$

e

$$E_{0,2} = \left\{x \in X; 0 \le f(x) < \frac{1}{4}\right\},\ E_{1,2} = \left\{x \in X; \frac{1}{4} \le f(x) < \frac{1}{2}\right\},$$
$$E_{2,2} = \left\{x \in X; \frac{1}{2} \le f(x) < \frac{3}{4}\right\},\ E_{3,2} = \left\{x \in X; \frac{3}{4} \le f(x) < 1\right\},$$
$$E_{4,2} = \left\{x \in X; 1 \le f(x) < \frac{5}{4}\right\},\ E_{5,2} = \left\{x \in X; \frac{5}{4} \le f(x) < \frac{3}{2}\right\},$$
$$E_{6,2} = \left\{x \in X; \frac{3}{2} \le f(x) < \frac{7}{4}\right\},\ E_{7,2} = \left\{x \in X; \frac{7}{4} \le f(x) < 2\right\},$$
$$E_{8,2} = \{x \in X; f(x) \ge 2\};$$

percebemos que,

$$E_{0,2}, E_{1,2} \subset E_{0,1};$$

$$E_{2,2}, E_{3,2} \subset E_{1,1};$$

e

$$E_{j,2} \subset E_{2,1}, \forall j = 4, 5, 6, 7, 8.$$

Assim, existem $k_1 \in \{0, 1, 2\}$ e $k_2 \in \{0, 1, ..., 8\}$, tais que

$$x \in E_{k_1,1} \quad \text{e} \quad x \in E_{k_2,2};$$

Observe que:

- Se $k_1 = 0$, então $k_2 = 0$ ou $k_2 = 1$, de modo que $2k_1 \leq k_2$;
- Se $k_1 = 1$, então $k_2 = 2$ ou $k_2 = 3$, de modo que $2k_1 \leq k_2$;
- Se $k_1 = 2$, então $k_2 = 4, 5, 6, 7, 8$, de modo que $2k_1 \leq k_2$.

Em qualquer caso, temos que $2k_1 \leq k_2$, de onde

$$\varphi_1(x) = \frac{k_1}{2} \leq \frac{k_2}{2^2} = \varphi_2(x).$$

ii) Se $n = 2$, temos que

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in E_{0,3} \\ \frac{1}{8}, & se \quad x \in E_{1,3} \\ \frac{2}{8}, & se \quad x \in E_{2,3} \\ \vdots & \\ 1, & se \quad x \in E_{8,3} \\ \vdots & \\ 2, & se \quad x \in E_{16,3} \\ \vdots & \\ 3, & se \quad x \in E_{24,3} \end{cases}$$

Neste caso, temos que

$$E_{0,3} = \left\{x \in X; 0 \leq f(x) < \frac{1}{8}\right\},\ E_{1,3} = \left\{x \in X; \frac{1}{8} \leq f(x) < \frac{1}{4}\right\},$$
$$E_{2,3} = \left\{x \in X; \frac{1}{4} \leq f(x) < \frac{3}{8}\right\},\ E_{3,3} = \left\{x \in X; \frac{3}{8} \leq f(x) < \frac{1}{2}\right\},$$
$$E_{4,3} = \left\{x \in X; \frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{5}{8}\right\},\ E_{5,3} = \left\{x \in X; \frac{5}{8} \leq f(x) < \frac{3}{4}\right\},$$
$$E_{6,3} = \left\{x \in X; \frac{3}{4} \leq f(x) < \frac{7}{8}\right\},\ E_{7,3} = \left\{x \in X; \frac{7}{8} \leq f(x) < 1\right\},$$
$$E_{8,3} = \left\{x \in X; 1 \leq f(x) < \frac{9}{8}\right\},\ E_{9,3} = \left\{x \in X; \frac{9}{8} \leq f(x) < \frac{5}{4}\right\},$$
$$E_{10,3} = \left\{x \in X; \frac{5}{4} \leq f(x) < \frac{11}{8}\right\},\ E_{11,3} = \left\{x \in X; \frac{11}{8} \leq f(x) < \frac{3}{2}\right\},$$
$$E_{12,3} = \left\{x \in X; \frac{3}{2} \leq f(x) < \frac{13}{8}\right\},\ E_{13,3} = \left\{x \in X; \frac{13}{8} \leq f(x) < \frac{7}{4}\right\},$$
$$E_{14,3} = \left\{x \in X; \frac{7}{4} \leq f(x) < \frac{15}{8}\right\},\ E_{15,3} = \left\{x \in X; \frac{15}{8} \leq f(x) < 2\right\},$$
$$E_{16,3} = \left\{x \in X; 2 \leq f(x) < \frac{17}{8}\right\},\ E_{17,3} = \left\{x \in X; \frac{17}{8} \leq f(x) < \frac{9}{4}\right\},$$
$$E_{18,3} = \left\{x \in X; \frac{9}{4} \leq f(x) < \frac{19}{8}\right\},\ E_{19,3} = \left\{x \in X; \frac{19}{8} \leq f(x) < \frac{5}{2}\right\},$$
$$E_{20,3} = \left\{x \in X; \frac{5}{2} \leq f(x) < \frac{21}{8}\right\},\ E_{21,3} = \left\{x \in X; \frac{21}{8} \leq f(x) < \frac{11}{4}\right\},$$

$$E_{22,3} = \left\{x \in X; \frac{11}{4} \leq f(x) < \frac{23}{8}\right\},\ E_{23,3} = \left\{x \in X; \frac{23}{8} \leq f(x) < 3\right\},$$
$$E_{24,3} = \{x \in X; f(x) \geq 3\};$$

e, assim

$$E_{0,3}, E_{1,3} \subset E_{0,2};$$
$$E_{2,3}, E_{3,3} \subset E_{1,2};$$
$$E_{4,3}, E_{5,3} \subset E_{2,2};$$
$$E_{6,3}, E_{7,3} \subset E_{3,2};$$
$$E_{8,3}, E_{9,3} \subset E_{4,2};$$
$$E_{10,3}, E_{11,3} \subset E_{5,2};$$
$$E_{12,3}, E_{13,3} \subset E_{6,2};$$
$$E_{14,3}, E_{15,3} \subset E_{7,2};$$
$$\text{e}\, E_{j,3} \subset E_{8,2}, \forall j = 16, 17, 18, ..., 24$$

Analisando como no caso *4a., item (i)*, podemos ver que para $x \in X$, existem $k_1 \in \{0, 1, ..., 8\}$ e $k_2 \in \{0, 1, ..., 24\}$, tais que

$$2k_1 \leq k_2.$$

Prosseguindo com esse raciocínio podemos concluir que para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, vale

$$E_{0,n+1}, E_{1,n+1} \subset E_{0,n};$$
$$E_{2,n+1}, E_{3,n+1} \subset E_{1,n};$$
$$\vdots$$
$$E_{j,n+1} \subset E_{n2^n,n}, \forall j = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+1}, ..., (n+1)2^{n+1}.$$

Logo, podemos concluir que se $x \in X$ existem

$$k_1 \in \{0, 1, ..., n2^n\} \quad \text{e} \quad k_2 = \{0, 1, ..., (n+1)2^{n+1}\}$$

tais que $x \in E_{k_1,n}$ e $x \in E_{k_2,n+1}$, com

$$2k_1 \leq k_2.$$

Assim, para qualquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$0 \leq \varphi_n(x) = \frac{k_1}{2^n} \leq \frac{k_2}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x).$$

Portanto, (φ_n) é uma sequência monótona não decrescente.

(b) Agora iremos verificar que $f(x) = \lim \varphi_n(x)$, para cada $x \in X$.

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, para cada $x \in X$ existe $k \in \{0, 1, ..., n2^n\}$, tal que $x \in E_{k,n}$. Logo, pela definição de $E_{k,n}$, tem-se que

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N};$$

ou seja,

$$\varphi_n(x) \leq f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n}. \tag{2.13}$$

Uma vez que, para cada $x \in X$, $(\varphi_n(x))$ é uma sequência monótona e majorada por $f(x)$, pois, por definição,

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x), \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

então pelo *Teorema do Confronto*, segue de (2.13) que

$$f(x) = \lim \varphi_n(x), \text{ para cada } x \in X.$$

(c) Note que cada φ_n assume uma quantidade finita de valores reais, pois da própria definição, para cada $x \in X$, temos

$$\varphi_n(x) \in \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{n2^n - 1}{2^n}, n\right\}.$$

□

2.2 Medidas

Na seção anterior, descrevemos os fundamentos de espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$, formado por um conjunto X e por uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X. Agora, vamos considerar certas funções, que serão definidas em $\mathcal{X}$ e possuem valores reais ou valores reais estendidos. Estas funções denominamos de "medidas" sugerem a ideia que temos de comprimento, área, massa, e assim por diante.

Definição 2.6. Uma medida é uma função de valor real estendida μ, definida na σ-álgebra $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X, $\mu : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, satisfazendo as seguintes condições

i) $\mu(\varnothing) = 0$;

ii) $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{X}$;

iii) μ é contável aditiva; isto é, se (E_n) é uma sequência em $\mathcal{X}$ e $E_n \cap E_m = \varnothing$, com $n \neq m$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n). \tag{2.14}$$

Ao permitir que μ assuma o valor $+\infty$ observe que no lado direito da equação (2.14), $\mu(E_n) = +\infty$, para algum n ou que a série de termos não-negativos é divergente.

