UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WEVERTHON FELIPE TRAJANO DOS SANTOS

APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

PATOS
2022

WEVERTHON FELIPE TRAJANO DOS SANTOS

APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

PATOS
2022

S237a Santos, Weverthon Felipe Trajano dos.
Aplicações dos diagramas de Venn [manuscrito] / Weverthon Felipe Trajano dos Santos. - 2022.
37 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2022.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Matemática. 2. Teoria dos conjuntos. 3. Diagrama de Venn. 4. Diagrama de Venn - aplicações. I. Título

21. ed. CDD 511.322

Elaborada por Edson M. Almeida - CRB - CRB 15/743 BSC7/UEPB

WEVERTHON FELIPE TRAJANO DOS SANTOS

APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas (CCEA) da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 02/08/22

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Jose Ginaldo De Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Dr. Marcelo Da Silva Vieira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

Prof. Me. Geovane De Souza Ferreira Júnior
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB/CCEA)

SUMÁRIO

APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

APPLICATIONS OF VENN DIAGRAMS

Weverthon Felipe Trajano dos Santos*

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de mostrar algumas aplicações dos Diagramas de Venn e aplicá-los na resolução de problemas de determinação de conjuntos que satisfazem determinadas condições. Apresento um breve histórico sobre os Diagramas de Venn destacando a história de quem os apresentou, John Venn, as contribuição de Leonhard Euler (um importante precursor de Venn) com suas representações diagramáticas de silogismos lógicos por meio dos chamados círculos eulerianos e as representações feitas por Venn. Algumas noções da Teoria dos Conjuntos serão apresentadas como uma das bases para o trabalho sendo enfatizado a representação de conjuntos, as operações entre eles, as propriedade delas, como também a cardinalidade da reunião de conjuntos. Será dedicada uma seção as aplicações dos Diagramas de Venn onde serão apresentadas algumas aplicações deles a Teoria dos Números, a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática bem como a aplicação de tais diagramas na resolução problemas de determinação de conjuntos que satisfazem condições específicas. Por fim, será realçado, neste trabalho, a importância de tais diagramas como ferramenta semiótica de relevância ao ensino dos tópicos da Matemática que os comportem.

Palavras-chave: Diagramas de Venn. Aplicações dos Diagramas de Venn. Teoria dos Conjuntos.

ABSTRACT

The present work has as objective the objective of some applications of the Venn diagrams and to apply them in the resolution of problems of determination of sets that determine in certain conditions. I present a brief history of Venn Diagrams, the history of who presented them, John Venn, as an outstanding contribution of Leonhard Euler (an important precursor of Venn) with his diagrammatic representations of logical syllogisms through the so-called eulerian circles and the representations made by Venn. Some notions of Set Theory will be presented as one of the bases for the work, emphasizing the representation of sets, the operations between them, their properties, as well as the cardinality of the collection of sets. A section will be dedicated to the applications of Venn Diagrams where some applications of them to Number Theory, Set Theory and Mathematical Logic will be presented, as well as the application of such diagrams in solving problems of determination of sets that satisfy specific conditions. Finally, in this work, the importance of such diagrams will be highlighted as a semiotic tool of relevance to the teaching of Mathematics topics that comprise them.

Keywords: Venn diagrams. Applications of Venn Diagrams. Set theory.

* Aluno do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Campos VII, Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: weverthonfelipe19@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que surgiu como parte da vida diária dos seres humanos. Boyer (1974) afirma que ao passo que os seres humanos perceberam semelhanças em número e forma das coisas foram surgindo a Ciência e a Matemática. Desde então a Matemática se desenvolveu e permeia hoje o mundo moderno onde se consolidaram o estudo das quantidades, das formas, das medidas, do espaço, das variações em seus diversos ramos.

A Teoria dos Conjuntos é o ramo da Matemática que cumpre o objetivo de estudar os conjuntos, suas características e propriedades. Tal teoria está fortemente ligada a lógica matemática podendo até ser considerada como um ramo derivado desta e mesmo que qualquer tipo de elemento possa fazer parte de um conjunto a essa teoria é desenvolvida a partir de elementos que são relevantes para o universo matemático.

Um grande passo para o desenvolvimento do conhecimento é atribuído a escrita. Roque (2012) declara que a escrita surgiu gradualmente, sem objetivo de substituir a comunicação oral e que sua prática inicial está associada a representação de objetos e fatos cotidianos. A necessidade representativa na forma escrita também acompanhou o desenvolvimento da matemática e a representação diagramática passou a ser uma das formas de visualizar as relações estabelecidas pelo pensamento abstrato.

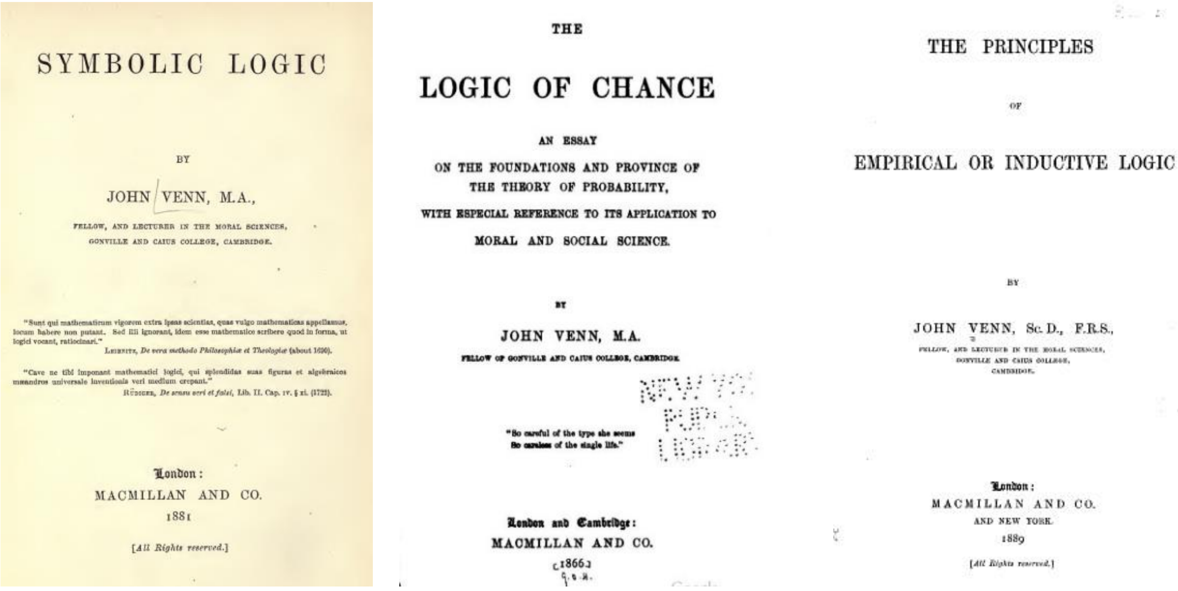
Na Teoria dos Conjuntos, o matemático John Venn (1834-1923) desenvolveu um modelo de diagramas, os Diagramas de Venn, que atualmente melhor representa as relações entre conjuntos. Venn foi um matemático e filosofo britânico. Licenciou-se em Matemática na *Caius Colege* da Universidade de Cambridge em 1857 sendo destaque universitário. A partir de 1862, Venn foi docente de Ciências Morais no *Caius Colege* onde ensinou filosofia e lógica.

Figura 1 – Fotografia de John Venn.

Fonte: Captura de tela feita pelo autor, 2022. (EDWARDS, 2004).

Suas principais obras são *The Logic of Chance*, publicada em 1866, *Symbolic Logic*, 1881, e, *The Principles of Empirical or Inductive Logic*, de 1889.

Figura 2 – Folha de rosto dos livros de John Venn: *The Logic of Chance* (1888) em 3ª edição, *Symbolic Logic* (1881) em 1ª edição e *The Principles of Empirical or Inductive Logic* (1907) em 2ª edição. Da esquerda para direita, respectivamente.



SYMBOLIC LOGIC

BY

JOHN VENN, M.A.,

FELLOW, AND LECTURER IN THE MORAL SCIENCES, GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE.

London:
MACMILLAN AND CO.
1881

[All Rights reserved.]

THE

LOGIC OF CHANCE

AN ESSAY
ON THE FOUNDATIONS AND PROVINCE OF THE THEORY OF PROBABILITY,
WITH ESPECIAL REFERENCE TO ITS APPLICATION TO MORAL AND SOCIAL SCIENCE.

BY

JOHN VENN, M.A.

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE.

"So careful of the type she seems
So careless of the single life."

London and Cambridge:
MACMILLAN AND CO.
1866

THE PRINCIPLES

OF

EMPIRICAL OR INDUCTIVE LOGIC

BY

JOHN VENN, Sc. D., F.R.S.,

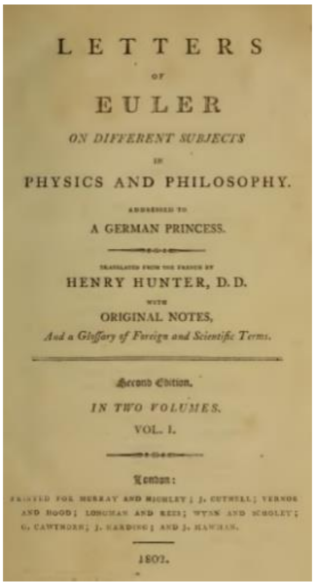
London:
MACMILLAN AND CO.
AND NEW YORK.
1889

[All Rights reserved.]

Fonte: Captura de tela feita pelo autor, 2022. (VENN, 1881, 1888, 1907).

Um dos precursores mais influentes as obras John Venn foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783). Euler escreveu cartas sobre matemática e filosófica à princesa prussiana Friederike Charlotte Leopoldine Louise de Brandenburg-Schwedt que foram reunidas no livro *Letters of Euler on Different Subjects in Physics and Philosophy Addressed to German Princess*. As cartas CII a CVIII tratam da lógica proposicional e do silogismos lógico onde o autor faz uso dos círculos eulerianos.

Figura 3 – Folha de rosto do livro *Letters of Euler on Different Subjects in Physics and Philosophy Addressed to German Princess* de Leonhard Euler.



LETTERS

OF

EULER

ON DIFFERENT SUBJECTS

IN

PHYSICS AND PHILOSOPHY.

ADDRESSED TO

A GERMAN PRINCESS.

HENRY HUNTER, D.D.

WITH

ORIGINAL NOTES,

And a Glossary of Foreign and Scientific Terms.

Second Edition.

IN TWO VOLUMES.

