UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WERLLEN ROGER MELLO SANTOS

Lei do Resfriamento de Newton: uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias

CAMPINA GRANDE
2021

WERLLEN ROGER MELLO SANTOS

Lei do Resfriamento de Newton: uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE
2021

S237l Santos, Werllen Roger Mello.

Lei do Resfriamento de Newton [manuscrito] : uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias / Werllen Roger Mello Santos. - 2021.

38 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Equações diferenciais. 2. Lei do Resfriamento de Newton. 3. Modelagem Matemática. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

WERLLEN ROGER MELLO SANTOS

Lei do Resfriamento de Newton: uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovado em: 27/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José de Brito Silva

Prof. Me. José de Brito Silva
Universidade de Pernambuco (UPE-Campus Mata Norte)

Joselma Soares dos Santos

Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a minha família, em especial ao meu pai (in memoriam) e amigos que sempre me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, que apesar de estarmos passando por toda essa pandemia, me deu força, coragem para não desistir e a oportunidade para concluir esse curso.

A minha querida mãe e ao meu pai (in memoriam), que sempre apoiaram meus estudos e me incentivaram a nunca desistir dos meus sonhos.

A minha esposa **Emmille** e a minha filha **Anna Lis** que sempre me deram forças para continuar até o fim e me compreenderam nos momentos de ausência.

A todos os meus colegas, que sempre me incentivaram a concluir esse curso e me ajudaram direta e indiretamente.

Ao meu professor orientador **Dr. Davis Matias de Oliveira** pela atenção, suporte e paciência durante todo esse período das disciplinas TCC I e TCC II.

Por fim, a UEPB, em especial, ao seu corpo docente e a todos que contribuíram direta e indiretamente para minha formação, meu muito obrigado.

"Comigo tudo se transforma em Matemática."
René Descartes

RESUMO

As Equações Diferenciais compõem uma linha de estudo da matemática que contribui muito com a modelagem matemática, pois com elas conseguimos resolver e compreender alguns fenômenos da natureza. Neste sentido, o presente trabalho surge com o propósito de aplicar um modelo matemático em uma situação cotidiana da minha área de trabalho com o objetivo de comparar os resultados práticos com resultados teóricos; tendo em vista alguns fatores limitantes. A metodologia usada abarcou um breve estudo das Equações Diferenciais com ênfase na Lei do Resfriamento de Newton e alguns conceitos da física para maior compreensão dessa modelagem. Os resultados obtidos através dessa aplicação nos mostra a eficiência da Lei do Resfriamento de Newton aplicada em uma situação cotidiana da minha atuação profissional.

Palavras-chave: equações diferenciais; Lei do resfriamento de newton; modelagem matemática.

ABSTRACT

Differential equations are part of a line of research in the field of mathematics. Through differential equations, we can solve and understand many of the nature's phenomena. Observing these aspects, the present research applies a math model in my everyday life and profession. Also, this research has a goal to compare theoretical and practical aspects, observing some limiting factors. The methodology used in this research was about the differential equations, emphasising the Newton's law of cooling and some aspects from physics. These elements also used to help us understanding this modeling. The results obtained through these experiments show the efficiency of the Newton's law of cooling in the context of my everyday professional life.

Key-words: differential equations; cooling newton's Law; math modeling.

Lista de Figuras

2.1 Condução . . . 22
2.2 Convecção . . . 24
2.3 Irradiação ou Radiação . . . 25

3.1 Moinho de Vento . . . 26
3.2 Forno . . . 28
3.3 Forno (interior) . . . 28
3.4 Termômetro Digital (Infravermelho) . . . 28
3.5 Peça Resfriando . . . 29
3.6 Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática . . . 31
3.7 Peça sobre o CELERON . . . 32
3.8 Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática . . . 34
3.9 Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática . . . 36

Lista de Tabelas

3.1 Temperatura da peça em função do tempo. 30
3.2 Temperatura da peça em função do tempo. 33
3.3 Temperatura da peça em função do tempo. 35

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO **11**

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON **13**

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 13

2.1.1 Classificação quanto ao tipo 13

2.1.2 Classificação quanto a ordem 14

2.1.3 Classificação quanto a linearidade 14

2.1.4 Classificação das soluções 15

2.2 EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS 16

2.3 ALGUMAS DEFINIÇÕES DA FÍSICA 21

2.3.1 Calor 21

2.3.2 Transferência de Calor 21

3 APLICAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON **26**

3.1 ISAAC NEWTON 26

3.2 Coleta de Dados 27

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **37**

REFERÊNCIAS **37**

1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais, segundo Bassanezi (1988), compõem um dos importantes ramos da matemática, pois são elas capazes de modelar (**modelagem matemática**) [1] os diversos fenômenos da Natureza. Estas tiveram suas primeiras aplicações na Física como solução de alguns problemas já estudados, porém, não solucionados (matematicamente) e, posteriormente, em outros campos de estudo.