Observação 2.4. Se uma medida não assume valor $+\infty$ então a denominamos de **medida finita**. Mas geralmente, se existe uma sequência (E_n) em $\mathcal{X}$ onde $X = \bigcup E_n$ e tal que $\mu(E_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, chamamos μ de **σ-finita**.

Exemplo 2.3. Alguns exemplos de medida:

a) Seja X um conjunto qualquer não-vazio e $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$. Definimos μ_1 e μ_2 em $\mathcal{X}$ por

$$\mu_1(E) = 0, \ \forall E \in \mathcal{X};$$

e

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & se \quad E = \varnothing \\ +\infty, & se \quad E \neq \varnothing. \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, mostremos que μ_1 é uma medida. De fato,

i) Como $\varnothing \in \mathcal{X}$ então pela definição $\mu_1(\varnothing) = 0$;

ii) Vemos que $\mu_1(E) = 0$ satisfazendo a condição $\mu_1(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{X}$;

iii) Considere (E_n) uma sequência de $\mathcal{X}$, de forma que, $E_n \cap E_m = \varnothing$, com $n \neq m$. Temos

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{X} \Rightarrow \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0.$$

Por outro lado, temos que

$$\mu_1(E_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_1(E_n) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu_1(E_n) = 0.$$

Portanto,

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_1(E_n).$$

Agora, mostremos que μ_2 é uma medida. Com efeito,

i) Da própria definição, $\mu_2(\varnothing) = 0$;

ii) Note que

$$\begin{cases} \mu_2(\varnothing) &= & 0 & \geq 0 \\ \mu_2(E) &= & +\infty & \geq 0, \text{ se } E \neq \varnothing; \end{cases}$$

Logo, $\mu_2(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{X}$.

iii) Considerando que (E_n) é uma sequência de $\mathcal{X}$, de forma que, $E_n \cap E_m = \varnothing$, com $n \neq m$, temos que $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$ então

- Se $E_n = \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0 = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu_2(E_n).$$

Logo,

$$\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_2(E_n).$$

- Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E_{n_0} \neq \varnothing$, então

$$E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \Rightarrow \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_2(E_n) = \sum_{n=1}^{n_0-1} \mu_2(E_n) + \mu_2(E_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mu_2(E_n) = 0 + \infty + 0 = +\infty.$$

Logo,

$$\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_2(E_n).$$

Observação 2.5. Note que, μ_1 é uma medida finita, pois assume apenas o valor igual a 0. Porém, μ_2 não é finita, pois $\mu_2(E) = +\infty$, para $E \neq \varnothing$ e também não é σ-finita, pois não existe uma sequência (E_n) em $\mathcal{X}$ onde $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$ e tal que $\mu(E_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Sejam $(X, \mathcal{X})$, como no *Exemplo* 2.3, *item (a)* e, p um elemento fixo de X. Definimos μ, em $\mathcal{X}$,

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & se \quad p \notin E \\ 1, & se \quad p \in E. \end{cases}$$

Mostremos que μ é uma medida, a qual é denominada de **unidade de medida concentrada em p**.

Solução:

i) Como $\varnothing$ não possui elemento algum, ou seja, $p \notin \varnothing$, então $\mu(\varnothing) = 0$;

ii) Da definição μ assume apenas valores 0 e 1 o que implica que $\mu(E) \geq 0$;

iii) Seja (E_n) uma sequência disjunta de $\mathcal{X}$. Considere $p \notin E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $p \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ e ainda $\mu(E_n) = 0$, o que implica em

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(E_n).$$

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ em que $p \in E_{n_0}$ então $\mu(E_{n_0}) = 1$ e ainda temos que $\mu(E_n) = 0$, $\forall n \neq n_0$. Daí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 1 = \sum_{n=1}^{n_0-1} \mu(E_n) + \mu(E_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Por fim, note que μ é uma medida finita, pois assume apenas os valores 0 e 1.

c) Seja $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{X} = \mathcal{B}$, a Álgebra de Borel. Definimos λ de $(a,b) \in \mathcal{B}$ tal que

$$\lambda((a,b)) = b - a$$

em que λ coincide com o comprimento do intervalo aberto, (a,b). λ é uma medida chamada de **Medida de Lebesgue (ou Borel)**. Definiremos o comprimento da união de um número finito de intervalos disjuntos como sendo a soma de comprimentos de cada um desses intervalos.

Solução

i) Uma vez que podemos considerar $\varnothing = (a,a)$, então $\lambda(\varnothing) = a - a = 0$;

ii) Considere um intervalo aberto $E = (a,b) \in \mathcal{X}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $b \geq a$. Temos $\lambda((a,b)) = b - a \geq 0$. Então, $\lambda(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{B}$;

iii) Seja (E_n) uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{B}$, analisemos os seguintes casos:

- Se $E_n = (a,a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).$$

- Se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E_{n_0} = (a,b)$, com $a < b$, temos

◇ Para o caso, $E_{n_0} = (a_0, b_0)$, com $a_0 < b_0$. Tome o conjunto $\{E_{n_j} \in \mathcal{B}; E_{n_j} = (a_j, b_j),\ a_j < b_j\,,\ \text{com}\, j = 0,1,2,...\}$. Ora,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j} E_{n_j}\right) + \lambda\left(\bigcup_{n\neq n_j} E_n\right)\\
&= \lim_{p\to+\infty} \lambda\left(\bigcup_{j=0}^{p} E_{n_j}\right) + 0\\
&= \lim_{p\to+\infty} \left[b_0 - a_0 + b_1 - a_1 + \cdots + b_p - a_p\right] + 0\\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p} (b_j - a_j) + 0\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(E_{n_j}) + \sum_{n\neq n_j} \lambda(E_n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n)
\end{aligned}$$

$\forall a_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $a_j < b_j$.

◇ Para o caso, $E_{m_0} = (a_0, +\infty)$, $\forall a_0 \in \mathbb{R}$, consideremos o conjunto $\{E_{m_k} \in \mathcal{X}; E_{m_k} = (a_k, +\infty),\ \forall a_k \in \mathbb{R},\ \text{com}\, k = 0,1,2,\ldots\}$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_{k} E_{m_k}\right) + \lambda\left(\bigcup_{n\neq m_k} E_n\right)\\
&= \lim_{q\to+\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=0}^{q} E_{m_k}\right) + 0\\
&= \lim_{q\to+\infty} \left[+\infty - a_0 + \infty - a_1 + \cdots + \infty - a_q\right] + 0\\
&= +\infty + 0 = +\infty\\
&= \lim_{q\to+\infty} \sum_{k=0}^{q} (+\infty - a_k) + 0\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(E_{m_k}) + \sum_{n\neq m_k} \lambda(E_n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).
\end{aligned}$$

O mesmo ocorre para os conjuntos $\{E_{m_k} \in \mathcal{X}; E_{m_k} = (-\infty, b_k),\ \forall b_k \in \mathbb{R},\ \text{com}\, k = 0,1,2,...\}$ e $\{E_{m_k} \in \mathcal{X}; E_{m_k} = (-a_k, a_k),\ a_k = +\infty,\ \text{com}\, k = 0,1,2,...\}$.

◇ E por último, suponha que existem $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que $E_{n_0} = (a_0, b_0)$, $a_0 < b_0$ e $E_{m_0} = (a_0, +\infty)$. Neste caso, $E_{n_0} \in \{E_{n_j} \in \mathcal{B}; E_{n_j} = (a_j, b_j),\ a_j < b_j,\ \text{com}\, j = 0,1,2,...\} \neq \varnothing$ e $E_{m_0} \in \{E_{m_k} \in \mathcal{B}; E_{m_k} = (a_k, +\infty),\ \text{com}\, k = 0,1,2,...\} \neq \varnothing$. Como consequência advinda dos itens anteriores, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_j E_{n_j}\right) + \lambda\left(\bigcup_k E_{m_k}\right) + \lambda\left(\bigcup_{n\neq n_j, m_k} E_n\right)\\
&= \lim_{p\to+\infty} \lambda\left(\bigcup_{j=0}^{p} E_{n_j}\right) + \lim_{q\to+\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=0}^{q} E_{m_k}\right) + 0\\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p} \lambda(E_{n_j}) + \lim_{q\to+\infty} \sum_{k=0}^{q} \lambda(E_{m_k}) + \sum_{n\neq n_j, m_k} \lambda(E_n)\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda(E_{n_j}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(E_{m_k}) + \sum_{n\neq n_j, m_k} \lambda(E_n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).$$

Portanto, λ é uma medida, a qual não é finita, pois define-se que

$$\lambda(-\infty, +\infty) = \infty.$$

Mas λ é σ-finita, pois se tomamos os intervalos da forma $E_n = (n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, então $\lambda(n, n+1) = 1$ e $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$.

