



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA À LUZ DA BNCC COM OLHAR NA MATRIZ  
CURRICULAR DO NOVO ENSINO MÉDIO DA PARAÍBA**

**ELISSON DUTRA SOARES**

**PATOS  
2022**

ELISSON DUTRA SOARES

**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA À LUZ DA BNCC COM OLHAR NA MATRIZ CURRICULAR DO NOVO ENSINO MÉDIO DA PARAÍBA**

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Educação Matemática

**Orientador:** Prof. Dra. Wenia Valdevino Félix de Lima

**PATOS  
2022**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S676p Soares, Elisson Dutra.  
Probabilidade e estatística à luz da BNCC com olhar na matriz curricular do novo ensino médio da Paraíba [manuscrito] / Elisson Dutra Soares. - 2022.  
58 p. : il. colorido.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.  
"Orientação : Profa. Dra. Wenia Valdevino Félix de Lima ,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Educação matemática. 2. Probabilidade. 3. Estatística.  
4. Novo ensino médio. I. Título

21. ed. CDD 372.7

ELISSON DUTRA SOARES

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA À LUZ DA BNCC COM OLHAR NA MATRIZ  
CURRICULAR DO NOVO ENSINO MÉDIO DA PARAÍBA

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 05/04/2022.

**BANCA EXAMINADORA**



Prof.<sup>a</sup>. Dra. Wenia Valdevino Felix de Lima (Orientadora)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof.<sup>a</sup>. Ma. Lidiane Rodrigues Campêlo da Silva  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

## AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar por sempre ser meu aporte de forças em todos os momentos difíceis que enfrentei até agora.

A meus pais Rilzani Viana Dutra e Valdeci Soares Dantas por sempre batalharem arduamente para que o seu filho pudesse ter a única coisa que eles poderiam dar que era uma educação de qualidade.

A minha noiva Clécia Jússula Linhares de Oliveira por sempre me apoiar e me aconselhar em todas as decisões que tomei até aqui.

A todos os meus colegas que além de amigos, nos tornamos irmãos; sempre brigando e discutindo, mas nunca em nenhum momento deixamos ninguém desamparado seja em situações acadêmicas ou pessoais. O nosso juramento era de que todos ali iriam terminar o curso juntos e que ninguém iria desistir ou ficar para trás.

A todos os professores que passaram por mim e que sempre deixaram grandes ensinamentos, não só ensinamentos para a vida acadêmica ou para a carreira de trabalho, mas também para a nossa formação pessoal.

Por fim, a minha orientadora Wenia Valdevino Felix de Lima que me acolheu para a orientação sem demonstrar qualquer obstáculo mesmo enfrentando algumas complicações em sua saúde. Agradeço por sempre me incentivar, instigar e apresentar novas ideias até mesmo nos dias mais cansativos e por nunca me deixar sozinho no desenvolvimento deste trabalho, sendo assim ficam aqui os meus mais sinceros agradecimentos.

*“A probabilidade é uma arma num arsenal que requer um bom julgamento.”*  
*Charles Wheelan.*

## RESUMO

O presente trabalho tem o intuito de investigar e estabelecer relações entre as competências e habilidades presentes na BNCC, no ENEM e na nova proposta curricular da Paraíba no que diz respeito à Probabilidade e Estatística no contexto do ensino médio. Esta pesquisa é de cunho qualitativo, foi utilizada a pesquisa bibliográfica para a obtenção das informações. A problematização partiu da preocupação com a formação dos alunos no que diz respeito ao desenvolvimento do conhecimento da Probabilidade e Estatística que são ofertados pela BNCC e a nova proposta curricular da Paraíba. Procuramos ainda identificar quais habilidades e competências presentes na BNCC são necessárias para a resolução das questões de Probabilidade e Estatística inseridas na prova do ENEM. O levantamento dos dados ocorreu por meio da leitura de artigos científicos, dissertações, documentos oficiais etc. Nos resultados e discussões trazemos algumas questões dos últimos cinco anos das provas do ENEM da área da Matemática e suas tecnologias delimitando-as a Probabilidade e Estatística. Os resultados alcançados a partir da averiguação das questões selecionadas, apontaram que as habilidade e competências da BNCC estão intrinsecamente relacionadas com as competências e habilidade do ENEM e que o novo ensino médio no que diz respeito ao currículo, está moldado para a realidade da formação e avaliação dos alunos em relação à probabilidade e estatística, uma vez que a nova proposta curricular da Paraíba respeita a esquematização e as estratégias da BNCC.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Estatística. ENEM. Novo ensino médio.

## ABSTRACT

The present work aims to investigate and establish relationships between the competencies and skills present in the BNCC, ENEM and in the new Paraíba's new curriculum proposal with respect to Probability and Statistics in the context of high school. This research is of a qualitative nature, bibliographic research was used to obtain the information. The problematization came from the concern with the formation of the students with regard to the development of knowledge of Probability and Statistics that are offered by BNCC and the Paraíba's new curriculum proposal. We also seek to identify which skills and competencies present in the BNCC are necessary to solve the Probability and Statistics questions included in the ENEM test. Data collection took place through the reading of scientific articles, dissertations, official documents, etc. In the results and discussions we bring some questions from the last five years of ENEM tests in the area of Mathematics and its technologies, delimiting them to Probability and Statistics. The results obtained from the investigation of the selected questions, pointed out that the skills and competencies of the BNCC are intrinsically related to the competencies and skills of the ENEM and that the new high school, with respect to the curriculum, is molded to the reality of training and assessment of students in relation to Probability and Statistics, since the new Paraíba's new curriculum proposal respects the layout and strategies of the BNCC.

**Keywords:** Probability. Statistics. ENEM. New high school.



## LISTA DE FIGURAS

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Representação geométrica do evento A e do espaço amostral S. . . . . | 23 |
| 4.2 | Gráfico de Barras . . . . .  | 27 |
| 4.3 | Gráfico de setores . . . . .   | 28 |
| 4.4 | Gráfico de linhas . . . . .  | 28 |
| 4.5 | Diagrama de Pareto . . . . .   | 29 |
| 4.6 | Histograma . . . . .   | 29 |
| 5.1 | Questão 138 - prova rosa . . . . .                                   | 33 |
| 5.2 | Questão 153 - prova rosa . . . . .                                   | 36 |
| 5.3 | Questão 163 - prova rosa . . . . .                                   | 37 |
| 5.4 | Questão 176 - prova rosa . . . . .                                   | 39 |
| 5.5 | Questão 142 - prova cinza . . . . .                                  | 41 |
| 5.6 | Questão 179 - prova cinza . . . . .                                  | 44 |
| 5.7 | Questão 180 - prova cinza . . . . .                                  | 45 |
| 5.8 | Questão 163 - prova rosa . . . . .                                   | 47 |
| 5.9 | Questão 137 - prova cinza . . . . .                                  | 48 |

## **LISTA DE TABELAS**

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Preferências dos telespectadores por categorias de interesse . . . . .      | 31 |
| 5.1 | Quantidades de produtos consumidos no respectivo dia da última semana . . . | 46 |

# SUMÁRIO

|              |   |           |
|--------------|---|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2</b>     | <b>METODOLOGIA</b>  | <b>11</b> |
| <b>3</b>     | <b>A PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA SOB O ENFOQUE DO ENEM, BNCC<br/>E A PROPOSTA CURRICULAR DO NOVO ENSINO MÉDIO</b>                             | <b>13</b> |
| <b>3.1</b>   | Enfoque na BNCC   | 13        |
| <b>3.2</b>   | Enfoque no ENEM   | 15        |
| <b>3.3</b>   | Enfoque na nova proposta curricular da Paraíba para o novo ensino médio   | 17        |
| <b>4</b>     | <b>CONCEITOS PRELIMINARES DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA<br/>DESCRITIVA</b>   | <b>21</b> |
| <b>4.1</b>   | Probabilidade   | 21        |
| <b>4.2</b>   | Estatística descritiva  | 25        |
| <b>4.3</b>   | Representações gráficas   | 27        |
| <b>4.3.1</b> | Gráfico de barras   | 27        |
| <b>4.3.2</b> | Gráfico de setores  | 28        |
| <b>4.3.3</b> | Gráfico de linhas   | 28        |
| <b>4.3.4</b> | Diagrama de Pareto  | 28        |
| <b>4.3.5</b> | Histograma  | 29        |
| <b>4.3.6</b> | Gráfico de radar  | 29        |
| <b>4.4</b>   | Medidas de tendência central ou de posição  | 30        |
| <b>4.5</b>   | Medidas de dispersão  | 31        |
| <b>5</b>     | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES COM ENFOQUE NOS DOCUMENTOS<br/>SOBRE ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM RELACIONADAS A PROBA-<br/>BILIDADE E ESTATÍSTICA</b> | <b>33</b> |
| <b>5.1</b>   | Prova rosa 2017   | 33        |
| <b>5.2</b>   | Prova azul 2018   | 40        |
| <b>5.3</b>   | Prova cinza 2019  | 41        |
| <b>5.4</b>   | Prova amarela 2020  | 46        |
| <b>5.5</b>   | Prova cinza 2021 aplicação regular  | 48        |
| <b>5.6</b>   | Prova cinza 2021 reaplicação  | 50        |
| <b>6</b>     | <b>CONCLUSÃO</b>  | <b>52</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b>  | <b>54</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

A probabilidade e a estatística tem um enorme papel na sociedade, por meio dela diversos fenômenos podem ser explicados, contabilizados, explorados e de um modo geral, organizados. Desde o início da formação escolar nos níveis fundamental e médio, os alunos se deparam com inúmeros conteúdos que são alinhados para proporcionar o ensino e a aprendizagem e em toda essa trajetória os conteúdos que envolvem geometria, trigonometria, álgebra, aritmética e probabilidade e estatística os, acompanham desde o início ao fim de cada ano letivo. Sendo assim, a temática desenvolvida teve como principal motivação o interesse na averiguação de que forma está delimitado o ensino de probabilidade e estatística segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC); o que é necessário para que os alunos tenham êxito nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que envolvam probabilidade e estatística; e se a nova proposta curricular da Paraíba trará inovações para o ensino destes conteúdos.

De acordo com Mendoza e Swift (apud Arcego e Berlandia, 2016) destacam em seu trabalho que a estatística e probabilidade deveriam ser ensinadas para que todas as pessoas pudessem dominar esses conhecimentos básicos para atuarem na sociedade. No decorrer do processo de formação, os alunos são inseridos no ensino dessas duas áreas que são planejadas de forma estratégica e que estão disponíveis na BNCC, documento este que rege a educação do ensino infantil e médio, dispondo de competências e habilidades que os estudantes, segundo a BNCC, poderão desenvolver no decorrer do processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, o ENEM merece destaque, pois ele é um método avaliativo em que os alunos concluintes do ensino médio poderão realizar e assim aplicar os seus conhecimentos obtidos em sala de aula no intuito de ingressarem no ensino superior. Diante disso, vale salientar que o ENEM apresenta competências e habilidades que os estudantes podem adquirir para realizarem esse exame. Sendo assim, o presente trabalho busca averiguar as competências e habilidades da prova de Matemática e suas Tecnologias e examiná-las para que seja feita uma relação e posteriormente compará-las ao currículo do novo ensino médio visando às áreas da probabilidade e estatística.

Dessa forma o trabalho tem por objetivo geral investigar as competências e habilidades da BNCC, do ENEM e dando enfoque ainda para a nova proposta curricular do ensino médio da Paraíba, no que diz respeito à temática da Probabilidade e Estatística do ensino médio. Tem por objetivos específicos averiguar as competências e habilidades presentes na BNCC do ensino médio e nas provas do ENEM no tocante a Probabilidade e Estatística, verificar as alterações

presentes nos documentos da proposta curricular novo ensino médio da Paraíba, e por fim avaliar questões de Probabilidade e Estatística dos últimos cinco anos da prova do ENEM.

Em termos metodológicos, o estudo é de cunho qualitativo e de caráter exploratório, pois busca ter conhecimento sobre quais as compatibilidades entre as competências e habilidades inseridas na BNCC e nas competências e habilidades para a resolução das questões de probabilidade e estatística abrangidas no ENEM. No que concerne ao caráter exploratório, Gil (2002) salienta que estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses.