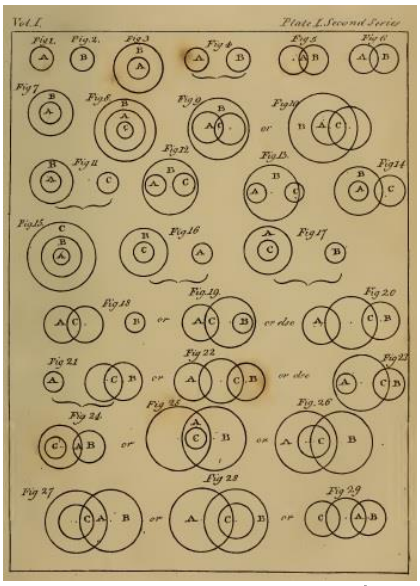
VOL. I.

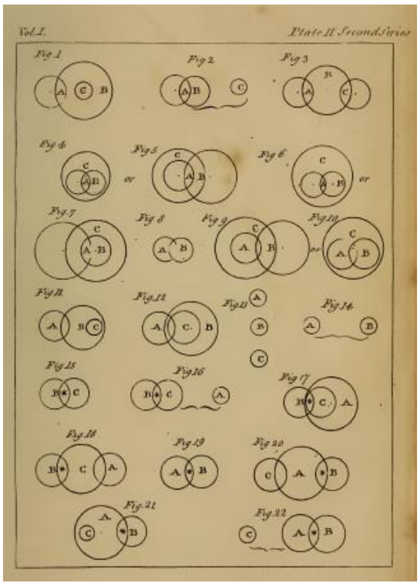
London:

1802.

Fonte: Captura de tela feita pelo autor, 2022. (EULER, 1802).

Figura 4 – Representação dos círculos eulerianos por Euler.





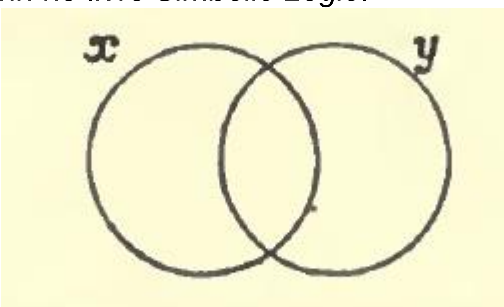
Fonte: Captura de tela entre as páginas 404-405 e 408-409 respectivamente, 2022. (EULER, 1802).

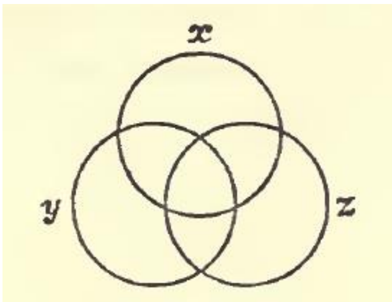
Antes da publicação do Simbolic Logic de 1881, por meio de um artigo intitulado de *On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings* (Sobre a representação diagramática e mecânica de proposições e raciocínios), Venn apresentou seus diagramas.

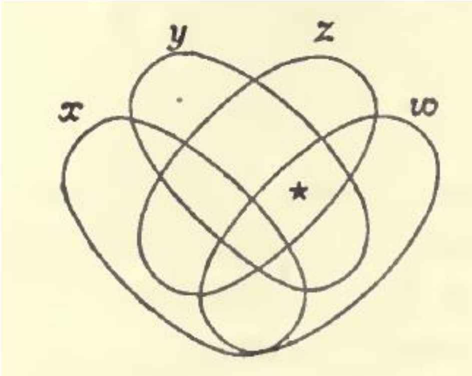
De acordo com Edwards (2004) Venn inventou seus diagramas ao tentar estender os círculos eulerianos a problemas mais complexos de lógica e encontrar dificuldades, como por exemplo, ao buscar verificar se um conjunto de muitas proposição eram mutuamente consistentes (as proposições são mutuamente consistente quando é possível que elas sejam todas verdadeiras simultaneamente), os diagramas de Euler não forneciam um procedimento gráfico para solucionar a questão.

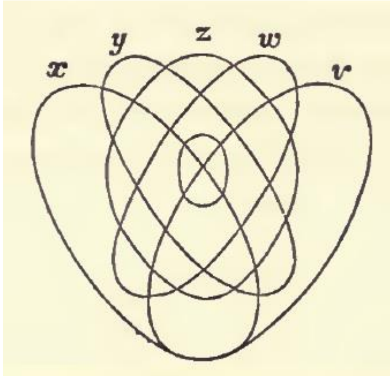
O capítulo V do livro *Symbolic Logic*, *Diagrammatic Representation*, Venn discute o uso dos círculos euleriano para a representação de conjuntos. Faz representações 2, 3 , 4 e 5 conjuntos destacando a quantidade de regiões (classes) compartilhadas e não compartilhadas entre os conjuntos, 2^n para n conjuntos.

Figura 5 – Representação dos diagramas para 2, 3, 4 e 5 conjuntos feita por John Venn no livro *Simbolic Logic*.









Fonte: Captura de tela feita pelo autor, 2022. (VENN, 1881, p. 100-125).

Uma das características principais dos diagramas de Venn está na simétricas das figuras. Observe acima o uso de círculos e elipses.

Os Diagramas de Venn são simples e trazem mais clareza a representação dos conjuntos.

Neste trabalho serão apresentadas algumas noções sobre a Teoria dos Conjuntos e algumas aplicações dos diagramas de Venn oriundas do trabalho de outros autores. Buscarei também fazer a aplicação de tais diagramas na resolução problemas de determinação de conjuntos que satisfazem determinadas condições.

2 NOÇÕES DE TEORIA DOS CONJUNTOS

Nesta seção serão abordadas algumas noções da Teoria dos Conjuntos. Para sua construção consultei os trabalhos de Novaes (2018), Lipschutz (1996) e Vieira (2013).

A Teoria dos Conjuntos é o ramo da Matemática que estuda os conjuntos. O estudo moderno dessa teoria foi iniciada no ano de 1870 pelos matemáticos alemães Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) e Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).

Nessa teoria, o conjunto, o elemento e a relação de pertinência são tratados como entes primitivos, ou seja, são tomados sem definição. O **conjunto** é habitualmente designado por uma letra latina maiúscula, por exemplo, A, B, C,..., Y, Z. O **elemento** é designado, em geral, por uma letra latina minúscula, por exemplo, a, b, c, ..., y, z. A **relação de pertinência** é a relação estabelecida entre um elemento e um conjunto.

Quando um elemento a pertence a um conjunto A denota-se por $a \in A$ (a pertence a A). Quando um elemento a não pertence a um conjunto B, denota-se por $a \notin B$ (a não pertence a B).

Na Teoria dos Conjuntos são estudados os conjuntos constituídos por elementos do universo da Matemática.

É possível conceituar tais entes primitivos de maneira informal. Cantor (1905) conceitua conjunto como uma coleção de objetos definidos, distinguíveis, de nossa intuição ou de nosso pensamento, concebidos como um todo.

Um conjunto definido ou bem definido é aquele em que dado um elemento qualquer é possível determinar se ele pertence ou não ao conjunto. Um bom exemplo é disposto por Vieira (2013): A é o conjunto cujos elementos são números grande. Buscaremos determinar se o número 4321 pertence a A. Neste caso, não se sabe o quão grande deve ser um número para que faça parte do conjunto A e assim essa determinação se torna incerta.

Um conjunto distinguível é aquele em que dados dois elementos pertencentes a ele podemos determinar se eles são diferentes ou são iguais.

Temos um conjunto importantíssimo no tratamento das questões que envolvem conjuntos de acordo com o contexto, o **conjunto universo**. Podemos defini-lo da seguinte maneira:

Definição 2.1. *O* ***conjunto universo*** *(universo do discurso ou conjunto fundamental) é aquele ao qual pertencem todos os elementos de interesse em um determinado contexto.*

Há uma presunção de existência do conjunto universo no tratamento de questões relacionadas a Teoria dos Conjuntos e que uma vez determinado, mesmo que de forma elíptica, será considerada como solução das questões somente elementos desse conjunto. Habitualmente, ele é denotado pelo símbolo U.

Exemplo 2.1.

a) Na Geometria Plana o conjunto universo é formado por todos os pontos do plano;
b) Em Geometria Espacial, o conjunto universo são todos os pontos do espaço;
c) A população é o conjunto universo da Estatística.
d) Em Teoria da Probabilidade, o conjunto universo é denominado de espaço amostral.

Um conjunto pode ser representado de muitas maneiras. Destacarei aqui três maneiras. A primeira maneira de representação consiste em **destacar uma propriedade característica dos elementos** de um conjunto. O destaque de um propriedade é feito da seguinte maneira

$$A = \{x \in U \colon x\ tem\ a\ propriedade\ P\}$$

ou, $A = \{x \in U \colon P(x)\}$ ou, simplesmente, $A = \{x \colon P(x)\}$.

Lê-se: A é o conjunto dos elementos x pertentes ao conjunto universo U talque (":") x possui a propriedade P.

Exemplo 2.2. São conjuntos clássicos na Teoria dos Conjuntos:

a) O conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$ e representado por $\mathbb{N} = \{a : \ a = 1, 2, 3, \ldots\}$.
b) $\mathbb{Z} = \{a - \ b : a, b \ \in \mathbb{N}\}$ representa o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros;
c) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \ \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ representa o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$);
d) $\mathbb{R} = \ \{\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \colon a_0 \in \mathbb{N}\ e\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, i \in \mathbb{N}\}$. $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais);
e) O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é representado por $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i = \ \sqrt{-1}\right\}$.

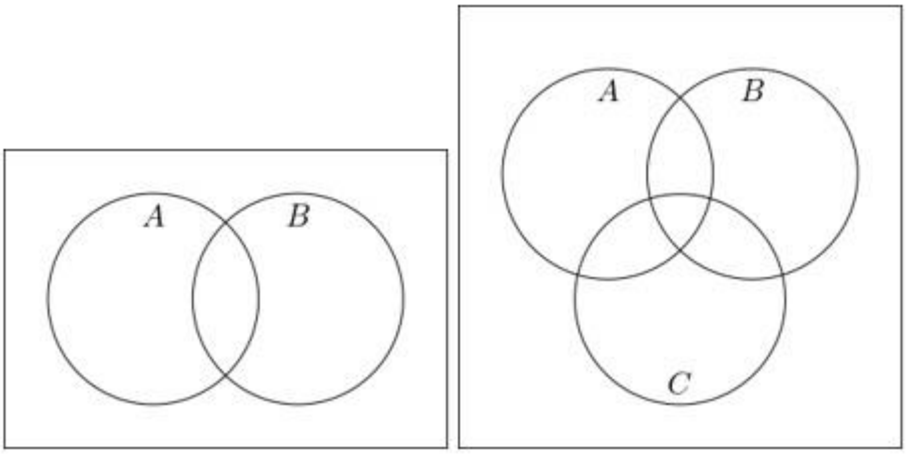
O segundo modo de designação de um conjunto consiste em enumerar elemento por elemento, ou seja, a **listagem dos elementos**.

Exemplo 2.3.

a) O conjunto dos números inteiros pares P é representado por $P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.
b) O conjunto dos números inteiros ímpares I é representado por $I = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$
c) O conjunto dos números naturais primos $\mathbb{P}$ é representado por $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13, \ldots\}$.