Lema 2.7. *Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{X}$. Se $E, F \in \mathcal{X}$ e $E \subseteq F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Se $\mu(E) < +\infty$, então*

$$\mu(F\backslash E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Demonstração: Podemos reescrever $F = E \cup (F\backslash E)$. Já que $(F\backslash E) = F \cap E^{\complement} \in \mathcal{X}$, de forma que $E \cap (F\backslash E) = \varnothing$, temos que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F\backslash E) \Rightarrow \mu(F) \geq \mu(E),$$

pois, $\mu(F\backslash E) \geq 0$. Agora, se $\mu(E) < +\infty$ então

$$\mu(F) - \mu(E) = \mu(F\backslash E).$$

□

Lema 2.8. *Seja μ a medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{X}$.*

(a) Se (E_n) *é uma sequência crescente em* $\mathcal{X}$*, ou seja,* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n); \tag{2.15}$$

(b) Se (F_n) *é uma sequência decrescente em* $\mathcal{X}$*; ou seja,* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ *e, se* $\mu(F_1) < +\infty$*, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n). \tag{2.16}$$

Demonstração:

(a) Se $\mu(E_n) = +\infty$ para algum n, então ambos os lados da equação (2.15) são iguais a $+\infty$. Ora, considere um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Como sabemos (E_n) é crescente e $\mu(E_n) = +\infty$, $\forall n \geq n_0$, temos que $\mu(E_{n_0}) \leq \mu(E_n)$, $\forall n \geq n_0$. Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = +\infty. \tag{2.17}$$

Agora, note que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{n_0} E_n \cup \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n.$$

Como $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n_0}$, então

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} E_n = E_{n_0}$$

e, como

$$E_{n_0} \subset \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n,$$

então, pelo **Lema 2.7**,

$$+\infty = \mu(E_{n_0}) \leq \mu\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n\right).$$

Portanto,

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty.$$

Novamente, como

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n,$$

então,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty. \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18), concluímos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Agora, suponhamos que $\mu(E_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere uma sequência (A_n) pertecente a $\mathcal{X}$, tal que

$$\begin{gathered}
A_1 = E_1 \in \mathcal{X}\\
A_2 = E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^{\complement} \in \mathcal{X}\\
A_3 = E_3 \setminus E_2 = E_3 \cap E_2^{\complement} \in \mathcal{X}\\
\vdots\\
A_n = E_n \setminus E_{n-1} = E_n \cap E_{n-1}^{\complement} \in \mathcal{X}\\
\vdots
\end{gathered}$$

Note que, a sequência (A_n) é disjunta e que

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

E ainda,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

A partir disso, da **Definição 2.6** e do **Lema 2.7**, temos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(E_n \smallsetminus E_{n-1}) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} [\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})] \\
&= \lim_{m\to+\infty} [\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \ldots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})] \\
&= \lim_{m\to+\infty} \mu(E_m),
\end{aligned}$$

concluindo que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

5. Seja (E_n) uma sequência crescente de conjuntos em $\mathcal{X}$ tal que

$$\begin{gathered}
E_1 = F_1 \smallsetminus F_1 = \varnothing \in \mathcal{X} \\
E_2 = F_1 \smallsetminus F_2 = F_1 \cap F_2^{\complement} \in \mathcal{X} \\
E_3 = F_1 \smallsetminus F_3 = F_1 \cap F_3^{\complement} \in \mathcal{X} \\
\vdots \\
E_n = F_1 \smallsetminus F_n = F_1 \cap F_n^{\complement} \in \mathcal{X} \\
\vdots
\end{gathered}$$

Aplicando a *parte (4a)* e o **Lema 2.7**, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} [\mu(F_1) - \mu(F_n)] \\
&= \mu(F_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por outro lado, pelas *Leis De Morgan*, temos que

$$\begin{aligned}
F_1 \smallsetminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n &= F_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right)^{\complement} \\
&= F_1 \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} (F_n)^{\complement} \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[F_1 \cap (F_n)^{\complement}\right] \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} (F_1 \smallsetminus F_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$F_1 \smallsetminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Dessa forma, da conclusão acima e do **Lema 2.7**, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(F_1 \smallsetminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right). \tag{2.20}$$

Igualando as equações (2.19) e (2.20) e sabendo que $\mu(F_1) < +\infty$, concluímos o seguinte

$$\mu(F_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right)$$

O que implica que:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

□

Definição 2.7. Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$ que consiste de um conjunto X, uma σ-álgebra de subconjuntos de X, $\mathcal{X}$, e uma medida μ definida em $\mathcal{X}$.

Uma questão que deve ser mencionada e é bastante importante para a teoria apresentada é a seguinte: uma determinada propriedade ocorre μ-**quase em todo ponto** se existe um subconjunto $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$, de maneira que a propriedade ocorre no complemento de N.

Dessa forma, duas funções f e g são ditas **iguais** μ-**quase em todo ponto** ou que são **iguais** para μ-**quase em todos** x se $f(x) = g(x)$ quando $x \notin N$, para algum $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$. Denotamos frequentemente como

$$f = g,\ \mu - \text{q.t.p.}$$

De modo semelhante, diremos que uma sequência (f_n) de funções em $\mathcal{X}$ **converge** μ-**quase em todo ponto** (ou **converge para** μ-quase todos x) se existe um conjunto $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ para $x \notin N$. Escrevemos frequentemente como

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n,\ \mu - \text{q.t.p.}.$$

Definição 2.8. Se $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto X, então uma função λ com valor real definida em $\mathcal{X}$ é dita **carga** no caso em que $\lambda(\varnothing) = 0$ e λ é contável aditiva no sentido de que se (E_n) é uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{X}$, então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).$$

É notável que a soma e a diferença de duas cargas é uma carga. Mas genericamente, qualquer combinação linear finita de cargas é uma carga.

2.3 A Integral

Neste seção, inicialmente trataremos de conceitos associados a integração de funções simples não-negativas mensuráveis, para então introduzir a integração de funções arbitrárias não-negativas mensuráveis com valor real. Além disso, apresentamos o Teorema da Convergência Monótona, importante para toda teoria.

A partir daqui, consideremos um espaço de medida fixo $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Denotaremos por $M(X, \mathcal{X})$ a família de todas as funções $\mathcal{X}$-**mensuráveis** de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e $M^+(X, \mathcal{X})$ a família de todas as funções não-negativas mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$. É conveniente exigir que funções simples tenham valores em $\mathbb{R}$ e não em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.9. Uma função de valor real é **simples** se tiver apenas um número finito de valores.

Uma função simples φ mensurável, pode ser representada por

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}, \tag{2.21}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{X}_{E_j}$ é a função característica de um conjunto $E_j \in \mathcal{X}$.

Observação 2.6. No caso em que os $a_1, a_2, ..., a_n$ são distintos e E_j são subconjuntos disjuntos não-vazios de $\mathcal{X}$ e, ainda, se tivemos $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, chamamos a expressão (2.21) de **representação padrão** para a função φ, sendo esta única. Caso contrário, a função simples φ teria muitas representações como uma combinação linear de funções características.

Definição 2.10. Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ com a representação padrão (2.21), definimos a **integral** de φ em relação a μ como sendo um número real extendido dado por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{2.22}$$

Observação 2.7. Na expressão (2.22) adotamos a convenção $0 \cdot (+\infty) = 0$ para que a integral da função identicamente 0 seja igual a 0, sendo o espaço de medida finita ou infinita. Nota-se que o valor da integral de uma função simples, em $M^+(X, \mathcal{X})$ é bem definida e, por isso, não aparecem expressões como $(+\infty) - (+\infty)$.

Lema 2.9. *Propriedades elementares da integral de funções simples:*

1. *Se φ e ψ são funções simples em $M^+(X,\mathcal{X})$ e $c \geq 0$, então*

   i) $\displaystyle\int c\varphi d\mu = c\int \varphi d\mu$;

   ii) $\displaystyle\int (\varphi+\psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

2. *Se λ é definido em $E \in \mathcal{X}$ por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \mathcal{X}_E d\mu,$$

então λ é uma medida sobre $\mathcal{X}$.