Para o desenvolvimento da escrita deste trabalho, foram utilizadas os softwares Microsoft Word e Microsoft Excel para a ilustração dos gráficos que serão apresentados e também utilizou-se o  $\LaTeX$  ferramenta esta destacada por Kopkah (2000, p.3) como "um conjunto abrangente de comandos de marcação usados com o poderoso programa de composição  $\TeX$  para a preparação de uma ampla variedade de documentos, desde artigos científicos, relatórios, até mesmo livros". O editor de texto  $\LaTeX$  permite apresentar uma melhor organização do texto de maneira geral.

O presente trabalho está organizado e particionado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos os percursos metodológicos utilizados para a realização deste trabalho. No capítulo 3 descrevemos como a área de Probabilidade e Estatística é apresentada sob o enfoque do ENEM, BNCC e a proposta curricular do novo ensino médio da Paraíba. No capítulo 4 trazemos conceitos preliminares de Probabilidade e Estatística Descritiva que abrangem definições e resultados extremamente relevantes para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 5 mostramos os resultados e discussões com enfoque na BNCC sobre algumas questões dos últimos 5 anos (de 2017 a 2021) do ENEM relacionadas a probabilidade e estatística. As questões estão organizadas por ano de aplicação das provas e por cores diferentes e esquematizadas por seções. No capítulo 6 destacamos as discussões e resultados finais da monografia. Por fim nas referências apresentamos os materiais utilizados para a pesquisa desenvolvida.

## 2 METODOLOGIA

Aqui estão apresentados os percursos metodológicos utilizados para a realização deste trabalho. O estudo é de cunho qualitativo e de caráter exploratório, pois busca averiguar, analisar e comparar as competências e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como as competências e habilidades abordadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) necessárias para a resolução das questões de Probabilidade e Estatística. No que concerne ao caráter exploratório, Gil (2002) salienta que estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. A problemática da pesquisa está centrada em dois questionamentos. Como as competências e habilidades presentes na BNCC estão relacionadas as do ENEM para a resolução do teste no que diz respeito à probabilidade e estatística? Quais as contribuições e diferenciais que a nova proposta curricular da Paraíba do novo ensino médio traz, no que diz respeito as competências e habilidades (da área de probabilidade e estatística) e como elas estão relacionadas a BNCC e ao ENEM?

Os procedimentos metodológicos adotados ocorreram em quatro etapas. No primeiro momento buscou realizar fichamentos dos documentos da BNCC, ENEM e a nova proposta curricular da Paraíba, para que fosse feita uma averiguação em suas habilidades e competências no intuito de relacioná-las. Em um segundo momento, foram feitas pesquisas em artigos, teses, TCC's e livros para entender como os autores se pronunciam sobre as temáticas que envolvem a BNCC e o ENEM, que tem sido fonte de muita discussão. Serra (2015) em seu trabalho apresenta uma preocupação sobre o ensino de probabilidade e estatística, o qual afirma que é um desafio para o professor de Matemática trabalhar este conteúdo na educação básica. Além disso ele apresenta resoluções e comentários sobre questões da prova do ENEM realizadas nos anos de 2009 a 2014 relacionadas à probabilidade e estatística e representações gráficas de modo geral. Utilizamos ainda o trabalho de Sousa (2018) que aborda os principais conceitos de probabilidade e estatística estudados no ensino médio, assim como uma análise documental acerca da BNCC, PCN e CBC-MG e como os conteúdos são trabalhados no livros didáticos oferecidos pelo estado de Minas Gerais. Giordano (2021) apresenta as novas perspectivas para o ensino de Probabilidade no Brasil a partir da publicação da BNCC e da proposta curricular Paulista, sendo que essa pesquisa objetiva responder a questão de como as mudanças curriculares propostas pela BNCC e pelo currículo Paulista representam possíveis avanços para para o ensino e aprendizagem dos conteúdos de Probabilidade no ensino médio.

Em um terceiro momento foram realizados estudos mais aprofundados dos conceitos teóricos de Probabilidade e Estatística Descritiva que são necessários para a resolução das questões do ENEM que foram selecionadas posteriormente. Destacamos a seguir as principais referências utilizadas para nosso estudo, e das quais extraímos vários conceitos e resultados que estão presentes no Capítulo 4 deste trabalho, são elas: Belfiore (2015), Magalhães (2013), Iezzi (2004), Iezzi (2006), Iezzi (2018), Morgado (2016), Dantas (2008), Dante (2016), Bussab (2010) e Morettin (2009).

Em um quarto momento, foram examinadas algumas provas dos últimos cinco anos do ENEM especificamente envolvendo os anos de 2017 a 2021. A escolha das provas neste intervalo de cinco anos especificamente, se dá pelo motivo de que na nossa discussão desejamos abordar a maioria das competências e habilidades presentes nos documentos oficiais envolvendo o máximo de conteúdos possíveis. Nessa seleção de questões observamos que alguns conceitos não são abordados com tanta frequência, como por exemplo, medidas de dispersão. Além disso, tinham provas que a abordagem era mais focada em probabilidade e em outras o enfoque maior eram em conceitos estatísticos. Com relação as cores das provas, elas foram escolhidas de maneira aleatória. Após a escolha das provas, foram selecionadas algumas questões de Probabilidade e Estatística para as quais fornecemos uma proposta de resolução e apontamos como cada habilidade e competência presentes nos documentos oficiais citados, se encaixam em cada questão.

### **3 A PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA SOB O ENFOQUE DO ENEM, BNCC E A PROPOSTA CURRICULAR DO NOVO ENSINO MÉDIO**

#### **3.1 Enfoque na BNCC**

Segundo Brasil (2017), a BNCC “é um documento de cunho normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica”. Este documento aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996). Este documento divide as etapas do ensino fundamental e ensino médio de modo que haja uma continuidade no que diz respeito às propostas educacionais de cada fase.

Na BNCC ainda, são definidas competências específicas para cada área do conhecimento, que também orientam a construção dos itinerários formativos relativos a essas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio.

Partindo dessa premissa e focando no Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área.

No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Médio têm a possibilidade de construir conjuntos como espaços amostrais de eventos equiprováveis, utilizar a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações para estimar a probabilidade de sucesso de eventos. Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes têm oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas.

Sendo assim, na BNCC (BRASIL, 2017) são apresentadas cinco competências específicas da área da Matemática e suas tecnologias em que abrangem habilidades referentes a probabilidade e estatística, são elas:



Competência 1 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. As habilidades para a competência 1 são:

- (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Competência 2 - Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

- (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão

Competência 3 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística -, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
- (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência 4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

- (EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- (EM13MAT409) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência 5- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Diante do que foi apresentado acerca das competências e habilidades presentes na BNCC, é possível afirmar que a formulação dessas competências e habilidades trazem a preocupação com o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, principalmente no que diz respeito a aplicabilidade desses conhecimentos no cotidiano. A existência de um cronograma de competências e habilidades a ser trabalhado em sala de aula é algo positivo, pois traz a referência de como utilizar os conteúdos presentes no currículo da escola de maneira que os estudantes tenham a possibilidade de trabalhar com conceitos e resultados de forma aplicada e diversificada, além disso com a preocupação de envolver a interdisciplinariedade.

## 3.2 Enfoque no ENEM

Em sua dissertação de Mestrado, Serra (2015) apresenta as singularidades do ENEM e de acordo com ele, o ENEM é um instrumento de seleção para ingressar no ensino superior desde

2009, criado em 1998 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), uma autarquia federal vinculada ao MEC e que é uma prova composta por uma redação e 180 questões distribuídas em quatro grandes áreas que constituem os componentes curriculares dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), ou seja, Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação, Matemática e suas Tecnologias sendo baseada em competências e habilidades, assim como na BNCC.

Serra (2015) afirma que de acordo com a portaria Nº 109, de 27 de Maio de 2009, publicada no Diário Oficial da União em 28 de maio de 2009 ficou definido na prova de Matemática e Suas tecnologias, que fossem sete competências divididas entre 30 habilidades, e aqui são destacadas as competências das áreas 6 e 7 e suas respectivas habilidades que estão associadas à probabilidade e estatística.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

As competências aqui destacadas, apresentam também uma mobilização de conhecimentos que envolvem procedimentos e conceitos a partir de situações sociais e que mediante essas competências, são destacadas as suas habilidades que podem ser desenvolvidas a partir da utilização desses procedimentos no processo de ensino. É importante destacar que as competências

e habilidades apontadas tem como foco caráter avaliativo, pois se trata de um teste voluntário, em que os alunos concluintes do ensino médio poderão se submeter e que para a resolução das questões é necessário que os discentes tenham uma "bagagem" de conhecimentos prévios advindos da sua vida estudantil e cotidiana.

### **3.3 Enfoque na nova proposta curricular da Paraíba para o novo ensino médio**

Paraíba (2020) apresenta a nova proposta curricular da Paraíba e salienta que a realização deste documento foi decorrente da aprovação da BNCC pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e a sua homologação, em 2017-2018, pelo Ministério da Educação (MEC), que por sua vez, solicitou uma série de iniciativas a ser implementadas pelos entes federados (União, Estados, Distrito Federal e Municípios), entre elas, o pacto de colaboração entre Estados e Municípios para se elaborar os Currículos dos Estados, numa perspectiva territorial.

Paraíba (2020) destaca que esse regime de colaboração foi instituído pela Portaria nº 331, de 5 de abril de 2018, que dispõe sobre o Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular - ProBNCC e estabelece diretrizes, parâmetros e critérios para sua implementação. Assim sendo, para a implantação da BNCC e elaboração dos Currículos Estaduais, houve a participação efetiva e significativa do Ministério da Educação (MEC), Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed), União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) e Conselho Estadual de Educação (CEE).

A nova proposta curricular da Paraíba foi aprovada no dia 17 de dezembro de 2020, ela apresenta algumas inovações advindas da Lei nº 13.415/2017 de 16 de fevereiro de 2017. As principais mudanças que a nova proposta curricular da Paraíba apresenta dizem respeito a escolha de itinerários formativos por parte dos alunos, além de uma adoção de uma base comum curricular que parte dela deverá ser voltada para o cumprimento da BNCC e a outra para os itinerários formativos, assim como o aumento da carga horária tanto para alunos como para professores. O novo currículo está organizado por áreas de conhecimentos e formação técnica e profissionalizante. Elas estão divididas em Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias Ciências, Humanas e sociais aplicadas e Formação técnica e profissional que terão duração de 3 (três) mil horas num decorrer de 3 (três) anos e que 1800 (mil e oitocentas) horas deverão ser destinadas as áreas de conhecimento obrigatório da BNCC e 1200 (mil e duzentas) horas para os itinerários formativos. Assim, ao final da jornada formativa do terceiro ano do ensino médio, o aluno receberá o certificado de conclusão do ensino médio, além de um certificado técnico e profissionalizante ao qual ele participou.

Paraíba (2020) apresenta a estruturação das habilidades para a etapa do ensino fundamental, estão organizadas por meio de unidades que estão relacionadas com a própria área, ou seja,

Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Essas unidades juntas contemplam todos os objetos de conhecimentos reservados para serem estudados no ensino fundamental. Em cada uma dessas unidades os(as) alunos(as) podem desenvolver várias habilidades. Para a etapa do ensino médio, a proposta afirma que pode dar continuidade às aprendizagens trabalhadas na etapa anterior, dessa forma objetiva construir e ampliar os conceitos matemáticos para que o estudante possa aplicá-los em vários contextos relacionados a problemas reais, ou seja, possibilitando-o refletir sobre a importância da matemática em sua vivência, além da importância e da influência que a matemática tem para o desenvolvimento e avanço da tecnologia.

Por fim no tocante a área Probabilidade e Estatística, conforme Paraíba (2020) o estudante tem a oportunidade de trabalhar com incertezas, aproximações, possibilidades, estimar a chance de um fenômeno ocorrer, construção e interpretação de gráficos e tabelas, além de desenvolver habilidades relacionadas ao planejamento e a execução de pesquisas amostrais.

Assim como na BNCC e no ENEM, a nova proposta curricular do Estado da Paraíba traz competências e habilidades que respeitam a proposta da BNCC que são destacadas a seguir.

