UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS (CCEA)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

LUAN PAULINO DA COSTA

CONSTRUINDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PATOS
2022

LUAN PAULINO DA COSTA

CONSTRUINDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campus VII da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

PATOS
2022

C837c Costa, Luan Paulino da.
Construindo razões trigonométricas através da resolução de problemas [manuscrito] / Luan Paulino da Costa. - 2022.
60 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.
"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Resolução de Problemas. 2. Trigonometria. 3. Educação Matemática. 4. Razões trigonométricas. I. Título

21. ed. CDD 516.24

Elaborada por Edson M. Almeida - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

LUAN PAULINO DA COSTA

CONSTRUINDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 03/08/22

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador - UEPB/CCEA)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Kátia Maria de Medeiros

Profª Dra. Kátia Maria de Medeiros (UEPB/CCT)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCT)

Profª. Ma. Lidiane Rodrigues Campêlo da Silva (UEPB/CCEA)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

AGRADECIMENTOS

À minha mãe pelo apoio em todos os momentos na minha jornada até aqui.

Aos meus avós maternos, Dona Luzia e Seu Luiz (*in memoriam)*, embora ausentes, sempre se farão presentes em meus pensamentos e no meu coração.

Aos professores do Curso de Matemática da UEPB, do campus VII, em especial, os professores Lidiane e Arlandson, os quais me orientaram e auxiliaram nessa etapa de graduação.

Aos meus colegas de turma que estão comigo nessa caminhada desde o início, especialmente, Alysson, Camila, Joabis, Larissa e Laísa.

RESUMO

Dentre os métodos que ganharam destaque no ensino da Matemática nas últimas décadas, está o ensino através da Resolução de Problemas, segundo o qual o conhecimento matemático seja construído pelos estudantes no decurso da resolução de situações problema. Apesar de ensino, aprendizagem e avaliação serem processos distintos, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe que esses três processos ocorram simultaneamente durante a resolução de situações problemas pelos estudantes, com o professor atuando como mediador e orientador em todo o processo. Com o objetivo de investigar os impactos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, foi realizada uma pesquisa de caráter qualitativo com 42 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual localizada no município de Condado, no interior da Paraíba. Os dados foram coletados a partir da observação participante do autor deste trabalho, o qual realizou uma intervenção juntamente ao docente responsável pela turma, o que caracteriza esta pesquisa como pesquisação. Apesar de algumas dificuldades encontradas, os estudantes, graças à metodologia utilizada, foram capazes de construir as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dentre os principais fatores observados que contribuíram para essa aprendizagem, estão a postura ativa dos alunos, o trabalho em grupo, a dinamicidade das aulas e a avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem, o que oportuniza intervenção do professor imediatamente para sanar as lacunas na aprendizagem.

Palavras-Chave: Resolução de Problemas. Trigonometria. Educação Matemática. Razões Trigonométricas.

ABSTRACT

Among the methods that have gained prominence in the teaching of Mathematics in recent decades, there is the teaching through Problem Solving, according to which mathematical knowledge must be built by students in the course of solving a certain kind of mathematical problem. Although teaching, learning and assessment are different processes, the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving proposes that these three processes occur simultaneously during the solving of problem situations by students–the teacher acting as a mediator and advisor in the entire process. In order to investigate the impacts of the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving in the construction of trigonometric ratios sine, cosine and tangent in a right triangle, a qualitative research was carried out with 42 students from two 2nd year high school classes at a state school located in the city of Condado, in the interior of Paraíba. The data were collected from the participant observation of the author of this work, who carried out an intervention together with the teacher responsible for the class, which characterizes this research as an action research intervention. Despite some difficulties encountered, the students, thanks to the methodology employed, were able to construct the trigonometric ratios in a right triangle. Among the main factors observed that contributed to this learning, there are the active posture of the students, the group work, the dynamics of the classes, and the assessment integrated to the teaching and learning process, which allows the teacher to intervene immediately to remedy the gaps in the learning.

Keywords: Problem Solving. Trigonometry. Mathematics Education. Trigonometric Ratios.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os processos de ensinar e aprender Matemática são pautas de diversas discussões no âmbito acadêmico e escolar. O avanço e a diversidade de tipos e organizações sociais faz com que o professor atual pense e reflita sobre formas de ensinar a Matemática de uma maneira capaz de proporcionar uma aprendizagem significativa desse saber aos seus discentes, enriquecendo e diversificando sua prática docente para ir além do método exclusivamente expositivo de ensino.

Vazquez (2010) traz que os educadores matemáticos, no decorrer do exercício de sua prática pedagógica, têm a oportunidade de perceber que os estudantes apresentam mais dificuldades em certos conteúdos matemáticos do que em outros. Dentre esses conteúdos, a aprendizagem de Trigonometria se configura como um grande obstáculo pedagógico, pois os alunos tendem a não alcançar níveis satisfatórios de aprendizagem dos conceitos trigonométricos, criando até certa aversão pelo conteúdo.

Dentre os métodos que ganharam destaque no ensino da Matemática nas últimas décadas, está o ensino através da Resolução de Problemas, propondo que o conhecimento matemático seja construído pelos estudantes no decurso da resolução de situações problema. De acordo com Allevato e Onuchic (2014), essa abordagem vem se configurando como uma estratégia metodológica adequada para a complexidade encontrada no âmbito educacional matemático.

Apesar de ensino, aprendizagem e avaliação serem processos distintos, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe que esses três processos ocorram simultaneamente durante a resolução de situações problemas pelos estudantes, com o professor atuando como mediador e orientador em todo o processo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Baseada nos aspectos fundamentais do ensino através da Resolução de Problemas, essa metodologia integra os processos de ensino, aprendizagem e avaliação e oportuniza que estes ocorram de forma mais significativa.

A motivação em utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se deu pelo interesse ascendente do autor deste trabalho em relação a essa metodologia que realizou uma Revisão Sistemática da Literatura, trabalho anterior publicado recentemente (COSTA; SILVA, 2022) que evidencia os benefícios dessa metodologia no ensino da Matemática na Educação Básica. Dentre esses benefícios, destacamos que essa metodologia fomenta a autonomia e a autoconfiança dos estudantes e a cooperação entre eles e que o momento de plenária é uma importante etapa da condução das atividades. Além disso, a

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é apontada como um eficiente instrumento para avaliar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Essa metodologia vem ganhando destaque no campo da Educação Matemática, como relatam os membros do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas – GTERP. Consolidado em 1992 e coordenado desde então por Lourdes de la Rosa Onuchic, o grupo se dedica a pesquisar "como se realiza a construção do conhecimento matemático pelo aluno e o trabalho do professor quanto à implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 76).

Esse trabalho tem por objetivo investigar os impactos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Em torno desse objetivo central e visando atingi-lo, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: a) Destacar as indicações trazidos pelos PCN e pela BNCC acerca da Resolução de Problemas e do ensino de Trigonometria; b) Apresentar aspectos fundamentais da Resolução de Problemas e da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; c) Discutir, do ponto de vista do ensino de Matemática, a construção das razões trigonométricas no triângulo retângulo; d) Observar a atuação dos estudantes durante a resolução dos problemas geradores, analisando-a à luz do referencial adotado.

Para isso, foi realizada uma pesquisa de caráter qualitativo com 42 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual localizada no município de Condado, no interior da Paraíba. Os dados foram coletados a partir da observação participante do autor deste trabalho, o qual realizou uma intervenção juntamente ao docente responsável pela turma, caracterizando, de acordo com André (1995), esta pesquisa como pesquisação. A coleta de dados se deu por meio de anotações realizadas pelo pesquisador, de registros fotográficos e da produção escrita dos estudantes durante a intervenção, posteriormente analisada pelo pesquisador.

Por meio deste estudo, foi possível notar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas se configura como uma estratégia metodológica para o ensino das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, tendo em vista que, na resolução do problema gerador no primeiro encontro, os estudantes, atuando com seus pares, construíram de forma significativa as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Durante a resolução a resolução do problema, o pesquisador conduziu as atividades sem fornecer respostas prontas aos estudantes, realizando questionamentos que conduziram os estudantes para a aprendizagem dos conceitos matemáticos estudados. Desse modo, apesar dessas dificuldades encontradas, os estudantes, graças à metodologia utilizada, foram capazes de construir as razões almejadas. Dentre os principais fatores observados que contribuíram para essa aprendizagem, estão a postura ativa dos alunos, o trabalho em grupo, a dinamicidade das aulas e a avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem, o que oportuniza intervenção do professor imediatamente para sanar as lacunas na aprendizagem.

Este trabalho se organiza em cinco capítulos, sendo que, após esse, é trazido o referencial teórico, o qual é dividido em três seções tratando, inicialmente, das recomendações trazidas pelos documentos normativos da Educação Básica acerca do ensino de Trigonometria e da Resolução de Problemas, em seguida, da Resolução de Problemas no ensino de Matemática e, por fim, das Razões trigonométricas no triângulo retângulo. O quarto capítulo trata-se dos aspectos metodológicos desse estudo e o quinto traz os resultados e discussão dos dados obtidos. Finalizando são trazidas algumas considerações finais e as referências utilizadas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 As recomendações trazidas pelos documentos normativos da educação básica

Nesta seção serão abordadas as recomendações trazidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino da Trigonometria no Ensino Médio. Também serão abordadas as recomendações desses documentos acerca da Resolução de Problemas enquanto metodologia no ensino da Matemática.

2.1.1 As recomendações curriculares para o ensino da Trigonometria

O estudo da Trigonometria está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio na parte III: 1º, 2º e 3º anos. A primeira parte desse estudo está inserido nos estudos de Geometria, relacionado às aplicações no triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente.

De acordo com os PCNs para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), a aprendizagem da Trigonometria deve ser relacionada às suas aplicações, evitando-se o uso excessivo do cálculo algébrico e enfatizando seu uso prático na realidade fora do livro didático. Neste contexto, vale destacar o uso da Trigonometria na resolução de problemas que envolve medições, geralmente envolvendo o cálculo de distâncias inacessíveis.

De maneira análoga, trazendo a Trigonometria na Unidade Temática *Geometria,* a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) recomenda que o ensino dos conceitos dessa unidade esteja ligado ao mundo físico e as diferentes áreas do conhecimento, ou seja, deve ser enfatizado a aplicação dos conceitos matemáticos na realidade que nos cerca, fundamentados principalmente na construção, representação e interdependência desses conceitos.

Dentro da Unidade Temática Geometria, temos o objeto de conhecimento “Relações métricas no triângulo retângulo” e relacionado a esse objeto temos as habilidades “(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” (BRASIL, 2018, p. 319) e “(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos”. (BRASIL, 2018 p. 536).

2.1.2 As recomendações acerca da Resolução de Problemas como metodologia no ensino da Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que, por divergir da simples reprodução de procedimentos e acúmulo de informações, a resolução de problemas é apontada como ponto de partida da atividade matemática por educadores matemáticos. Nesta abordagem, o conhecimento matemático tem significado quando os alunos resolvem situações desafiadoras e trabalham para construir resoluções para estas (BRASIL, 1998).

Ademais, os PCNs apresentam a resolução de problemas como eixo organizador dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, estabelecendo os seguintes princípios:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p. 41-42).

Considerando tais princípios, é importante que nos atentemos à natureza das situações que são considerados problemas nesta abordagem. Os PCNs definem problema como “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la” (BRASIL, 1998, p. 41). O documento diz ainda que “os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução” (BRASIL, 1998, p.41).

Resolver um problema pressupõe que o aluno elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses) compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos. É necessário que o estudante desenvolva habilidades que lhe permitam provar os resultados, testar e comparar diferentes caminhos para a solução do problema, dando mais importância ao processo de resolução e não apenas a uma resposta correta. O estudante deve explicar sua solução, questionar e buscar entender a solução apresentada por seus pares, a fim de construir o conhecimento matemático, deixando de lado a mera reprodução de procedimentos.

Na Base Nacional Comum Curricular, a resolução de problemas é trazida como uma forma rica de se trabalhar a Matemática no Ensino Fundamental e como uma potencial estratégia para o desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação e argumentação, o implica que o professor deve propiciar que os estudantes desenvolvam suas próprias maneiras de raciocinar, representar, comunicar e argumentar (BRASIL, 2018).

É importante que o professor elabore tarefas desafiadoras para que seja o desenvolvimento de tais habilidades. O ideal é que as situações propostas não sejam simples exercícios, isto é, atividades para as quais os estudantes disponham de métodos e procedimentos para imediatamente resolvê-las, mas antes atividades nas quais eles sejam desafiados a construir suas próprias soluções.

Desse modo, pretende-se valorizar uma aprendizagem desenvolvida a partir de tarefas investigativas e exploratórias acerca das unidades temáticas Geometria, Grandezas e Medidas, Números e Álgebra e Probabilidade e Estatística associada à Resolução de Problemas (BRASIL, 2018). Além disso, vale destacar que a BNCC traz a resolução de problemas em suas competências específicas da Matemática, bem como em diversas habilidades.

Desse modo, é evidente que a Resolução de Problemas deve ser considerada como metodologia de ensino dos conceitos matemáticos. Inserindo os estudantes em atividades de investigação, o professor torna a aprendizagem mais significativa e dinâmica.

2.2 A Resolução de Problemas no ensino de matemática

Nesta seção serão apresentados aspectos fundamentais da Resolução de Problemas e da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando alguns caminhos que levaram à consolidação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e como esta vem se aprimorando nas últimas décadas.

2.2.1 A Resolução de Problemas a partir de George Polya

Matemático e pesquisador húngaro, George Polya dá forma à sua pesquisa sobre Resolução de Problemas a partir da assunção como professor titular da Universidade de Stanford, nos Estados Unidos. Antes de atuar como professor nos EUA, Polya já possuía um currículo notável como matemático e educador matemático.