Demonstração:

1. Note que,

   i) Se $c = 0$, temos

$$\int c\varphi d\mu = \int 0\varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} 0\mu(E_j) = 0 = 0\int \varphi d\mu = c\int \varphi d\mu.$$

   Agora, se $c > 0$, considere a representação padrão $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j}$. Então, $c\varphi \in M^+(X,\mathcal{X})$ e,

$$\begin{aligned} \int c\varphi d\mu &= \int \left(c\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} \right) d\mu \\ &= \int \left(\sum_{j=1}^{n} c\, a_j \mathcal{X}_{E_j} \right) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c\int \varphi d\mu. \end{aligned}$$

   ii) Sejam φ e ψ funções simples com as respectivas representações padrões

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathcal{X}_{F_k}.$$

   Antes de tudo, temos $E_j \cap E_i = \varnothing$ e $F_k \cap F_l = \varnothing$, para todo $i,j = 1,\ldots,n$ e $k,l = 1,\ldots,m$. Note que,

$$E_j \cap F_k \subset E_j \,\text{e}\, E_i \cap F_k \subset E_i \Rightarrow (E_j \cap F_k) \cap (E_i \cap F_k) \subset (E_j \cap E_i) = \varnothing$$

e

$$F_k \cap E_j \subset F_k \,\text{e}\, F_l \cap E_j \subset F_l \Rightarrow (F_k \cap E_j) \cap (F_l \cap E_j) \subset (F_k \cap F_l) = \varnothing.$$

Com isso, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, temos

$$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \bigcup_{k=1}^{m} F_k = \bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k).$$

Para cada $k = 0, 1, \ldots, m$, temos

$$F_k = F_k \cap X = F_k \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E_j \cap F_k).$$

Então $\varphi + \psi$ tem a seguinte representação

$$\begin{aligned}
\varphi + \psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \mathcal{X}_{F_k} \\
&= (a_1 \mathcal{X}_{E_1} + \cdots + a_n \mathcal{X}_{E_n}) + (b_1 \mathcal{X}_{F_1} + \cdots + b_m \mathcal{X}_{F_m}) \\
&= a_1 \mathcal{X}_{\bigcup (E_1 \cap F_k)} + \cdots + a_n \mathcal{X}_{\bigcup (E_n \cap F_k)} + b_1 \mathcal{X}_{\bigcup (F_1 \cap E_j)} + \cdots + b_m \mathcal{X}_{\bigcup (F_m \cap E_j)} \\
&= a_1 \sum_{k=1}^{m} \mathcal{X}_{E_1 \cap F_k} + \cdots + a_n \sum_{k=1}^{m} \mathcal{X}_{E_n \cap F_k} + b_1 \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{E_j \cap F_1} + \cdots + b_m \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{E_j \cap F_m} \\
&= a_1 \mathcal{X}_{E_1 \cap F_1} + \cdots + a_1 \mathcal{X}_{E_1 \cap F_m} + \cdots + a_n \mathcal{X}_{E_n \cap F_1} + \cdots + a_n \mathcal{X}_{E_n \cap F_m} + \\
&\quad + b_1 \mathcal{X}_{E_1 \cap F_1} + \cdots + b_1 \mathcal{X}_{E_n \cap F_1} + \cdots + b_m \mathcal{X}_{E_1 \cap F_m} + \cdots + b_m \mathcal{X}_{E_n \cap F_m} \\
&= (a_1 + b_1) \mathcal{X}_{E_1 \cap F_1} + \cdots + (a_n + b_m) \mathcal{X}_{E_n \cap F_m} \\
&= \sum_{j=1}^{n} [(a_j + b_1) \mathcal{X}_{E_j \cap F_1} + \cdots + (a_j + b_m) \mathcal{X}_{E_j \cap F_m}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mathcal{X}_{E_j \cap F_k};
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mathcal{X}_{E_j \cap F_k}. \tag{2.23}$$

Mas, a representação (2.23) como combinação linear de funções características de conjuntos disjuntos $E_j \cap F_k$, não necessariamente é a representação padrão para $\varphi + \psi$, já que alguns valores $a_j + b_k$ podem ser iguais.

Dessa forma, consideremos c_h, $h = 1, 2, ..., p$ os números distintos do conjunto

$$\{a_j + b_k; j = 1, ..., n \quad \text{e} \quad k = 1, ..., m\}.$$

Seja $G_h = \bigcup_{(h)} (E_j \cap F_k)$, onde $E_j \cap F_k \neq \varnothing$ e $a_j + b_k = c_h$. Assim, como pela **Definição 2.6**, μ é contável aditiva, e obtemos que

$$\mu(G_h) = \mu\left(\bigcup_{(h)} (E_j \cap F_k)\right) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k).$$

Com isso, a representação padrão de $\varphi+\psi$ é dada por

$$\varphi+\psi=\sum_{h=1}^{p}c_h\mathcal{X}_{G_h}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{h=1}^{p}c_h\mu(G_h)=\sum_{h=1}^{p}\sum_{(h)}c_h\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{h=1}^{p}\sum_{(h)}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k). \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$X=\bigcup_{j=1}^{n}E_j \quad \text{e} \quad X=\bigcup_{k=1}^{m}F_k.$$

Para cada $j=0,1,\ldots,n$, temos

$$E_j=E_j\cap X=E_j\cap\bigcup_{k=1}^{m}F_k=\bigcup_{k=1}^{m}(E_j\cap F_k).$$

Para cada $k=0,1,\ldots,m$, temos

$$F_k=F_k\cap X=F_k\cap\bigcup_{j=1}^{n}E_j=\bigcup_{j=1}^{n}(E_j\cap F_k).$$

Logo,

$$\mu(E_j)=\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k) \quad \text{e} \quad \mu(F_k)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k). \qquad (2.25)$$

Portanto, substituindo (2.25) em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\int(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{k=1}^{m}b_k\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)+\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(F_k)\\
&= \int\varphi d\mu+\int\psi d\mu.
\end{aligned}$$

2. Para mostrar que λ é uma medida, precisamos mostrar que valem os critérios da **Definição 2.6**. Então,

i) $\lambda(\varnothing) = \int \varphi \mathcal{X}_{\varnothing} d\mu = \int 0 d\mu = 0$;

ii) Queremos mostrar que $\lambda(E) \geq 0$. Para isso, sabendo que $\mathcal{X}_{E_j}\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_{E_j \cap E}$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &= \int \varphi \mathcal{X}_E d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_{E_j} \right) \mathcal{X}_E d\mu \\
&= \int \sum_{j=1}^{n} (a_j X_{E_j} \mathcal{X}_E) d\mu \int \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j \cap E} d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E) \geq 0.
\end{aligned}$$

iii) Seja (F_j) uma sequência disjunta de elementos em $\mathcal{X}$ e $\varphi = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{X}_{E_k}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \right) &= \int \varphi \mathcal{X}_{\cup_j F_j} d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{X}_{E_k} \right) \mathcal{X}_{\cup_j F_j} d\mu \\
&= \int \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{X}_{E_k} \mathcal{X}_{\cup_j F_j} d\mu = \int \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{X}_{E_k \cap (\cup_j F_j)} d\mu \\
&= \int \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{X}_{\cup_j (E_k \cap F_j)} d\mu = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu \left(\bigcup_j (E_k \cap F_j) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_k \cap F_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k \mu(E_k \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \int \varphi \mathcal{X}_{F_j} d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda(F_j).
\end{aligned}$$

□

Agora introduziremos a integral de uma função arbitrária em $M^+(X, \mathcal{X})$. Note que não exigimos que o valor da integral da função seja finito.

Definição 2.11. Se $f \in M^+(X, \mathcal{X})$. Definimos a **integral de f em relação a μ** como sendo o número real extendido dado por

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu,$$

onde o supremo se estende sobre todas as funções simples $\varphi \in M^+(X, \mathcal{X})$ satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.

Se $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ e $E \in \mathcal{X}$, então $f\mathcal{X}_E \in M^+(X, \mathcal{X})$. Definimos a **integral de f sobre E em relação a μ** como sendo o número real extendido dado por

$$\int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu. \tag{2.26}$$

O próximo resultado garante a monotonicidade da integral.

Lema 2.10. *Sejam f e g funções pertencentes a $M^+(X, \mathcal{X})$.*

1. *Se $f \le g$, então*

$$\int f d\mu \le \int g d\mu; \tag{2.27}$$

2. *Se $E, F \in \mathcal{X}$, com $E \subseteq F$, então*

$$\int_E f d\mu \le \int_F f d\mu.$$

Demonstração:

1. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ \int \varphi d\mu;\ 0 \le \varphi \le f \text{ e } \varphi \text{ é uma função simples em } M^+(X, \mathcal{X}) \right\}$$

$$B = \left\{ \int \varphi d\mu;\ 0 \le \varphi \le g \text{ e } \varphi \text{ é uma função simples em } M^+(X, \mathcal{X}) \right\}.$$

   Temos que, $0 \le \varphi \le f$ e $0 \le \varphi \le g$ e, por hipótese, $f \le g$. Então, $0 \le \varphi \le f \le g$. Daí, notamos que $A \subseteq B$ e, como consequência, $\sup A \le \sup B$, pelo resultado **Lema 1.1**. Assim, pela **Definição 2.11**, obtemos

$$\int f d\mu \le \int g d\mu.$$

2. Como $E \subseteq F$, então $\mathcal{X}_E \le \mathcal{X}_F$. Sabendo que $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ por hipótese, temos que $f\mathcal{X}_E \le f\mathcal{X}_F$. Segue do item anterior que

$$\int f\mathcal{X}_E d\mu \le \int f\mathcal{X}_F d\mu.$$

   Portanto, concluímos que

$$\int_E f d\mu \le \int_F f d\mu.$$

□

Agora será apresentado um importante teorema por obra de B. Levi. Este resultado fornece a chave fundamental de convergência para a integral de Lebesgue.