Por fim, o terceiro modo de designação de conjuntos consiste em utilizar **Diagramas de Venn**, ou seja, representar um conjunto com auxílio de uma linha fechada, não-entrelaçada e seus pontos internos.

Figura 6 – Representação de dois e três conjuntos por diagramas de Venn.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Há alguns tipos especiais de conjuntos na Teoria dos Conjuntos. Destacarei aqui o conjunto vazio, o conjunto unitário, o conjunto finito e o conjunto infinito.

Definição 2.2. *Um conjunto A é um **conjunto vazio** quando não possui elemento.*
Notação: $\emptyset$ ou $\{\quad\}$.

Exemplo 2.4.

a) $A = \{n \in \mathbb{N}: n = n + 1\} = \emptyset$.
b) $B = \{z \in \mathbb{Z}: z \neq z\} = \emptyset$.

Definição 2.3. *Um conjunto A é um **conjunto unitário** quando possui um único elemento.*

Exemplo 2.5.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z}: x + 5 = -10\} = \{-15\}$.
b) $B = \{x: \text{é } o \text{ único número natural primo par}\} = \{2\}$.

Definição 2.4. *Um conjunto A é chamado **conjunto finito** quando é vazio ou seus elementos podem ser listados pelo números naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, ...\}$ de modo que tal processo é finalizado em determinado $n \in \mathbb{N}$.*

O número n é denominado a **cardinalidade de A** que é denotada por $|A|$ ou $n(A)$. Utilizarei neste trabalho a notação $n(A)$.

Exemplo 2.6.

a) O conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ possui cardinalidade 10, ou seja, $n(A) = 10$.
b) O conjunto dos divisores inteiros de 3, $D_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$, possui 4 elementos, logo $n(D_3) = 4$.

Definição 2.5. *Um **conjunto infinito** é aquele que não é vazio e que não pode ser listado pelo conjunto dos números naturais de modo que o processo seja finalizado em um determinado $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.7. O conjunto $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$ dos números naturais primos é infinito.

A seguir definirei a igualdade e a desigualdade entre conjuntos.

Definição 2.6. *Dois conjuntos são **iguais** quando possuem os mesmo elementos, assim dizendo, sejam A e B dois conjuntos todo elemento que pertece a A também pertence a B, e vice-versa.*

Notação: $A = B$ (A é igual a B).

Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Deste modo tem-se que qualquer que seja x, x pertence a A se e somente se x pertence a B. Diante do conectivos lógico "↔" (se e somente se) o leitor pode consultar o *Apêndice A – Noções de Lógica Matemática* onde consta esse e outros conectivos.

Exemplo 2.8. O conjunto $A = \{1,2,3\}$ é igual ao conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}: x < 4\}$.

Exemplo 2.9. O conjunto $C = \{-5\}$ é igual ao conjunto $D = \{x \in \mathbb{Z}: x + 2 = -3\}$.

São propriedades da igualdade entre conjuntos:

1. *(Reflexiva)* $A = A$.
2. *(Simétrica)* Se $A = B$, então $B = A$.
3. *(Transitiva)* Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

Definição 2.7. *Dois conjuntos A e B são **desiguais** (diferentes) quando existe pelo menos um elemento que pertence a um dos conjuntos e não pertence ao outro.*

Notação: $A \neq B$ (A é diferente de B).

Exemplo 2.10. Os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5\}$ é diferente do conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é } um\ número\ primo\ menor\ que\ 5\}$, $A \neq B$.

Exemplo 2.11. Os conjuntos $C = \{-10\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Z}: x + 11 = 21\}$ são diferentes, $C \neq D$.

***Definição2.8.** Dois conjuntos são denominados **disjuntos** se eles não têm nenhum elemento em comum.*

Exemplo 2.12. Os conjuntos $A = \{2,3,5\}$ e $B = \{1,4,8\}$ são disjuntos.

Exemplo 2.13. O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são disjuntos.

Exemplo 2.14. Os conjuntos I dos números inteiros ímpares e o conjunto P dos números inteiros pares são disjuntos.

Agora, será mostrado um pouco da relação de inclusão entre conjuntos.

Definição 2.9. *Um conjunto A é um **subconjunto** do conjunto B quando cada elemento que pertença a A também pertence a B.*

Notação: $A \subseteq B$ (A está contido em B).

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

A negação é representada por: $A \nsubseteq B$ (A não está contido em B).

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow (\exists\, x)(x \in A\ e\ x \notin B).$$

Exemplo 2.15. Dados os conjuntos $A = \{1,4,9,16,25,36,49,64, \dots\}$ e $B = \{x: x \text{ é } número\ quadrado\}$ tem-se que $A \subseteq B$.

A inclusão de conjuntos possuem as seguintes propriedades:

1. *(Reflexiva)* $A \subseteq A$.
2. *(Antissimétrica)* Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.
3. *(Transitiva)* Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Definição 2.10. *Um conjunto $A \neq \emptyset$ é denominado **subconjunto próprio** de um conjunto B se A é subconjunto de B, mas existe pelo menos um elemento de B que não é elemento de A.*

Notação: $A \subset B$ (A é subconjunto próprio de B ou A é parte própria de B).
Exemplo 2.16. Os conjuntos clássicos possuem a seguinte relação de inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Exemplo 2.17. O conjunto P dos números inteiros pares é subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$, ou seja, $P \subset \mathbb{Z}$.

Serão abordadas agora as operações entre conjuntos.

Definição 2.11. *O **conjunto interseção** de dois conjuntos A e B é formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos.*
Notação: $A \cap B$ (A intersecção B).
Simbolicamente: $A \cap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}$.
Exemplo 2.18. Dados os conjuntos $A = \{2,3,5\}$ e $B = \{2,4,5,8\}$ tem-se $A \cap B = \{2,5\}$.

São propriedades da interseção entre conjuntos:

1. *(Dominante)* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. *(Identidade)* $A \cap U = A$.
3. *(Idempotente)* $A \cap A = A$.
4. *(Comutativa)* $A \cap B = B \cap A$.
5. *(Associativa)* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

A propriedade 5 permite a representação da interseção de três conjuntos por $A \cap B \cap C$.

Definição 2.12. *O **conjunto reunião** (ou **união**) de dois conjuntos A e B é formado pelos elementos que pertencem a A, a B ou a ambos.*
Notação: $A \cup B$ (A união B).
Simbolicamente: $A \cup B = \{x : x \in A \ ou \ x \in B\}$.
Exemplo 2.19. Dados os conjuntos $A = \{2,3,5\}$ e $B = \{2,4,5,8\}$ tem-se $A \cup B = \{2,3,4,5,8\}$.
Exemplo 2.20. A reunião do conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais resulta no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
São propriedades da reunião entre conjuntos:

1. *(Identidade)* $A \cup \emptyset = A$.
2. *(Dominante)* $A \cup U = U$.
3. *(Idempotente)* $A \cup A = A$.
4. *(Comutativa)* $A \cup B = B \cup A$.
5. *(Associativa)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

A propriedade 5 permite a representação da reunião de três conjuntos por $A \cup B \cup C$.

São propriedades conjuntas da interseção e da reunião:

1. *(Absorção)* $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$.
2. *(Distributividade da intersecção em relação à união)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. *(Distributividade da reunião em relação à intersecção)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Definição 2.13. *A **reunião disjunta** (ou **união disjunta**) de dois conjuntos A e B é o conjunto cujos elementos pertencem a A ou a B, mas não a ambos.*
Notação: $A \dot{\cup} B$ (A união disjunta B)[1]

[1] Notação não convencional.

Simbolicamente: $A \dot{\cup} B = \{x: ou\ x \in A\ ou\ x \in B\}$.

Exemplo 2.21. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,5,6\}$, a união disjunta dos dois conjuntos é $A \dot{\cup} B = \{1,2,5,6\}$.

Definição 2.14. *Dado um subconjunto A de um conjunto universo U, o **complementar** (**absoluto**) de A em relação a U é o conjunto dos elementos de U que não pertencem a A.*

Notação: A^C (complementar de A).

Simbolicamente: $A^C = \{x \in U: x \notin A\}$.

Exemplo 2.22. O $U = \{1,2,3,4,5\}$ e $A = \{1,2\}$ e $B = \{3\}$, $A^C = \{3,4,5\}$ e $B^C = \{1,2,4,5\}$.

São propriedades do complementar de um conjunto:

1. $\emptyset^C = U$.
2. $U^C = \emptyset$.
3. $(A^C)^C = A$.
4. $A \subseteq B$ se e somente se $B^C \subseteq A^C$.
5. *(Leis de De Morgan)*
   5.1. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
   5.2. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.
6. *(Inversa)* $A \cap A^c = \emptyset$.
7. *(Inversa)* $A \cup A^c = U$.

Definição 2.15. *Dados dois conjuntos A e B subconjuntos quaisquer de um conjunto universo U, a **diferença entre A e B** é o conjunto dos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.*

Notação: $A - B$ (diferença entre A e B).

Simbolicamente: $A - B = \{x: x \in A\ e\ x \notin B\}$.

Exemplo 2.23. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,5,6\}$, $A - B = \{1,2\}$ e $B - A = \{5,6\}$.

Com essa definição o complementar absoluto de um conjunto A pode ser disposto como $A^C = U - A$.

São propriedades da diferença entre conjuntos:

1. $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$.
2. $A - U = \emptyset$ e $U - A = A^C$.
3. $A - A = \emptyset$.
4. $A - A^C = A$.
5. $(A - B)^C = A^C \cup B$.
6. $A - B = B^C - A^C$.
7.
   7.1. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
   7.2. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
8.
   8.1. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.
   8.2. *(Distributividade da interseção em relação à diferença)* $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
9.
   9.1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
   9.2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

10.
   10.1. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
   10.2. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
11.
   11.1. $A - (A - B) = A \cap B$.
   11.2. $(A - B) - B = A - B$.

Definição 2.16. *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo U, tais que $A \subset B$, o **complementar relativo** de A em B é o conjunto dos elementos que pertencem a B mas não a A.*
Notação: C_B^A (complementar de A em relação a B).
Simbolicamente: $C_B^A = \{x: x \in B \ e \ x \notin A\} = B - A$.
Exemplo 2.24. Sejam $A = \{1\}$ e $B = \{1,2,3\}$, $C_B^A = B - A = \{2,3\}$.
Definição 2.17. *Sejam dois conjuntos A e B, a **diferença simétrica** de A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem a um e somente um dos conjuntos A e B.*
Notação: $A \Delta B$ (diferença simétrica de A e B).
Simbolicamente: $A \Delta B = \{x: ou \ (x \in A \ e \ x \notin B) \ ou \ (x \in B \ e \ x \notin A)\} = (A - B) \dot{\cup} (B - A)$.
Exemplo 2.25. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,5,6\}$, $A \Delta B = \{1,2,5,6\}$.