Atuando como professor na Universidade de Stanford, por volta de 1942, Polya passa a ser reconhecido por cursos, palestras e artigos publicados sobre o tema como a maior autoridade em Resolução de Problemas em todo o mundo. Em 1945, é publicado o livro *A arte de resolver problemas*, no qual o autor expõe quatro etapas que julgou ser importantes para a resolução de qualquer problema, a saber: 1. Compreender o problema; 2. Estabelecer um plano; 3. Executar o plano; 4. Examinar a solução obtida. Neste livro, Polya ilustra essas quatro fases, relacionando-as aos problemas que ele propõe na obra.

De acordo com Morais e Onuchic (2014), a preocupação de Polya em sua pesquisa sobre Resolução de Problemas está voltada para o desenvolvimento das habilidades dos estudantes para resolverem problemas. Para tal, segundo ele, os professores precisam também se tornar bons resolvedores de problemas e possuírem interesse em desenvolver essa habilidade em seus discentes. Neste sentido, Polya produziu outras obras após *A arte de resolver problemas*, todas direcionadas ao professor, trazendo problemas discutidos e detalhados, de forma a proporcionar um ensino da Matemática em um ambiente de indagação.

Para alguns pesquisadores, Polya pode não ser considerado como percussor do trabalho com a resolução de problemas, mas foi a partir dele que uma visão mais clara da Resolução de Problemas nos currículos escolares da Matemática foi possível (KILPATRICK, 1992).

Durante uma reunião do Comitê da *International Commission on Mathematical Instruction*, órgão responsável pela organização do *Second International Congress on Mathematics Education* (*II-ICME*), realizado na Inglaterra em 1972, Polya foi fortemente indicado como palestrante do evento. Tendo aceitado o pedido, ele foi homenageado no *II-ICME* e ministrou uma palestra intitulada *As I read them*, na qual exortou que a Resolução de Problemas fosse considerada como método de ensino. Além de Polya, outros pesquisadores como o inglês Edith Biggs e o israelense Efrain Físchbein também apresentaram palestras no evento e se pôde notar que pesquisadores de diversos lugares do mundo estavam dedicando sua pesquisa à Resolução de Problemas como metodologia de ensino da Matemática (MORAIS; ONUCHIC, 2014).

Em maio de 1975, aconteceu o primeiro *Research Workshop on Problem Solvingin Mathematics Education*, realizado durante cinco encontros ao longo daquele ano, reunindo pessoas envolvidas em pesquisas acerca da Resolução de Problemas, na Universidade da Georgia. Lester (1994) considera que este seminário foi mais do que um simples evento, pois incentivou uma colaboração entre pesquisadores na área da Educação Matemática que jamais havia ocorrido na produção de pesquisas.

2.2.2 A pesquisa em Resolução de Problemas alinhada ao currículo escolar

A reunião e colaboração de pesquisadores interessados na área da Resolução de Problemas resultou em diversas pesquisas acerca dessa temática, as quais foram publicadas em revistas, eventos e livros. Um exemplo dessa pesquisa é o livro do *National Council of Teachers of Mathematics* (*NCTM*) de 1980 intitulado *Problem solving in schools mathematics*. Composto por 22 artigos, o livro é bem fundamentado e traz algumas orientações e possibilidades para o professor trabalhar com a Resolução de Problemas como metodologia nas aulas da Matemática.

Nos 30 anos que se seguiram à publicação do livro *A arte de resolver problemas*, as pesquisas em Resolução de Problemas se desenvolveram paralelamente ao currículo dos Estados Unidos.

O Movimento da Matemática Moderna teve impacto mundial e vigorou em um primeiro momento no currículo dos Estados Unidos por volta de 1950 a 1970 e mais tarde contemplado em outros currículos do resto do mundo, inclusive no Brasil. Depois de quase trinta anos de tentativas sem sucesso da implementação desse movimento no ensino da Matemática, por meio de testes internacionais foi comprovado que crianças norte-americanas possuíam baixa proficiência na resolução de problemas matemáticos quando, por exemplo, comparadas a crianças de outros países que não adotaram o modelo de ensino proposto pelo Movimento da Matemática Moderna. Diante desses resultados fez-se necessário a busca por novos métodos para ensinar Matemática de uma forma a proporcionar uma aprendizagem mais significativa aos estudantes.

Nesse cenário, a Resolução de Problemas, sendo uma teoria já bem estruturada, começa a ganhar espaço nos currículos escolares dos EUA e, consequentemente, em diversos outros países mais tarde (MORAIS; ONUCHIC, 2014).

O documento *An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 198Os*, publicado em 1980 pelo NCTM, traz fortes recomendações para que a Resolução de Problemas norteasse o ensino da Matemática. O documento orienta que a Matemática deve ser trabalhada utilizando a Resolução de Problemas, considerando sua aplicação no mundo real e fazendo conexões com outras ciências.

Os anos que sucederam a publicação desse documento foram um pouco conturbados, pois a ausência no documento de como se trabalhar a Resolução de Problemas em sala gerou divergências e inquietações. No entanto, apesar das dificuldades, pesquisas continuaram sendo produzidas referentes a essa temática, como o livro *New Directions for Elementary School Mathematics* do *NCTM* em 1989. Schroeder e Lester, no capítulo *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving,* enfatizam que na década de 1980 muito material tinha sido produzido, o que este estava ajudando os professores a trabalhar a Matemática utilizando a Resolução de Problemas, mas esse material não era suficiente para orientador os docentes numa direção clara quanto ao trabalho com a Resolução de Problemas em sala de aula.

Schroeder e Lester (1989) apontam três formas de se trabalhar a Matemática em sala de aula utilizando os fundamentos da Resolução de Problemas: 1. O ensino **sobre** Resolução de Problemas; 2. O ensino **para** a Resolução de Problemas; 3. O ensino **através** da Resolução de Problemas.

O ensino **sobre** Resolução de Problemas é considerado como um novo conteúdo e consiste em orientar o aluno a como resolver problemas com regras e processos gerais, independente do conteúdo matemático abordado. *A arte de resolver problemas* é um dos mais importantes referenciais para o ensino sobre Resolução de Problemas. O ensino **para** a Resolução de Problemas consiste em ensinar Matemática para resolver problemas, isto é, o foco está em ensinar Matemática para seu uso na resolução de problemas. O problema dessa abordagem está no fato de que os estudantes só podem resolver as situações problemas após a introdução da fórmula ou algoritmo "necessários".

O ensino **através** da Resolução de Problemas o ensino dos conteúdos matemáticos parte de uma situação problema que incorpora os aspectos fundamentais desses conteúdos em sua resolução, permitido que os estudantes consolidem sua aprendizagem a partir da resolução dessas situações. De acordo com Schroeder e Lester (1989), essa abordagem é a que está mais alinhada ao que recomenda o NCTM no livro *Curriculum Evaluation Standards for the School Mathematics* (1989).

Em 2000, o NCTM publica os *Principies and Standards for School Mathematics* mais conhecido como *Standards 2000*. Essa obra traz o trabalho desenvolvido pelo NCTM durante as décadas de 1980 e 1990 e a importante fundamentação teórica construída desde 1970, a fim de desenvolver melhores recomendações para o trabalho com a Resolução de Problemas em sala de aula, o que não foi possível em *An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 198Os*.

Onuchic e Allevato, no artigo *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*, publicado em 2011, trazem que foi a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos começaram a pensar em conduzir os processos de ensino e aprendizagem **através** da Resolução de Problemas. As autoras trazem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como uma ampliação das três abordagens apontadas por Schroeder e Lester (1989) no trabalho com a Resolução de Problemas.

2.2.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Apesar de ensino, aprendizagem e avaliação serem elementos distintos, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe que esses três processos devem ocorrer simultaneamente no decorrer da resolução de situações problema pelos estudantes, cabendo ao professor mediar e orientar seus discentes durante esse processo conjunto (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Colocando o aluno como centro e considerando o problema como ponto de partida para a aprendizagem da Matemática, essa Metodologia tem mostrado a Resolução de Problemas como um campo fértil para a construção do conhecimento matemático, cabendo ao professor mediar e organizar as atividades em sala de aula.

Pesquisas como Costa e Silva (2022), bem como as desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), trazem resultados muito satisfatórios obtidos com a implementação da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da

Resolução de Problemas nas salas de aula de Matemática em todos os níveis de ensino, proporcionando o desenvolvimento de habilidades como trabalho em grupo e autonomia, além de se configurarem como um eficaz instrumento para avaliação.

Allevato e Onuchic (2014) apresentam uma sugestão para a condução das atividades em sala de aula utilizando essa Metodologia: (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das soluções na lousa; (7) plenária; (8) busca do consenso; (9) formalização do conteúdo; (10) proposição e resolução de novos problemas.

Segundo essa sugestão, o professor inicia elaborando ou selecionando um problema gerador, isto é, um problema que visa à construção de um conteúdo inédito para os estudantes, ou seja, o conteúdo matemático mais adequado para sua resolução ainda não foi apresentado aos discentes. É importante que o professor se atente a esse passo de seleção ou elaboração do problema, pois é ele que vai conduzir a construção do conhecimento matemático.

Após a proposição do problema, os estudantes devem fazer uma leitura individual de seu enunciado para que possam desenvolver suas próprias compreensões acerca do que o problema propõe. Formando grupos, os discentes realizam uma leitura em conjunto com seu respectivo grupo, a fim de compartilhar suas ideias entre os demais colegas que o compõe. Nesse passo, é comum surgir dúvidas em relação a alguma notação ou linguagem matemática, cabendo ao professor ajudar os estudantes a saná-las, sempre tomando cuidado para não fornecer respostas para o problema gerador.

No quarto passo, a resolução do problema se inicia. Os estudantes tentam resolver o problema com seus grupos, o que os guiará para a construção do conhecimento matemático abordado nele. Neste momento, o professor auxilia e incentiva os estudantes a estabelecer conexões com seus conhecimentos prévios, testar hipóteses, desenhar, construir tabelas, enfim, o docente sugere que eles percorram diversos caminhos, mas nunca fornece a solução para o problema.

Com a resolução do problema finalizada, um estudante de cada grupo é convidado a representar a solução, mesmo que esteja incorreta, construída pelo seu grupo na lousa. Perante esse painel de soluções o professor questiona os estudantes e os estimula a explicar, argumentar e justificar a solução apresentada, bem como questionar e buscar entender as soluções de seus colegas. Esse momento de plenária é considerado importante para que os discentes possam compreender o que erraram e o que acertaram e como podem melhorar, o que é importante na construção de qualquer conhecimento.

No momento de formalização do conteúdo, o professor deve apresentar uma solução para o problema gerador utilizando uma linguagem matemática formal, relacionando aquela resolução com o conteúdo matemático tratado no problema. É interessante também que o docente compare aspectos das resoluções apresentadas pelos estudantes com o conteúdo matemático formal trabalhado.

O último passo se refere à proposição de novos problemas, problemas esses relacionados com o problema gerador inicialmente proposto, com o objetivo de avaliar se os estudantes compreenderam os aspectos fundamentais do conteúdo tratado. A avaliação pode ser realizada nesse momento como também durante toda a resolução do problema gerador e pela análise da produção escrita dos estudantes.

Os dez passos apresentados são uma sugestão para nortear o trabalho com a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, cabendo ao professor adequá-los às especificidades de seus estudantes se necessário, mas se atentando para que a Metodologia não perca sua essência; por exemplo, não é adequado apresentar o conteúdo matemático formal em um primeiro momento.

Do exposto sobre a Metodologia, podemos perceber que seus fundamentos convergem para as ideias de Freire (2021) de que ensinar não é transferir conhecimento e sim criar possibilidades para que os educandos possam construí-lo. O autor ainda destaca que o professor deve respeitar e incentivar a autonomia discente na construção dos conteúdos escolares.

Da mesma maneira notam-se semelhanças nas ideias trazidas por Skovsmose (2014) sobre os cenários investigativos e sua importância na aprendizagem da Matemática. O autor afirma que, diferentemente do método tradicional do ensino de matemática baseado em exercícios, nos cenários investigativos, a aprendizagem dos conceitos matemáticos ocorre com os estudantes atuando de maneira ativa, pesquisando e investigando, a fim de construir tais conhecimentos.

2.2.4 A avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O processo de avaliação tem sido compreendido muitas vezes como forma de classificar o aprendizado do aluno quantitativamente sem dar margens a questionamentos sobre o que levou o aluno a cometer o erro, preocupando-se apenas com o número de erros e acertos. Além disso, este processo é confundido com a realização de provas classificatórias (PIRONEL; VALLILO, 2017).

Na Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a avaliação acontece integrada aos processos de ensino e aprendizagem “de modo a potencializar o desenvolvimento do estudante para lhe garantir sucesso em matemática e auxiliar em seus desenvolvimentos críticos e criativos para se torne um cidadão participativo em comunidade social e cultural profissional” (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 280).

Há duas possibilidades, e é adequado que ambas sejam utilizadas, para avaliar a aprendizagem utilizando essa Metodologia. A primeira ocorre durante todo o processo de desenvolvimento da atividade proposta pelo professor para a construção do novo conceito matemático. A segunda maneira se refere à proposição de novos problemas semelhantes ao problema gerador já resolvido.

Em relação à primeira, durante a resolução do problema gerador, o professor pode verificar se os estudantes aprenderam os conceitos desejados através das ações dos estudantes durante a atividade, no momento de plenária ou ainda ao analisar a produção escrita doa estudantes.