- Competência 1 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, questões econômicas ou tecnológicas. Como também, desenvolver a sua compreensão do mundo, relacionando seus esquemas conceituais a objetos ligados à natureza, à arte, à arquitetura, dentre outras, pertinentes aos mais variados contextos e divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
- (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragens de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados em diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.
- (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

- Competência 2 - Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações políticas, de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática
- (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e de dispersão.
- Competência 3 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, para ler, interpretar, construir modelos e resolver/explorar/propor problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados, a adequação das soluções propostas de modo a construir argumentação consistente
- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
- (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
- Competência 4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação, dentre eles os matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca da modelagem, solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
- (EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- (EM13MAT409) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise

- Competência 5 - Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Após a exposição dos documentos da BNCC, ENEM e nova proposta curricular da Paraíba, cabe apontar que ambos se diferenciam no que diz respeito ao foco. De fato a BNCC e a nova proposta curricular da Paraíba trazem um conjunto de competências e habilidades que são direcionadas para a formação do aluno, enquanto as competências e habilidades presentes no ENEM são direcionadas para a avaliação dos estudantes que se submetem ao teste. Comparando a BNCC e a nova proposta curricular da Paraíba no que diz respeito a competências e habilidades é notório que ambas são muito semelhantes, havendo apenas uma pequena alteração na competência 1 da área da Matemática da nova proposta curricular da Paraíba visto que ela traz o acréscimo de apenas uma habilidade para a parte de probabilidade e estatística e que além disso, as duas documentações tem o mesmo caráter formativo. Os três documentos apresentam, nas competências e habilidades, a existência de possibilidades, pois aquilo que está destacado de certa forma é algo incerto. Os alunos podem desenvolver as habilidades e competências destacadas na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba, como também podem não desenvolvê-las totalmente, devido a algum déficit anterior causados também por habilidades anteriores má desenvolvidas. Para o ENEM essa ideia também é válida, pois existe a possibilidade de os alunos terem as competências e habilidades que são definidas de acordo com a matriz referencial do ENEM, mas que ainda não consigam ter êxito na resolução das questões, no tocante a probabilidade e estatística.

## 4 CONCEITOS PRELIMINARES DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DESCRITIVA

### 4.1 Probabilidade

As autoras Arcego e Berlandia (2016) trazem em seu trabalho um contexto histórico sobre a Probabilidade e com isso, apontam diversos nomes que tiveram grande influência para o início dos estudos sobre a probabilidade. Os indícios de seu surgimento, referem-se a avaliação de chances de ganhar em jogos de azar e da necessidade de efetuar quantificações sobre os riscos de seguros. Os estudos da probabilidade só começaram a se efetivar entre os séculos XV e XVI, dentre tantos pesquisadores que contribuíram com o desenvolvimento da Probabilidade são destacados Girolamo Cardano, Daniel Bernoulli, Blaise Pascal, Pierre Fermat, Jacob Bernoulli, Johann Friedrich Gauss, entre outros. Mais informações podem ser encontradas em Arcego e Berlandia (2016) e Launay (2019, cap. 15).

A seguir apresentamos alguns conceitos da Teoria da Probabilidade que serão extremamente relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Os conceitos e resultados foram extraídos de vários livros texto e estão alinhados com as seguintes referências: Belfiore (2015), Dantas (2008), Magalhães (2013), Morgado et al (2016); Iezzi et al. (2004; 2006), todas elas seguindo uma sequência progressiva e lógica.

**Definição 4.1.** (*Experimento aleatório*) são experimentos que se repetem sob as mesmas condições e que geralmente produzem resultados diferentes. Notação:  $\xi$ .

**Definição 4.2.** (*Espaço amostral*) Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Notação:  $S$ .

**Definição 4.3.** (*Eventos*) São subconjuntos de um espaço amostral. Notação: convencionalmente são representados por letras maiúsculas  $A, B, C, D$  e etc.

**Definição 4.4.** (*Eventos aleatórios*) Dizemos que um evento  $A \subset S$  ao qual atribuímos uma probabilidade, é chamado de evento aleatório. Além disso, chamamos de evento certo, quando um evento coincide com o seu espaço amostral e de evento impossível quando é do tipo vazio ( $\emptyset$ ).

No exemplo a seguir ilustramos todas as quatro definições apresentadas acima.



**Exemplo 4.1.** *Considere o experimento aleatório que consiste no lançamento de dois dados e observa-se a face do dado voltado para cima. O espaço amostral para este experimento aleatório é dado por:*

$$S = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}.$$

*A partir deste conjunto podemos formar vários eventos aleatórios por exemplo:*

$$A = \{\text{Faces voltadas para cima iguais}\} \Rightarrow A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\};$$

$$B = \{\text{Faces cuja soma seja igual a 10}\} \Rightarrow B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\};$$

$$C = \{\text{Faces cuja soma seja menor que 2}\} \Rightarrow C = \emptyset;$$

$$D = \{\text{Faces cuja soma seja menor que 15}\} \Rightarrow D = S.$$

Uma vez que os eventos aleatórios são aqueles os quais podemos atribuir probabilidade, vamos relembrar qual é a definição clássica de probabilidade.

**Definição 4.5 (Definição clássica de probabilidade).** *Considere um espaço amostral  $S$  consistindo de  $N$  resultados possíveis, dizemos que a Probabilidade de  $A$ , denotada por  $P(A)$  é:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Quando os eventos aleatórios  $A_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  são equiprováveis dizemos que  $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_N) = P$ , isto é, quando todos tem a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, tomando  $P_i = P(A_i)$ , temos que

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1 \quad \Rightarrow \quad NP = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{N}.$$

Além desta definição para o cálculo de probabilidades ao considerar espaços amostrais de elementos específicos, recorreremos as definições apresentadas a seguir.

**Definição 4.6.** *Considerando o espaço amostral constituído de objetos geométricos como pontos, retas e planos, a obtenção de probabilidades, neste caso, é referenciada na literatura como problemas de probabilidade geométrica. Dado evento  $A$ , nesse contexto, dizemos que a probabilidade geométrica de  $A$  é dada por:*

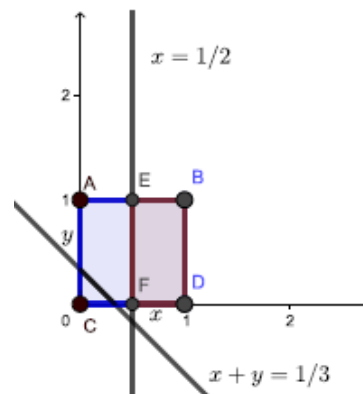
$$P(A) = \frac{\text{área}(A)}{\text{área}(S)} \tag{4.1}$$

**Exemplo 4.2.** Suponha que um ponto seja escolhido aleatoriamente no quadrado  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Determine a probabilidade de que o ponto pertença à região limitada pelas retas  $x \geq 1/2$  e  $x + y \geq 1/3$ .

**Solução:** O espaço amostral é  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  e seja o evento  $A = \{\text{o ponto pertença à região limitada pelas retas } x \geq 1/2 \text{ e } x + y \geq 1/3\}$ . Logo, a probabilidade é dada por

$$P(A) = \frac{\text{área do retângulo EFDB}}{\text{área do quadrado ACDB}} = 1/2.$$

Figura 4.1: Representação geométrica do evento A e do espaço amostral S.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

#### Definição 4.7. Probabilidade frequentista

Suponhamos que um experimento aleatório, cujo espaço amostral é  $S$ , seja realizado repetidamente em condições exatamente iguais. Para cada evento  $A$  do espaço amostral  $S$ , definimos  $n(A)$  como o número de vezes que o evento  $A$  ocorre nas  $n$  repetições do experimento. A razão

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n},$$

é denominada frequência relativa de  $A$  nas  $n$  repetições do experimento. A Probabilidade do evento aleatório  $A$ , é definida como

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,A},$$

isto é,  $P(A)$  é definida como proporção de tempo em que  $A$  ocorre.

As Definições 4.5, 4.6 e 4.7 restritas aos seus espaços amostrais específicos são utilizadas para resolver muitos problemas, porém elas não apresentam uma formulação matemática mais rigorosa de Probabilidade. Segundo Magalhães (2013) por volta de 1930, A. N. Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas matemáticos que fornece uma definição de probabilidade que inclui as definições anteriores como casos particulares.

**Definição 4.8 (Função de probabilidade).** A Probabilidade é uma função que associa a cada evento aleatório  $A$  a um número  $P(A)$  de forma que os itens a seguir sejam satisfeitos:

- i) para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- ii)  $P(S) = 1$ ;
- iii) Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ( $A \cap B = \emptyset$ ), então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Em certas situações, probabilidades necessitam ser reavaliadas à medida que informações adicionais são acrescentadas. Uma maneira de incorporar informação adicional em um modelo de probabilidade é considerar o resultado que será gerado como um membro de um dado evento.

**Definição 4.9. (Probabilidade condicional)** Dados dois eventos  $A$  e  $B$ , com  $P(A) \neq 0$ , a probabilidade condicional de  $B$  na certeza de  $A$  é o número:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

**Exemplo 4.3.** Uma urna contém duas bolas brancas ( $B$ ) e três vermelhas ( $V$ ). Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso, sem reposição. Isso significa que escolhemos a primeira bola, verificamos sua cor e **não a devolvemos à urna**; misturamos as bolas restantes e retiramos a segunda. Qual a Probabilidade de sair bola branca na segunda extração?

**Solução:** Defina o evento  $A = \{\text{retiro uma bola branca na segunda extração}\}$ , então a probabilidade solicitada é dada por:

$$P(A) = P(B \cap B) + P(V \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}.$$

**Definição 4.10. Eventos independentes** Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos aleatórios e suponha que  $P(B) > 0$ . O evento  $A$  é dito independente do evento  $B$  se:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ou ainda} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Teorema 4.1. (Teorema de Bayes)** Considere  $B_1, B_2, \dots, B_n$  eventos mutuamente excludentes (ou seja,  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  para  $i \neq j$ ). Já  $A$  é um evento qualquer que ocorrerá em conjunto ou como consequência de um dos eventos  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). A Probabilidade de ocorrência de um evento  $B_i$  dada a ocorrência do evento  $A$  é calculada como:

$$\begin{aligned} P(B_i/A) &= \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n)}. \end{aligned}$$

No exemplo a seguir ilustramos como pode ser utilizado o Teorema de Bayes na resolução de um problema probabilístico.

**Exemplo 4.4.** *Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de  $1/4$ . O time Fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade  $6/10$  e um dia sem chuva com probabilidade de  $4/10$ . Sabe-se que o Fluminense ganhou um jogo naquele dia do mês de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?*

**Solução:** sejam os eventos aleatórios  $A = \{Choveu\}$ ,  $A^c = \{nochoveu\}$   $B = \{Ganhou\}$ . Assim,

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c)}$$

Ou seja,

$$P(A/B) = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{1}{2}.$$

## 4.2 Estatística descritiva

A Estatística Descritiva mostra constantemente resultados de pesquisas realizadas na sociedade, mostrando dados de inúmeros fatos, acontecimentos, previsões e etc, que a partir delas podem ser tomadas decisões para os mais diversos fins. A Estatística é de certa forma intrigante, pois ela não dá resultados prontos ou uma única forma de resolver determinada coisa. De acordo com Wheelan (2016), “ela raramente oferece um único modo “certo” de fazer algo, ela simplesmente fornece informações significativas de maneira facilmente acessíveis”. Diante disso, vale ainda ressaltar que a Estatística está presente nas decisões simples até nas mais complexas do cotidiano, o que significa que essas informações não podem ou não deveriam ser repassadas de qualquer jeito. Mas afinal de contas o que é Estatística ? De acordo com Wheelan (2016), a Estatística é um conjunto de ferramentas capaz de ajudar as pessoas a sintetizar grandes quantidades de dados, elaborar e tomar decisões melhores, reconhecer padrões capazes de refinar o modo de como as pessoas fazem as coisas e até mesmo avaliar a efetividade de políticas, procedimentos médicos e entre outras inovações. Para a obtenção de alguns desses conceitos e resultados, os livros textos que foram utilizados são: Belfiore (2015); Iezzi et al. (2004; 2006); Iezzi et al. (2018), Bussab e Morettin (2010) e Morettin (2009). Todas elas seguindo uma sequência lógica e progressiva apresentadas a seguir.

**Definição 4.11. (População)** *Conjunto de todos os elementos ou pessoas que podem oferecer os dados a serem investigados.*

**Definição 4.12. (Amostra)** *É a seleção de uma parte, ou seja, um subconjunto de elementos da população.*

**Definição 4.13.** (*Amostragem aleatória simples*) onde cada elemento da população tem a mesma chance de participar da amostra.