São propriedades da diferença simétrica entre conjuntos:

1. $A \Delta \emptyset = A$.
2. $A \Delta U = A^C$.
3. $A \Delta A^C = U$.
4. $A \Delta A = \emptyset$.
5. *(Comutatividade)* $A \Delta B = B \Delta A$.
6. $(A \Delta B)^C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$.
7. *(Associatividade)* $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
8. *(Distributividade da interseção em relação à diferença simétrica)* $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
9. $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A^C \cap B \cap C)$.
10.
   10.1. $(A \Delta B) - C = (A \cap C^C) \Delta (B \cap C^C)$.
   10.2. $A - (B \Delta C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C)$.

Adentrarei um pouco na **cardinalidade** de um conjunto. Se A e B são conjuntos finitos, então, é imediato que $A \cap B$ é um conjunto finito pelo fato de que $A \cap B \subseteq A$ ou $A \cap B \subseteq B$. Nas condições acima $A \cup B$ também é um conjunto finito. Isso será mostrado em breve.

Se A e B são conjuntos finitos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, então o número de elementos de sua reunião ($n(A \cup B)$) é igual à soma dos números de elementos de A ($n(A)$) e B ($n(B)$), ou seja, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Por outro lado, se A e B são conjuntos finitos e não disjuntos, ou seja, $A \cap B \neq \emptyset$, então o número de elementos de sua união ($n(A \cup B)$) é desigual à soma dos números de elementos de A ($n(A)$) e B ($n(B)$), pois nessa soma os elementos de $A \cap B$ estão contabilizados duas vezes, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$. Segue que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Com esta fórmula acima podemos encontrar uma fórmula para determinar o número de elementos da reunião de três conjuntos.

$$n(A \cup B \cup C) =$$
$$= n[(A \cup B) \cup C]$$
$$= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n[A \cap B \cap C].$$

Vejamos que a reunião de m conjuntos constitui também um conjunto finito.

Teorema da Inclusão-Exclusão. Dados A_1, A_2, A_3,..., A_m, conjuntos finitos, então

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$$
$$= \sum_{i}^{m} n(A_i) - \sum_{i<j}^{m} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{m} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots +$$
$$+ (-1)^{m+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_m), m \geq 2. \qquad (1)$$

Demonstração:

(Base de indução) Para $m = 2$:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) = \sum_{i}^{m=2} n(A_i) - \sum_{i<j}^{m=2} n(A_i \cap A_j).$$

A sentença é verdadeira para $m = 2$.

(Passo indutivo) Supondo que a sentença (1) seja válida para um valor $a \geq 2$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) =$$
$$= \sum_{i}^{a} n(A_i) - \sum_{i<j}^{a} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{a} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{a+1}$$
$$\cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_a) \qquad (2)$$

, então a sentença deverá ter validade para $a + 1$.

Fazendo $R = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_a$,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_a \cup A_{a+1}) =$$
$$= n(R \cup A_{a+1}) = n(R) + n(A_{a+1}) - n(R \cap A_{a+1}). \quad (3)$$

Calculando $n(R \cap A_{a+1})$

$$n(R \cap A_{a+1}) =$$
$$= n[(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_a) \cap A_{a+1}] =$$
$$= n[(A_1 \cap A_{a+1}) \cup (A_2 \cap A_{a+1}) \cup \ldots \cup (A_a \cap A_{a+1})]$$
$$= \sum_{i}^{a} n(A_i \cap A_{a+1}) - \sum_{i<j}^{a} n(A_i \cap A_j \cap A_{a+1}) + \sum_{i<j<k}^{a} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{a+1}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{a+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_a \cap A_{a+1}).$$

Voltando a (3)

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_a \cup A_{a+1}) = n(R \cup A_{a+1}) =$$
$$= n(R) + n(A_{a+1}) - n(R \cap A_{a+1})$$
$$= \left(\sum_{i}^{a} n(A_i) - \sum_{i<j}^{a} n(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{a+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_a) \right) + n(A_{a+1}) -$$

$$\left(\sum_{i}^{a} n(A_i \cap A_{a+1}) - \sum_{i<j}^{a} n\big(A_i \cap A_j \cap A_{a+1}\big) + \cdots + \ (-1)^{a+1}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{a+1})\right)$$

$$= \sum_{i}^{a} n(A_i) - \sum_{i<j}^{a} n\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{i<j<k}^{a} n\big(A_i \cap A_j \cap A_k\big) + \cdots +$$
$$+ (-1)^{a+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_a) + n(A_{a+1}) - \sum_{i}^{a} n(A_i \cap A_{a+1}) +$$
$$+ \sum_{i<j}^{a} n\big(A_i \cap A_j \cap A_{a+1}\big) - \sum_{i<j<k}^{a} n\big(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{a+1}\big) +$$
$$+ \cdots - \ (-1)^{a+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_a \cap A_{a+1})$$

$$= \sum_{i}^{a+1} n(A_i) - \sum_{i<j}^{a+1} n\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{i<j<k}^{a+1} n\big(A_i \cap A_j \cap A_k\big) + \cdots +$$
$$+ (-1)^{(a+1)+1} \cdot (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_a \cap A_{a+1}).$$

Portanto, a sentença é válida também para $a + 1$. Com isso, pelo Princípio da Indução Finita a sentença é válida para todo $m \in \mathbb{N}$.

3 APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações dos diagramas de Venn a Teoria dos Números, a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática. Apresentarei também a aplicação de tais diagramas na resolução problemas de determinação de conjuntos que satisfazem determinadas condições.

Santos (2017) destaca uma aplicação representativa que relaciona os Diagrama de Venn a Teoria dos Números diretamente aos conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Segue o procedimento:

1. Determinar a fatoração prima de cada um dos números dados;
2. Representar por meio dos diagramas de Venn o conjunto dos fatores primos de cada um dos números destacando os fatores comuns a eles.

O produto dos elementos da interseção dos conjuntos consiste no máximo divisor comum. Já o produto resultante todos os fatores presentes nos diagramas, ou seja, dos elementos comuns e incomuns a ambos os conjuntos consiste no mínimo múltiplo comum.

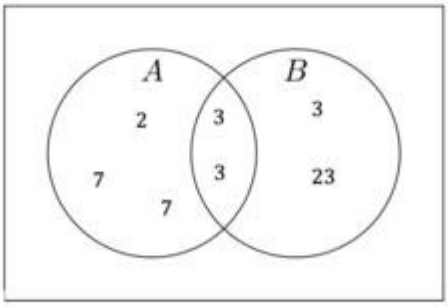
Exemplo 3.1. Calcule o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre 882 e 621.

Determinando a fatoração prima dos números:

882	2	621	3
441	3	207	3
147	3	69	3
49	7	23	23
7	7	1	
1			

Representamos no conjunto A os fatores de 882 e no conjunto B os do número 621.

Figura 7 – Representação da relação entre os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum dos números 882 e 621 por diagramas de Venn.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

O máximo divisor comum é $mdc(882{,}621) = 3^2 = 9$ e o mínimo múltiplo comum é $mmc(882{,}621) = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 23 = 60858$.

Os diagramas de Venn também constituem ferramenta representativa a várias áreas do conhecimento. Por exemplo, a abordagem de Heberle (2014) sobre a análise comparativa de redes biomoleculares com auxílio dos diagramas de Venn.

Observação: os diagramas que seguem nos exemplos abaixo foram elaborados pelo autor deste trabalho.

Destacarei a seguir algumas aplicações a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática.

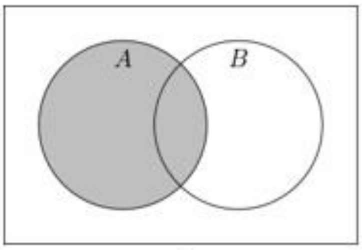
No trabalho de Novaes (2018) encontramos algumas aplicações dos Diagramas de Venn a Teoria dos Conjuntos:

I. Simplificação de expressões polinomiais de conjuntos;
II. Obtenção de condições necessárias e suficientes para que determinadas relações entre conjuntos sejam satisfeitas para quaisquer que sejam os conjuntos;
III. Verificação da validade de identidades e relações condicionais entre conjuntos.

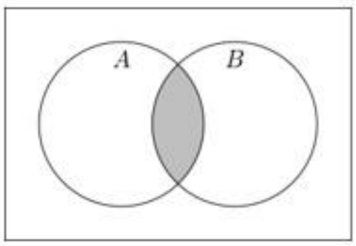
Exemplo 3.2. (NOVAES, 2018, p. 368, exercício 1. f), adaptado) Simplifique, por meio do diagramas de Venn, a expressão polinomial de conjuntos $[A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)]$.

Resolução:

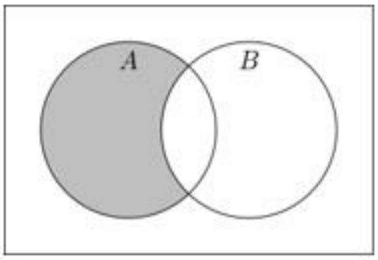
No termo $[A - (A \cap B)]$ temos a seguinte representação pelos diagramas de Venn:



A

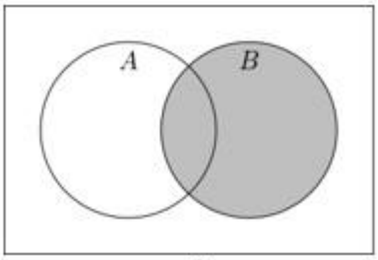


$A \cap B$

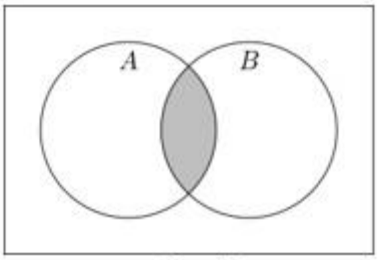


$A - (A \cap B)$

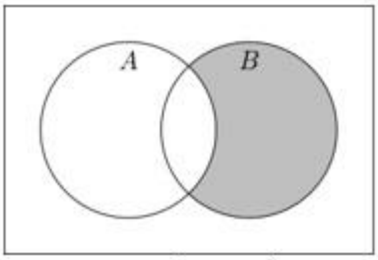
O termo $[B - (A \cap B)]$ é representado pelos diagramas de Venn da seguinte forma:



B

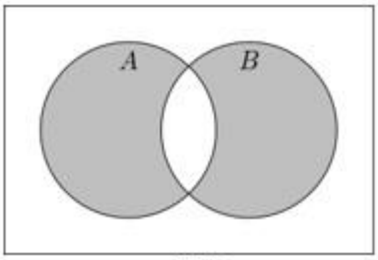


$A \cap B$



$B - (A \cap B)$

Com isso, a expressão $[A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)]$ é representada por

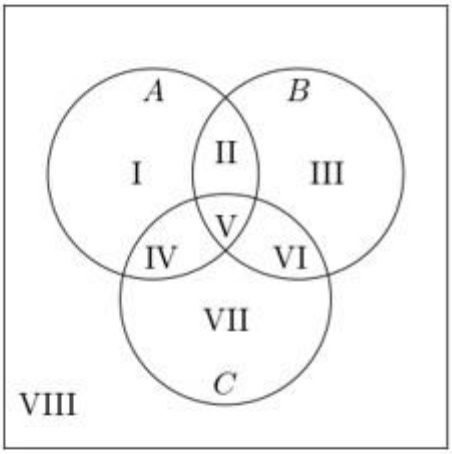


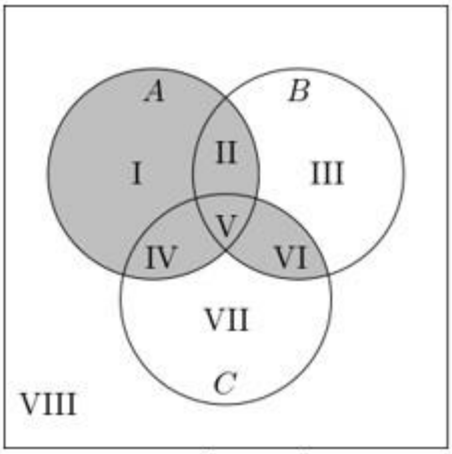
$A \Delta B$

que equivale a diferença simétrica entre dois conjuntos.