Teorema 2.1 (**Teorema da Convergência Monótona).** *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \mathcal{X})$ que converge para f, então*

$$\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu. \tag{2.28}$$

Demonstração: Segue do **Corolário 2.0.1**, que a função f é mensurável, pois (f_n) é mensurável. Além disso, por hipótese, temos que

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Decorre do **Lema 2.10** (1) que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \lim_n \int f d\mu = \int f d\mu. \tag{2.29}$$

Agora, para a desigualdade contrária, consideremos uma função simples φ em $M^+(X,\mathcal{X})$ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$ e seja α um número real tal que $\alpha \in (0,1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o conjunto

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Note que $A_n \in \mathcal{X}$, pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in M^+(X,\mathcal{X})$ e $\varphi(x) \in M^+(X,\mathcal{X})$, com

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) - \alpha\varphi(x) \geq 0\}.$$

Pelo **Lema 2.2**, $f_n - \alpha\varphi(x) \in M^+(X,\mathcal{X})$, de modo que A_n é mensurável. Ainda temos que $A_n \subseteq A_{n+1}$, pois $f_n \leq f_{n+1}$.

Note que, a inclusão $\bigcup A_n \subset X$ é evidente pela construção dos conjuntos A_n. Agora, para mostrar que $\bigcup A_n \supset X$, considere um $x \in X$ qualquer. Temos pelo **Lema 2.4** que

$$f(x) = \sup f_n(x).$$

Dessa forma, pela **Definição 2.11** temos que

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \text{ ou melhor, } 0 \leq \alpha\varphi(x) \leq \varphi(x) \leq f(x).$$

Ou seja, $\alpha\varphi(x) \leq f(x)$. Com isso, temos

$$\alpha\varphi(x) \leq f(x) = \sup f_n(x).$$

Assim, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha\varphi(x) \leq f_{n_0}(x)$, o que implica que $x \in A_{n_0}$ e, portanto, $X \subset \bigcup A_n$.

De acordo com o **Lema 2.10** (2),

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Tome $E_j \in \mathcal{X}$, com j fixo, tal que

$$(E_j \cap A_n) \in \mathcal{X} \Rightarrow (E_j \cap A_n) \subset (E_j \cap A_{n+1}), \text{ pois } A_n \subseteq A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$E_j = E_j \cap X = E_j \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_j \cap A_n).$$

Com isso, do **Lema 2.8** (**4a**), temos

$$\mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_j \cap A_n) \right) = \lim_n \mu(E_j \cap A_n).$$

Pela **Definição 2.11** e pelo **Lema 2.10** (**2**), encontramos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{A_n} \varphi d\mu &= \lim_n \int \varphi \mathcal{X}_{A_n} d\mu = \\
&= \lim_n \int \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{E_j} \mathcal{X}_{A_n} d\mu = \lim_n \int \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{E_j \cap A_n} d\mu = \\
&= \lim_n \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j \cap A_n) d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \lim_n \mu(E_j \cap A_n) d\mu = \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) d\mu = \int \varphi d\mu.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_n \int_{A_n} \varphi d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Retornando a desigualdade (2.30) e aplicando o limite a ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
& \alpha \lim_n \int_{A_n} \varphi d\mu \le \lim_n \int_{A_n} f_n d\mu \\
\Rightarrow \quad & \alpha \int \varphi d\mu \le \lim_n \int f_n d\mu.
\end{aligned}$$

Visto que esta relação se aplica a todos os α em que $\alpha \in (0,1)$, inferimos por meio do limite aplicado a $\alpha \to 1$ que

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha \to 1} \alpha \int \varphi d\mu \le \lim_{\alpha \to 1} \left(\lim_n \int f_n d\mu \right) \\
\Rightarrow & \int \varphi d\mu \le \lim_n \int f_n d\mu,
\end{aligned}$$

e como φ é uma função simples arbitrária em $M^+(X, \mathcal{X})$ satisfazendo a relação $0 \le \varphi \le f$, concluímos que

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu \le \lim \int f_n d\mu. \tag{2.31}$$

Portanto, de (2.29) e (2.31), obtemos

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

□

Observação 2.8. Observe que não estamos assumindo que ambos os lados da igualdade da equação (2.28) seja finito. Pois, $\left(\int f_n d\mu\right)$ é uma sequência monótona crescente de números reais extendidos e, por isso, pode assumir valor em $\overline{\mathbb{R}}$, mas talvez isso não aconteça em $\mathbb{R}$.

Corolário 2.1.1. *Se $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ e $c \geq 0$, então*

1. $cf \in M^+(X, \mathcal{X})$ *com*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu;$$

2. $(f + g) \in M^+(X, \mathcal{X})$ *com*

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração:

1. Se $c = 0$ então $cf = 0$ e, pela **Definição 2.11**, sabemos que

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu;\ 0 \leq \varphi \leq f \text{ e } \varphi \text{ é uma função simples em } M^+(X, \mathcal{X}) \right\}.$$

Pelo **Lema 2.2**, $cf \in \mathcal{X}$. Então, verificamos que

$$\int cf d\mu = \int 0 f d\mu = \int 0 d\mu = 0 = 0 \cdot \left(\sup \int \varphi d\mu\right) = c \int f d\mu.$$

Se $c > 0$, temos do **Lema 2.6** que existe uma sequência monótona crescente (φ_n), $n \in \mathbb{N}$, de funções simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ que convergem para f, ou seja,

$$f(x) = \lim \varphi_n(x).$$

Então,

$$cf(x) = c \lim \varphi_n(x) = \lim c\varphi_n(x)$$

Aplicando o **Lema 2.9** (1) e **Teorema da Convergência Monótona** 2.1, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim \int c\varphi_n d\mu = c \lim \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu.$$

2. Sejam (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funções simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ que convergem para f e g, respectivamente, ou seja

$$f(x) = \lim \varphi_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \lim \psi_n(x).$$

Então, $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente de funções simples em $M^+(X, \mathcal{X})$ que converge para $(f + g)$, pelo **Lema 2.2**, ou melhor

$$f + g = \lim \varphi_n + \lim \psi_n = \lim(\varphi_n + \psi_n).$$

Portanto, segue do **Lema 2.9** (1) e do **Teorema da Convergência Monótona 2.1** que

$$\begin{aligned}
\int (f+g) d\mu &= \lim \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu \\
&= \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi d\mu \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

□

Uma consequência do **Teorema da Convergência Monótona**, enunciada no próximo resultado, é bastante importante porque nos permite lidar com sequências de funções não monótonas.

Lema 2.11 (Lema de Fatou). *Se $(f_n) \subset M^+(X, \mathcal{X})$, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{2.32}$$

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ de modo que $g_m \leq f_n$, $\forall m \leq n$. Note que, $g_m \in M^+(X, \mathcal{X})$, pois $(f_n) \subset M^+(X, \mathcal{X})$. Daí, pelo **Lema 2.10**, temos

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \ \forall m \leq n.$$

Assim, pela **Definição de Ínfimo 1.8**, temos

$$\int g_m d\mu \leq \inf_{m \leq n} \int f_n d\mu.$$

Logo,

$$\sup \int g_m d\mu \leq \sup \left(\inf_{m \leq n} \int f_n d\mu \right) = \liminf_{m \leq n} \int f_m d\mu.$$

Sabendo que (g_m) é uma sequência crescente de funções em $M^+(X,\mathcal{X})$, temos que

$$\lim_m \int g_m d\mu \leq \liminf_{m\leq n} \int f_m d\mu. \tag{2.33}$$

Mas, note que (g_m) converge para $\liminf f_n$, pois

$$\lim_m g_m = \sup_m (g_m) = \sup \left(\inf_{m\leq n} f_n \right) = \liminf f_n.$$

Dessa forma, pelo **Teorema da Convergência Monótona 2.1**, temos que

$$\lim_m \int g_m d\mu = \int (\liminf f_n) d\mu. \tag{2.34}$$

Portanto, fazendo a substituição da equação (2.34) na desigualdade (2.33), obtemos

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf_{m\leq n} \int f_n d\mu.$$

□

Corolário 2.1.2. *Se $f \in M^+(X,\mathcal{X})$ e λ é definida em $\mathcal{X}$ por*

$$\lambda(E) = \int f \mathcal{X}_E d\mu = \int_E f d\mu, \tag{2.35}$$

então λ é uma medida.