**Definição 4.14.** (*Variável*) é uma característica da população (ou amostra) em estudo, possível de ser medida, contada ou caracteriza. As variáveis podem ser classificadas de dois tipos:

**Definição 4.15.** (*Dados*) São informações inerentes a uma ou mais variáveis.

**Definição 4.16.** (*Variável qualitativa*) é composta por aspectos característicos de um indivíduo, objeto ou elemento (ex: tipo de carro, cor etc.).

A variável qualitativa se subdivide em variável qualitativa ordinal que apresenta uma ordem (ex: nível de escolaridade - ensino fundamental, ensino médio, ensino superior) e variável qualitativa nominal que apresenta uma característica qualquer sem seguir uma ordem (ex: tipo sanguíneo - A,B, AB, O).

**Definição 4.17.** (*Variável quantitativa*) apresenta em sua composição, itens que indicam medidas numéricas (ex: idade, altura, frequência semanal e etc.).

A variável quantitativa se subdivide em discreta e contínua. A variável quantitativa discreta – apresenta o resultado de um conjunto de valores finitos, ou de um conjunto enumerável desses valores (ex: conjunto de preços de um determinado produto, número de filhos de uma família.) A variável quantitativa contínua – apresenta o resultado de um conjunto de valores infinitos possíveis que podem ser associados a pontos em uma escala de continuidade, de maneira que não haja lacunas ou interrupções (ex: temperaturas mínimas obtidas em cada dia.)

A partir dos dados e dos tipos de variáveis identificadas a estatística descritiva descreve e sintetiza as principais características observadas em um conjunto de dados por meio de tabelas de distribuição de frequências, gráficos, medidas resumo, medidas de variabilidade e forma. Isso permite que o estudante (ou pesquisador) tenha uma melhor compreensão de como os dados se comportam. Para isto é importante entender como se dá a construção de uma tabela de frequências.

**Definição 4.18.** (*Tabela de frequências*) relaciona categorias (ou classes) de valores, juntamente com contagens (ou frequências) do número de valores que se enquadrem em cada categoria.

**Definição 4.19.** (*Frequência*) é a quantidade de elementos que pertence a uma determinada categoria ou classe.

**Definição 4.20.** (*Frequência absoluta*) é o número de ocorrências de cada elemento na amostra ou de um dado evento. Denotada por  $n_i$ .

**Definição 4.21.** (*Frequência relativa*) é o valor obtido a partir da razão entre a frequência absoluta e a quantidade total de elementos da amostra. Definida por:

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

**Definição 4.22. (Frequência acumulada)** é a soma de todas as ocorrências até o elemento analisado. Denotada por:  $f_{ac}$ .

**Definição 4.23. (Frequência relativa acumulada)** é a quantidade relativa à frequência acumulada, ou seja, a razão entre a frequência acumulada e a quantidade total de elementos para cada categoria ou classe analisada. Denotada por:  $f_{ac_i}$ .

## 4.3 Representações gráficas

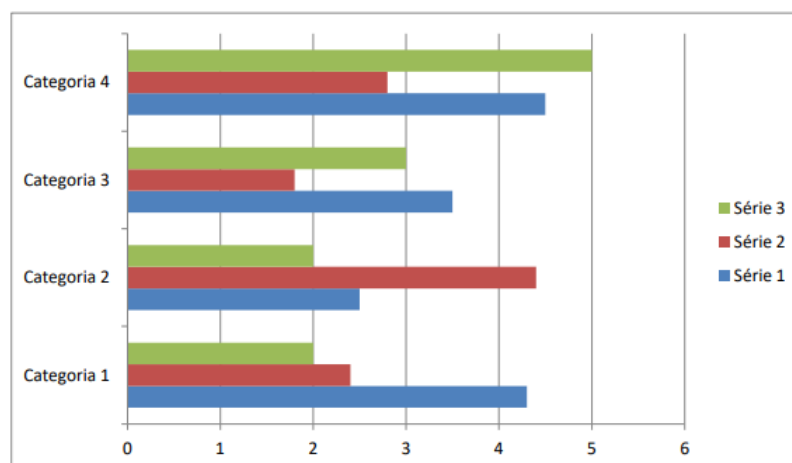
Os gráficos apresentam um importante papel tanto na teoria estatística como também no universo da matemática, pois são instrumentos de análise e interpretação de um conjunto de dados. A representações gráficas que serão abordadas no presente trabalho são: gráficos de barras, gráfico de setores ou pizza, diagrama de Pareto, gráfico de linhas, gráfico de radar e o histograma.

### 4.3.1 Gráfico de barras

Este tipo de gráfico é bastante utilizado para variáveis qualitativas nominais e ordinais, mas também pode ser utilizado para variáveis quantitativas discretas, pois permite investigar a presença de tendência nos dados.

No gráfico de barras horizontais, cada categoria da variável é representada no eixo das ordenadas por uma barra de largura constante, e o comprimento da respectiva barra indica a frequência da categoria no eixo das ordenadas.

Figura 4.2: Gráfico de Barras

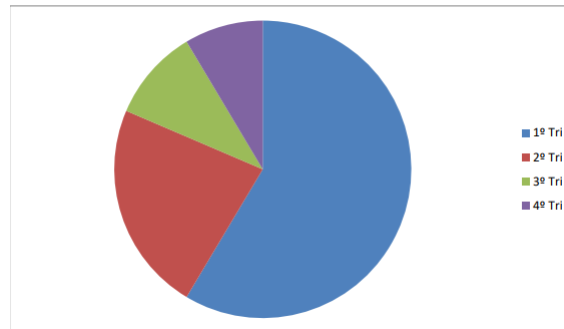


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

### 4.3.2 Gráfico de setores

Uma outra forma de representar dados qualitativos, em termos de frequência relativa (porcentagem), consiste na construção de gráficos de setores. O gráfico corresponde a um círculo arbitrário (todo) dividido em setores de diversos tamanhos (partes do todo). Este gráfico permite a visualização dos dados como fatias de pizza.

Figura 4.3: Gráfico de setores

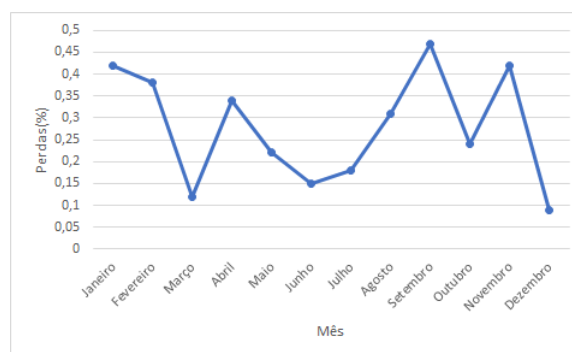


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

### 4.3.3 Gráfico de linhas

No gráfico de linhas, pontos são representados pela interseção de variáveis envolvidas nos eixos das abscissas e das ordenadas, e os mesmos são ligados por segmentos de reta. Este gráfico pode ser usado no contexto univariado ou bivariado.

Figura 4.4: Gráfico de linhas

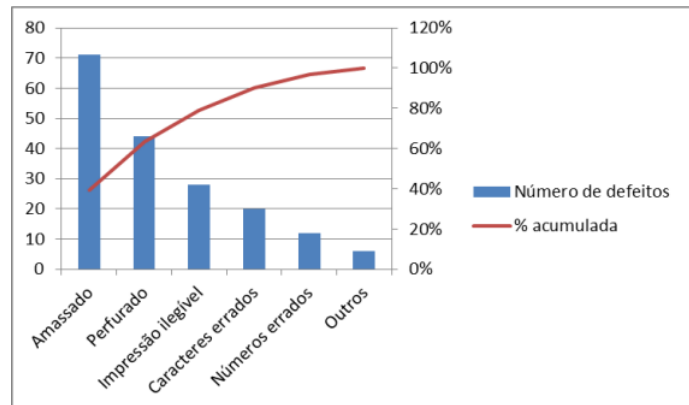


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

### 4.3.4 Diagrama de Pareto

O diagrama de Pareto é um gráfico de barras vertical combinado com um gráfico de linhas. As barras representam as frequências absolutas de ocorrências das categorias e as linhas representam as frequências relativas acumuladas. As categorias são ordenadas de forma decrescente de prioridade.

Figura 4.5: Diagrama de Pareto

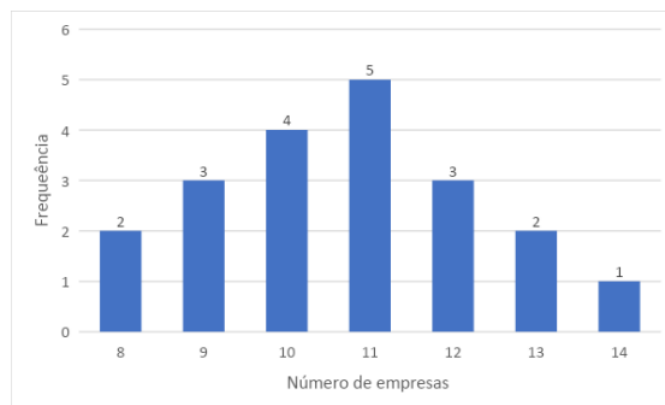


Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

### 4.3.5 Histograma

O histograma é um gráfico de barras verticais que representa a distribuição de uma variável quantitativa (discreta ou contínua), e é construído tomando como referência dois eixos coordenados. No eixo das abscissas, são anotados os valores individuais da variável em estudo ( ou o limite das classes para dados de variáveis contínuas) e na dimensão horizontal de cada retângulo representará o valor das observações individuais ou cada classe da tabela de dados agrupados.

Figura 4.6: Histograma



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

### 4.3.6 Gráfico de radar

É o gráfico ideal para representar séries temporais cíclicas, isto é, séries temporais que apresentam em seu desenvolvimento determinada periodicidade como, por exemplo: a variação da precipitação pluviométrica ao longo do ano ou da temperatura ao longo do dia, a arrecadação de impostos de uma região ou o consumo de energia elétrica durante um determinado período, indicadores de critérios para a classificação de periódicos científicos. (SAMPAIO, et. al. 2018).



## 4.4 Medidas de tendência central ou de posição

As medidas de tendência central ou medidas de posição indicam um valor central do conjunto de dados em torno do qual estão distribuídos. Podem ser calculadas tanto para os valores que estão distribuídos em séries como para dados tabulados agrupados em classe ou não. Elas descrevem o nível geral dos dados coletados, isto é, informam a tendência dos dados. As medidas aqui a serem destacadas são: média aritmética, média ponderada, mediana e moda.

**Definição 4.24 (Média aritmética).** *Seja  $X$  uma variável quantitativa e  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  os valores assumidos por  $X$ . Define-se a média aritmética de  $X$ , indicada por  $\bar{X}$ , como a razão entre a soma de todos esses valores pela quantidade de elementos (tamanho da amostra), ou seja,*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

**Exemplo 4.5.** *Determine a média aritmética simples para os dados referentes às notas dos alunos da disciplina de Estatística Básica dispostos no quadro a seguir.*

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 5,7 | 6,5 | 6,9 | 8,3 | 8,0 | 4,2 | 6,3 | 7,4 | 5,8 | 6,9 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

A média aritmética é  $\bar{x} = \frac{5,7 + 6,5 + \dots + 6,9}{10} = 6,6$ .

**Definição 4.25. (Média aritmética ponderada)** *Seja  $X$  uma variável quantitativa que assume os valores  $X_1, X_2, \dots, X_k$  com frequências absolutas respectivamente iguais a  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . A média aritmética ponderada de  $X$ , indicada por  $\tilde{X}$ , é definida como a divisão de soma de todos os produtos  $X_i \cdot n_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ) pela soma das frequências, ou seja,*

$$\tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{X_1 \cdot n_1 + X_2 \cdot n_2 + \dots + X_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

A mediana é uma medida de localização do centro da distribuição de um conjunto de valores ordenados de forma crescente. Seu valor separa um conjunto de dados em duas partes iguais.

**Definição 4.26. (Mediana)** *Sejam  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , os  $n$  valores ordenados de uma variável  $x$ . A mediana desse conjunto de valores, denotada por  $Med$ , é definida por:*

$$Med(x) = \begin{cases} \frac{x_{n/2} + x_{(n/2)+1}}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \\ x_{(n+1)/2}, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \end{cases}$$

em que  $n$  é o número total de observações.