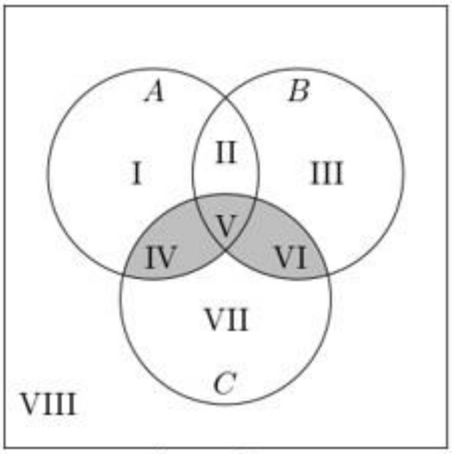
Exemplo 3.3. (LIMA*. et al.*, 2006, p. 23, exercício 17) Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha $\mathrm{A} \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \mathrm{C}$.

Resolução:





$\mathrm{A} \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap \mathrm{C}$

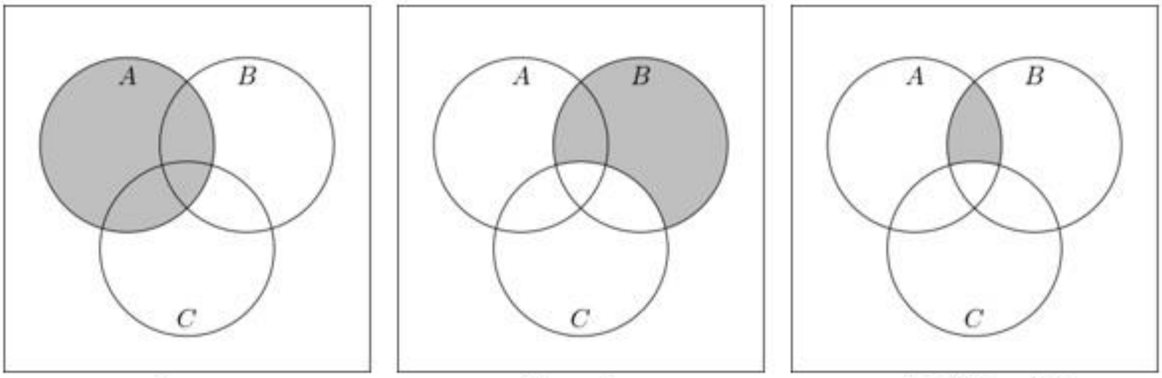
$\mathrm{A} \cup (B \cap C)$ consiste nos pontos das região I, II, IV, V, VI e $(A \cup B) \cap \mathrm{C}$ consistes nos pontos das regiões IV, V, VI. Com isso, podemos ter as regiões I e II vazias para estabelecer uma condição necessária e suficiente, ou seja, a $A \subset C$ (A consistir somente nos elementos das regiões IV, V).

É possível também verificar isto nas relações entre os conjuntos verificando a proposição $\mathrm{A} \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \mathrm{C} \leftrightarrow A \subset C$. Tendo $\mathrm{A} \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap \mathrm{C}$, então $A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$. Desta forma, $A \subset C$. Reciprocamente, tendo $A \subset C$, logo $A \cup C = C$. De $\mathrm{A} \cup (B \cap C)$, temos $\mathrm{A} \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C$, ou seja, $\mathrm{A} \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Sendo assim verificada a proposição.

Exemplo 3.4. (NOVAES, 2018, p. 370, exercício 9. c), adaptado) Verifique, por meio dos diagramas de Venn, se a identidade a seguir é verdadeira: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

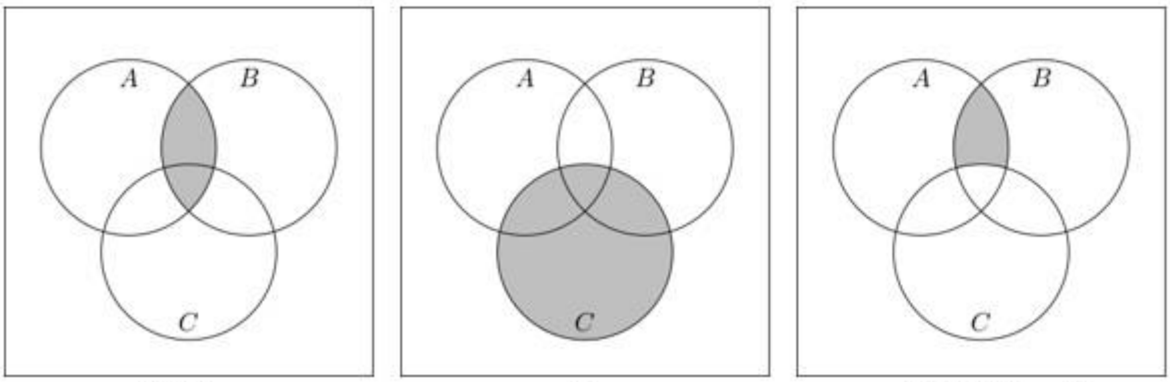
Resolução:

O membro $A \cap (B - C)$ possui a seguinte representação pelos diagramas de Venn:



A $\qquad$ $B - C$ $\qquad$ $A \cap (B - C)$

Já o membro $(A \cap B) - C$ possui a seguinte representação pelos diagramas de Venn:



$A \cap B$ $\qquad$ C $\qquad$ $(A \cap B) - C$

Com isso, comparando as representações para cada membro temos que a identidade $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ é verdadeira.

Exemplo 3.5. (NOVAES, 2018, p. 370, exercício 10. a), adaptado) Verifique, por meio dos diagramas de Venn, se a relação condicional entre conjuntos a seguir é válida: se $A \cap B \subseteq C^c$ e $A \cup C \subseteq B$, então $A \cap C = \emptyset$.

Resolução:

De $A \cup C \subseteq B$ tem-se que $A \subseteq B$ e $C \subseteq B$, ou seja, A e C são subconjuntos de B. Uma das representações possíveis dessas relações pelos diagramas de Venn está abaixo.

Observa-se que a condicional é validade. Como A é subconjunto de B, $A \cap B = A$ que corresponde a região II da representação acima. Diante disso, $A = A \cap B \subseteq C^c$. Com isso, sempre ocorre que as regiões II e III não possuem pontos em comum, ou seja, $A \cap C = \emptyset$.

Novais (2018) também mostra a abordagem de problemas de Inclusão-Exclusão pelos diagramas de Venn. Resolverei um problema por esse método.

Exemplo 3.6. (DANTE, 2016, p. 32, exercício 27) Em uma pesquisa feita com 1000 famílias para verificar a audiência dos programas de televisão, foram obtidos os seguintes resultados: 510 famílias assistem ao programa A, 305 assistem ao programa B e 386 assistem ao programa C. Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas A e B, 60 assistem aos programas B e C, 25 assistem a A e C e 10 famílias assistem aos três programas.

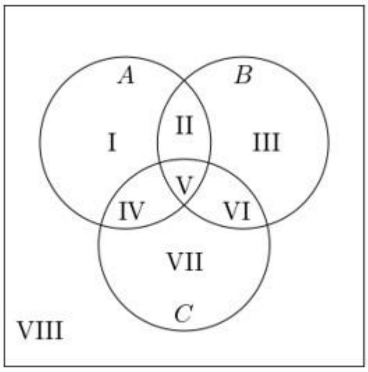
a) Quantas famílias não assistem a nenhum desses programas?

b) Quantas famílias assistem somente ao programa A?

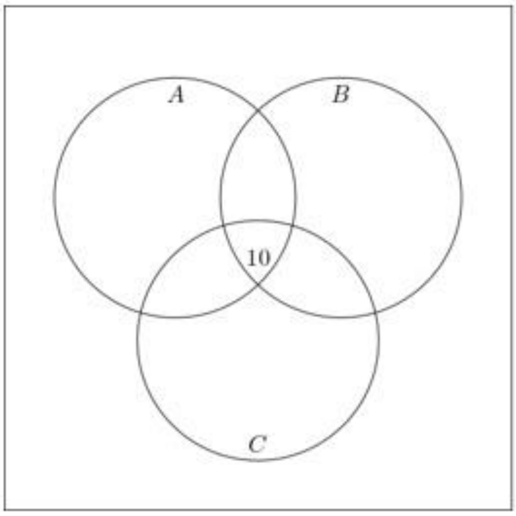
c) Quantas famílias não assistem nem ao programa A nem ao programa B?

Resolução:

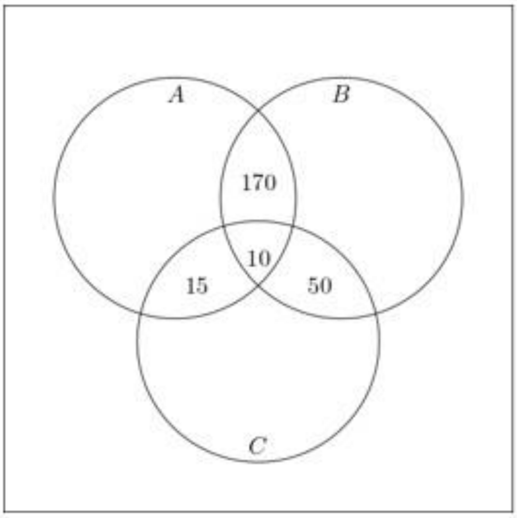
Sejam A o conjunto das famílias que assistem ao programa A, B o conjunto das famílias que assistem ao programa B e C conjunto das famílias que assistem ao programa C. Tem-se $n(U) = 1000$, $n(A) = 510$, $n(B) = 305$, $n(C) = 386$, $n(A \cap B) = 180$, $n(A \cap C) = 25$, $n(B \cap C) = 60$ e $n(A \cap B \cap C) = 10$.