Demonstração: Para que $\lambda(E)$ seja uma medida, precisa satisfazer as condições da **Definição 2.6**. Assim,

i) Se $E = \varnothing$ então $\mathcal{X}_E(x) = 0$, $\forall x \in X$. Logo,

$$\lambda(E) = \lambda(\varnothing) = \int f \cdot 0 d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

ii) Como $f \in M^+(X,\mathcal{X})$, então $f(x)\mathcal{X}_E \in M^+(X,\mathcal{X})$, de modo que

$$\lambda(E) = \int f \mathcal{X}_E d\mu \geq 0.$$

iii) Seja (E_n) uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{X}$ e, seja

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Considere f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f \mathcal{X}_{E_k}.$$

Decorre do **Corolário 2.1.1** que

$$\begin{aligned}\int f_n d\mu &= \int \sum_{k=1}^{n} f\mathcal{X}_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\mathcal{X}_{E_k} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).\end{aligned}$$

Note que,

$$f_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} f\mathcal{X}_{E_k} = f\mathcal{X}_{E_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} f\mathcal{X}_{E_k} = f\mathcal{X}_{E_{n+1}} + f_n.$$
$$\Rightarrow f_{n+1} = f\mathcal{X}_{E_{n+1}} + f_n \geq f_n.$$

Visto que, (f_n) é uma sequência monótona crescente em $M^+(X,\mathcal{X})$ que converge para $f\mathcal{X}_E$, então

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\mathcal{X}_{E_k}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(\mathcal{X}_{E_1} + \mathcal{X}_{E_2} + \cdots + \mathcal{X}_{E_n}) \\ &= f \lim_{n\to+\infty} (\mathcal{X}_{E_1} + \mathcal{X}_{E_2} + \cdots + \mathcal{X}_{E_n}) \\ &= f \lim_{n\to+\infty} \mathcal{X}_{\cup_{k=1}^{n} E_k} \\ &= f\mathcal{X}_{\cup_{k=1}^{+\infty} E_k} = f\mathcal{X}_E.\end{aligned}$$

Pelo **Teorema da Convergência Monótona 2.1**, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int_E f d\mu = \int f\mathcal{X}_E d\mu \\ &= \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(E_k).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(E_k).$$

□

Corolário 2.1.3. *Supondo que* $f \in M^+(X, \mathcal{X})$*, então* $f(x) = 0$ μ*-quase em todo ponto de* X *se, e somente se,*

$$\int f d\mu = 0. \tag{2.36}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $f(x) = 0$ μ-q.t.p em X. Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Considere uma sequência de funções mensuráveis $f_n = n\mathcal{X}_E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos que,

$$f \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq 1}\left\{\inf_{m\leq n}(f_n)\right\}.$$

Note que,

$$\int f_n d\mu = \int n\mathcal{X}_E d\mu = n\int \mathcal{X}_E d\mu = n\,\mu(E) = 0.$$

Como $f, (f_n) \in M^+(X, \mathcal{X})$, então segue do **Lema 2.10** e do **Lema de Fatou 2.11** que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = 0.$$

Portanto, $\displaystyle\int f d\mu = 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\displaystyle\int f d\mu = 0$ e considere o conjunto

$$E_n = \left\{x \in X; f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Perceba que,

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Logo, $E_n \subset E_{n+1}$, e $f \geq \dfrac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n}$. Daí, temos que

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n} = \frac{1}{n}\int \mathcal{X}_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$$
$$\Rightarrow \mu(E_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, sendo

$$\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n,$$

pelo **Lema 2.8**, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Portanto, $f(x) = 0$ μ-q.t.p em X.

□

Corolário 2.1.4. *Suponha que* $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ *e defina* λ *em* $\mathcal{X}$ *por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu.$$

Então, λ *é uma medida absolutamente contínua com relação a* μ *no sentido de que se* $E \in \mathcal{X}$ *e* $\mu(E) = 0$*, então* $\lambda(E) = 0$.

Demonstração: Seja $E \in \mathcal{X}$ com $\mu(E) = 0$. Então, $f\mathcal{X}_E = 0$ μ-q.t.p. Dessa forma, pelo **Corolário 2.1.3**, obtemos

$$\lambda(E) = \int f \mathcal{X}_E d\mu = 0.$$

□

A seguir, será mostrado que o Teorema da Convergência Monótona pode manter convergência em quase todo ponto em X.

Corolário 2.1.5. *Se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona crescente de funções em* $M^+(X, \mathcal{X})$ *convergindo* μ*-quase em todo ponto de* X *para* $f \in M^+(X, \mathcal{X})$*, então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Seja $N \in \mathcal{X}$ com $\mu(N) = 0$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para f em todo ponto de $M = N^{\complement}$. Com isso, $(f_n\mathcal{X}_M)$ converge para $f\mathcal{X}_M$, $\forall x \in X$. Sabendo disso e da hipótese de que (f_n) é uma sequência crescente monótona em $M^+(X, \mathcal{X})$, pelo **Teorema da Convergência Monótona 2.1**, temos que

$$\int f\mathcal{X}_M d\mu = \int \lim f_n \mathcal{X}_M d\mu = \lim \int f_n \mathcal{X}_M d\mu.$$

Como $\mu(N) = 0$ então pelo **Corolário 2.1.3**, obtemos

$$\int f\mathcal{X}_N d\mu = 0 = \int f_n \mathcal{X}_N d\mu. \tag{2.37}$$

Sabendo que $\mathcal{X}_{M\cup N} = \mathcal{X}_M + \mathcal{X}_N$, note que

$$f = f\mathcal{X}_X = f\mathcal{X}_{M\cup N} = f\mathcal{X}_M + f\mathcal{X}_N$$

e

$$f_n = f_n\mathcal{X}_X = f_n\mathcal{X}_{M\cup N} = f_n\mathcal{X}_M + f_n\mathcal{X}_N.$$

Segue do **Corolário 2.1.1** e de (2.37), que

$$
\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int (f\mathcal{X}_M + f\mathcal{X}_N) d\mu \\
&= \int f\mathcal{X}_M d\mu + \int f\mathcal{X}_N d\mu = \int f\mathcal{X}_M d\mu \\
&= \lim \int f_n \mathcal{X}_M d\mu \\
&= \lim \left(\int f_n \mathcal{X}_M d\mu + \int f_n \mathcal{X}_N d\mu \right) \\
&= \lim \int f_n \mathcal{X}_{M\cup N} d\mu = \lim \int f_n d\mu
\end{aligned}
$$

□

Corolário 2.1.6. *Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $M^+(X,\mathcal{X})$. Então*

$$
\int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int g_n d\mu \right).
$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$. Como a sequência $(g_n) \subset M^+(X,\mathcal{X})$, então

$$
f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k,
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} g_k = g_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} g_k = g_{n+1} + f_n \\
\Rightarrow f_{n+1} = g_{n+1} + f_n \geq f_n.
\end{aligned}
$$

Ou seja, (f_n) é uma sequência monótona crescente em $M^+(X,\mathcal{X})$. Assim, pelo **Corolário 2.1.1** e pelo **Teorema da Convergência Monótona 2.1**, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int g_k d\mu \right) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int g_k d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{k=1}^{n} g_k d\mu \\
&= \int \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k \right) d\mu \\
&= \int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k \right) d\mu.
\end{aligned}
$$

□

2.4 Funções Integráveis

Na **Definição 2.11** apresentamos uma maneira de integrar cada função em $M^+(X, \mathcal{X})$, com relação a medida μ. Isto permite que a integral assuma o "valor" $+\infty$. Nesta seção, será exposto a integração de funções mensuráveis que podem assumir valores reais tanto positivo como negativo. Por conveniência é exigido que os valores das funções e a integral assumam valores reais finitos.

Definição 2.12. A família $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste em todas as funções $\mathcal{X}$-mensurável de X em $\mathbb{R}$, de tal forma que, tanto a parte positiva f^+ como a negativa f^- tenham integrais finitas em relação a μ. Neste caso, definimos a **integral de f em relação a μ**, como sendo

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \tag{2.38}$$

Se $E \in \mathcal{X}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Como visto anteriormente, a integral de f é definida como a diferença das integrais finitas de f^+ e de f^-, mas se $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções quaisquer não-negativas mensuráveis com integrais finitas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Ora, como $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$, então $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. E aplicando o **Corolário 2.1.1**, temos

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Visto que, todos os termos acima são finitos, obtemos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Lema 2.12. *Se $f \in L$ e, λ é definida de $\mathcal{X}$ em $\mathbb{R}$ por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \tag{2.39}$$

então, λ é uma carga.

Demonstração: Como $f \in L$, então, pela **Definição 2.12**, temos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Pela **Observação 2.3**, sabemos que f^+ e f^- são funções não-negativas mensuráveis. Agora, utilizando o **Corolário 2.1.2**, definimos as funções λ^+ e λ^- por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \ \text{ e } \ \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu,$$

as quais são medidas finitas sobre $\mathcal{X}$, pois as integrais de f^+ e f^- são finitas. De (2.6), temos $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Com isso, mostraremos que λ é uma carga. Para tal, basta verificar que λ satisfaz as propriedades da **Definição 2.8**:

1. Se $E = \varnothing$, então

$$\begin{aligned} \lambda(\varnothing) &= \lambda^+(\varnothing) - \lambda^-(\varnothing) \\ &= \int_\varnothing f^+ d\mu - \int_\varnothing f^- d\mu = 0. \end{aligned}$$

   Pois, λ^+ e λ^- são medidas e segue da primeira parte da demonstração do **Corolário 2.1.2**.

2. Sendo (E_n) uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathcal{X}$, temos que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lambda^+\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) - \lambda^-\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right). \tag{2.40}$$

   Sabendo que λ^+ e λ^- são medidas, segue que

$$\begin{aligned} \lambda^+\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) - \lambda^-\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^+(E_n) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^-(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda^+(E_n) - \lambda^-(E_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n). \end{aligned} \tag{2.41}$$

   Logo, de (2.40) e (2.41), temos

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n).$$

□

A função λ definida no **Lema 2.12** é comumente chamada por **integral indefinida de** f (em relação a μ). Visto que λ é uma carga, sendo (E_n) uma sequência disjunta de elementos em $\mathcal{X}$ tal que $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, então

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Referimo-nos a esta relação dizendo que a integral indefinida de uma função em L é contável aditiva.