Na segunda opção, a avaliação é realizada em um momento posterior à resolução do problema gerador, com a proposição de novos problemas. Esses problemas podem ser semelhantes ao gerado mudando apenas alguma dados ou novos problemas que abordam os mesmos conceitos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

A proposta da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram concomitantemente de maneira integrada. Neste sentido, espera-se que nessa metodologia a avaliação seja parte dos processos de ensino e aprendizagem, oportunizando intervenções contínuas durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula.

2.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

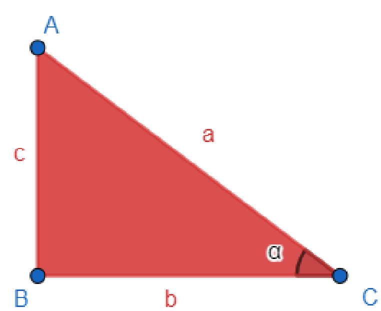
Esta seção é destinada à discussão, do ponto de vista matemático, da construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. As ideias aqui abordadas foram utilizadas na construção da atividade desenvolvida com os estudantes e devem ser utilizadas no momento de formalização do conteúdo. O livro de João Lucas Barbosa (1995) foi utilizado como referencial para a construção dessa seção.

A Trigonometria é, originalmente, uma área da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Sua origem é incerta, mas podemos afirmar que alguns aspectos da Trigonometria eram utilizados por civilizações antigas do Mediterrâneo e Egito. O desenvolvimento dessa área foi motivado por necessidades nos campos das navegações e da Astronomia.

Ao longo da história, estudiosos como Eratóstenes (276-195 a.C.), Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) e Johann Müller, também conhecido como Regiomontanus (1436-1476), dedicaram-se ao estudo da Trigonometria, contribuindo para o aperfeiçoamento e desenvolvimento dessa área da Matemática.

Nesse texto, estamos interessados na Trigonometria no triângulo retângulo, onde são definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Dado o triângulo retângulo ABC, consideremos o ângulo α indicado na figura a seguir:



I) Definimos como *seno* do ângulo α, denotado por sen α, o valor do quociente $\frac{c}{a}$.

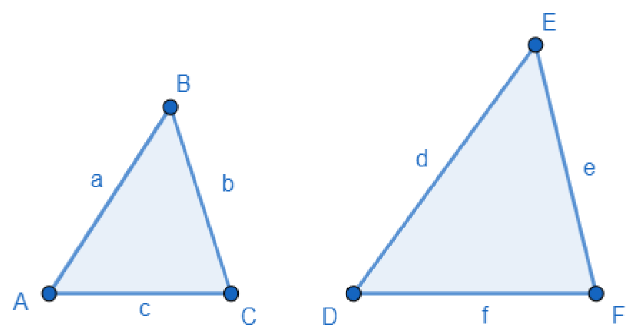
II) Chamamos de *cosseno* do ângulo α, denotado por cos α, o valor do quociente $\frac{b}{a}$.

III) A razão *tangente* do ângulo α, denotada por tan α, é dada pelo quociente $\frac{c}{b}$.

Essas razões não estão ligadas a esse triângulo em específico e sim ao ângulo α que estamos considerando, ou seja, se considerarmos o ângulo α em qualquer outro triângulo retângulo, os valores dessas razões serão os mesmos.

2.3.1 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são *semelhantes* se pudermos estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e seus lados correspondentes sejam proporcionais.



Se dois triângulos ABC e DEF são semelhantes e $A \to D, B \to EeC \to F$ é a correspondência que estabelece essa semelhança, então:

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F} e$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k,$$

sendo a constante k, obtida pelo quociente comum entre os lados correspondentes, denominada *razão de proporcionalidade*.

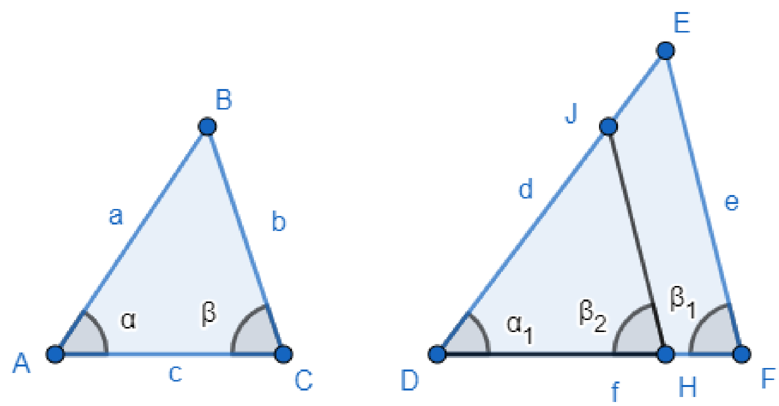
O teorema seguinte, que retiramos de Barbosa (1995), é mais conhecido como "segundo caso de semelhança de triângulos":

Teorema: Dados dois triângulos *ABC* e *DEF*, se $\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{AC}{DF}\right)$, então esses triângulos são semelhantes.

Ou seja, se dois ângulos de dois triângulos forem congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Prova. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então se $\hat{A} = \hat{D} e \hat{B} = \hat{E}$, consequentemente $\hat{C} = \hat{F}$. Logo os pares de ângulos dos dois triângulos são congruentes.

Basta provarmos agora que os lados dos triângulos são proporcionais. No lado DF do triângulo DEF marque um ponto H, tal que DH = AC, e, por esse ponto, trace uma reta paralela ao lado EF.



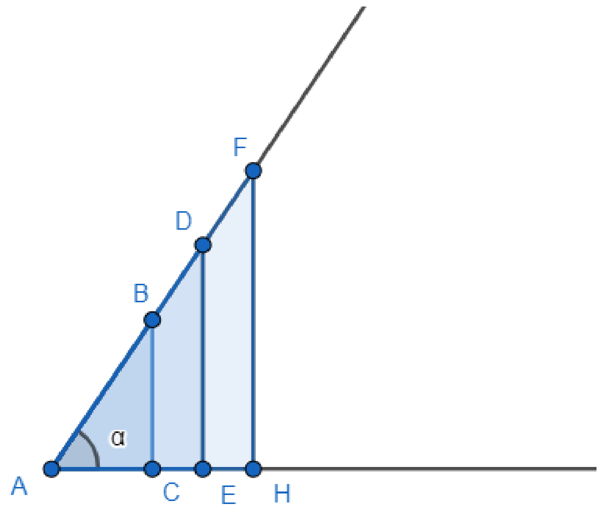
Perceba que essa reta corta DE em um ponto J, formando o triângulo DJH o qual é congruente ao triângulo ABC, pois $\hat{A} = \hat{E}, AC = DH e \hat{C} = \hat{F} = D\hat{H}J$, sendo essa última igualdade consequência do paralelismo de JH e EF. Pelo teorema de Tales[1], segue-se que $\left(\frac{DH}{DF}\right) = \left(\frac{DJ}{DE}\right)$. Como $DH = AC e DJ = AB$, obtemos:

$$\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{AC}{DF}\right)$$

De maneira análoga demonstra-se que $\left(\frac{AC}{DF}\right) = \left(\frac{BC}{EF}\right)$, ficando provado o teorema.

Então, os valores das razões seno, cosseno e tangente do ângulo α independem do triângulo retângulo que contém α como ângulo que tomemos por referência para calculá-las.

1 Teorema: Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela se divide na mesma razão (BARBOSA, 1995).



Pelo teorema anterior, vemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AH}$, ...

Como consequência, temos o seguinte:

$$sen\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FH}{AF} = \cdots$$

$$cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AF} = \cdots$$

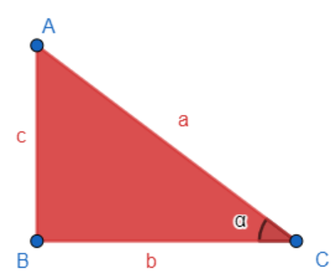
$$tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FH}{AH} = \cdots$$

2.3.2 Relações entre as razões trigonométricas

1ª relação: Para qualquer ângulo , temos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Considerando o seguinte triângulo da figura abaixo, têm-se:



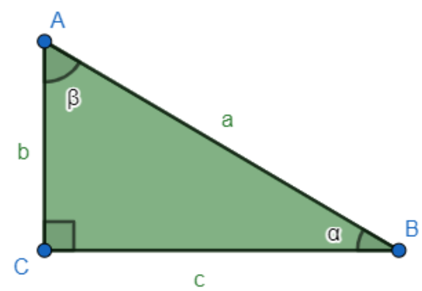
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{(c^2+b^2)}{a^2},$$

donde, pelo teorema de Pitágoras, obtemos

$$\frac{a^2}{a^2} = 1.$$

2ª Relação: Seja um ângulo agudo, temos

a) $sen(90º - \alpha) = cos\alpha$



Considerando o triângulo retângulo ilustrado acima, vemos que o ângulo 90º − α é o ângulo β, pois $90° + \beta + \alpha = 180°$e disso segue que $\beta = 90° - \alpha$.

Portanto, podemos reescrever sen (90º − α) = cos α como sen β = cos α. Como $sen\beta = \frac{c}{a} e cos\alpha = \frac{c}{a}$, concluímos que $sen\beta = cos\alpha$.

b) $cos(90 \circ -\alpha) = sen\alpha$

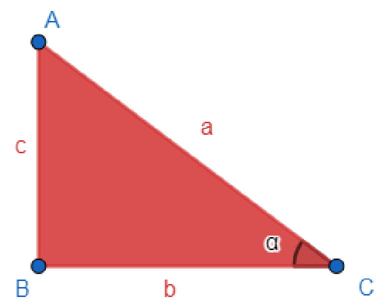
De maneira análoga ao item anterior, vamos reescrever $cos(90° - \alpha)$ como cos β. Como $cos\beta = \frac{b}{a} e sen\alpha = \frac{b}{a}$, concluímos que $cos\beta = sen\alpha$.

c) $tan(90° - \alpha) = \frac{1}{tan\alpha}$

Vamos reescrever $tan(90° - \alpha)$ como $tan\beta$.

De $tan\beta = \frac{b}{c} e tan\alpha = \frac{c}{b}$, segue-se imediatamente o resultado.

3ª **Relação**: A tangente de um ângulo agudo é igual a razão entre $\frac{sen\alpha}{cos\alpha}$.



Considerando o triângulo retângulo acima, temos:

$sen\ \alpha = \frac{c}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Logo,

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \tan\alpha$$

.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa possui caráter qualitativo, visto que, de acordo com Bicudo (2019), valoriza o subjetivo, a descrição de diferentes experiências e concepções, relatos de observação e outros aspectos que deem conta dos dados sensíveis, e se caracteriza como pesquisação que, segundo André (1995, p. 28), "envolve sempre um plano de ação, plano esse que se baseia em objetivos, em um processo de acompanhamento e controle da ação planejada e no relato concomitante desse processo. Muitas vezes esse tipo de pesquisa recebe o nome de intervenção".

Os dados foram coletados a partir da observação participante do pesquisador e anotações por ele realizadas em um diário de campo e a partir da análise da produção escrita dos estudantes, analisadas em um momento posterior. Os sujeitos da pesquisa foram 42 alunos matriculados na 2ª série, das turmas A e B, de uma escola da rede pública de Ensino Médio localizada no município de Condado, na Paraíba.

Vale ressaltar o papel ativo que o pesquisador deve desempenhar na pesquisação, não se limitando apenas a um coletor de dados. O pesquisador deve mediar e orientar todo o processo de intervenção, a fim de executar a ação planejada. Neste sentido, o autor desse trabalho assumiu o papel de mediador e orientador em todo o processo desenvolvido, contando também com a presença do docente responsável pelos estudantes em todas as etapas da atividade.

O plano de ação desse estudo foi elaborado para dois momentos: 1) A aplicação do problema gerador, visando a construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente e 2) A Verificação da aprendizagem, que foi a aplicação de um problema no qual os estudantes colocaram em prática o que aprenderam no primeiro momento.

Intitulado Construindo razões trigonométricas no triângulo retângulo, o problema gerador tem os seguintes itens em seu enunciado:

1. Utilizando régua e compasso construa um ângulo que mede 30º.

2. Trace uma reta que passa por um ponto B sobre um dos lados do ângulo e que seja perpendicular ao outro lado. Repita esse processo com diferentes pontos do lado escolhido inicialmente, formando triângulos retângulos de diferentes tamanhos.

3. Estabeleça relações entre os lados dos triângulos retângulos e os valores de seno, cosseno e tangente de 30º.

O problema foi produzido pelo autor deste trabalho e apresentado ao professor responsável pelos discentes. O objetivo do item 1 era que os estudantes construíssem um ângulo que mede 30° utilizando régua e compasso; o do item 2, que eles construíssem triângulos semelhantes utilizando o ângulo de 30°; e o do item 3, etapa mais importante, que eles, conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente de 30°, estabelecessem relações entre os lados dos triângulos construídos por eles e esses valores.

O segundo momento foi destinado à verificação da aprendizagem, na qual os estudantes iriam utilizar os conceitos construídos no primeiro momento para verificar se a rampa da entrada da escola onde estudavam é adequada para pessoas portadoras de alguma deficiência que necessitasse utilizar a rampa. A seguir temos o enunciado da verificação da aprendizagem:

1. A NBR 9050 estabelece que a inclinação deve ser calculada de acordo com a expressão:

$$i = \frac{h \, . \, 100}{c}$$

em que:

• i é a inclinação, em %;

• h é a altura do desnível;

• c é o comprimento horizontal da rampa.

Além disso, para desníveis de até 0,80 m, a inclinação permitida deve estar entre 6,25% e 8,33%.

A partir dessas informações, responda:

a) A expressão da inclinação pode ser relacionada com qual razão trigonométrica? Justifique.

2. Agora, vamos medir a rampa da entrada da escola e responder:

a) Desenhe o triângulo que representa essa rampa com suas respectivas medidas de lados e ângulos, descrevendo como vocês as encontraram.

b) A rampa da entrada da escola está de acordo com a NBR 9050? Justifique.