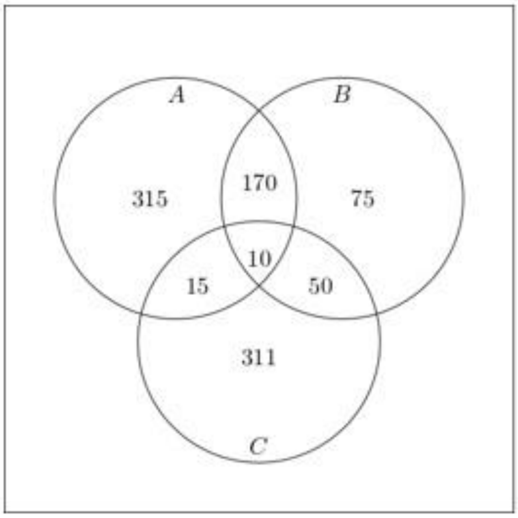
Preenchemos a quantidade de elementos comuns aos três conjuntos na região V.



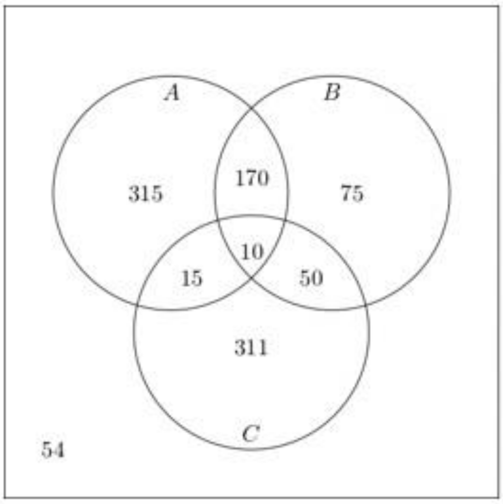
Para preencher a quantidade de elementos comuns somente dois dos conjuntos devem ser retirados os elementos comuns aos três conjuntos para que eles não sejam contados duas vezes, ou seja, $180 - 10 = 170$ para região II, $25 - 10 = 15$ para região IV, $60 - 10 = 50$ para região VI.



Agora, para preencher a quantidade de elementos que pertencem somente a um único conjunto os elementos comuns a somente dois conjuntos e os elementos comuns aos três conjuntos para não contar, novamente, duas vezes um mesmo elemento, ou seja, $510 - 170 - 15 - 10 = 315$ para região I, $305 - 170 - 50 - 10 = 75$ para região III, $386 - 15 - 50 - 10 = 311$ para região VII.



Por último, para determinar os elementos que não pertencem a nenhum dos conjuntos do total de elementos do universo deve ser retirado os elementos comuns aos três conjuntos, os elementos comuns a somente dois dos conjuntos e os elementos que pertencem a somente um único conjunto. $1000 - 315 - 75 - 311 - 170 - 50 - 15 - 10 = 54$ para a região $VIII$.



a) Observamos pela representação acima que 54 famílias não assistem a nenhum dos três programas.
b) Segue que 315 famílias assistem somente ao programa A.
c) Pelos diagramas de Venn acima, $311 + 54 = 365$ famílias não assistem nem ao programa A nem ao programa B.

Outra importante aplicação também relatada por Novaes (2018) enfatiza a forte relação entre a Lógica Matemática e a Teoria dos Conjuntos. Essa aplicação trata de testar a validade de argumentos lógicos.

A tabela a seguir mostra a correspondência entre as notações da Lógica Matemática e a da Teoria dos Conjuntos.

Tabela 1. Correspondência entre as notações da Lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos.

Lógica Matemática	**Teoria dos Conjuntos**
Variáveis (proposições): $p, q, r,$ ...	Variáveis (conjuntos): $P, Q, R,$ ...
$\sim$	$\cdot^{C}$
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\underline{\vee}$	Δ
$\longrightarrow$	$\subset$
$\longleftrightarrow$	$=$
Valor lógico F (Falso)	Conjunto vazio: $\emptyset$
Valor lógico V (Verdadeiro)	Conjunto universo: U

Fonte: Novaes (2018, p. 355).

.

Para esta aplicação o leitor poderá consultar, caso necessário, o *Apêndice A – Noções de Lógica Matemática*.

O procedimento para testar a validade de um dado argumento por meio dos diagramas de Venn é o seguinte:

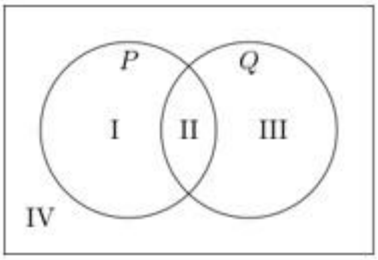
I. Construir tantos diagramas de Venn quantas forem as proposições que constituem o argumento rotulando as regiões por números cardinais ou algarismos romanos;

II. Traduzir para a Teoria dos Conjuntos as premissas e a conclusão do argumento;

III. Identificar a(s) região(ões) nos diagramas de Venn que contém a intersecção de todas as premissas do argumento.

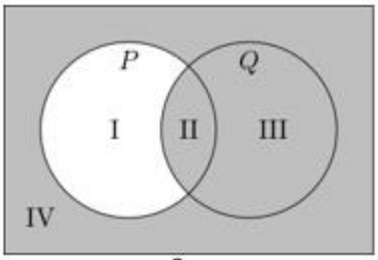
O argumento dado é válido se a(s) região(ões) que identificamos conforme o item III é (são) subconjunto(s) da conclusão.

Exemplos 3.7. (*Regra de Inferência Modus Ponens*) Verifique a validade do argumento $p \rightarrow q, p \vdash q$.

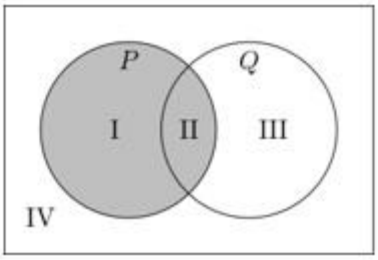


Usando a equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, reformulamos o argumento inicial para $\sim p \vee q, p \vdash q$.

Transformando o argumento para a linguagem dos conjuntos, temos que $\sim p \vee q$ corresponde a $P^C \cup Q$, p corresponde a P e a proposição q corresponde a Q.

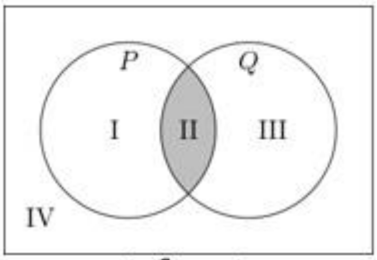


$P^C \cup Q$

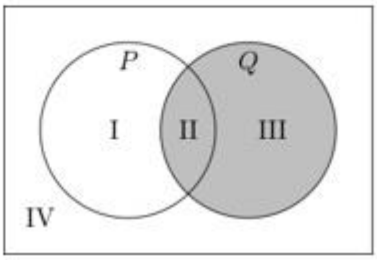


P

$P^C \cup Q$ corresponde as regiões II, III, IV. P corresponde as regiões I, II. Verificaremos agora se $[(P^C \cup Q) \cap P] \subset Q$.



$(P^C \cup Q) \cap P$



Q

$[(P^C \cup Q) \cap P]$ corresponde à região II. Q corresponde as regiões II, III. Com isso, é visível que se verifica $[(P^C \cup Q) \cap P] \subset Q$. Portanto, o argumento é válido.

Trago nesse trabalho a aplicação dos Diagramas de Venn a resolução de problemas de determinação de conjuntos que satisfazem condições específicas. A seguir apresentarei o procedimento e dois exemplos para ilustrar a aplicação.

Procedimento:

1. Construir diagramas de Venn quantos forem os conjuntos participantes do problema.
2. Verificar as condições por meio da análise dos diagramas.
3. Atualizar cada região da representação marcando cada elemento dentro da região correspondente.

Exemplo 3.8. Determinar os conjuntos A e B que satisfazem as seguintes condições:

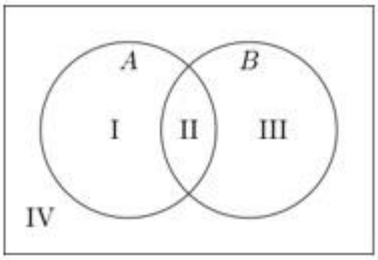
1ª) $A \cup B = \{p, q, r, s\}$.

2ª) $A \cap B = \{p, r\}$.

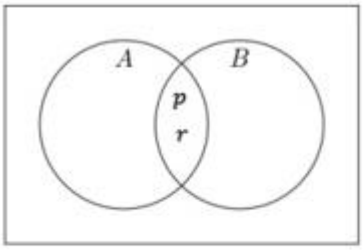
3ª) $s \in A$.

4ª) $A - B = \{q\}$.

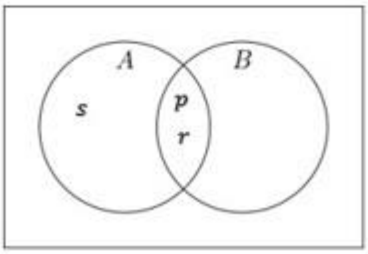
Resolução:



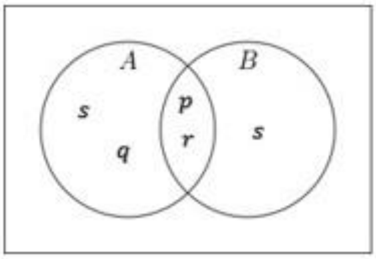
Diante da 2ª condição, $A \cap B = \{p, r\}$, temos pelos diagramas de Venn que tais elementos estão na região II.



Pela 3ª condição, $s \in A$, temos que este elemento está na região I.



Pela 4ª condição, $A - B = \{q\}$, temos que este elemento q está em na região I e que s também está na região III pois s é suprimido de A se estiver em B.

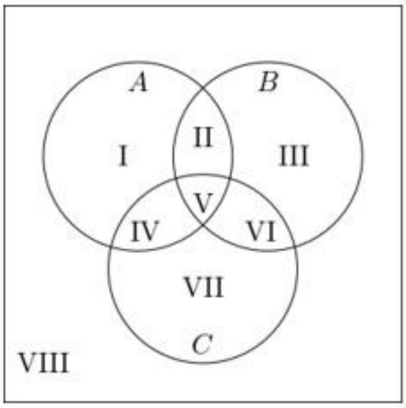


Por fim, verificamos pelos diagramas de Venn acima que a distribuição dos elementos respeita a 1ª condição, $A \cup B = \{p, q, r, s\}$. Portanto, $A = \{p, q, r, s\}$ e $B = \{p, r, s\}$.