O resultado seguinte é por vezes referido como a propriedade da integrabilidade absoluta da integral de Lebesgue. Lembre-se que o valor absoluto de uma função (própria) integrável de Riemann é Riemann integrável, item 5 do **Teorema 1.4**, mas pode ser que isso não ocorra para uma função com integral imprópria Riemann, veja por exemplo Medeiros (2004).

Teorema 2.2. *$f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Neste caso,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \tag{2.42}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $f \in L$. Então, pelo **Lema 2.2**, f^+ e f^- também pertecem a L e, pela **Definição 2.12**, temos

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < +\infty,$$

de modo que, pelo **Lema 2.2**, $|f| \in M^+$, e ainda, de (2.6) temos que $|f| = f^+ + f^-$, de onde podemos concluir que $|f|^+ = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$. Com isso, segue do **Corolário 2.1.1** que

$$\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty$$

e

$$\int |f|^- d\mu = \int 0 d\mu = 0 < +\infty.$$

Logo, $|f| \in L$.

($\Leftarrow$) Agora, supondo que $|f| \in L$, então

$$\int |f|^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int |f|^- d\mu < +\infty. \tag{2.43}$$

Como,

$$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu,$$

então pela equação (2.43), concluímos que

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < +\infty.$$

Assim, $f \in L$.

Ainda pela **Definição 2.12** e (2.6), temos

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int (f^+ - f^-) d\mu\right| \\ &\leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\ &= \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu;\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$

□

Corolário 2.2.1. *Se f é mensurável, g é integrável, e $|f| \leq |g|$, então f é integrável, e*

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

Demonstração: Sabemos pelo **Lema 2.2** que $|f|$, f^+ e f^- são funções mensuráveis. Com isso, por (2.6) $|f| = f^+ + f^-$ e ainda, sendo $f^- \geq 0$, então $f^+ \leq |f|$ e $f^- \leq |f|$. Por hipótese, como $|f| \leq |g|$, então

$$f^+ \leq |f| \leq |g| \Rightarrow f^+ \leq |g|$$

e

$$f^- \leq |f| \leq |g| \Rightarrow f^- \leq |g|.$$

Pelo **Lema 2.10** e, sabendo que $\int |g| d\mu < +\infty$, temos

$$\int f^+ d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty.$$

Portanto, $f \in L$. Se $|f| \leq |g|$ pelo **Lema 2.10**, inferimos que

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

□

Teorema 2.3. *Se $f, g \in L$ então $\alpha f \in L$, $f + g \in L$ e valem*

1. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$;

2. $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$

Demonstração:

1. Se $\alpha = 0$ então

$$\int \alpha f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu.$$

Se $\alpha > 0$, então $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Pelo **Corolário 2.1.1**, temos que

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \\ &= \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu \\ &= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu \\ &= \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\ &= \alpha \int f d\mu. \end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$, então $(\alpha f)^+ = (|\alpha| f)^- = |\alpha| f^-$ e $(\alpha f)^- = (|\alpha| f)^+ = |\alpha| f^+$. Decorre do **Corolário 2.1.1** que

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \\ &= \int |\alpha| f^- d\mu - \int |\alpha| f^+ d\mu \\ &= |\alpha| \int f^- d\mu - |\alpha| \int f^+ d\mu \\ &= |\alpha| \left(\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \right) \\ &= \alpha \int f d\mu. \end{aligned}$$

Logo, para todos os casos verificamos que

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

2. Se $f, g \in L$, então $|f|, |g| \in L$, pelo **Teorema 2.2**. Visto que $|f+g| \leq |f| + |g|$, pela desigualdade triangular, temos que $f, g \in M$ e, pelo **Corolário 2.1.1**, $f + g \in M$. Então, pelo **Corolário 2.2.1**, $f + g \in L$. Para estabelecer a relação desejada, note que

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f + g)^+ - (f + g)^-.$$

Pelo **Lema 2.2** temos $f^+, f^-, g^+, g^- \in M^+$. Segue da **Definição 2.12** que

$$\int (f + g)d\mu = \int [(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)]d\mu$$

Com isso, decorre do **Corolário 2.1.1** que

$$\begin{aligned}
\int (f + g)d\mu &= \int [(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)]d\mu \\
&= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\
&= \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) + \left(\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu\right) \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu.
\end{aligned}$$

□

Agora será apresentado um importante resultado, o Teorema da Convergência para funções integráveis.

Teorema 2.4 (**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável de valor real* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu. \tag{2.44}$$

Demonstração: Por hipótese, temos que

$$f(x) = \lim f_n(x),\ \mu - q.t.p \,\text{em}\, X.$$

Dessa forma, existe um conjunto $E \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(E) = 0$ e

$$f(x) = \lim f_n(x),\ \forall x \in E^{\complement}.$$

Com isso, podemos definir as funções $\overline{f_n}$ e $\overline{f}$, como

$$\overline{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x), & se \quad x \in E^{\complement} \\ 0, & se \quad x \in E \end{cases} \quad \text{e} \quad \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in E^{\complement} \\ 0, & se \quad x \in E \end{cases}$$

Assim, temos $\overline{f}(x) = \lim \overline{f_n}(x)$, $x \in X$. e ainda, $|\overline{f_n}| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Note que, $\overline{f} \in M$, pelo **Corolário 2.0.1**. Aplicando o limite na desigualdade acima, temos $|\overline{f}| \leq g$ e pelo fato de g ser uma função integrável, concluímos pelo **Corolário 2.2.1** que $\overline{f} \in L$.

Sabemos que $|\overline{f_n}| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou melhor

$$-g \leq \overline{f_n} \leq g, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando a primeira desigualdade, temos que $\overline{f_n} + g \geq 0$ e, pelo **Lema de Fatou 2.11**, inferimos que

$$\int \liminf(\overline{f_n} + g) d\mu \leq \liminf \int (\overline{f_n} + g) d\mu.$$

Logo, pelo **Teorema 2.3**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \liminf \overline{f_n} d\mu + \int \liminf g d\mu &\leq \liminf \int \overline{f_n} d\mu + \liminf \int g d\mu \\
\Rightarrow \int \overline{f} d\mu + \int g d\mu &\leq \liminf \int \overline{f_n} d\mu + \int g d\mu \\
\Rightarrow \int \overline{f} d\mu &\leq \liminf \int \overline{f_n} d\mu. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

De forma semelhante, consideremos a outra desigualdade, $g - \overline{f_n} \geq 0$ e, pelo **Lema de Fatou 2.11**, temos

$$\int \liminf(g - \overline{f_n}) d\mu \leq \liminf \int (g - \overline{f_n}) d\mu.$$

Utilizando o **Teorema 2.3**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \liminf g d\mu + \int \liminf(-\overline{f_n}) d\mu &\leq \liminf \int g d\mu + \liminf \int (-\overline{f_n}) d\mu \\
\Rightarrow \int g d\mu - \int \overline{f} d\mu &\leq \int g d\mu + \liminf \int (-\overline{f_n}) d\mu \\
\Rightarrow -\int \overline{f} d\mu &\leq \liminf \int (-\overline{f_n}) d\mu.
\end{aligned}$$

Como $\inf(-S) = -\sup S$, com $S \subset \mathbb{R}$, pelo **Corolário 3**, então

$$-\int \overline{f} d\mu \leq -\limsup \int \overline{f_n} d\mu \Rightarrow \int \overline{f} d\mu \geq \limsup \int \overline{f_n} d\mu. \qquad (2.46)$$

Combinando as desigualdades (2.45) e (2.46), temos

$$\int \overline{f} d\mu \leq \liminf \int \overline{f_n} d\mu \leq \limsup \int \overline{f_n} d\mu \leq \int \overline{f} d\mu.$$

Segue que

$$\liminf \int \overline{f_n} d\mu = \limsup \int \overline{f_n} d\mu = \int \overline{f} d\mu.$$

Portanto,

$$\int \overline{f} d\mu = \lim \int \overline{f_n} d\mu.$$

Note que

$$f = f\mathcal{X}_X = f\mathcal{X}_{E \cup E^{\complement}} = f(\mathcal{X}_E + \mathcal{X}_{E^{\complement}}) = f\mathcal{X}_E + f\mathcal{X}_{E^{\complement}}.$$

Uma vez que

$$f\mathcal{X}_{E^{\complement}} = \overline{f},$$

então, pelo **Corolário 2.1.4**,

$$\int f d\mu = \int f\mathcal{X}_E d\mu + \int \overline{f} d\mu = \int \overline{f} d\mu.$$

Seguindo o mesmo racíocinio, tem-se que

$$\int f_n d\mu = \int \overline{f_n} d\mu.$$

Portanto,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

□

3 COMPARAÇÃO ENTRE AS INTEGRAIS

Neste capítulo, na primeira parte, mostramos como a integral de Riemann é um caso particular da Integral de Lebesgue. No que segue é apresentado um exemplo que nos permite perceber a diferença entre as integrais de Riemann e de Lebesgue.