**Definição 4.27. (Moda)** A moda de um conjunto de valores corresponde ao valor que ocorre com maior frequência.

**Exemplo 4.6.** Uma emissora de TV entrevistou 500 telespectadores buscando analisar suas preferências por categorias de interesse. O resultado da pesquisa está disposto na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Preferências dos telespectadores por categorias de interesse

| Categorias de interesse | Frequência |
|-------------------------|------------|
| Filmes                  | 71         |
| Novelas                 | 46         |
| Jornalismo              | 90         |
| Humor                   | 98         |
| Esporte                 | 120        |
| Shows                   | 35         |
| Variedade               | 40         |
| Total                   | 500        |

Fonte: BELFIORE (2015).

**Solução:** Pela Tabela 4.1, verificamos que a moda corresponde à categoria de “esportes”.

## 4.5 Medidas de dispersão

Na seção anterior foram apresentadas algumas medidas de tendência central que são utilizadas para encontrar um valor representativo para um determinado conjunto de dados. Com o intuito agora de determinar o grau de variabilidade desses dados, são necessárias medidas de dispersão. Algumas das medidas de variabilidade que vamos abordar são: variância, desvio padrão, erro padrão e coeficiente de variação.

A variância é uma medida de variabilidade em torno da média da média aritmética. Quanto maior for a variância, maior é a dispersão dos dados.

**Definição 4.28. (Variância)** Seja  $X$  uma variável quantitativa que assume os valores  $X_1, \dots, X_n$  e  $\bar{X}$  a média aritmética correspondente a esses valores. A variância desses valores, indicada por  $\text{Var}(X)$  ou  $\sigma^2(X)$  é definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \mu)^2 + \dots + (X_n - \mu)^2}{N}, \quad (\text{para a população}).$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}, \quad (\text{para a amostra}).$$

em que  $N$  é o tamanho populacional e  $n$  é o tamanho amostral.

Uma vez que a variância considera a média dos desvios quadrados, seu valor tende a ser muito grande e se torna mais difícil a sua interpretação. Uma maneira de solucionar essa dificuldade é extrair a raiz quadrada da variância, essa nova medida é denominada de desvio padrão.

**Definição 4.29. (Desvio padrão)** Seja  $X$  uma variável quantitativa que assume os valores  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Chamamos de desvio padrão de  $X$ , indicada por  $\sigma$ , a raiz quadrada da variância de  $X$ .

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (\text{para a população}).$$

$$s = \sqrt{s^2} \quad (\text{para a amostra}).$$

**Definição 4.30. (Erro padrão)** O erro padrão é o desvio padrão de um estimador, no nosso contexto, da média. Considere a amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e sua média aritmética  $\bar{X}$ . O erro padrão é calculado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{para a população}).$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{para a amostra}).$$

**Definição 4.31. (Coeficiente de variação)** O coeficiente de variação (CV) é uma medida de dispersão relativa que fornece a variação dos dados em relação à média. Quanto menor for o seu valor, mais homogêneos serão os dados, ou seja, menor será a dispersão em torno da média.

$$CV = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu}} \times 100(\%) \quad (\text{para a população}).$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100(\%) \quad (\text{para a amostra}).$$

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES COM ENFOQUE NOS DOCUMENTOS SOBRE ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM RELACIONADAS A PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

As provas do ENEM são destinadas a todos os estudantes concluintes do ensino médio e é uma opção para aqueles que desejam ingressar no ensino superior. O exame objetiva avaliar o desempenho dos alunos ao fim da escolaridade básica. A prova do ENEM é composta por 180 questões que envolvem as áreas de Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e por fim Matemática e suas Tecnologias, além de uma redação. A prova apresenta 4 (quatro) cadernos de cores distintas, são elas: rosa, azul, amarelo e cinza. Os cadernos apresentam as mesmas questões para cada ano, porém com ordem distinta. Aqui são apresentadas algumas questões do ENEM dos anos de 2017 a 2021 de todas as cores descritas escolhidas de forma aleatória, questões estas que envolvem probabilidade e estatística.

### 5.1 Prova rosa 2017

QUESTÃO 138 - Um instituto de pesquisa eleitoral recebe uma encomenda na qual a margem de erro deverá ser de, no máximo, 2 pontos percentuais (0,02). O instituto tem 5 pesquisas recentes, P1 a P5, sobre o tema objeto da encomenda e irá usar a que tiver o erro menor que o pedido. Os dados sobre as pesquisas são os seguintes:

Figura 5.1: Questão 138 - prova rosa

| Pesquisa | $\sigma$ | $N$   | $\sqrt{N}$ |
|----------|----------|-------|------------|
| P1       | 0,5      | 1 764 | 42         |
| P2       | 0,4      | 784   | 28         |
| P3       | 0,3      | 576   | 24         |
| P4       | 0,2      | 441   | 21         |
| P5       | 0,1      | 64    | 8          |

Fonte: Prova do ENEM, 2017

O erro  $\epsilon$  pode ser expresso por

$$|\epsilon| < 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

em que  $\sigma$  é um parâmetro e  $N$  é o número de pessoas entrevistadas pela pesquisa.

Qual pesquisa deverá ser utilizada?

- A) P1
- B) P2
- C) P3
- D) P4
- E) P5

Comentário 1: Para resolver a questão, o aluno precisará utilizar as 4 operações básicas assim como ter conhecimentos sobre medidas de dispersão. O aluno deve comparar os 5 resultados obtidos a partir da substituição dos valores, ou seja:

**Proposta de solução:**

$$P1 - |\epsilon| = < 1,96 \cdot \frac{0,5}{42} \Rightarrow |\epsilon| < 0,023;$$

$$P2 - |\epsilon| = < 1,96 \cdot \frac{0,4}{28} \Rightarrow |\epsilon| < 0,028;$$

$$P3 - |\epsilon| = < 1,96 \cdot \frac{0,3}{24} \Rightarrow |\epsilon| < 0,0245;$$

$$P4 - |\epsilon| = < 1,96 \cdot \frac{0,2}{21} \Rightarrow |\epsilon| < 0,0186;$$

$$P5 - |\epsilon| = < 1,96 \cdot \frac{0,1}{8} \Rightarrow |\epsilon| < 0,0245.$$

Concluindo assim que a alternativa correta é a letra D).

Comentário 2: Podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidade (EM13MAT316), presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolver, eles devem desenvolver a habilidade H27 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

**QUESTÃO 145**

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- A) 0,075
- B) 0,150

- C) 0,325  
 D) 0,600  
 E) 0,800

Comentário 1: Para resolver a questão, o aluno precisa ter conhecimento sobre probabilidade condicional, pois o problema apresenta situações que envolvem probabilidade a partir de situações dadas de chuva e de atraso ao trabalho. Com isso, é preciso determinar a probabilidade de atraso.

**Proposta de solução:** Defina os seguintes eventos,  $A = \{\text{Atrazar para o trabalho}\}$  e  $B = \{\text{chover}\}$ , primeiramente note que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c),$$

ou seja,  $P(A) = 30\% \cdot 50\% + 70\% \cdot 25\%$ , que pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{30}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{70}{100} \cdot \frac{25}{100} \\ &= 0,3 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,25 \\ &= 0,15 + 0,175 \\ &= 0,325. \end{aligned}$$

Concluindo que a alternativa correta é a letra C.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e as habilidades (EM13MAT310), (EM13MAT311) e (EM13MAT312), presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la deverão desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

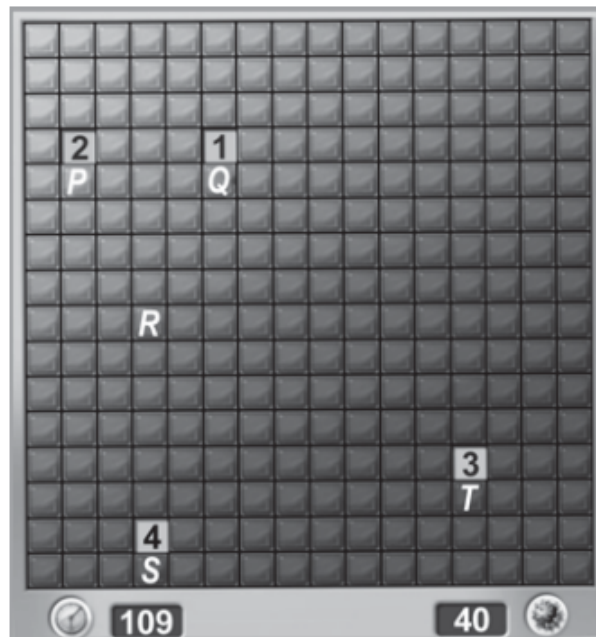
#### QUESTÃO 153

A Figura 5.2 ilustra uma partida de campo minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16x16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.

Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina. O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra:

- A) P.  
 B) Q.

Figura 5.2: Questão 153 - prova rosa



Fonte: Prova do ENEM, 2017.

- C) R.
- D) S.
- E) T.

Comentário 1: para resolver esta questão, o aluno precisa ter conhecimento sobre o cálculo de probabilidade clássica, assim como, o conceito de combinação simples.

**Proposta de solução:** de acordo com o enunciado, cada número aberto apresenta a quantidade de bombas presentes nos quadrinhos vizinhos ao que está com a numeração destacada. O problema pede que o jogador escolha dentre os quadrinhos marcados com as letras P, Q, R, S e T, aquele que tenha a menor probabilidade de conter uma bombinha.

Escolhamos primeiro a região vizinha ao quadrado Q. Como dito antes, a numeração indica a quantidade de bombinhas presentes nos 8 quadrinhos vizinhos, dessa forma existe uma probabilidade de:  $P(Q) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$ .

Vejam os quadros P. Note que temos 2 bombas na região de 8 quadrinhos, dessa forma existe uma combinação de  $C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2!6!} = 4 \cdot 7 = 28$  modos distintos que 2 as bombas podem estar. Com isso, em apenas  $C_{7,1} = 7$  deles há uma mina no quadrinho P. O que por sua vez para o ponto vizinho a T, há  $C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$  maneiras de distribuir as 3 bombas, dos quais  $C_{7,2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$  possuem uma bomba no quadrinho T. A probabilidade da bomba estar no Ponto T é de:  $P(T) = \frac{21}{56} = 0,375 = 37,5\%$

Olhando agora para o quadrinho S, temos  $C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$  maneiras de alocar as 4 bombas,

dos quais  $C_{7,3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$  apresentam uma bomba no quadrinho S. Assim, a probabilidade é de:  $P(S) = \frac{35}{70} = 0,5 = 50\%$ .

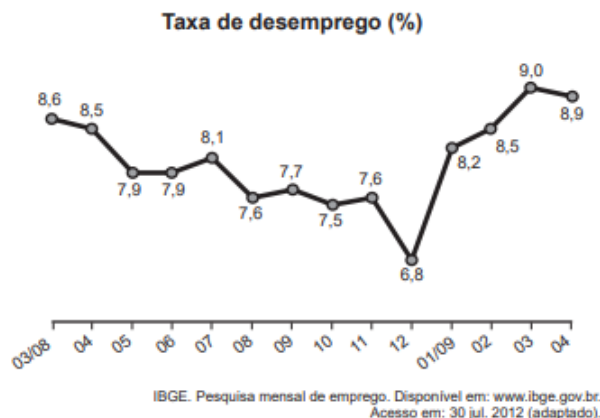
Por fim, analisando o quadrinho R. É possível eliminarmos os 36 quadro vizinhos a P, Q, S e T, eliminando também as bombas nessas regiões. Dessa forma, existem  $256 - 36 = 220$  quadrinhos ocultos e  $40 - 4 - 3 - 2 - 1 = 30$  bombas que podem ser alocadas nesses quadrinhos. Diante disso, a probabilidade de haver uma bomba em R é de:  $P(R) = \frac{30}{220} \simeq 0,136 \simeq 13,6\%$ . Concluimos assim, que a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidades (EM13MAT310) e (EM13MAT311) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la deverão desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

### QUESTÃO 163

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 e abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Figura 5.3: Questão 163 - prova rosa



Fonte: Prova do ENEM, 2017.

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de:

- A) 8,1%
- B) 8,0%
- C) 7,9%
- D) 7,7%
- E) 7,6%



Comentário 1: para resolver o problema, o aluno precisa ter conhecimento sobre como cálculo da mediana.

**Proposta de solução:** utilizando os valores dados pelo gráfico e escrevendo de forma crescente, obtemos: 6, 8 7, 5 7, 6 7, 6 7, 7 7, 9 7, 9 8, 1 8, 2 8, 5 8, 5 8, 6 8, 9 9, 0.