No item 1 os estudantes possuíam informações sobre a equação utilizada para o cálculo da inclinação adequada para rampas de acordo com a NBR 9050 e deveriam relacionar essa expressão com uma das razões trigonométricas construídas no primeiro encontro. Já no item 2, os estudantes, de posse da medida de dois lados do triângulo retângulo que representa a rampa da entrada da escola, descobririam os outros valores e, em seguida, verificariam se essa rampa era adequada ou não de acordo com a norma padrão.

O primeiro encontro com ambas as turmas ocorreu no dia 02 de maio de 2022, sendo das 7:00 às 8:30 com a turma A e das 8:30 às 10:00 com a turma B. No primeiro encontro foi aplicado o problema gerador seguindo o roteiro de passos proposto por Allevato e Onuchic (2014).

A verificação da aprendizagem foi realizada no dia 06 de maio de 2022, na turma A das 7:00 às 8:30 e na turma B das 8:30 às 10:00. Em ambas as turmas as atividades foram orientadas pelo conjunto de passos já supracitados.

Como veremos no capítulo seguinte, a análise e discussão dos resultados obtidos em cada uma das turmas foram realizadas separadamente, abordando inicialmente os dados obtidos nos dois encontros da turma A e, em seguida, os adquiridos com a turma B. Os estudantes serão nominados por números acompanhados da identificação de sua turma, por exemplo, o estudante 1 da turma A, será nomeado como Estudante 1A e, do mesmo modo, as duplas formadas por eles foram nomeadas por um número seguido da turma à qual pertencem, por exemplo, a dupla 1 da turma A foi nomeada como Dupla 1A.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como mencionado anteriormente, em cada turma houve dois encontros em dois dias da mesma semana. Em ambas as turmas, no primeiro encontro, foi resolvido o problema gerador que, de acordo com Allevato e Onuchic (2014), se configura como uma situação que visa a construção de um novo conteúdo ou conceito matemático, isto é, o procedimento mais adequado ou conteúdo relacionado à solução do problema ainda não foram trabalhados em sala de aula.

O segundo momento nas duas turmas tratou da verificação da aprendizagem, para a qual foi aplicado um problema abordando os conceitos aprendidos no encontro anterior, com o objetivo de avaliar se os estudantes compreenderam tais conceitos. Pironel e Vallilo (2017) ressaltam que, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a avaliação deve ocorrer durante todo o desenvolvimento da atividade proposta pelo professor.

A seguir, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos durante os encontros com os estudantes das turmas A e B. Os resultados são discutidos separadamente, visto que, apesar de serem estudantes da mesma escola, da mesma série e o pesquisador ter adotado as mesmas intervenções, os resultados obtidos são diferentes.

4.1 Turma A – primeiro encontro

No primeiro encontro com a turma A, seguindo os passos propostos por Allevato e Onuchic (2014), citados no Capítulo 3, após algumas saudações, o problema gerador foi entregue aos estudantes que realizaram uma leitura individual e iniciaram a compreensão dos três itens do enunciado. Foi solicitado pelo pesquisador que os estudantes se dividissem em duplas e foi realizada uma leitura em conjunto com toda a turma.

Questionados se haviam tido alguma dúvida sobre o enunciado do problema, os estudantes afirmaram entendê-lo, porém, como disse o Estudante 1A: “Entendi, mas não sei como fazer um ângulo de 30 usando compasso”. O pesquisador questionou se algum dos estudantes sabia como realizar a construção de um ângulo de 30º utilizando régua e compasso, e nenhum aluno se manifestou de forma positiva, tornando evidente que nenhum deles sabia como construir aquele ângulo utilizando régua e compasso.

O pesquisador interveio e realizou o seguinte procedimento de construção do ângulo de 30° com os estudantes:

Passo 1: Trace um segmento OA sob uma reta r qualquer.

Passo 2: Utilizando o compasso com abertura OA e a ponta seca no ponto O trace um arco de circunferência. E com a mesma abertura e a ponta seca no ponto A trace outro arco.

Passo 3: Marque o ponto B que é a interseção dos dois arcos traçados no passo anterior e trace o segmento OB, formando o ângulo AÔB = 60º.

Passo 4: Utilizando o compasso com abertura OB e a ponta seca no ponto B, trace um arco de circunferência e marque o ponto C que é a interseção desse arco com o arco de centro em A.

Passo 5: Trace a semirreta OC que é a bissetriz do ângulo AÔB = 60º. Logo, AÔC = 30º = BÔC.

Alguns estudantes apresentaram dificuldades em utilizar o compasso. A Estudante 2A afirmou o seguinte: "Eu mesmo nunca aprendi a usar isso na minha vida, primeira vez que estou entendendo para que serve"; com a ajuda da outra componente de sua dupla, ela efetuou com êxito o passo a passo da construção.

A construção do ângulo de 30º, item 1 do problema gerador, foi realizada e, em seguida, o pesquisador deu início ao item 2, o qual solicitava outra construção com régua e compasso. Instigando a conexão com os conhecimentos prévios dos estudantes, como indicam Allevato e Onuchic (2014) para o trabalho com a metodologia tratada, o pesquisador iniciou o diálogo:

Pesquisador: O que são os lados do ângulo?

Estudante 3A: São as retas que passam por O e por A e C.

Pesquisador: Todos concordam com a colocação de Estudante 3A?

Estudante 4A: Eu concordo, mas eu acho que não são retas inteiras, porque elas param no ponto O que é a origem das duas.

Pesquisador: Então quando as "retas" têm origem em um ponto e se prolongam apenas para um lado são chamadas de quê?

Estudante 1A: Semirretas!

Estudante 3A: É mesmo são duas semirretas com origem no O como disse estudante 4A.

Pesquisador: Isso mesmo, os lados dos ângulos são as semirretas com origem no vértice do ângulo que, na nossa construção, é o ponto O.

Todos os estudantes compreenderam o que são o vértice e os lados do ângulo construído, e o diálogo prosseguiu:

Pesquisador: E uma reta perpendicular o que é?

Estudante 5A: Eu sei que forma um ângulo de 90 com a outra.

Estudante 2A: Uma reta perpendicular tem um ângulo reto, né?

Pesquisador: As duas colocações estão corretas. Alguém pode me dizer por quê?

Estudante 6A: Um ângulo reto vale 90°, eles falaram certo porque é a mesma coisa.

Pesquisador: Exatamente. Um ângulo de 90º também é conhecido como ângulo reto. E chamamos de perpendicular uma reta que forma um ângulo desse tipo com outra reta, segmento ou semirreta.

Prosseguindo, o pesquisador questionou se os estudantes sabiam como construir uma reta perpendicular à reta r que passe por um ponto P sobre o lado OC do ângulo AÔC = 30° e de maneira geral os estudantes afirmaram não conseguir. O pesquisador mais uma vez auxiliou os estudantes realizando o passo a passo para a construção da reta perpendicular:

Passo 1: Com uma abertura maior que a distância do ponto P até a reta r, trace um arco de circunferência com centro em P que toca a reta r em dois pontos Q e R.

Passo 2: Utilizando o compasso com abertura QR e a ponta seca em Q trace um arco de circunferência. E com abertura QR e a ponta seca em R trace outro arco.

Passo 3: Considerando o ponto S como a interseção desses arcos, trace a reta perpendicular a reta r que passa pelos pontos P e S e visualize o triângulo retângulo OPD, onde D é a interseção da reta r e sua perpendicular.

Nenhuma dupla apresentou dificuldades nessa construção. Perceba que nessas duas primeiras etapas do problema gerador, o professor auxiliou os estudantes nas construções utilizando régua e compasso. Não é comum a utilização de régua e compasso para a construção de figuras em sala de aula, geralmente as figuras são desenhadas sem qualquer medição ou exatidão, utilizando no máximo uma régua para que as linhas sejam retas. Ao optar pela utilização de régua e compasso nas construções do ângulo de 30° e do triângulo retângulo a serem utilizados na resolução do item 3 do problema gerador, essa atividade por si só já se mostrou interessante tanto para os estudantes quanto do ponto de vista matemático.

Ao iniciar a etapa 3 do problema gerador, o pesquisador solicitou que os estudantes medissem e anotassem as medidas dos lados dos triângulos retângulos construídos por eles e apresentou para os estudantes os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo de 30º. Na lousa, o pesquisador escreveu:

$$\text{sen } 30° = 0{,}5$$

$$\cos 30° = 0{,}866\ldots$$

$$\tan 30° = 0{,}577\ldots$$

Nesse momento, o pesquisador enfatizou que, quando vamos nos referir ao seno, cosseno e tangente usamos as abreviações dessas palavras pela praticidade e também que os valores do cosseno e da tangente de 30° continuavam por “mais algumas casas” decimais, por isso as reticências, mas considerar três casas após a vírgula era o bastante. Em seguida, o pesquisador instigou os estudantes a estabelecerem as relações solicitadas pelo item 3 do problema e o seguinte diálogo foi iniciado:

Estudante 7A: Como assim? Eu vou usar as medidas do meu triângulo e achar esses valores 0,5, 0,86 e 0,57?

Pesquisador: Isso mesmo, vocês vão operar esses valores que são as medidas dos lados dos triângulos que vocês construíram e tentar chegar nesses valores ou valores próximos aos que correspondem ao seno, cosseno e tangente de 30º que é o ângulo que estamos considerando no nosso triângulo.

Estudante 1A: Mas como eu vou somar? Multiplicar? Tenho que fazer o quê?

Pesquisador: Isso quem vai me dizer são vocês. Somem, subtraiam, multipliquem e dividam esses valores vejam o que acontece.

Durante toda a resolução do problema, o professor deve agir como orientador e mediador, incentivando os estudantes a utilizar conceitos e técnicas operatórias já conhecidos, incentivando o trabalho em grupo, sem fornecer respostas prontas, demostrando sempre confiança nos discentes (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; PIRONEL; VALLILO. 2017). No trabalho com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor deve instigar a autonomia e acreditar no potencial do aluno, que este, com os conteúdos já adquiridos, é capaz de construir um novo conhecimento matemático.

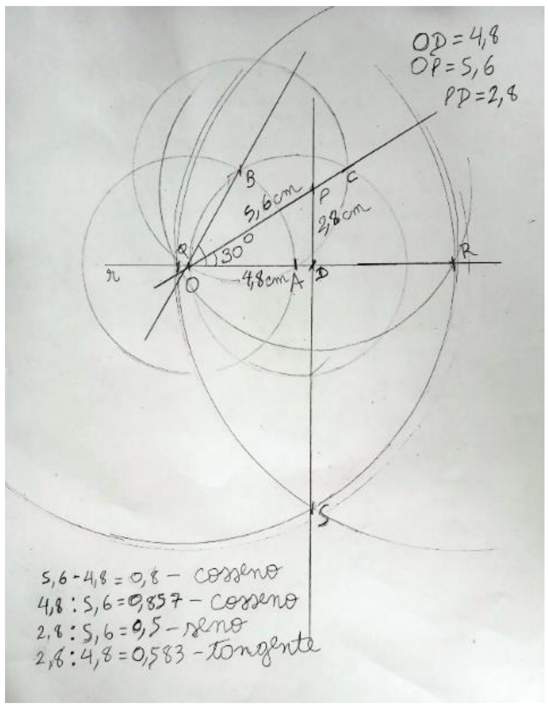
Neste momento, o pesquisador foi questionado por um dos estudantes se poderiam utilizar a calculadora, e o pesquisador confirmou que sim, apesar de ser mais adequado que os estudantes realizassem as operações sem utilizá-la a calculadora, verificando em seguida o resultado de suas operações.

Alguns momentos depois, o Estudante 8A indagou “Achei um, faço o que agora?”, e o pesquisador respondeu “Anote o que você fez para encontrá-lo e tente achar os outros dois valores”.

Gradativamente, os estudantes afirmaram encontrar os valores do seno, cosseno e tangente de 30º, operando com as medidas dos lados de seus triângulos e, após todas as duplas afirmarem haver concluído as etapas do problema gerador, o pesquisador deu início ao momento de plenária.

No momento de plenária, o pesquisador convidou uma dupla por vez para explicar sua resolução na lousa. Inicialmente vieram os estudantes da Dupla 1A, os quais apresentaram a seguinte solução:

Figura 1 - Resolução Dupla 1A

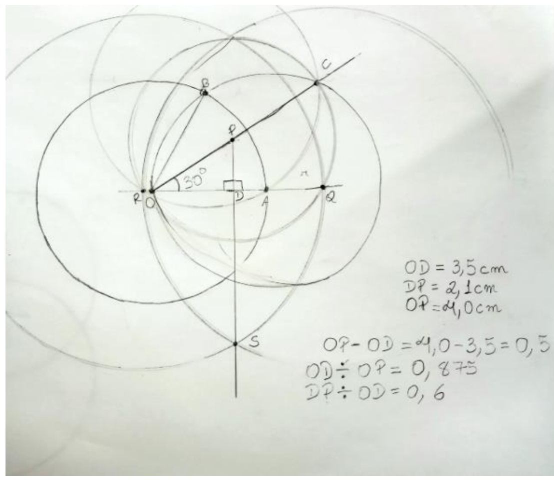


Fonte: Acervo da pesquisa

Note que os valores do seno, cosseno e tangente foram encontrados pelas três divisões efetuadas pelos estudantes da Dupla 1A, porém na subtração, eles encontraram o valor 0,8 que, dentro da exatidão utilizada, não é assim tão próximo ao valor do cosseno de 30°. O pesquisador questionou aos demais estudantes se a resolução da Dupla 1A estava correta e/ou semelhante a deles, e prontamente a Estudante 2A, integrante da Dupla 2A, declarou: “Tá parecida com a nossa”, e o Estudante 8A, integrante da Dupla 3A, também corroborou: “A nossa também, fizemos assim”.