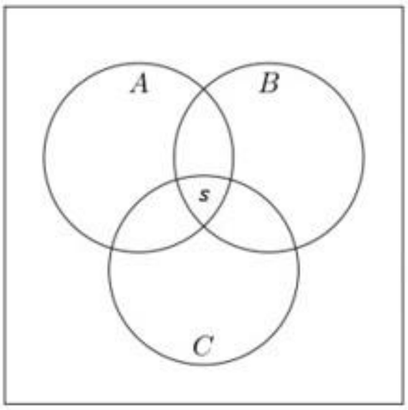
Exemplo 3.9. (IEZZI. *et al*., 1977, p. 36-A, exercício A-47) Determinar os conjuntos A, B, C que satisfazem as seguintes seis condições:

1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$.
2ª) $A \cap B = \{r, s\}$.
3ª) $B \cap C = \{s, x\}$.
4ª) $C \cap A = \{s, t\}$.
5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$.
6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$.

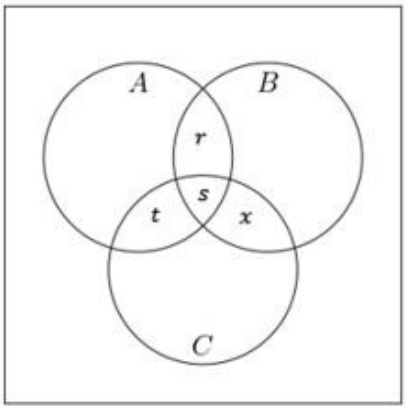
Resolução:



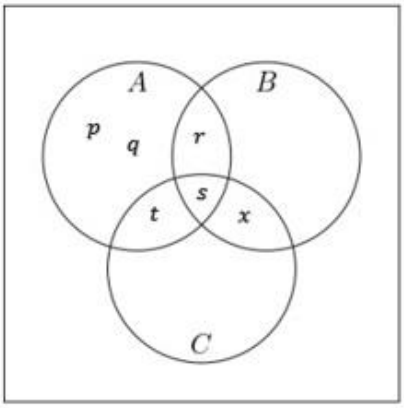
Diante da 2ª, 3ª e 4ª condições, temos $A \cap B \cap C = \{s\}$. Nos diagramas de Venn tal elemento está na região V.



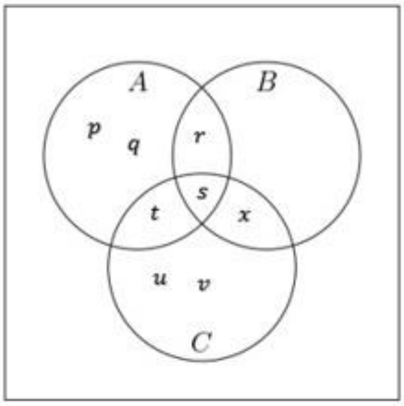
Ainda por essas condições temos que os elementos que não pertencem a $A \cap B \cap C = \{s\}$ estão respectivamente nas regiões II, VI, IV.



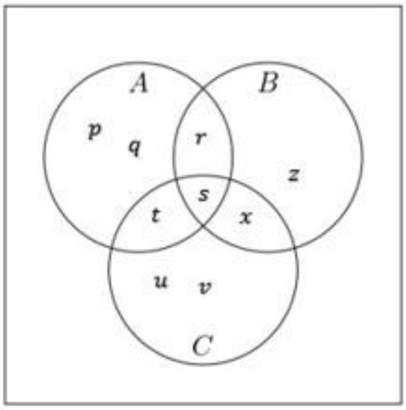
Os elementos p e q só podem pertencer a um único conjunto pois caso pertencessem a mais de um deles seria elemento de pelo menos um dos conjuntos da 2ª, 3ª ou 4ª condições, que tratam da intersecção entre dois dos conjuntos. Temos, a partir disso, que $p, q \in A$ pelos fatos de que se pertencessem a B violariam a 5ª condição, $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$, e se pertencessem a C não satisfariam a 6ª condição, $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$. Os elementos p e q estão na região I.



Os elementos u e v, diante da 5ª e 6ª condições, pertence somente ao conjuntos C pois se pertencessem a A ou a B estariam em $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$, ou seja, $u, v \in C$ e estão na região VII.



Por fim, o elemento $z \in B$ pois caso contrário estaria em contraponto a 5ª condição, $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$. Com isso, o elemento z está na região III.



Portanto, diante das condições obtemos os conjuntos $A = \{p, q, r, s, t\}$, $B = \{r, s, x, z\}$ e $C = \{s, t, u, v, x\}$.

Diante dos exemplos acima, os diagramas de Venn constituem um recurso semiótico que permite verificar conjecturas e encontrar a solução para os problemas de maneira mais simples e precisa. A resolução com o uso desse instrumento difere da tentativa por meio representação dos conjuntos pela sua notação padrão ($A = \{a, b, c, \dots\}$). Nela seria necessário representar todas as relação entre os conjuntos uma a uma, verificar as condições e atualizar cada conjunto.

Considero que os diagramas de Venn podem facilitar o ensino da Matemática em vários de seus ramos onde podem ser aplicáveis. Nessa perspectiva, a utilização de tais diagramas tem potencial para modificar o ensino da Lógica Matemática ou da própria Teoria dos Conjuntos tanto nas etapas do ensino básico quanto no ensino superior. Também há iniciativas de uso dos diagramas de Venn na educação infantil como recurso interdisciplinar como, por exemplo, a apresentada no trabalho de Carvalho, Santos e Sequeira (2017).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os diagramas de Venn são ferramentas relevantes para o trabalho com a Teoria dos Conjuntos e os ramos que a ela estão associados. Vimos neste trabalho algumas aplicações dos diagramas de Venn. A representação foi utilizada na Teoria dos Números, na Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática. Fiz também a aplicação de tais diagramas na resolução problemas de determinação de conjuntos que satisfazem condições específicas.

A representação de conjuntos por meio deles diferem das outras maneiras de representar conjuntos por sua propriedade semiótica e a facilidade na representação. O uso resulta em eficiência para o processo de resolução de várias questões no universo dos conjuntos.

Termino o trabalho enfatizando que a usabilidade dos diagramas de Venn podem facilitar o ensino da Matemática a medida que seu potencial representativo se associa aos assuntos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974. Tradução: Elza F. Gomide.

CANTOR, Georg. **Contribuitions to the founding of the theory of thansfinite numbers**. Nova York: Dover Publications, inc, 1915. Traduzido por Philip E. B. Jourdain.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Os diagramas de Venn: seus antecessores e sucessores. **Boletim do LABEN**, Niterói, v. 8, n. 15, jul./dez. 2017. Disponível em: http://www.labem.uff.br/novo/index.php/labem/article/view/120/108. Acesso em: 1 de mar. 2022.

CARVALHO, Magda Costa. SANTOS, Ana Isabel. SEQUEIRA, Renata. Os diagramas de Venn como recurso filosófico no jardim de infância. **Educação e Filosofia**, Uberlândia, v. 31, n. 62, p. 727-750, mai./ago. 2017. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/37507/22093. Acesso em: 1 mar. 2022.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e Álgebra de Boole**. São Paulo: Atlas, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2016. (Ensino médio, v.3)

EDWARDS, Anthony William Fairbank. John Venn and His Logic Diagram. *In*: EDWARDS, Anthony William Fairbank. **Cogwheels of the mind: The Story of Venn Diagrams**. Baltimore e Londres: Johns Hopkins University Press, 2004. Prefácio de Ian Stewart.

EULER, Leonhard. **Latters to a german princess**. 2. ed. Londres: Murray and Highley, 1802. v.1. Traduzido por Henry Hunter.

FILHO, Edgard de Alencar. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

HEBERLE, Hanry. **Uma abordagem visual para análise comparativa de redes biomoleculares com apoio de diagramas de Venn**. 2014. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-graduação em Ciências de Computação e Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, 2014. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-19032015-115427/publico/HenryHeberle_Dissertacao_revisada.pdf. Acesso em: 1 mar. 2022.

IEZZI, Gelson. *et al*. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, Elon Lages. *et. al*. **A Matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática, v.1).

LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoría de Conjuntos y temas afines**. Chile: McGRAW-HILL Companies, 1996. Tradução e adaptação: Jesús María Castãno.

NOVAES, Gilmar Pires. **Introdução à Teoria dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Paula Daniele Borges dos. **Relação entre o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum e o Diagrama de Venn**. 2017. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2017. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/7119/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Paula%20Daniele%20Borges%20dos%20Santos%20-%202017.pdf. Acesso em: 1 mar. 2022.

VIEIRA, Vandenberg Lopes. Conjuntos, relações e funções. *In*: VIEIRA, Vandenberg Lopes. **Álgebra abstrata para licenciatura**. Campina Grande: EDUEPB, 2013. p. 29-77.

VENN, John. **The logic of chance**. 3. ed. Londres: Macmillan and Co. and New York, 1888.

VENN, John. **The principles of empirical or inductive logic**. 2. ed. Londres: Macmillan and Co., 1907.

VENN, John. **Symbolic logic**. 1. ed. Londres: Macmillan and Co., 1881.

APÊNDICE A – NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA

Para a construção desse apêndice foram consultados os trabalhos de Filho (2002) e Daghlian (1995). As tabelas apresentadas neste apêndice foram elaboradas pelo autor deste trabalho.

Definição A.1. *Denomina-se* ***proposição*** *todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento com sentido completo.*

Exemplo A.1.

a) $\log 100 = 2$;
b) Paris é a capital da França;
c) $2 < 1$;
d) $\operatorname{sen} \pi = 1$.

Há dois princípios fundamentais na Lógica Matemática. São eles:

Princípio da não contradição: Uma proposição não ser verdadeira e falsa simultaneamente.

Princípio do terceiro excluído: Qualquer que seja a proposição ou ela é verdadeira ou é falsa, nunca ocorre outro caso.

É uma consequência desses princípios que qualquer proposição possui um único valor. Ou é verdadeira ou é falsa.

Definição A.2. *Chama-se* ***valor lógico de uma proposição*** *a* ***verdade*** *se a proposição for verdadeira e a* ***falsidade*** *quando for falsa.*

Exemplo A.2. As proposição a) e b) do exemplo A.1. têm valor lógico de verdade e a c) e d) o de falsidade.

Definição A.3. *Chama-se* ***proposição simples*** *(****proposição atômica****) aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante dela mesma.*

Tais proposições são denotadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s, ..., que são chamadas de letras proposicionais.

Exemplo A.3. As seguintes proposições são simples:

a) p: O pato é um ave;
b) q: Maria fez a atividade;
c) r: O número 2 é o único número natural par primo.

Definição A.4. *Denomina-se* ***proposição composta*** *(****proposição molecular****) aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.*

As proposições compostas são denotadas pelas letras latinas maiúsculas P, Q, R, S, ..., e são também chamadas de letras proposicionais.

Exemplo A.4. As seguintes proposições são compostas:

P: O pato é uma ave e Maria fez a atividade;

Q: O pato é uma ave ou Maria fez a atividade;

R: Se chover, então vai trovejar.