Como temos um número par de valores, a mediana será dada pelos dois valores centrais, ou seja, os valores que estão nas posições 7 e 8, que são 7, 9 e 8, 1. Após a identificação dos termos, é preciso somar e depois dividir por 2, ou seja:

$$7,9 + 8,1 = 16, \quad \text{e} \quad \frac{16}{2} = 8.$$

Assim a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidades (EM13MAT316) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver as habilidades H25 e H27 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito nas competência das áreas 6 e 7 do ENEM.

#### QUESTÃO 164

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de  $\frac{2}{3}$  e a de acusar a cor vermelha é de  $\frac{1}{3}$ . Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

A)  $\frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

B)  $\frac{10 \cdot 2^9}{3^{10}}$

C)  $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

D)  $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

E)  $\frac{2}{3^{10}}$

Comentário 1: para resolver o problema, o aluno precisa ter conhecimentos sobre probabilidade de eventos sucessivos.

**Proposta de solução:** de acordo com o enunciado, a probabilidade do semáforo acusar a cor vermelha é de  $\frac{1}{3}$  e de acusar a cor verde é de  $\frac{2}{3}$ . Com isso, existem 10 formas que uma pessoa pode ver um semáforo verde, contanto que os outros estejam vermelhos, vamos definir o evento  $A = \{\text{a cor do semáforo é verde}\}$ . Portanto, a probabilidade será:

$$P(A) = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3^{10}} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}.$$

Concluimos assim que a alternativa correta é a letra A.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e as habilidades (EM13MAT310), (EM13MAT311) e (EM13MAT312) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

#### QUESTÃO 176

Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão disponíveis as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Figura 5.4: Questão 176 - prova rosa

| Aluno | 1ª Prova | 2ª Prova | 3ª Prova | 4ª Prova | 5ª Prova |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| X     | 5        | 5        | 5        | 10       | 6        |
| Y     | 4        | 9        | 3        | 9        | 5        |
| Z     | 5        | 5        | 8        | 5        | 6        |

Fonte: Prova do ENEM, 2017.

Comentário 1: para resolver a questão, o aluno precisa ter conhecimento sobre média aritmética.

**Proposta de solução:** para resolver este problema, é necessário que calculemos a média dos alunos X, Y e Z e averiguar qual delas ficará abaixo de 6. Dessa forma,

$$\bar{x} = \frac{5 + 5 + 5 + 10 + 6}{5} = \frac{31}{5} = 6,2.$$

$$\bar{y} = \frac{4 + 9 + 3 + 9 + 5}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

$$\bar{z} = \frac{5 + 5 + 8 + 5 + 6}{5} = \frac{29}{5} = 5,8.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidade (EM13MAT316), presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

## 5.2 Prova azul 2018

### QUESTÃO 156

Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6 h 15 min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6 h 21 min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6 h 22 min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 5 h 21 min da manhã é, no máximo,

- A)  $\frac{4}{21}$
- B)  $\frac{5}{21}$
- C)  $\frac{6}{21}$
- D)  $\frac{7}{21}$
- E)  $\frac{8}{21}$

Comentário 1: para este problema, o aluno precisa ter conhecimento sobre os conceitos: média, mediana e probabilidade clássica.

**Proposta de resolução:** defina o evento  $A = \{ \text{a pessoa apanhou o ônibus no máximo antes de } 5\text{h}21\text{min} \}$ . De acordo com o enunciado, são analisados 21 dias. Dos 21 dias o horário 6h21min foi o que mais se repetiu, sendo assim podemos dizer que 6h21min é a moda e que 6h22min é a mediana. É possível dizer que 6h21min é o 10º termo já que dispomos de 21 elementos e que 6h22min é a mediana, o que significa dizer que é o termo central, ou seja, o 11º termo. A questão pede que calculemos a probabilidade máxima da pessoa chegar antes das 6h21min, sendo assim, consideramos a menor quantidade de vezes que 6h21min aparece para ser moda, que é 3 vezes. Uma vez que o problema aponta que os segundos não são considerados. O enunciado ainda diz que o rapaz nunca consegue chegar antes das 6h15min, sendo assim, é possível dizer que 6h15min é o primeiro elementos para esta análise. Concluímos que 6h22min é a mediana e que 6h21min é o décimo elemento.

Os elementos após 6h22min não precisam ser listados, pois queremos saber a probabilidade máxima do rapaz apanhar o ônibus antes das 6h21min. De forma intuitiva podemos destacar as marcações da seguinte forma como ilustração:

*6h15min 6h16min 6h17min 6h18min 6h19min 6h20min 6h21min 6h21min 6h21min 6h22min...*

Caso 6h21min se repita apenas 2 vezes, este termo deixaria de ser moda, pois algum outro termo se repetiria também 2 vezes, como é possível interpretar no enunciado. Diante disso, são destacadas 6 marcações antes de 6h21min e como algumas delas se repetem, obtemos um total de 7 medições. Assim a probabilidade é dada por:  $P(A) = 7/21$ . Logo a alternativa correta é a letra D.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidades (EM13MAT310) e (EM13MAT316) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la devem desenvolver as habilidades H27 e H28 do ENEM relacionadas as capacidades de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

### 5.3 Prova cinza 2019

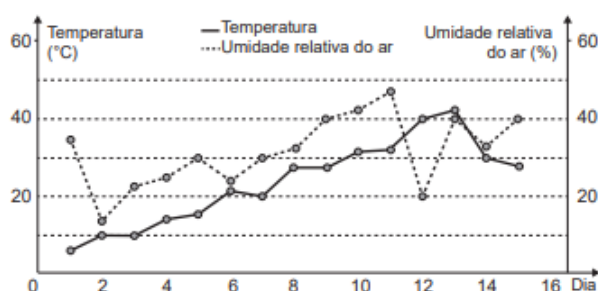
#### QUESTÃO 142

O serviço de meteorologia de uma cidade emite relatórios diários com a previsão do tempo. De posse dessas informações, a prefeitura emite três tipos de alertas para a população:

- Alerta cinza: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C, e a umidade relativa ao ar for inferior a 40%;
- Alerta laranja: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura deve variar entre 35 °C e 40 °C, e a umidade relativa do ar deve ficar abaixo de 30%;
- Alerta vermelha: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Um resumo da previsão do tempo nessa cidade, para um período de 15 dias, foi apresentado no gráfico.

Figura 5.5: Questão 142 - prova cinza



Fonte: Prova do ENEM, 2019.

Decorridos os 15 dias de validade desse relatório, um funcionário percebeu que, no período a que se refere o gráfico, foram emitidos os seguintes alertas:

- Dia 1: alerta cinza;
- Dia 12: alerta laranja;
- Dia 13: alerta vermelho.

Em qual(is) desses dias o(s) avisos(s) foi(ram) emitido(s) corretamente?

- A) 1
- B) 12
- C) 1 e 12
- D) 1 e 13
- E) 1, 12 e 13

Comentário 1: para este problema, o aluno precisa ter conhecimentos sobre leitura de gráficos. Além disso, é necessário que ele interprete as afirmativas dadas e as condições existentes.

**Proposta de solução:** a primeira afirmação diz que no dia 1 foi emitido alerta cinza, com isso, significa que nesse dia a temperatura deveria ser menor que  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  e a umidade relativa do ar menor que 40%. De acordo com o gráfico, o alerta foi emitido corretamente. A segunda afirmativa diz que no dia 12 foi emitido alerta laranja, que significa dizer que a temperatura variou entre  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ , e a umidade relativa ao ar ficou abaixo de 30%. Olhando para o gráfico, percebe-se que no dia 12 a temperatura ultrapassou os  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  e a umidade relativa ao ar variou entre 20% e 40%, sendo assim esse alerta não poderia ser emitido. Por fim a última afirmativa diz que no dia 13 foi emitido alerta vermelho, o que significa dizer que a temperatura foi superior a  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  e a umidade relativa ao ar inferior a 25%. Olhando para o gráfico, percebe-se que a temperatura foi superior a  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ , porém a umidade relativa ao ar foi superior e 30%, assim o alerta vermelho não poderia ser emitido, assim o aviso 1 foi o correto. Portanto, a alternativa correta é a letra A.

Comentário 2: Podemos concluir que esta questão contempla as competências 1 e 4 e habilidades (EM13MAT102) e (EM13MAT409) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la devem desenvolver a habilidade H25 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 6 do ENEM.

#### QUESTÃO 178

Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas

pelos auditores, que constataram em 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

- A) 0,0500
- B) 0,1000
- C) 0,1125
- D) 0,3125
- E) 0,5000

Comentário 1: para solucionar este problema o estudante deve ter conhecimentos sobre probabilidade condicional e o Teorema de Bayes.

**Proposta de solução:** defina os eventos

$$A = \{\text{declaração inconsistente}\} \quad e \quad B = \{\text{declaração fraudulenta}\}.$$

Devemos calcular a probabilidade da declaração ser inconsistente dado que é fraudulenta. Assim,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)} \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,25}{0,2 \cdot 0,25 + 0,8 \cdot 0,625} \\ &= \frac{0,05}{0,05 + 0,05} \\ &= 0,5000. \end{aligned}$$

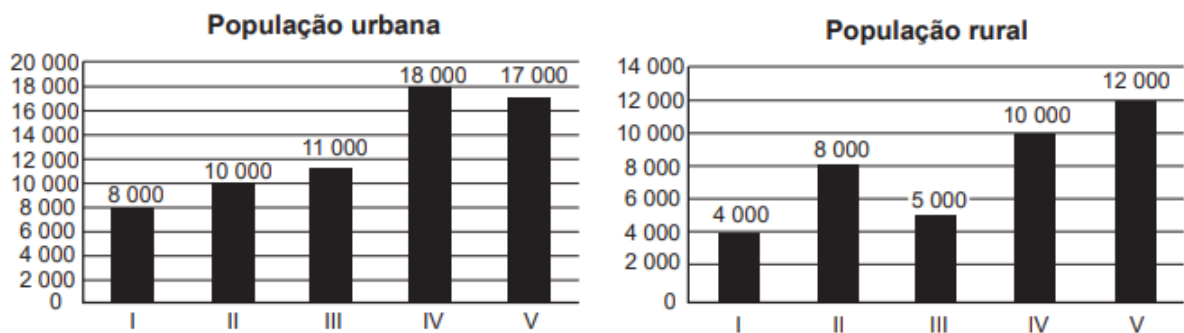
Concluimos assim que a alternativa correta é a letra E.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidades (EM13MAT310) e (EM13MAT311) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la devem desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

QUESTÃO 179

A taxa de urbanização de um município é dada pela razão entre a população urbana e a população total do município (isto é, a soma das populações rural e urbana). Os gráficos apresentam, respectivamente, a população urbana e a população rural de cinco municípios (I, II, III, IV, V) de uma mesma região estadual. Em reunião entre governo do estado e os prefeitos desses municípios, ficou acordado que o município com maior taxa de urbanização receberá um investimento extra em infraestrutura.

Figura 5.6: Questão 179 - prova cinza



Fonte: Prova do ENEM, 2019

Segundo o acordo, qual município receberá o investimento extra?

- A) I
- B) II
- C) III
- D) IV
- E) V

Comentário 1: para resolver este problema, o estudante deve ter conhecimentos sobre leitura de gráficos e cálculo de proporção.