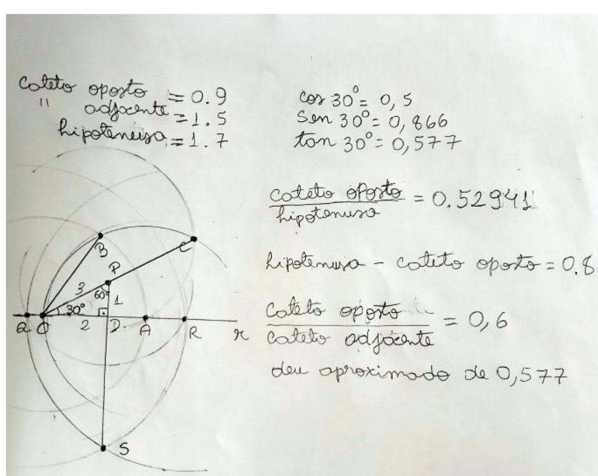
Indagados se mais alguém tinha utilizado alguma operação diferente da divisão para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente de 30º, nenhum outro estudante se manifestou, evidenciando que as demais duplas, com exceção das Duplas 1A, 2A e 3A que utilizaram subtração, haviam utilizado de fato razões (relações de divisão) para encontrar os valores desejados. O pesquisador convidou os estudantes das Duplas 2A e 3A a apresentarem suas resoluções:

Figura 2 - Resolução Dupla 2A



Fonte: Acervo da pesquisa

Figura 3 - Resolução Dupla 3A



Fonte: Acervo da pesquisa

O pesquisador questionou se os números encontrados pelos Estudantes das Duplas 1A, 2A e 3A estavam próximos aos valores do seno, cosseno e tangente do ângulo de 30º (0,5, 0,877 e 0,566), e teve início este diálogo:

Estudante 3A (Dupla 1A): Eu acho que sim, porque diferencia pouca coisa.

Estudante 8A (Dupla 3A): O nosso também porque 0,6 é quase 0,56, é só arredondar.

Pesquisador: Ótimo, e como fazemos esse arredondamento?

Estudante 8A: Se passar de 5 arredonda para cima e se não passar vai para baixo.

Pesquisador: Você pode me dar um exemplo disso que você falou?

Estudante 8A: Posso. Se a gente tem 1,7, podemos arredondar para 2 e, se temos 1,3, pode arredondar para 1.

O pesquisador afirmou que o que o Estudante 8A colocou estava correto e enfatizou que ao se trabalhar com seno, cosseno e tangente precisamos de exatidão, pois esses valores estão entre 0 e 1, ou seja, vamos geralmente trabalhar com números decimais muito pequenos e quando realizadas as aproximações devem ser cuidadosas no máximo na casa dos centésimos ou décimos, ou seja, se temos 0,557, tudo bem arredondarmos para 0,56, mas nada além disso. O pesquisador questionou se os estudantes haviam compreendido e o diálogo foi iniciado:

Estudante 3A (Dupla 1A): Então quer dizer que na nossa resposta a primeira tá errada?

Pesquisador: Vocês encontraram três valores mais próximos aos valores do seno, cosseno e tangente de 30º, quais são eles?

Estudante 3A: O segundo, o terceiro e o quarto né?

Pesquisador: Isso, então você concorda que a subtração não encontrou um valor tão próximo assim dos valores considerados?

Estudante 3: Sim.

Pesquisador: E vocês (estudantes das Duplas 2A e 3A) o que me dizem sobre os valores que vocês encontraram, estão próximo dos procurados?

Estudante 9 (Dupla 3A): Sim, estão próximos.

Perceba que de fato os valores de cos 30° e tan 30° foram encontrados corretamente pelos estudantes da Dupla 2A, mas o valor do seno, embora correto, foi encontrado de maneira inadequada por meio da diferença entre as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente do triângulo construído por eles. No entanto, sabemos que isso foi uma coincidência e o seno é obtido pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, com as medidas do triângulo construído pela dupla, . E foi nesse sentido que o pesquisador retomou o diálogo:

Pesquisador: De fato, estão bem próximo, mas o primeiro valor de vocês, apesar de ser exatamente igual ao valor de seno de 30°, ele foi encontrado de forma inadequada, e vamos ver agora o motivo. Sempre que olharmos para um ângulo de 30° em um triângulo retângulo, o valor do seno será 0,5, independentemente do tamanho dos lados desse triângulo retângulo será sempre 0,5. Por exemplo, se considerarmos as medidas dos lados do triângulo construído por (estudantes da Dupla 1A), pela subtração que vocês realizaram, teremos 5,6 – 4,8 e isso vai resultar em 0,5?

Estudante 8: Não, dá 0,8.

Estudante 9: Isso aí, dá diferente.

Pesquisador: A resolução de vocês não está incorreta, pois vocês estabeleceram as relações solicitadas pelo enunciado, mas calma que vamos ver melhor daqui a pouco que isso foi uma coincidência e porque pode não vai funcionar sempre. E vocês (estudantes da Dupla 2A), os valores de vocês estão próximos aos que a gente deseja?

Estudante 2: Pelo que o senhor falou parece que a gente usou menos e deu errado também.

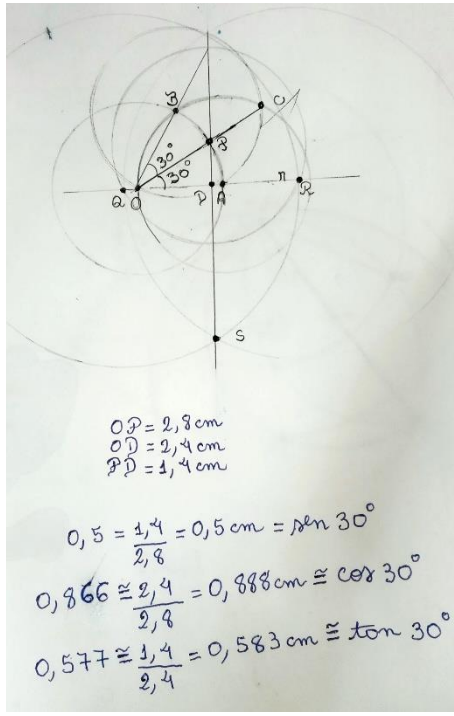
Pesquisador: Deu errado como?

Estudante 2: Deu 0,8 que não tá tão perto de 0,866.

Pesquisador: Isso, que bom que vocês estão entendendo.

Em seguida, o pesquisador convidou uma dupla que tinha encontrado os valores das razões através de divisões (à exceção das Duplas 1A, 2A e 3A, nenhuma das demais duplas utilizou outra operação além da divisão para encontrar os valores), e os estudantes da Dupla 4A vieram à lousa e apresentaram sua solução:

Figura 4 - Resolução Dupla 4A



Fonte: Acervo da pesquisa

As demais duplas apresentaram suas soluções rapidamente e foi possível notar que todas elas convergiram para o mesmo caminho da resolução da Dupla 4A. Podemos perceber que, com exceção das Duplas 2A e 3A, que não encontraram adequadamente uma das razões, os demais estudantes encontraram as razões trigonométricas por meio da resolução do problema gerador, sem lhes ser apresentado o conteúdo previamente.

No final da plenária, o pesquisador retomou a resolução da Dupla 3A e questionou todos os estudantes:

Pesquisador: Como podemos ver os lados dos triângulos que cada dupla construiu diferem de tamanho, mas os valores de seno, cosseno e tangente que todos encontraram são quase idênticos, alguém poderia me dizer por quê?

Os estudantes pensaram por cerca de alguns minutos e o primeiro se pronunciou:

Estudante 10A: Nós fizemos o mesmo desenho, só mudou o tamanho, tem alguma coisa a ver?

Pesquisador: Sim, você poderia me dizer o que todas as construções que cada dupla realizou tem em comum?

Estudante 2A: Um triângulo.

Pesquisador: Isso, mais alguém?

Estudante 8A: O ângulo que a gente olhou.

Pesquisador: Qual ângulo?

Estudante 8A: O de 30º

Pesquisador: Exatamente. Percebam que as razões seno, cosseno e tangente vão depender sempre do ângulo ao qual elas estão relacionadas. Os triângulos de cada dupla possuem lados de tamanhos diferentes, mas em todas as construções há um ângulo de 30º. Por isso, tenha em mente que as razões trigonométricas vão depender sempre do ângulo, independente das medidas dos lados do triângulo retângulo. Vocês (estudantes da Duplas 2A) entenderam agora por que o modo como vocês encontraram o valor do sen 30° é inadequado e pode não funcionar em todos os casos?

Estudantes 9A: Acho que sim, porque funcionou no nosso triângulo, mas não quer dizer que vai funcionar sempre.

Pesquisador: Isso mesmo. E, mais uma vez, essas razões estão relacionadas ao ângulo e, apesar de utilizarmos as medidas dos lados do triângulo para calculá-las, elas não importam muito, pois os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo serão sempre os mesmos, independente do triângulo que for considerado.

O momento de plenária é de suma importância, pois é nele que, como apontam Allevato e Onuchic (2014, p. 46):

> O professor estimula os estudantes a compartilhar justificar suas ideias defender pontos de vistas comparar e discutir as diferentes soluções. Isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo aprimorar a apresentação escrita da resolução em sessão de plenária, ou seja, em um esforço conjunto professor e aluno tenta chegar a um consenso sobre o resultado correto e seu argumento que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e relevante construção do conhecimento acerca do conteúdo.

Nesse caso, podemos ver como esse momento foi importante, pois, apesar de a maioria dos estudantes ter resolvido corretamente o problema, houve alguns que cometeram alguns erros na solução do problema, e, mais do que apenas apontar onde esses estudantes erraram, o pesquisador buscou explicar e apresentar exemplos nos quais o pensamento dos discentes poderia não funcionar e os conduziu para o caminho de resolução correto.

Vale ressaltar também que, durante toda a resolução do problema, como também no momento de plenária, o professor assumiu uma postura de mediador e observador, sem em nenhum momento exercer um papel de detentor do conhecimento, valorizando a capacidade dos estudantes e fazendo questionamentos ou dando dicas, a fim de que os discentes compreendessem e conseguissem desenvolver caminhos para a resolução do problema (PIRONEL; VALLILO, 2017). Mesmo alguns estudantes apresentando resoluções parcialmente incorretas, o pesquisador aproveitou para enfatizar algum aspecto importante no conteúdo abordado.

Seguindo, o pesquisador iniciou a etapa de formalização do conteúdo, utilizando os conceitos apresentados na Seção 3, do Capítulo 2 deste trabalho.

4.2 Turma A – segundo encontro

No segundo encontro com a turma A, ocorreu a verificação da aprendizagem por meio da resolução de um problema que abordou as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, com uma aplicação dessas razões na realidade fora do livro didático.

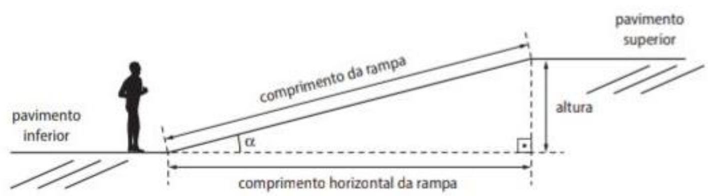
Os passos propostos por Allevato e Onuchic (2014) foram seguidos também no segundo encontro. Inicialmente, após algumas saudações, o pesquisador solicitou que os estudantes realizassem, para toda a turma, a leitura de um texto (Anexo A) contido no livro didático da turma sobre a NBR 9050.

A NBR 9050 é responsável por estabelecer critérios e parâmetros para o projeto, construção, instalação e adaptação do meio urbano e rural e de edificações às condições de acessibilidade. Ou seja, ela contém regras para uma grande diversidade de acessórios, sinalizações e estruturas cuja utilização deve ser garantida a todos, de forma autônoma, independente e segura.

De acordo com a NBR 9050, uma rampa acessível é aquela que permite sua utilização plena por qualquer indivíduo, seja ele portador de necessidades especiais ou não, com todas as adaptações necessárias para a realização desse uso, inclusive e, especialmente, com sinalização tátil e visual.

Considerando a seguinte figura contida no texto do livro didático, o pesquisador, visando estabelecer a conexão com os conhecimentos prévios, iniciou o seguinte diálogo:

Figura 5: Ilustração de uma rampa



Fonte: BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA (2020)

Professor: Essa ilustração da rampa se parece com qual polígono?

Estudante 2A: Com um triângulo.

Professor: De que tipo é esse triângulo?

Estudante 5A: Retângulo.

Professor: Certo, e quais nomes damos aos lados de um triângulo retângulo quando olhamos para um ângulo como mostra a figura?

Estudante 7A: Cateto oposto, hipotenusa e cateto adjacente.

Professor: Isso, então olhando para essa figura de ilustração da rampa e considerando o ângulo α, me digam agora quem serão os catetos e a hipotenusa nesse caso.

Estudante 2A: A hipotenusa é o comprimento total, o cateto é o comprimento horizontal e a altura é o cateto adjacente.

Professor: Exato, no caso o cateto oposto é o comprimento horizontal, certo?

Estudante 2A: Certo.

Após isso, foi entregue o enunciado do problema e a turma foi dividida em duplas. Alguns estudantes optaram por permanecer nas mesmas duplas do primeiro encontro, mas outros trabalharam com colegas diferentes. O pesquisador solicitou que um dos estudantes realizasse a leitura da primeira etapa do problema, e todos afirmaram compreender o que era pedido. Cerca de cinco minutos depois, todos os estudantes afirmaram ter concluído a primeira etapa e logo partiram para a resolução da segunda parte do problema, quando perceberam que precisariam das medidas da rampa localizada na entrada da escola.