Para evidenciar que uma proposição composta P é formada por proposições simples p, q, r, s, ..., escreve-se $P(p, q, r, \dots)$.

Definição A.5. *Chama-se* ***conectivos*** *palavras utilizadas para formar novas proposições a partir de outras.*

São conectivos usuais na Lógica Matemática: “e”, “ou”, “não”, “se ... então ...”, “... se e somente se ...”.

Exemplo A.5. São exemplos de proposições com tais conectivos:

a) P: O número 11 é primo e o número 2^8 é igual a 256;
b) Q: O quadrilátero convexo $ABCD$ é trapézio ou é paralelogramo;

c) R: Não está trovejando;
d) S: Se uma figura é um pentágono convexo, então possui 5 diagonais;
e) T: O triângulo ABC é equilátero se e somente se é equiângulo.

A **tabela-verdade de proposições** é um dispositivo utilizado para representar todos os possíveis valores lógicos de uma proposição composta ou simples.

Observação: As tabelas dispostas neste apêndice foram elaboradas pelo autor deste trabalho.

Uma proposição composta com duas proposições p, q da seguinte forma:

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

A representação de uma proposição composta com três proposições p, q e r é:

	p	q	$\boldsymbol{r}$
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

A seguir será destacada as operações lógicas entre proposições.

Definição A.6. *A* ***negação de uma proposição p*** *é a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e a falsidade (F) quando p é verdadeira.*

Notação: $\sim p$ (não p).

A tabela-verdade dessa proposição é a seguinte:

	p	$\sim p$
1	V	F
2	F	V

Definição A.7. *A* ***conjunção de duas proposições p e q*** *é a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.*

Notação: $p \wedge q$ (p e q).

A tabela-verdade dessa proposição é a seguinte:

	p	q	$p \wedge q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

Definição A.8. *A* ***disjunção (inclusiva) de duas proposições p e q*** *é a proposição representada por "p ou q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando ambas são falsas.*
Notação: $p \vee q$ (p ou q).

A tabela-verdade dessa proposição é a seguinte:

	p	q	$p \vee q$
1	V	V	V
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

Definição A.9. *A* ***disjunção exclusiva de duas proposições p e q*** *é a proposição representada por "ou p ou q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando somente uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições são ambas verdadeiras ou ambas falsas.*
Notação: $p \veebar q$ (ou p ou q).

A tabela-verdade dessa proposição é a seguinte:

	p	q	$p \veebar q$
1	V	V	F
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

Definição A.10. *A* ***proposição condicional de p e q*** *é a proposição representada por "se p, então q", cujo valor lógico é a falsidade (F) quando p é verdadeira e q é falsa e a verdade (V) quando nos demais casos.*
Notação: $p \rightarrow q$ (se p, então q ou p é condição suficiente para q ou ainda q é condição necessária para p.

A tabela-verdade para essa proposição é:

	p	q	$p \rightarrow q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Definição A.11. *A **proposição bicondicional de p e q** é a proposição representada por "p se e somente se q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.*
Notação: $p \leftrightarrow q$ (p se e somente se q ou p é condição necessária e suficiente para q ou ainda q é condição necessária e suficiente para q.

	p	q	$p \leftrightarrow q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	V

A ordem de prioridade dos conectivos é a seguinte:

1) $\sim$;
2) $\wedge$ e $\vee$;
3) $\rightarrow$;
4) $\leftrightarrow$.

Os parênteses podem ser utilizados para priorizar determinadas operações.
Exemplo A.6. Na proposição composta $p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s$ a bicondicional é o último conectivo a incidir em seu valor lógico. Já em $p \rightarrow (q \leftrightarrow r \wedge s)$ é a condicional.
Serão apresentadas a seguir as definições de tautologia, contradição e continência.
Definição A.12. *Chama-se **tautologia** toda proposição composta cuja última coluna da tabela-verdade apresenta somente o valor lógico de verdade.*
Exemplo A.7. A proposição $\sim(p \wedge \sim p)$ é tautológica:

	p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
1	V	F	F	V
2	F	V	F	V

Tal proposição é chamada de ***princípio da não contradição***.
Definição A.13. *Denomina-se **contradição** toda proposição composta cuja última coluna da tabela-verdade traz somente o valor lógico de falsidade.*
Exemplo A.8. A proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição:

	p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	V	F	F
2	F	V	F

A partir dessa proposição a afirmação de que uma proposição pode ter valor lógico de verdade e falsidade concomitantemente tem valor lógico de falsidade.
Definição A.14. *Designa-se **contingência** toda proposição composta cuja última coluna da tabela-verdade há valores lógicos de verdade e de falsidade.*
Exemplo A.9. A proposição tabela-verdade da proposição $p \vee q \rightarrow p$ é uma contingência:

	p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
1	V	V	V	V
2	V	F	V	V
3	F	V	V	F
4	F	F	F	V

A seguir serão apresentadas as definições de implicação lógica, equivalência lógica e argumentos proposicionais.

Definição A.15. *Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,\ldots)$ **implica logicamente** (**implica** ou **acarreta**) uma proposição $Q(p,q,r,\ldots)$ se $Q(p,q,r,\ldots)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p,q,r,\ldots)$ é verdadeira (V).*

Notação: $P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ [P implica logicamente em Q].

Exemplo A.10. A tabela-verdade da proposição $(p \rightarrow q) \wedge p$ é:

	p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
1	V	V	V	V
2	V	F	F	F
3	F	V	V	F
4	F	F	V	F

A proposição $(p \rightarrow q) \wedge p$ é verdadeira na 1ª linha e nela q também é verdadeira. Com isso, há a implicação lógica $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$. Essa implicação é denominada ***Regra Modus Ponens***. Também ocorrem as implicações $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow p$ e $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow p \rightarrow q$.

Teorema A.1. *A proposição $P(p,q,r,\ldots)$ implica a proposição $Q(p,q,r,\ldots)$ isto é $P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ se e somente se a condiciona $P(p,q,r,\ldots) \rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ é tautológica.*

Demonstração:

Se $P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$, então não ocorre que os valores lógicos das proposições sejam simultaneamente de forma respectiva V e F e com isso a condicional entre essas duas proposições é tautológica.

Reciprocamente, se a condicional entre essas duas proposições $P(p,q,r,\ldots)$ e $Q(p,q,r,\ldots)$ é tautológica, ou seja, a última coluna da sua tabela-verdade se encerra em V, não ocorre que os valores simultâneos dessas proposições sejam respectivamente V e F. Com isso, $P(p,q,r,\ldots)$ implica logicamente em $Q(p,q,r,\ldots)$.

Exemplo A.11. A tabela-verdade da proposição $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ é:

	p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
1	V	V	F	V	F	F	V
2	V	F	V	F	F	F	V
3	F	V	F	V	F	V	V
4	F	F	V	V	V	V	V

Com isso, há a implicação lógica $(p \to q) \land {\sim}q \Rightarrow {\sim}p$ pois a condicional $[(p \to q) \land {\sim}q] \to {\sim}p$ é tautológica. Essa implicação é denominada ***Regra Modus Tollens***.

Definição A.16. *Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,\dots)$ são* ***equivalentes*** *(**logicamente**) a uma proposição $Q(p,q,r,\dots)$ quando as tabelas-verdade dessa proposições possuem valores lógicos idênticos.*

Notação: $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ [P equivale logicamente a Q].

Exemplo A.12. A tabelas-verdade das proposições p e ${\sim}{\sim}p$ são:

	p	${\sim}p$	${\sim}{\sim}p$
1	V	F	V
2	F	V	F

Diante das tabelas-verdade acima há a equivalência lógica $p \Leftrightarrow {\sim}{\sim}p$. Essa equivalência é denominada de ***dupla negação***.

Teorema A.2. *A proposição $P(p,q,r,\dots)$ é equivalente a proposição $Q(p,q,r,\dots)$, isto é: $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ se e somente se a bicondicional $P(p,q,r,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ é tautológica.*

Demonstração:

Se $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$, então as proposições $P(p,q,r,\dots)$ e $Q(p,q,r,\dots)$ possuem tabelas-verdade idênticas. Com isso, o valor lógico da bicondicional entre essas proposições é tautológica.

Reciprocamente, se a bicondicional entre essas duas proposições $P(p,q,r,\dots)$ e $Q(p,q,r,\dots)$ é tautológica, logo a última coluna da sua tabela-verdade se encerra em V. Com isso, ocorre sempre que os valores lógicos respectivos das duas proposições são ambos V (verdade) ou ambos F (falsidade). Dessa forma, $P(p,q,r,\dots)$ equivale logicamente a $Q(p,q,r,\dots)$.

Exemplo A.13. A tabela-verdade da proposição condicional $(p \to q) \leftrightarrow ({\sim}p \lor q)$ é:

	p	q	${\sim}p$	$p \to q$	${\sim}p \lor q$	$(p \to q) \leftrightarrow ({\sim}p \lor q)$
1	V	V	F	V	V	V
2	V	F	F	F	F	V
3	F	V	V	V	V	V
4	F	F	V	V	V	V

Com isso, há a implicação lógica $(p \to q) \Leftrightarrow ({\sim}p \lor q)$ pois a bicondicional $(p \to q) \leftrightarrow ({\sim}p \lor q)$ é tautológica.

Definição A.17. *Chama-se* ***argumento*** *toda a afirmação de que uma dada sequência finita $P_1, P_2, \dots, P_n$ $(n \geq 1)$ de proposições tem como consequência ou acarreta uma proposição final Q.*

As proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$ são denominadas **premissas do argumento**, e a proposição Q diz-se a **conclusão do argumento**. Indicasse um argumento por

Notação: $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ ($P_1, P_2, \dots, P_n$ acarreta Q ou Q decorre de $P_1, P_2, \dots, P_n$).

Observação: As premissas dos argumentos são verdadeiras ou são admitidas como tal.

Teorema A.3. *Um argumento* $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ *é válido se e somente se a condicional:*

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q \qquad (1)$$

é tautológica.

Demonstração:

A princípio, as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira. Com isso, o argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que a conjunção $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$. Por fim, pelo teorema A1, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ se e somente se $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é tautológica.

Exemplo A.14. A Regra Modus Ponens e a Regra Modus Tollens são argumentos válidos da forma $p \rightarrow q, p \vdash q$ e $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$ respectivamente.

Exemplo A.15. A tabela-verdade da proposição $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ é:

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
1	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F	F
3	V	F	V	F	V	V	F
4	V	F	F	F	V	F	F
5	F	V	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V	F
7	F	F	V	V	V	V	V
8	F	F	F	V	V	V	V

Na última linha da tabela acima ocorre:

	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	V
2	V
3	V
4	V
5	V
6	V
7	V
8	V

Com isso, o argumento $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ é valido pois a condicional $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ é tautológica. Esse argumento é denominado ***Silogismo hipotético***.