**Proposta de solução:** o aluno precisa determinar a razão entre a população da zona urbana e a população total para obter a taxa de urbanização de cada município no intuito de saber qual o município receberá investimento extra, desse modo,

- O município 1 tem taxa de urbanização =  $\frac{8000}{12000} = 0,666\dots$
- O município 2 tem taxa de urbanização =  $\frac{10000}{18000} = 0,555\dots$
- O município 3 tem taxa de urbanização =  $\frac{11000}{16000} = 0,6875$
- O município 4 tem taxa de urbanização =  $\frac{18000}{28000} = 0,6428\dots$

- O município 5 tem taxa de urbanização =  $\frac{17000}{29000} = 0,58\dots$

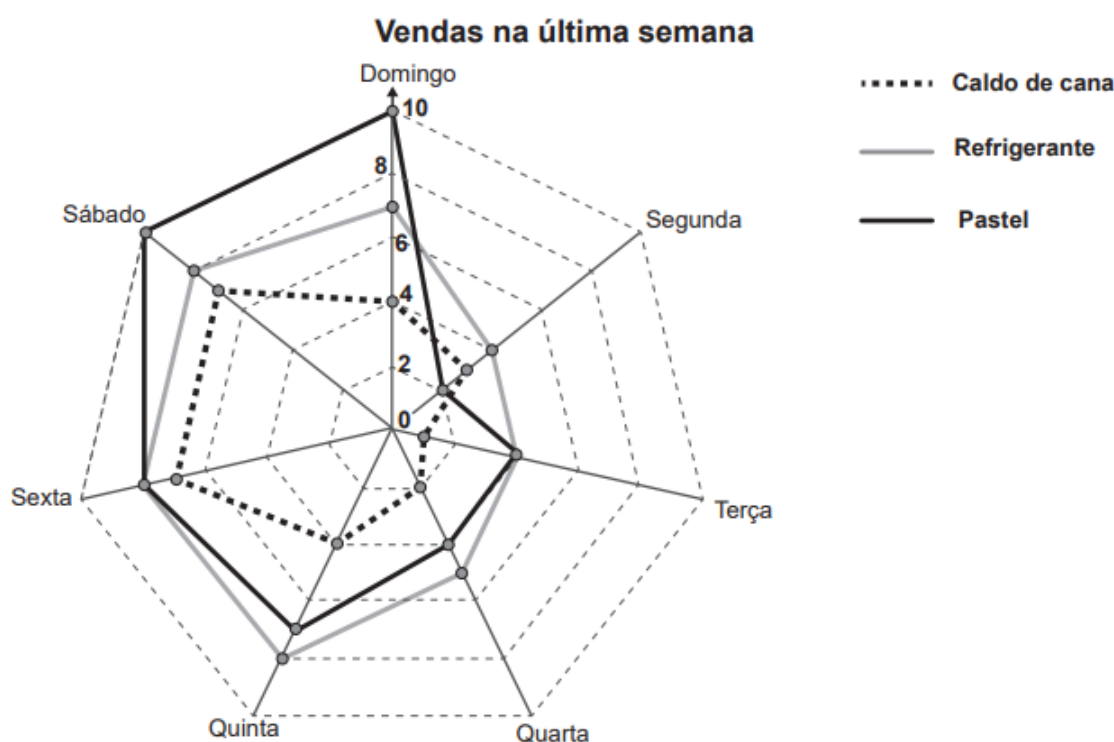
Logo, a alternativa correta é a letra D.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 4 e habilidade (EM13MAT409) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la devem desenvolver a habilidade H25 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 6 do ENEM.

### QUESTÃO 180

Um comerciante, que vende somente pastel, refrigerante em lata e caldo de cana em copos, fez um levantamento das vendas realizadas durante a semana. O resultado desse levantamento está apresentado no gráfico.

Figura 5.7: Questão 180 - prova cinza



Fonte: Prova do ENEM, 2019.

Ele estima que venderá, em cada dia da próxima semana, uma quantidade de refrigerante em lata igual à soma das quantidades de refrigerante em lata e caldo de cana em copos vendidas no respectivo dia da última semana. Quanto aos pastéis, estima vender, acada dia da próxima semana, uma quantidade igual à quantidade de refrigerante em lata que prevê vender em tal dia. Já para o número de caldo de cana em copos, estima que as vendas diárias serão iguais às da última semana.

Segundo essas estimativas, a quantidade a mais de pastéis que esse comerciante deve vender na próxima semana é

- A) 20.



- B) 27.  
 C) 44.  
 D) 55.  
 E) 71.

Comentário 1: para solucionar este problema, o aluno deve ter conhecimentos sobre construção e interpretação de gráfico de radar.

**Proposta de solução:** O aluno poderá organizar os dados em uma tabela da seguinte forma:

Tabela 5.1: Quantidades de produtos consumidos no respectivo dia da última semana

| Dias            | Caldo de cana | Refrigerante | Pastel |
|-----------------|---------------|--------------|--------|
| Segunda - feira | 3             | 4            | 2      |
| Terça - feira   | 1             | 4            | 4      |
| Quarta - feira  | 2             | 5            | 4      |
| Quinta - feira  | 4             | 8            | 7      |
| Sexta           | 7             | 8            | 8      |
| Sábado          | 7             | 8            | 10     |
| Domingo         | 4             | 7            | 10     |
| Total           | 28            | 44           | 45     |

Fonte: elaborada pelo autor, 2021

O vendedor prevê que a venda de refrigerante seja igual a soma das quantidades de refrigerantes e caldo de cana da última semana, ou seja,  $44 + 28 = 72$  refrigerantes, ele pretende vender a mesma quantidade para pasteis, sendo assim, ele prevê a venda para 72 pastéis, superando a semana anterior que seja de  $72 - 45 = 27$  pastéis. Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 4 e habilidade (EM13MAT409) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H25 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 6 do ENEM.

## 5.4 Prova amarela 2020

### QUESTÃO 163

O estatuto do idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Figura 5.8: Questão 163 - prova rosa

| Nome     | Idade (em ano) |
|----------|----------------|
| Orlando  | 89             |
| Gustavo  | 86             |
| Luana    | 86             |
| Teresa   | 85             |
| Márcia   | 84             |
| Roberto  | 82             |
| Heloisa  | 75             |
| Marisa   | 75             |
| Pedro    | 75             |
| João     | 75             |
| Antônio  | 72             |
| Fernanda | 70             |

Fonte: Prova do ENEM, 2020.

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a

- A)  $\frac{1}{12}$
- B)  $\frac{7}{21}$
- C)  $\frac{1}{8}$
- D)  $\frac{5}{6}$
- E)  $\frac{1}{4}$

Comentário 1: para solucionar este problema, o aluno deve ter conhecimento sobre probabilidade clássica.

**Proposta de solução:** defina o evento  $A = \{ \text{João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição} \}$ . Pelo enunciado, sabemos que entre as pessoas com as mesmas idades, a ordem de restituição é decidida por sorteio, para que João seja a sétima pessoa a receber a restituição, ele deverá ser a primeira pessoa a ser sorteada do subgrupo de 75 anos que é composto por 4 pessoas. Assim a probabilidade de João ser o sorteado é de  $P(A) = 1/4$ . Portanto, a alternativa correta é a letra E.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidade (EM13MAT311) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os

alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

## 5.5 Prova cinza 2021 aplicação regular

### QUESTÃO 137

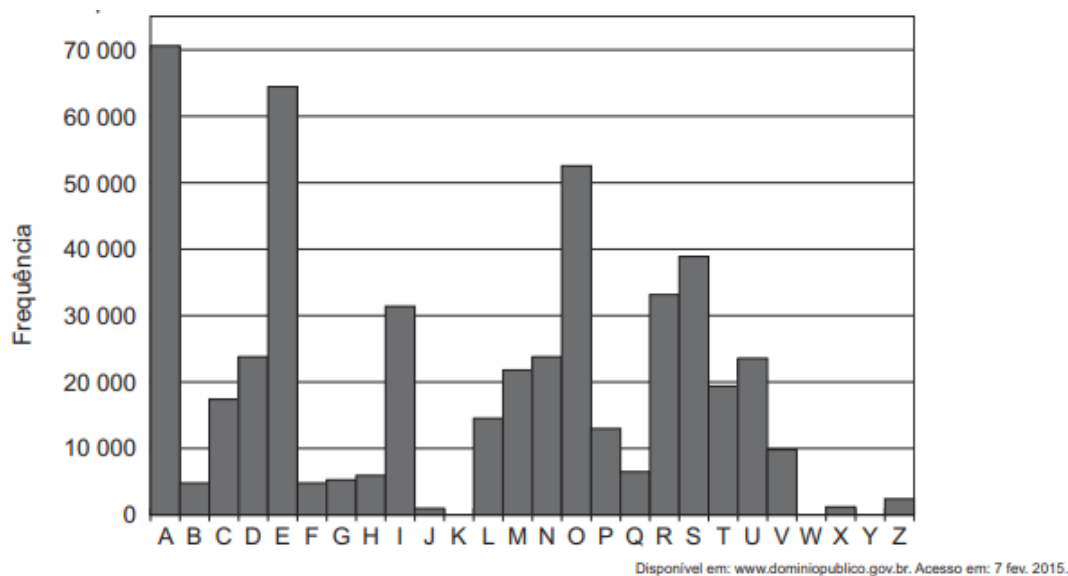
A cifra de César é um exemplo de um método de codificação de mensagens usado por Júlio César para se comunicar com seus generais.

No método, cada letra era trocada por uma letra que aprecia no alfabeto um número fixo de casas adiante(ou atrás) de forma cíclica. A seguir temos um exemplo em que cada letra é substituída pela que vem três posições à frente.

Figura 5.9: Questão 137 - prova cinza

|            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Original   | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| Codificado | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C |

Para quebrar um código como esse, a análise de frequência das letras de um texto é uma ferramenta importante. Uma análise do texto do romance *O guarani*, de José de Alencar, que é composto por 491 631 letras, gerou o seguinte gráfico de frequências:



Fonte: Prova do ENEM, 2021.

Após codificar esse texto com a regra do exemplo fornecido, faz-se nova análise de frequência no texto codificado. As quatro letras mais frequentes, em ordem decrescente de frequência, do texto codificado são:

- A) A, E, O e S.
- B) D, E, F e G.

- C) D, H, R e V.
- D) R, L, B e X.
- E) X, B, L e P.

Comentário 1: para a resolução deste problema o aluno deve apenas desenvolver a leitura e interpretação do gráfico.

**Proposta de resolução:** de acordo com o enunciado, para decifrar o código, o aluno precisa utilizar as 4 maiores frequências, realizando o agrupamento de maneira decrescente, ou seja, de acordo com o gráfico as maiores frequências são: A, E, O e S. Devemos agora, substituir cada letra pela terceira letra vinda após cada uma delas. De acordo com o gráfico obtemos: D, H, R e V, respectivamente. Concluímos assim, que a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 4 e habilidade (EM13MAT409) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H25 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 6 do ENEM.

#### QUESTÃO 149

Um zootecnista pretende testar se uma nova ração para coelhos é mais eficiente do que a que ele vem utilizando atualmente. A ração atual proporciona uma massa média de 10 kg por coelho, com um desvio padrão de 1 kg, alimentado com essa ração durante um período de três meses.

O zootecnista selecionou uma amostra de coelhos e os alimentou com a nova ração pelo mesmo período de tempo. Ao final, anotou a massa de cada coelho, obtendo um desvio padrão de 1,5 kg para a distribuição das massas dos coelhos dessa amostra.

Para avaliar a eficiência dessa ração, ele utilizará o coeficiente de variação ( $CV$ ) que é uma medida de dispersão definida por  $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ , em que  $s$  representa o desvio padrão e  $\bar{x}$ , a média das massas dos coelhos que foram alimentados com uma determinada ração.

O zootecnista substituirá a ração que vinha utilizando pela nova, caso o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a nova ração for menor do que o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a ração atual. A substituição da ração ocorrerá se a média da distribuição das massas dos coelhos da amostra, em quilograma, for superior a:

- A) 5,0.
- B) 9,5.
- C) 10,0.
- D) 10,5.
- E) 15,0.

Comentário 1: para resolver este problema, o aluno precisa substituir os valores dados e ter conhecimento sobre medidas de dispersão.

**Proposta de solução:** de acordo com o enunciado, já são dados os valores aos quais os alunos precisam utilizar. Considere a fórmula dada,  $CV = \frac{s}{x}$ . Para o primeiro caso, temos  $CV = \frac{1}{10} = 0,1$ . Pelo enunciado ainda, a nova razão será utilizada apenas se  $\frac{s}{x} < 0,1$ . Utilizemos agora, o novo desvio padrão dado que é 1,5 na equação encontrada, dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} CV = \frac{s}{x} < 0,1 &\Rightarrow \frac{1,5}{x} < 0,1 \\ \Rightarrow 0,1 x < 1,5 &\Rightarrow x < \frac{1,5}{0,1} \\ \Rightarrow x < 15,0. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra E.

Comentário 2: Podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidade (EM13MAT316) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H27 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

## 5.6 Prova cinza 2021 reaplicação

### QUESTÃO 140

Em uma fábrica de circuitos elétricos, há diversas linhas de produção e montagem. De acordo com o controle de qualidade da fábrica, as peças produzidas devem seguir um padrão. Em um processo produtivo, nem todas as peças são totalmente aproveitáveis, ou seja, há um percentual de peças defeituosas que são descartadas. Em uma linha de produção dessa fábrica, trabalham três máquinas,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , dia e noite. A máquina  $M_1$  produz 25% das peças, a máquina  $M_2$  produz 30% e a máquina  $M_3$  produz 45%. O percentual de peças defeituosas da máquina  $M_1$  é de 2%, da máquina  $M_2$  é de 3% e da máquina  $M_3$  é igual a 4%.