Em um segundo momento, o pesquisador e os estudantes foram ao pátio da escola onde se localiza a rampa de entrada. O pesquisador questionou quais medidas eram necessárias para resolver o problema e logo iniciou-se a discussão:

Estudante 6A: A altura total e o comprimento.

Pesquisador: Qual comprimento?

Estudante 6A: O horizontal.

Pesquisador: E alguém pode me dizer como podemos medir a altura e comprimento horizontal dessa rampa?

Estudante 2A: Aqui no final e mede até o chão, é a altura.

Pesquisador: Isso. E como posso medir o comprimento horizontal?

Estudante 11A: Medindo daqui (final da rampa) até lá no portão (inicio da rampa) só que com a trena no chão

Pesquisador: Você pode medir para mim?

Estudante 11A: Posso.

Com o auxílio de outros estudantes, o Estudante 11A mediu o comprimento horizontal da rampa e encontraram 17 metros como medida. Logo, o pesquisador solicitou que os estudantes medissem a altura, como a Estudante 2A havia sugerido, e os estudantes obtiveram 60 centímetros de altura. De posse dessas medidas, estudantes e pesquisador voltaram para a sala, e os estudantes iniciaram a resolução da segunda etapa do problema.

Os estudantes não questionaram muito o pesquisador e adotaram uma postura autônoma na resolução do problema, trabalhando com seus pares, o que era desejável e esperado, pois, como destacam Costa e Silva (2022), a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas instiga a autonomia discente, tendo em vista que os discentes atuam de maneira ativa em todo o processo, construindo estratégia, questionando, refletindo e explicando seus raciocínios.

Apenas na questão de como os estudantes achariam os ângulos que faltavam no triângulo que começou com o questionamento do Estudante 8A:

Estudante 8: Como a gente vai achar os ângulos se só temos a medidas de dois lados?

Pesquisador: Que lados são esses?

Estudante 8: O comprimento horizontal e a altura.

Pesquisador: Que correspondem a que lados do triângulo retângulo que representa a rampa, considerando que estamos olhando para o ângulo no início da rampa?

Estudante 3: Ao cateto adjacente e o oposto.

Pesquisador: Exato. E com as medidas dos catetos podemos calcular qual razão trigonométrica?

Estudante 8: A tangente.

Pesquisador: Isso. Calculem o valor da tangente.

Rapidamente os estudantes encontraram o valor aproximado de 0,035; o pesquisador pediu que eles procurassem esse valor na tabela trigonométrica que eles possuíam e logo eles relacionaram esse valor à tangente de 2° que é 0,0349; o pesquisador questionou:

Pesquisador: Então se o valor da tangente de 2° é o mais próximo do valor da tangente do nosso ângulo, qual o valor do ângulo que estamos considerando?

Estudante 2A: Dois graus.

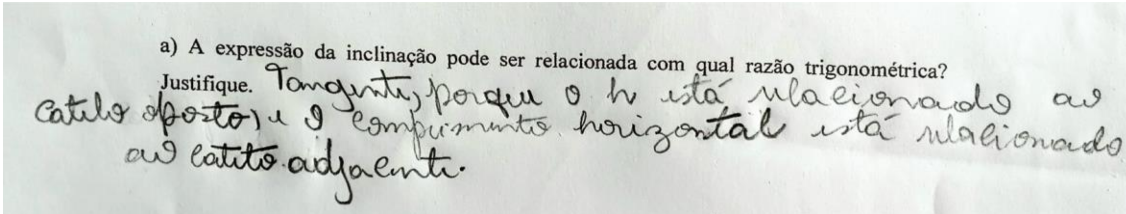
Pesquisador: Certo. E como sabemos que os ângulos internos medem 180º, qual o valor dos ângulos desse triângulo?

Estudante 1: 2, 90 e 88.

Pesquisador: Isso aí. Tem uma forma bem fácil de encontrar o lado que falta, o que não medimos.

O diálogo cessou e alguns minutos depois todos os estudantes afirmaram haver concluído a resolução do problema e iniciou-se o momento de plenária. A primeira dupla a expor sua resolução foi a Dupla 1A que apresentou a seguinte solução para o item 1 do problema:

Figura 6: Resolução Dupla 1A para o item 1 da verificação da aprendizagem



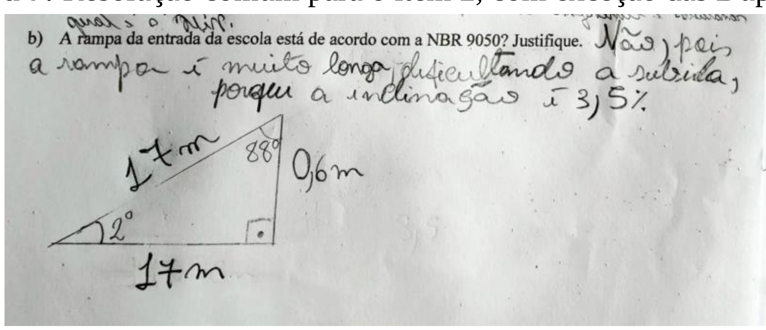
Fonte: Acervo da pesquisa

“Tangente, porque o h está relacionado ao cateto oposto, e o comprimento horizontal está relacionado ao cateto adjacente.”

As resoluções das demais duplas convergiram para esse caminho e todas relacionaram a equação de inclinação da rampa à razão trigonométrica tangente. Nenhum estudante apresentou dificuldade nessa etapa do problema.

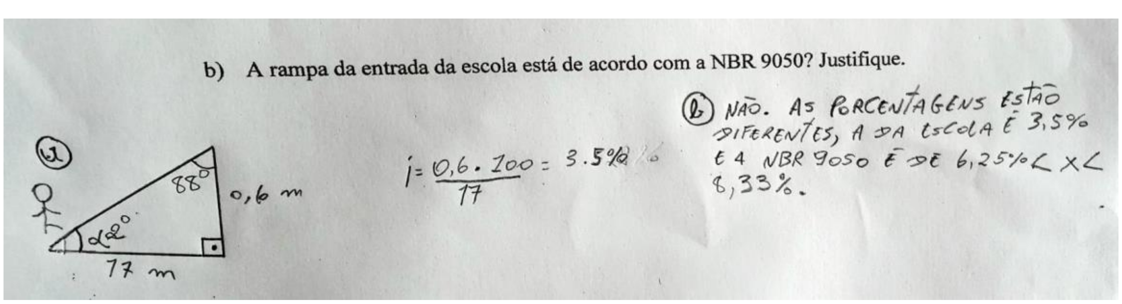
Em seguida, foram apresentadas as resoluções do item 2, no qual duas duplas não encontraram o terceiro lado do triângulo, apesar de terem encontrados seus ângulos. Todos as duplas afirmaram que a rampa não era adequada para cadeirantes, pois o coeficiente de inclinação encontrado não estava entre o padrão estabelecido pela NBR 9050.

Figura 7: Resolução comum para o item 2, com exceção das Duplas 2A e 3A



Fonte: Acervo da pesquisa

Figura 8: Resolução comum às Duplas 2A e 3A



Fonte: Acervo da pesquisa

De fato, quando o coeficiente de inclinação da rampa é menor do que 5%, recomenda-se que sejam colocadas plataformas no comprimento da rampa, chamadas de “áreas de descanso”, para que sejam acessíveis a pessoas portadoras de deficiência e estas possam utilizar a rampa de maneira autônoma.

Ao final do encontro, o professor fez alguns questionamentos para que os estudantes relembrassem os conceitos aprendidos e considerassem alguns pontos importantes:

Pesquisador: Bom, acabamos nosso trabalho dessa semana e gostaria que vocês me dissessem o conteúdo que estudamos.

Estudante 4A: Seno, cosseno e tangente.

Estudante 2A: Triângulo retângulo.

Pesquisador: Mais alguém?

Estudante 8A: Razões trigonométricas.

Estudante 12 A: Trigonometria.

Pesquisador: Ótimo, estudamos tudo isso que vocês falaram que pode ser resumido em Razões trigonométricas no triângulo retângulo. E agora eu gostaria que vocês me dissessem como posso calcular essas razões em qualquer triângulo.

Estudante 5A: Cosseno é cateto adjacente sobre hipotenusa, seno é cateto oposto sobre hipotenusa e tangente é cateto oposto sobre o adjacente.

Pesquisador: Ok. E quem pode me dizer o que é mais importante no cálculo desses valores as medidas dos lados do triângulo ou o ângulo considerado?

Estudante 7A: Sempre o ângulo.

Estudante 1A: O ângulo que pode estar dentro de um triângulo (retângulo) de qualquer tamanho.

Pesquisador: Isso mesmo, sempre vamos olhar para o ângulo que estamos considerando, a medida dos lados do triângulo não vai mudar esses valores. Mais uma coisa: como vemos nesse problema resolvido hoje, quando temos apenas dois lados de um triângulo retângulo como podemos descobrir seus ângulos, considerando que sempre haverá um reto?

Estudante 4B: Rapaz, vai ver uma razão que pode ser calculado utilizando os lados que tem e vamos aproximar esse valor da razão de um ângulo utilizando aquela tabelinha.

Pesquisador: Correto. Vocês gostariam de falar alguma coisa, gostaram do modo como aprenderam, teria alguma coisa que não gostaram?

Estudante 8A: Gostei, foi interessante.

Estudante 2A: Foi bacana, a gente nem vê as horas passando.

Estudante 11A: Mesmo viu e mais a gente viu uma relação de onde podemos utilizar a Matemática, a coisa que eu mais gosto.

O pesquisador agradeceu aos discentes pela cooperação e encerrou o encontro daquele dia que durou 1 hora e 19 minutos.

4.3 Turma B – primeiro encontro

O primeiro encontro com os estudantes da turma B foi conduzido seguindo os passos propostos por Allevato e Onuchic (2014). Enquanto entregava o enunciado do problema gerador, o pesquisador saudava os estudantes e falava sobre a atividade a ser desenvolvida. Após a realização da leitura individual, o pesquisador solicitou que os estudantes formassem duplas e realizassem uma leitura em conjunto com seus pares.

O pesquisador questionou se havia alguma dúvida em relação ao enunciado do problema, e o Estudante 1B relatou que não tinha entendido muito bem o que era solicitado; o pesquisador explicou que basicamente eles iriam, juntamente a ele, construir um ângulo de 30° e, a partir desse ângulo, seria construído um triângulo retângulo utilizando régua e compasso.

Quando questionados se sabiam como construir um ângulo de 30° utilizando régua e compasso (item 1 do problema gerador), nenhum dos estudantes se manifestou, evidenciando que não sabiam de fato realizar tal construção. O pesquisador interveio e realizou o mesmo procedimento realizado com a turma A, descrito na seção 1 desse capítulo.

Apesar de alguns estudantes apresentarem dificuldades na utilização do compasso, todas as duplas conseguiram realizar a construção. Ao iniciar a resolução do item 2, o pesquisador questionou os estudantes:

Pesquisador: Alguém pode me dizer o que são os lados de um ângulo?

Estudante 2B: Acho que esses lados aqui (apontando para a construção realizada).

Ao se aproximar da carteira do Estudante 2B, o pesquisador observou que o estudante apontava de fato para os lados dos ângulos, isto é, as semirretas OC e OA e continuou o diálogo.

Pesquisador: Isso mesmo, chamamos de lados de um ângulo as semirretas com origem no vértice do ângulo que no nosso desenho (construção) é o ponto O. Agora, eu gostaria de saber o que são retas perpendiculares.

Estudante 3B: Retas que tem ângulos de 90°

Pesquisador: Ok. Vocês sabem construir o que o segundo item pede?

Estudante 4B: Não faço a mínima.

E mais nenhum estudante se manifestou. O pesquisador orientou os estudantes a seguirem os passos relatados na seção 1 desse capítulo, também realizados com a turma A.

As questões colocadas pelo pesquisador instigam os estudantes a estabelecerem conexões com conhecimentos já adquiridos, os quais auxiliarão os discentes a resolverem o problema gerador e construir um novo conteúdo matemático (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Ao iniciar a resolução do item 3, o pesquisador solicitou que os estudantes utilizassem a régua para medir e anotassem as medidas dos lados dos triângulos retângulos construídos por eles e, em seguida, apresentou para os estudantes os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo de 30° na lousa:

$$\text{sen} = 0{,}5$$
$$\cos 30° = 0{,}866\ldots$$
$$\tan 30° = 0{,}577\ldots$$

O pesquisador perguntou se os estudantes conseguiam relacionar as abreviações das palavras seno, cosseno e tangente, falou que utilizamos essas abreviações na Matemática para não precisarmos escrever a palavra completa todas as vezes e enfatizou que esses eram os valores aproximados do cosseno e tangente continuavam por “mais algumas casas” decimais, mas considerar três casas já era o suficiente. Em seguida, ele incentivou os estudantes a realizarem as relações solicitadas pelo problema e perguntou se alguém tinha alguma dúvida, iniciando o diálogo:

Estudante 3B: Eu tenho, é para achar exatamente o quê?

No ensino tradicional da Matemática, é comum que os exercícios resolvidos pelos estudantes sejam diretos com o que solicitam, como: “Efetue a operação…”, “Encontre o valor de x na equação…”, “Calcule…” (SKOVSMOSE, 2014). A dúvida do Estudante 3B pareceu comum a alguns de seus colegas, evidenciando o caráter mecânico a que os estudantes estão acostumados às questões matemáticas, procurando sempre o comando a ser seguido para utilizar o algoritmo mais adequado para resolução. O pesquisador chamou a atenção dos estudantes que afirmaram ter dúvidas e iniciou o diálogo:

Pesquisador: O que vocês entendem por "estabelecer relações entre duas coisas?"