3.1 A Teoria de Lesbegue Generaliza a de Riemann

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa. Considere do *Exemplo 2.1*, *item (e)*, a Álgebra de Borel gerada pelo conjunto de subintervalos abertos de $[a, b]$; isto é, dada uma partição $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, de $[a, b]$, consideremos que $\mathcal{B}$ é gerada pela família $\{E_i = [t_{i-1}, t_i);\, i = 1, \cdots, n-1\} \cup [t_{n-1}, t_i]$. E, pelo *Exemplo 2.3*, *item (c)*, temos definida a **Medida de Lebesgue** sendo o comprimento de $[t_{i-1}, t_i)$ como $\mu(E_i) = t_i - t_{i-1}$, para $i = 1, 2, \cdots, n-1$ e, $\mu(E_n) = b - t_{i-1}$. Sabemos do *Exemplo 2.2*, *item (c)* que f é Borel mensurável. Com isso, pela **Definição 2.11**, a integral de Lebesgue é definida por

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu.$$

E ainda, temos que f é integrável à Riemann pelo **Teorema 1.2** (1). Pela **Definição 1.9**, a integral de Riemann é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{s(f;P)\}.$$

Sejam os conjuntos,

$$R = \{s(f;P); P \in \mathcal{P}\}$$

e

$$Q = \left\{ \int \varphi d\mu;\ \varphi \text{ é uma função simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \right\}.$$

Vamos mostrar que $R = Q$. Para isso, primeiro mostraremos que $R \subseteq Q$. Ora, tome $s(f;P) \in R$, então

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

mas, $t_i - t_{i-1} = \mu(E_i)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Assim,

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(E_i).$$

Note que P é uma partição qualquer e que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = [a, b]$. Dessa forma, podemos definir a função simples

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{X}_{E_i}$$

pois P possui um número finito de subintervalos de $[a, b]$ e temos m_i distintos, pelo fato, que existe apenas um $m_i = \inf f \mid E_i$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Como f é não negativa e pela **Definição 1.4**, temos $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Logo, $R \subset Q$ como consequência $\sup R \leq \sup Q$.

Agora, tome $\int \varphi d\mu \in Q$. Então,

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i),$$

onde $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Note que, a função simples atinge um valor máximo no intervalo $E_i \in \mathcal{B}$ de modo que deve coincidir com o ínfimo m_i de f em cada conjunto. Assim, se $m_i = \inf f \mid E_i$, então

$$m_i \leq f(x), \ \forall x \in E_i, \ \text{ e } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Ora, suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que $a_i = m_i + \epsilon$ seja o valor em cada intervalo E_i de uma função simples φ. Mas, a_i não é o ínfimo da função no intervalo E_i. Então, existe algum $x \in E_i$ tal que

$$m_i < f(x) < m_i + \epsilon.$$

Assim, não valeria a seguinte condição $0 \leq \varphi \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Dessa forma, a função φ assume o ínfimo m_i da função f em cada intervalo $E_i \in \mathcal{B}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$. Logo, $\sup Q \leq \sup R$ o que implica em $Q \subseteq R$. Portanto,

$$\int f d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

Observação 3.1. Na abordagem acima, fizemos a comparação para uma função f limitada não negativa, porém o raciocínio é aplicado para uma função limitada qualquer, basta tomar a parte positiva e negativa de f, segundo a expressão 2.6, onde temos $f = f^+ - f^-$, pois f^+ e f^- são funções não negativas, de forma que, para a Integral de Riemann aplicamos o **Teorema 1.4** e para Integral de Lebesgue o **Teorema 2.3**.

3.2 Exemplo de Função Integrável à Lebesgue e não à Riemann

Exemplo 3.1. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{Q}^{\mathsf{C}} \cap [0, 1] \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, mostremos que f não tem integral, segundo à Riemann. De fato, considere uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[0,1]$, satisfazendo a condição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Cada intervalo da forma $[t_{i-1}, t_i]$, com $i = \{1, 2, \dots, n\}$, é composto por números racionais e irracionais, no intervalo $[0,1]$. Assim,

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0$$

e

$$M_i = \sup\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1.$$

Isto implica em,

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0$$

e

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = b - a = 1 - 0 = 1.$$

Como P é arbitrária, segue que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Portanto, f não é integrável a Riemann.

Agora, resolveremos a integral segundo à Lebesgue. Considere os conjuntos $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $B = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Pelo **Lema 2.12** e **Corolário 2.1.1**, obtemos

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int_{A \cup B} f d\mu = \int f \mathcal{X}_{A \cup B} d\mu \\
&= \int f(\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B) d\mu \\
&= \int f \cdot \mathcal{X}_A d\mu + \int f \cdot \mathcal{X}_B d\mu \\
&= \int 1 \cdot \mathcal{X}_A d\mu + \int 0 \cdot \mathcal{X}_B d\mu \\
&= \int_A d\mu.
\end{aligned}$$

Como pode ser visto em Élon Lima (1989), p. 40, A é enumerável e, conforme Coelho (2012), p. 30, $\mu(A) = 0$. Assim,

$$\int_A d\mu = \mu(A) = 0.$$

Portanto, $\int f d\mu = 0$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro capítulo, fizemos a construção da Integral de Riemann começando por definir as somas inferiores e somas superiores de uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ relativas a uma partição qualquer P de $[a,b]$. Diante disso, definimos a Integral Inferior como sendo

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P\in\mathcal{P}} s(f;P) = \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\right)$$

e a Integral Superior por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} S(f;P) = \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\right).$$

De modo que uma função limitada é integrável à Riemann em $[a,b]$ quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Já no segundo capítulo, desenvolvemos a teoria de Lebesgue, iniciando os estudos pelas funções mensuráveis e a teoria de medida, ao qual destaco a medida de Borel- Lebesgue definida por $\lambda((a,b)) = b-a$, em que λ coincide com o comprimento do intervalo (a,b). Em seguida, definimos a integral de uma função mensurável simples não negativa $\varphi : X \to \mathbb{R}$ como

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Em seguida, pela **Definição 2.11**, considerando que $f : X \to R$ é uma função não negativa e mensurável, temos

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu,$$

onde o supremo se estende sobre todas as funções simples φ mensuráveis não negativas satisfazendo $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, $\forall x \in X$.

Após, temos a condição para que uma função mensurável f seja integrável à Lebesgue, pela **Definição 2.12**, as integrais da parte positiva f^+ e da parte negativa f^- de f são finitas e definimos a integral de f em relação a medida μ, como sendo

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

E por último, apresentamos e demonstramos o **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 2.4**, onde as funções integráveis f_n convergem em quase todo ponto para uma função mensurável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sendo f_n dominada por uma função integrável g, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ao qual possibilita "jogar o limite para fora"da integral, ou seja,

$$\int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu.$$

Assim, fazendo a comparação das duas integrais, quando utilizamos a medida de Borel, como mencionado, a medida coincide com o comprimento do intervalo $[a,b]$, e ao tormamos o supremo das funções mensuráveis φ, temos justamente a construção da Integral de Riemann, como verificamos na *Seção (3.1)*.

Mas, a Integral de Riemann tem suas limitações, como vimos no **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**, podemos "tirar o limite para fora", pois as funções integráveis f_n convergem quase sempre para a função mensurável f e f_n é dominada por uma função integrável g. Para que isso ocorra para a Integral de Riemann, as funções f_n precisam convergir uniformemente para a função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Portanto, notamos que a teoria de Riemann não é tão consistente como a teoria de integração de Lebesgue, assim como mostramos a falha acima, através de um exemplo, pontuamos como a limitação da Integral de Riemann impede o resultado para algumas funções limitadas f. Contudo, mostramos que a teoria de Lebesgue é mais ampla com relação a teoria de Riemann e verificamos que a primiera nada mais é que uma generalização da segunda. Vale salientar que para os cursos de graduação das Universidades, a Integral de Riemann torna-se uma teoria mais acessível por ser a forma mais natural de introduzir os conceitos de área advindas do cálculo integral.

REFERÊNCIAS

BARTLE, Robert Gardner. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 2 ed. New York: Wiley Classics Library, 1995.

COELHO, Emanuela Régia de Sousa. **Introdução à Integral de Lebesgue**. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, p. 59. 2012.

LIMA, Élon Lages. **Curso de Análise**. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

LIMA, Élon Lages. **Análise Real: Funções de uma variável**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MACIEL, Aldo Bezerra. LIMA, Osmundo Alves de **Introdução à Análise Real**. 1 ed. Campina Grande-PB: EDUEP, 2005.

MEDEIROS, Paulo Adauto. **Centenário da Integral de Lebesgue**. In: Semana da Matemática do Instituto de Ciências Exatas, 6., 2004, Rio de Janeiro. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/Centen_Int_Lebesgue.pdf. Acesso em: 04 de Abril de 2022.

PISKE, Alessandra. **Integração: Riemann e Lebesgue, um estudo comparativo**. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas. Joinville, p. 143. 2013.

SILVA, Josyclesio Lima da. **A teoria da medida, integração de Lebesgue e alguns modos de convergência**. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, p. 79. 2014.