A probabilidade de uma peça defeituosa ter sido produzida pela máquina  $M_2$  é mais próxima de

- A) 15,6%
- B) 28,1%
- C) 43,7%
- D) 56,2%

E) 71,8%

Comentário 1: para resolver a questão, o aluno precisa ter conhecimentos sobre probabilidade condicional, Teorema de Bayes, assim como as operações com frações e porcentagem.

**Proposta de solução:** considere os eventos a seguir:  $D = \{\text{a peça é defeituosa}\}$ ,  $M_2 = \{\text{a peça produzida é da máquina } M_2\}$ . A probabilidade requerida é dada por:

$$P(M_2|D) = \frac{P(D \cap M_2)}{P(D)}.$$

Note que,  $P(D \cap M_2) = P(D|M_2) \cdot P(M_2) = 3\% \cdot 30\%$  e

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\ &= P(D|M_1) \cdot P(M_1) + P(D|M_2) \cdot P(M_2) + P(D|M_3) \cdot P(M_3) \\ &= 2\% \cdot 25\% + 3\% \cdot 30\% + 4\% \cdot 45\% \end{aligned}$$

Logo:

$$P(M_2|D) = \frac{0,009}{0,005 + 0,009 + 0,018} \cong 0,2812 = 28,1\%.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Comentário 2: podemos concluir que esta questão contempla a competência 3 e habilidades (EM13MAT311) presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba. Para que os alunos sejam capazes de resolvê-la, devem desenvolver a habilidade H28 do ENEM relacionada a capacidade de compreender o que está descrito na competência da área 7 do ENEM.

## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou alguns conceitos e resultados da área de Probabilidade e Estatística à luz da BNCC com olhar na matriz curricular do novo ensino médio da Paraíba. A partir desta temática, averiguamos as relações existentes entre as competências e habilidades presentes na BNCC e no ENEM (todas elas direcionadas para a Probabilidade e Estatística), bem como quais as contribuições e adequações que a proposta curricular do novo ensino médio da Paraíba trouxe no que diz respeito aos assuntos de Probabilidade e Estatística.

A pesquisa se ancorou em dois questionamentos que nortearam o trabalho que são: como as competências e habilidades presentes na BNCC estão relacionadas às competências e habilidades do ENEM para a resolução do teste no que diz respeito à probabilidade e estatística? E como as competências e habilidades presentes na nova proposta curricular da Paraíba do novo ensino médio estão relacionadas às competências e habilidades presentes na BNCC e do ENEM para a resolução das questões de probabilidade e estatística? A partir dos dados coletados nos documentos oficiais (da BNCC, do ENEM, da nova proposta curricular da Paraíba para o ensino médio) e de alguns trabalhos acadêmicos, é possível dizer que essas competências e habilidades referentes a probabilidade e estatística são necessárias para a resolução das questões selecionadas da prova do ENEM, e que a nova proposta curricular da Paraíba para o ensino médio obedece a construção estratégica para a formação dos alunos que teoricamente os preparam para a resolução das questões da prova do ENEM.

Foi possível ainda notar que as competências e habilidades presentes na BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba para o ensino médio, com respeito a área da Probabilidade e Estatística, são diferentes apenas em uma habilidade que está acrescida na competência 1 da área de matemática na nova proposta curricular da Paraíba o que é possível concluir que as propostas de ensino seguem o mesmo caminho, respeitando o que está posto na BNCC.

Além disso, a existência de uma gama de competências e habilidades nos documentos da BNCC e na nova proposta curricular da Paraíba, fornecem a possibilidade para que os alunos consigam adquirir o desenvolvimento dessas habilidades e competências, valendo o destaque para o termo "possibilidade", pois existe também a eventualidade de que os alunos não consigam desenvolver tais competências e habilidade, pelo menos não em sua totalidade.

Partindo dessas considerações, acrescento aqui experiências pessoais tanto na educação básica quanto no curso de licenciatura em Matemática acerca do ensino de probabilidade e estatística. Na minha formação no ensino básico, de fato presenciei o estudo sobre probabilidade

e estatística, porém vale salientar que a forma que foi trabalhado o ensino desses conteúdos de acordo com o currículo escolar ao qual eu estava inserido foi eficiente, mas bastante resumido. No que tange a estatística, nós como alunos do ensino básico utilizamos conceitos de medidas de tendência central e leituras de gráficos de modo geral. Já na parte de probabilidade vimos de forma rápida também o conceito de probabilidade clássica, o que posso concluir hoje que diversos conceitos foram deixados de lado e que isso implicou diretamente na resolução das questões de probabilidade e estatística do ENEM as quais resolvi em algumas edições da prova, trazendo dificuldades principalmente no que diz respeito a probabilidade.

Na minha formação como professor de Matemática, pude ver de maneira mais aprofundada inúmeros conceitos de probabilidade e estatística e percebi que muitos deles podem ser utilizados pelos estudantes para resolver as questões de probabilidade e estatística do ENEM. De fato, as competências e habilidades estavam sendo trabalhadas em sala de aula enquanto eu estava na formação da educação básica e também puder perceber como aluno de licenciatura em Matemática que a forma que foi apresentado para mim a probabilidade e estatística no ensino básico, depende do currículo escolar e do cronograma que os professores devem seguir.

De acordo com essas ideias, o trabalho possibilita estudos futuros que podem estar voltados para a Geometria, Trigonometria, Análise Combinatória e dentre as outras áreas que formam a Matemática. Além disso, a temática busca estabelecer relações entre os documentos da BNCC, ENEM e a nova proposta curricular da Paraíba, limitando-se ao estudo das competências e habilidades neles presentes, o que faz existir brechas para expandir o tema e estudar tais documentos de maneira mais aprofundada. No que concerne ao estudo das questões do ENEM, existe a possibilidade de acrescentar olhares críticos voltadas para as temáticas de contextualização e textualização, pois quando se fala sobre ENEM, essas temáticas ganham foco. Dessa forma, o trabalho aqui realizado tem a possibilidade de despertar diversas indagações e inquietações que servirão para os temas futuros de discussões.



## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Amanda Borburema. **A importância do Ensino da Estatística na Educação Básica**. 2019. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, CCEA, Universidade Estadual da Paraíba, Patos, 2019.

ARCEGO. P.; BERLANDIA. J. 2016 "**A História da Matemática como meio de interlocução no ensino da Probabilidade**". Pôster apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática - SBEM 2016, São Paulo, Brasil, julho de 2016. Disponível em: <[http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6356\\_2906\\_ID.pdf](http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6356_2906_ID.pdf)>. Acesso em: 2 Nov. 2021.

BELFIORE. Patrícia. **Estatística aplicada a administração, contabilidade e economia com Excel e SPSS**.1.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira(Inep). **Documento Básico**. Brasília: 2002. Disponível em: <[https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes\\_e\\_exames\\_da\\_educacao\\_basica/enem\\_exame\\_nacional\\_do\\_ensino\\_medio\\_documento\\_basico\\_2002.pdf](https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/enem_exame_nacional_do_ensino_medio_documento_basico_2002.pdf)>. Acesso em 10 Nov. 2021.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira(Inep). **Legislação e Documentos do ENEM**. Edital nº 13, de 7 de Abril de 2017. Disponível em <[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/edital/2017/edital\\_enem\\_2017.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2017/edital_enem_2017.pdf)>. Acesso em 10 Nov. 2021.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira(Inep). **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>>. Acesso em: 6 Fev. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2009a) **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP/MEC. Disponível em:<<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/outras-documentos>>. Acesso em 15 Out.2021

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio>>. Acesso em: 20 Nov. 2021.

BRASIL. Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nos 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho CLT, aprovada pelo Decreto-Lei no 5.452, de 1o de maio de 1943, e o Decreto-Lei no 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei no 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. **Portal da Legislação**, Brasília, 16 fev. 2017. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm)>. Acesso em: 8 Jan. 2022.

BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

DANTAS, C. A.B. **Probabilidade: um curso introdutório**. 3.ed. São Paulo: EDUSP, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. (Ensino médio) v. 2. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. (Ensino médio) v. 3. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

DUARTE, Luiz Vieira. **O ensino da Probabilidade no contexto da BNCC e à luz dos princípios da teoria da aprendizagem significativa crítica**. 2020. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Ciências Exatas e Geociências, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2020.

GIORDANO, Cassio Cristiano; KIAN, Fatima Aparecida. O Ensino de Probabilidade e o Novo Ensino Médio. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, [S.L.], v. 11, n. 1, p. 59-78, 1 jan. 2021. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em:< <http://dx.doi.org/10.37001/ripem.v11i1.2569>>. Acesso em: 1. Nov. 2021.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; DOLCE, Osvaldo; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mouro. **Fundamentos de Matemática Elementar: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. São Paulo: Atual, 2006.

IEZZI,G. DOLCE,O. DEGENSZAJN,D.PÉRIGO,R.ALMEIDA,N. **Matemática ciência e aplicações**. v.2. 3.ed. São Paulo: Saraiva, 2018. (Coleção conecte).

IEZZI,G. DOLCE,O. DEGENSZAJN,D.PÉRIGO,R.ALMEIDA,N. **Matemática ciência e aplicações**. v.3. 3.ed. São Paulo: Saraiva, 2018. (Coleção conecte).

KOPKA, Helmut; RAHTZ, Sebastian. **Latex**. Addison-Wesley, 2000.

LAUNAY, M, **A fascinante história da matemática: da pré-história aos dias de hoje**.1 ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil,2019.

LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedes**, [S.L.], v. 28, n. 74, p. 57-73. 2008. FapUNIFESP (SciELO).

MAGALHÃES, M. N, **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 3. ed. São Paulo: USP, 2013.

MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística básica: probabilidade e inferência**. São Paulo: Pearson Universidades, 2009.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

MENDOZA, L.P.; SWIFT, J. **Why teach statistics and probability: a rationale**. *In*: SHULTE, A.P.; SMART, J.R. (Ed.). *Teaching statistics and probability*. Reston: Yearbook National Council of Teachers of Mathematics, 1981. p. 90-100.

NASCIMENTO, Maria Antonia Silva. **O processo de efetivação do currículo de Matemática nas escolas municipais da cidade de Valença-BA: um olhar para o ensino de Probabilidade e Estatística**. 2019. Monografia (Especialização) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal da Educação, Ciência e Tecnologia, Valença, 2019.

PARAÍBA. **Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba**. Proposta curricular do ensino médio. 2020. Disponível em:< <https://pbeduca.see.pb.gov.br/p%C3%Algina-inicial/propostas-curriculares-da-para%C3%ADba>>. Acesso em 12 Fev. 2022.

PARAÍBA. Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba. **Resolução nº 410/2021, de 9 de dezembro de 2021**. INSTITUI E ORIENTA A IMPLEMENTAÇÃO DO REFERENCIAL CURRICULAR DA PARAÍBA PARA O ENSINO MÉDIO, COMO REFERÊNCIA PARA ELABORAÇÃO DOS CURRÍCULOS DAS INSTITUIÇÕES INTEGRANTES DO SISTEMA ESTADUAL DE ENSINO DA PARAÍBA, E ESTABELECE DIRETRIZES COMPLEMENTARES CONFORME DISPÕE A RESOLUÇÃO CNE/CEB Nº

3/2018, E DÁ OUTRAS PROVIDÊNCIAS. Disponível em:<[https://drive.google.com/file/d/17ya0WMCiuGyTGJLx6HLEui\\_kAzbi5elB/view](https://drive.google.com/file/d/17ya0WMCiuGyTGJLx6HLEui_kAzbi5elB/view)>. Acesso em: 12 Jan. 2022.

SAMPAIO, Nilo Antônio de Souza; ASSUMPCÃO, Alzira Ramalho Pinheiro de; FONSECA, Bernardo Bastos da. **Estatística Descritiva**. Belo Horizonte: Poisson, 2018

SOUSA, Natália Gonçalves de. **Estatística e Probabilidade no ensino médio**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018.

SERRA, Diego da Silva. **A contribuição da prova de Matemática do ENEM para o ensino de Probabilidade e Estatística**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. *In: Métodos de pesquisa*. GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (orgs). Porto Alegre: UFRGS, 2009. p. 31-32.

WHEELAN, C, **Estatística: o que é, para que serve, como funciona**. 1. ed. Rio e Janeiro: Zahar, 2016.