Estudante 5B: É dizer o que tem de parecido.

Estudante 3B: É relacionar.

Pesquisador: Certo, e o que o item 3 pede?

Estudante 3B: Estabeleça relações entre os valores dos lados do triângulo que a gente calculou (mediu) e o que o pesquisador colocou no quadro.

Pesquisador: Ótimo, me diga quais são essas relações agora ou, como vocês falaram, me digam o que eles têm parecido. Somem, multipliquem, realizem operações com esses valores e tentem encontrar os valores de seno, cosseno e tangente de 30° que eu escrevi na lousa. Prestem atenção na exatidão que estamos falando, então 0,8 não é a mesma coisa de 0,866, tentem achar valores os mais próximos possíveis como 0,84 ou 0,89.

Os estudantes entenderam melhor o que deveria ser feito e, após alguns minutos, o seguinte diálogo se iniciou:

Estudante 6B: Eu encontrei um, será que está próximo?

O valor encontrado pelo estudante era 0,843, obtido pela divisão das medidas 2,7 (cateto adjacente) e 3,2 (hipotenusa).

Pesquisador: O que você acha? Lembrando o que eu falei, "0,84 é próximo de 0,866", o seu valor está próximo?

Estudante 6B: Tá sim.

Pesquisador: Ótimo, tente encontrar os outros.

E, alguns minutos depois, o Estudante 2B falou:

Estudante 2B: Achei 0,521, está próximo de qual, de 0,5 ou 0,577?

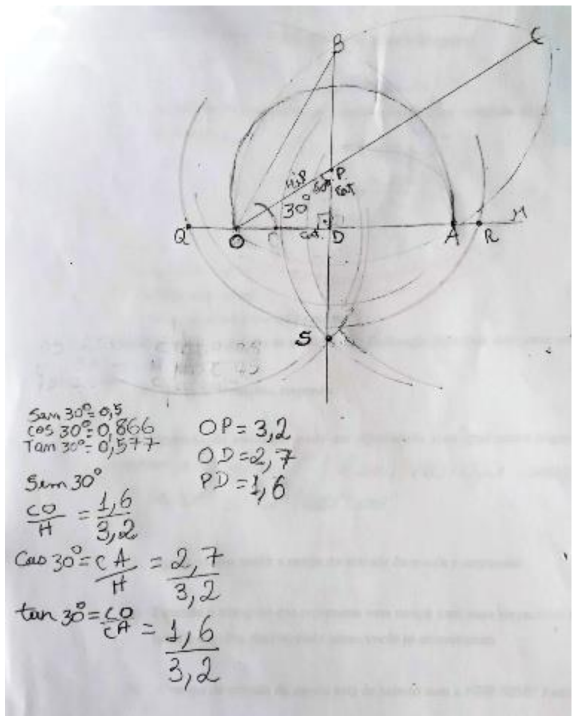
Pesquisador: Anote o que você fez para encontrar esse e tente encontrar os outros e você vê se os outros que encontrar tiram sua dúvida.

Quando todos os estudantes afirmaram ter concluído a resolução do item 3 do problema gerador, o pesquisador deu início ao momento de plenária. É importante destacar que durante toda a resolução do problema, o pesquisador não forneceu nenhuma resposta pronta, pelo contrário, questionou os estudantes e deu algumas dicas para que estes pudessem construir as próprias resoluções para o problema. Esses questionamentos e dicas, como apontam Pironel e Vallilo

(2017), são importantes durante a resolução do problema, pois, por meio desse tipo de intervenção, o professor auxilia os estudantes na construção de novos conhecimentos matemáticos, acreditando na capacidade de seus discentes e permitindo que estes hajam de maneira mais autônoma.

Iniciando o momento de plenária, a Dupla 1B trouxe a seguinte resolução:

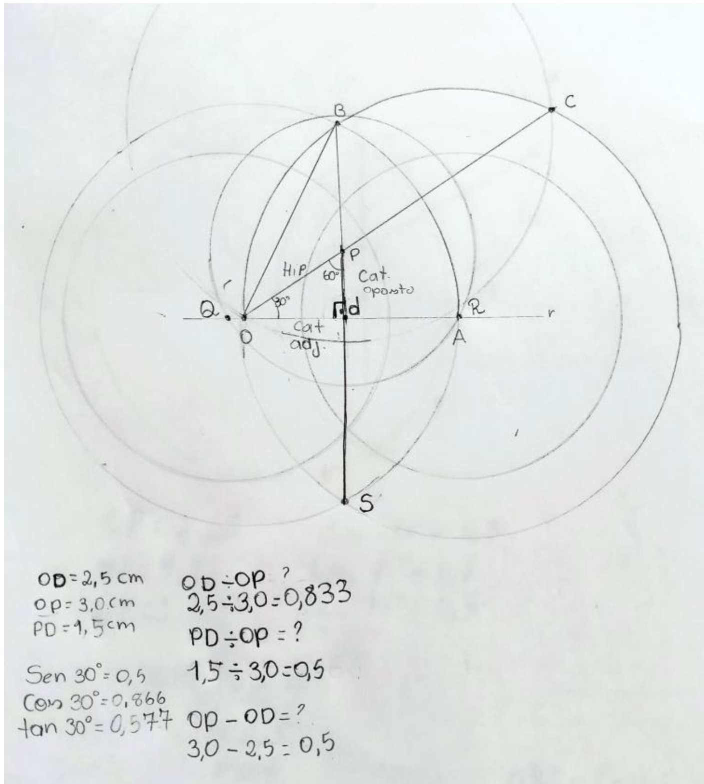
Figura 9: Resolução Dupla 1B



Fonte: Acervo da pesquisa

Essa resolução foi comum às demais duplas, as quais conseguiram estabelecer as razões seno, cosseno e tangente corretamente, com exceção da Dupla 2B que encontrou o valor 0,5, correspondente ao seno de 30º pela subtração 3 – 2,5:

Figura 10: Resolução Dupla 2B



Fonte: Acervo da pesquisa

Perceba que os estudantes da Dupla 2B conseguiram encontrar os valores das razões seno e cosseno corretamente, mas estabeleceu uma relação de diferença inadequada para o cálculo do tangente.

Enquanto essa dupla expunha sua resolução, o professor aproveitou para enfatizar que as razões seno, cosseno e tangente de 30º seriam as mesmas, independente do tamanho dos lados do triângulo retângulo considerado e que esses valores dependiam exclusivamente do ângulo ao qual estavam relacionados. O pesquisador pediu que todos os estudantes escolhessem as medidas dos triângulos de uma dupla, diferente da sua, e realizasse os mesmos cálculos e observassem se encontravam os mesmos valores. Não demorou muito para que a Dupla 2B percebessem que a diferença não era adequada para encontrar o valor do seno de 30° e os estudantes iniciarem o seguinte diálogo com o professor:

Estudante 7B (Dupla 2B): O nosso deu diferente o 0,5, nesse triângulo aqui deu 0,9 quando subtraímos.

Pesquisador: Exato, percebam que vocês encontram esse valor a partir de uma subtração e, se prestaram atenção, todos os seus colegas utilizaram divisões, ou seja, a diferença funcionou com as medidas do triângulo que vocês construíram, mas pode não funcionar em todos os triângulos como vocês acabaram de ver.

Os estudantes da Dupla 2B pareceram compreender o que o pesquisador pontuou e logo verbalizaram:

Estudante 7B: Então vai ser CO sobre CA como a maioria encontrou né?

Estudante 8B: É, também acho isso, porque se fizermos…

O estudante utilizando a calculadora realizou a divisão das medidas do cateto oposto e da hipotenusa do triângulo construído por sua dupla.

Estudante 8B: Dá 0,6 que é próximo de 0,577 né?

Pesquisador: Isso mesmo, que bom. Vocês entenderam.

O momento de plenária é, segundo Allevato e Onuchic (2014), o momento no qual o professor deve estimar os estudantes a compartilhar suas resoluções, seus pontos de vistas, comparar, questionar e discutir suas resoluções e as resoluções de seus colegas, oportunizando um grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e relevante construção do conteúdo matemático. Foi nesse sentido que o pesquisador buscou não apenas apontar como incorreta a resolução apresentada pela Dupla 2B, mas apresentar casos em que aquele pensamento pode não funcionar, explicando aos estudantes seu erro e como ele poderiam consertá-lo.

Vale destacar também que foi atingido o objetivo com a atividade desenvolvida, pois os estudantes conseguiram construir as razões seno, cosseno e tangente sem que tivessem visto o conteúdo de Trigonometria.

Finalizando o encontro, o pesquisador formalizou o conteúdo utilizando as ideias contidas na seção 3 do capítulo 2 desse trabalho.

4.4 Turma B – segundo encontro

No segundo encontro com a turma B, buscou-se verificar a aprendizagem por meio da resolução do problema de verificação. Após algumas saudações, o pesquisador relembrou, questionando os estudantes, alguns conceitos vistos na aula anterior acerca das razões seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo e entregou o enunciado do problema a ser resolvido pelos estudantes.

Inicialmente foi realizada a leitura do texto do livro didático (Anexo A) em relação à NBR 9050. Em seguida, o pesquisador solicitou que os estudantes se dividissem em duplas para resolver o problema, e eles optaram por permanecer com as mesmas duplas do primeiro encontro. Durante a resolução do item 1 do problema não houve dúvidas por parte dos estudantes que resolveram esse item em alguns minutos.

Ao iniciarem a resolução do item 2, os estudantes perceberam que precisariam das medidas da rampa da entrada da escola e logo solicitaram ao pesquisador que convidou os estudantes para irem até o pátio da escola medir. Chegando na rampa da entrada da escola, o pesquisador perguntou como poderia medir a rampa para obter as medidas necessárias para resolver o problema e os estudantes fizeram suas colocações:

Estudante 9B: Vai ser o cateto oposto e o cateto adjacente como a gente colocou aqui na primeira questão.

Estudante 4B: Acho que vamos ter que medir a altura e o comprimento.

Pesquisador: Qual comprimento?

Estudante 4B: Horizontal.

Pesquisador: Isso, temos que medir a altura da rampa que vai ser nosso cateto oposto ao ângulo que estamos considerando e o comprimento horizontal que é nosso cateto adjacente.

O pesquisador solicitou que os estudantes medissem a rampa com uma trena e assim fizeram, encontrando como altura 0,6 metros e como comprimento horizontal 17 metros; todos retornaram à sala de aula e iniciaram a resolução do item 2 do problema.

Durante a resolução, um dos estudantes questionou:

Estudante 5B: Como a gente vai achar o ângulo, porque só sabemos que um deles é 90°, mas e os outros dois?

Pesquisador: Vocês estão vendo essa tabela com os valores do seno, cosseno e tangente de vários ângulos? Podemos descobrir qual o valor do ângulo olhando para ela.

Depois de alguns minutos, outro estudante questionou:

Estudante 9B: Pode aproximar né?

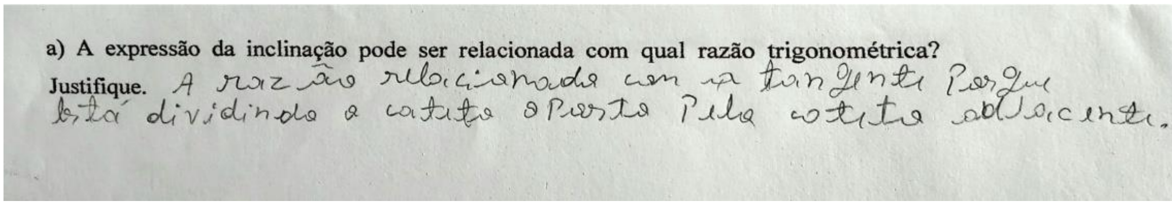
Pesquisador: Sim, contanto que não seja nenhuma aproximação radical.

Estudante 9B: Nosso cálculo deu 0,0353 que é próximo de 0,0349 né?

Pesquisador: Sim, nesse caso pode aproximar.

Não houve mais dúvidas por parte dos estudantes e, depois de alguns minutos, o momento de plenária foi iniciado com a apresentação da Dupla 1B para o item 1:

Figura 11: Resolução Dupla 1B item 1


a) A expressão da inclinação pode ser relacionada com qual razão trigonométrica? Justifique. A razão relacionada com a tangente Porque está dividindo o cateto oposto Pelo cateto adjacente.

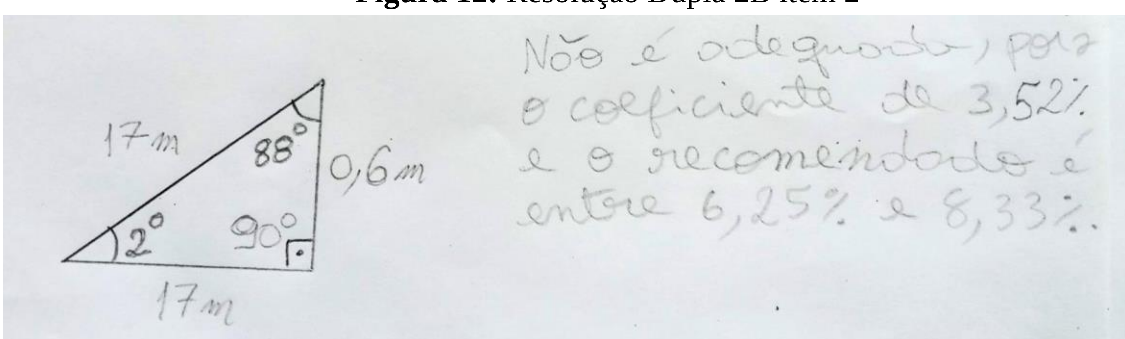
Fonte: Acervo da pesquisa

“A razão relacionada com a tangente porque está dividindo o cateto oposto pelo cateto adjacente.”

O pesquisador questionou se as demais duplas haviam encontrado uma resolução diferente dessa, e eles afirmaram que todos haviam relacionado a equação do cálculo da inclinação com a tangente do ângulo, o que de fato foi confirmado ao analisar posteriormente a produção escrita dos estudantes.

A Dupla 2B apresentou sua resolução para o item 2:

Figura 12: Resolução Dupla 2B item 2



Fonte: Acervo da pesquisa

Ao serem questionados se haviam resolvido por um caminho diferente, os estudantes da Dupla 3B se manifestaram:

Estudante 5B: A gente não encontrou o outro ângulo. Achamos 2° só.

Pesquisador: Certo, você poderia me dizer que ângulo é comum a todos os triângulos retângulos?

Estudante 5B: 90°.

Pesquisador: E em quanto resulta a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Estudante 5B: 180°.

Pesquisador: E quanto dá a soma de 2 + 90?

Estudante 5B: 92… meu Deus, é mesmo vai ser 180 – 92.

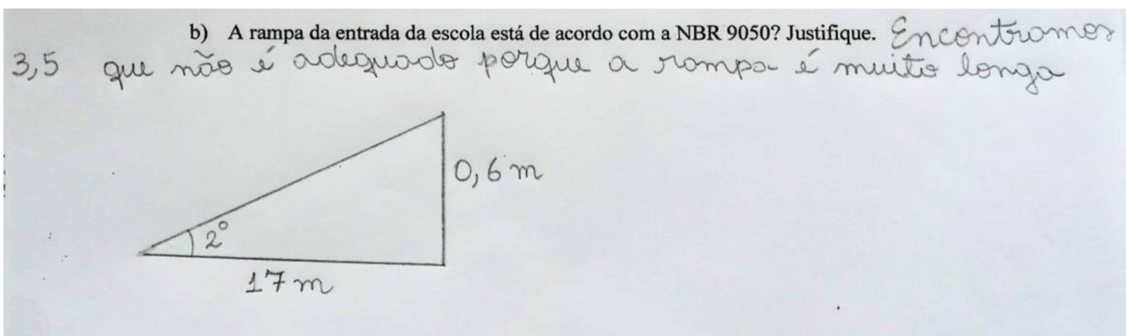
Pesquisador: Que resulta em?

Estudante 5B: 88°.

Pesquisador: Isso mesmo. E o lado da rampa que a gente não mediu, todos conseguiram encontrar?

Mais uma vez os estudantes da Dupla 3B se manifestaram, e o professor os chamou para apresentar sua resolução, contida na figura abaixo:

Figura 12: Resolução Dupla 3B item 2



Fonte: Acervo da pesquisa

O pesquisador questionou como achamos um lado de um triângulo retângulo se temos os outros dois e iniciou-se o diálogo:

Estudante 5B: Teorema de Pitágoras.

Pesquisador: Isso, e por que vocês não utilizaram?

Estudante 5B: Não sei.

O pesquisador solicitou que os estudantes realizassem o cálculo do lado que faltava em seu triângulo e os estudantes encontraram a medida 17 metros.

Em relação a segunda parte do item 2, os estudantes afirmaram que a rampa não era adequada para cadeirantes, mas não deram uma justificativa para essa afirmação. O pesquisador iniciou a discussão:

Pesquisador: Por que vocês acham que a rampa não é adequada?

Estudante 1B: Pelo cálculo que não deu um valor entre as porcentagens que a questão dá.

Pesquisador: Certo, mais alguém?

Estudante 7B: Porque é muito grande apesar de ser baixa.

Pesquisador: E qual problema isso pode causar para um cadeirante por exemplo?

Estudante 7B: Cansar ele, eu acho, porque tem o corrimão, mas não tem nenhuma área plana para parar a cadeira.

Pesquisador: Ótimo, vocês entenderam o que o colega quis dizer?

Estudante 4B: Entendi, tinha que ter aquelas plataformas.

Estudante 10B: É mesmo viu, para descansar no meio da rampa.

O pesquisador concordou com a colocação dos estudantes e explicou que de fato, de acordo com a NBR 9050, quando a inclinação da rampa é inferior a 5%, esta deve dispor de superfícies planas em seu comprimento, chamadas de "áreas de descanso".

Finalizando o encontro, o professor fez alguns questionamentos aos estudantes, a fim de revisar os conteúdos aprendidos pelos estudantes:

Pesquisador: O que nós estudamos ao longo dessa semana?

Estudante 7B: As fórmulas para calcular seno, cosseno e tangente.

Pesquisador: Alguém mais?

Estudante 1B: Trigonometria.

Estudante 6B: Trigonometria no triângulo retângulo.

Estudante 3B: Relações seno, cosseno e tangente de um ângulo.

Pesquisador: Todos estão corretos, estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. E agora eu gostaria que vocês me dissessem como eu posso calcular essas razões.

Estudante 10B: Pelas fórmulas tendo o tamanho dos lados do triângulo.

Pesquisador: Quais fórmulas?

Estudante 10B: CO (cateto oposto) / H (hipotenusa), CA (cateto adjacente) / H (hipotenusa), CO (cateto oposto) / CA (cateto adjacente).

Pesquisador: Certo, vemos que podemos calcular os valores de seno, cosseno e tangente por meio das razões: cateto oposto / hipotenusa para o seno, o cosseno por cateto adjacente / hipotenusa e a tangente por cateto oposto / cateto adjacente. Quem poderia me dizer ao que essas razões estão relacionadas, aos lados ou aos ângulos?

Estudante 1B: Ao ângulo, não importando o tamanho dos lados como vimos terça-feira.

Pesquisador: Isso mesmo, as razões seno, cosseno e tangente vão sempre ser referentes aos ângulos e apesar de usarmos as medidas dos lados de um triângulo retângulo para calculá-las, estas razões não dependem necessariamente dessas medidas.

Para encerrar o encontro, o pesquisador pediu para que os estudantes falassem se gostaram de aprender matemática e foram obtidas respostas positivas:

Estudante 3B: Amei, principalmente de desenhar e da parte que fomos medir a rampa lá fora.

Estudante 11B: Também gostei, a gente resolveu, pôde construir umas coisas bem legais.

Estudante 2B: Eu gostei, porque eu aprendi Matemática na prática.

Estudante 6B: Foi mesmo viu, fazia tempo que eu tinha visto uma aplicação real da Matemática.

O encontro desse dia durou 1 hora e 32 minutos.

De maneira geral, os estudantes de ambas as turmas mostraram compreender as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo, sobretudo entender que aquelas razões estão relacionadas com os ângulos e não dependem das medidas dos lados do triângulo retângulo tratado.

No segundo encontro, os discentes, pondo em prática as razões construídas com a resolução do problema gerador, puderam aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na realidade, momento que despertou o interesse dos estudantes em utilizar os conceitos aprendidos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a relevância que a Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas vem adquirindo no contexto da sala de aula para orientar os processos de ensino, aprendizagem e avaliação da Matemática, este estudo pautou-se no uso de tal metodologia para conduzir as atividades na construção das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Com a aplicação do problema gerador no primeiro encontro, os estudantes, atuando com seus pares, construíram de forma significativa as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Durante a resolução do problema, os questionamentos realizados pelo pesquisador foram de suma importância para conduzir os estudantes ao caminho correto, mas vale destacar que em momento algum o pesquisador forneceu respostas prontas aos estudantes.

Dentre as dificuldades tidas nesse encontro, podemos citar o baixo domínio do uso de régua e compasso e também a resolução parcial do item 2 do problema, já que, em vez de construir vários triângulos, cada grupo construiu apenas um, e, no momento de plenária, como narramos anteriormente, discutimos a questão da semelhança, ou seja, que não importa o triângulo que estamos tratando, essas razões se darão sempre da mesma forma, pois dependem só do ângulo.

Outro ponto a ser destacado na resolução do problema gerador é que alguns estudantes encontraram valores próximos aos do seno, cosseno e tangente de 30° por meio de uma subtração. Apesar de simular a resolução do problema antes da intervenção, o pesquisador não antecipou essa possibilidade, mas isso tampouco foi empecilho, visto que os estudantes compreenderam porque não poderiam proceder de tal forma e que deveriam usar divisões para encontrar as razões almejadas.

O momento de verificação da aprendizagem também se mostrou muito rico e motivador para os estudantes, pois eles mostraram interesse em ver uma aplicação dos conceitos matemáticos estudados em nossa realidade.

Apesar dessas dificuldades encontradas, os estudantes, graças à metodologia utilizada, foram capazes de construir as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dentre os principais fatores observados que contribuíram para essa aprendizagem, estão a postura ativa dos alunos, o trabalho em grupo, a dinamicidade tida nas aulas e a avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem, o que oportuniza intervenção do professor imediatamente para sanar as lacunas na aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas?. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M.; (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35 – 52.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar.** Campinas: Papirus, 1995.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. SBM, 1995.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In*: **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019, p. 107 –119.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática:** geometria e trigonometria: ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias. São Paulo Editora FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Fundamental. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília, 2000.

COSTA, L. P.; SILVA, L. R. C. Uma Revisão Sistemática da Literatura acerca dos impactos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. **Olhares & Trilhas**. Uberlândia, v. 24, n. 1, 2022. Disponível em: < https://seer.ufu.br/index.php/olharesetrilhas/article/view/64495 >. Acesso em: 6 jun. 2022.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro/São Paulo. 68 ed. Paz e Terra, 2021.

KILPATRICK, J. A history of research in mathematics education. In: **Handbook of research of mathematics teaching and learning. A Project of the national council of teachers of mathematics.** DOUGLAS, A. (ed.), New York, 1992. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/232552824_A_history_of_research_in_mathematics_education >. Acesso em: 7 fev 2022.

LESTER, F. K. Jr. Musings about research on mathematical problem solving: 1970-1994. In: **Special 25th anniversary issue of the Journal for Research in Mathematics Education.** Mathematics Education Development Center. School Education, Indiana University, 1994. Disponível em: < https://www.jstor.org/stable/749578?origin=crossref >. Acesso em: 7 fev 2022.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M.; (Orgs.). **Resolução de problemas:** teoria e prática**.** Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-34.

ONUCHIC, L, R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, 2011. Disponível em: < https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625 >. Acesso em 22 dez. 2021.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo, Livraria da Física, p. 189-219, 2017.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989. Disponível em: < https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/COSMOS/Documents/resources/C2AM2P-resources/Developing-Understanding-Mathematics-Problem-Solving-Schroeder-Lester-1989.pdf >. Acesso em 7 fev. 2022.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica.** Campinas – SP: Papirus, 2014.

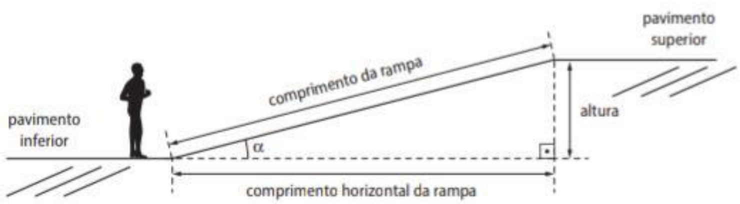
ANEXO A – Texto do livro didático

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Na sua escola há rampas de acesso para pessoas com cadeira de rodas? Você já parou para pensar como essas rampas são construídas?

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), sancionado em 13 de julho de 1990, estabelece, entre outros itens, o direito à educação de todas as crianças e adolescentes, sem discriminação de qualquer natureza. Isso inclui as pessoas com deficiência, entre elas, aquelas que fazem uso de cadeira de rodas, chamadas de cadeirantes. Para que isso seja possível, é necessário que as escolas sejam acessíveis, por exemplo, com rampas e largura adequada de portas para a passagem das cadeiras de rodas.

Para a construção das rampas, existe uma norma, a NBR 9050, que a regulamenta. Por exemplo, na representação de uma rampa na figura a seguir, precisamos conhecer a altura do desnível entre os pavimentos, o comprimento da rampa, que é a distância, de fato, que será percorrida pelas pessoas, o comprimento horizontal da rampa e o ângulo que a rampa faz com o pavimento inferior.



PENSE E RESPONDA

- O que acontece se a medida do ângulo α for muito grande?
- Em sua opinião, por que é importante ter uma norma para a construção de rampas?

Ver as **Orientações para o professor**.

ANEXO B – Tabela trigonométrica

Graus (°)	Rad	sen	cos	tg	Graus (°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0	**46**	0,80	0,71934	0,694658	1,03553
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455	**47**	0,82	0,731354	0,681998	1,072369
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921	**48**	0,84	0,743145	0,669131	1,110613
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408	**49**	0,86	0,75471	0,656059	1,150368
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927	**50**	0,87	0,766044	0,642788	1,191754
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489	**51**	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104	**52**	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785	**53**	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541	**54**	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384	**55**	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327	**56**	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438	**57**	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557	**58**	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868	**59**	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328	**60**	1,05	0,866025	0,5	1,732051
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949	**61**	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745	**62**	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731	**63**	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492	**64**	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328	**65**	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397	**66**	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864	**67**	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026	**68**	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475	**69**	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229	**70**	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308	**71**	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733	**72**	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525	**73**	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709	**74**	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309	**75**	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735	**76**	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861	**77**	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869	**78**	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408	**79**	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509	**80**	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208	**81**	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543	**82**	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554	**83**	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286	**84**	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784	**85**	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391	**86**	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287	**87**	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404	**88**	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515	**89**	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689	**90**	1,57	1	0	*ñ existe*
45	0,02	0,707107	0,707107	1	**180**	3,14	0	1	0
					270	4,71	-1	0	*ñ existe*
					360	6,28	0	1	0