O presente trabalho é um breve estudo das Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas em uma situação do cotidiano de minha atuação profissional [2] através do modelo matemático da Lei do Resfriamento de Newton. Segundo Bassanezi (1988) a Lei do Resfriamento de Newton diz que: A taxa de variação da temperatura de um corpo em função do tempo é proporcional a diferença entre temperatura do corpo e o meio onde ele estar.

Boyce (1930) alega que as equações diferenciais foram descobertas entres os anos 1642 à 1646 com o advento do cálculo criado pelos estudos de Isaac Newton[3] (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz[4] (1646-1716). Além de Leibniz e Newton vou citar aqui alguns matemáticos que tiveram uma grande importância na descoberta das Equações Diferencias que foram: os irmãos Bernoulli, cujos seus nomes estão associados as Equações de Bernoulli; Leonhard Euler, que criou a teoria dos fatores integrantes, a solução para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, entre outras; Lagrange que desenvolveu o método de variação de parâmetros, entre outros.

A disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias me fez despertar para a ampla possibilidade de suas aplicações em situações do dia a dia. Nesse sentido, decidi estudar as Equações Diferenciais Ordinárias aplicada na Lei do Resfriamento de Newton com o objetivo de comparar os resultados práticos com os resultados teóricos em tarefas do cotidiano da minha atuação profissional.

Para este trabalho, foram realizados três experimentos onde pude acompanhar e registrar os dados do resfriamento de uma peça de metal com o auxílio de um termômetro digital na empresa onde trabalho. A partir destes registros obtidos, pude comprovar a eficácia do modelo matemático da Lei do Resfriamento de Newton.

---

[1](A modelagem matemática, é a forma que usamos para resolvermos um problema do cotidiano através de um modelo matemático.)

[2]Trabalho como ferramenteiro, confeccionando e fazendo manutenções em ferramentas de corte e dobra.

[3]Iremos falar um pouco da história de Newton no capítulo 3.

[4]Foi um matemático e filosofo alemão; um gênio universal e um fundador da ciência moderna. Ele antecipou o desenvolvimento de LÓGICA simbólica e, independentemente de Isaac Newton, inventou o cálculo com uma notação superior, incluindo os símbolos para integração e diferenciação.

Esse trabalho foi dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1, trago algumas definições importantes das Equações Diferenciais bem como da Física mais precisamente, sobre Termodinâmica; e no Capítulo 2 trago a aplicação do modelo, um pouco da história de Newton e os resultados da pesquisa, com tabelas e comparações gráficas.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

Neste trabalho, iremos apresentar um pouco da modelagem matemática aplicada a Lei do Resfriamento de Newton através de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Para isso necessitaremos de resultados e definições preliminares sobre equações diferenciais e alguns conceitos da física que irão nos auxiliar a compreender melhor as mudanças de temperaturas que objetos sofrem em seu estado de equilíbrio (ou não) com base nos autores Zill (2000) e Ghajar (2012).

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Definição 2.1. Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial.

Exemplo 2.1. A equação

$$y'' + y = x$$

é um exemplo de equação diferencial. Enquanto que a equação

$$x + 7 = 0$$

não é uma equação diferencial.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo; a ordem e a linearidade.

2.1.1 Classificação quanto ao tipo

Definição 2.2. Chamamos de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**, as equações da forma

$$F(t, y, y', \cdots, y^n) = 0 \quad \forall\ t,\ y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

onde t é a variável independente e $y = y(t)$ a variável dependente.

Observação 2.1. *As EDO's, são as equações que contém somente derivadas ordinárias ou seja, equações que contém uma ou mais variáveis dependentes em função de uma única variável independente.*

Exemplo 2.2. As equações

$$y'' - 4y' - 4y = e^t \text{ e } y' = 3t - 2y$$

são exemplos de EDO's.

Definição 2.3. Chamamos de **Equação Diferencial Parcial (EDP)**, as equações da forma

$$F\left(t, y, \frac{\partial y}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial t_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_n}\right) = 0$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_n)$ é a variável independente e $y = y(t)$ é a variável dependente.

Observação 2.2. *As EDP's, são aquelas que contêm somente derivadas parciais ou seja, equações que contêm uma ou mais variáveis dependentes em função de duas ou mais variáveis independentes.*

Exemplo 2.3. As equações

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

são exemplos de EDP's.

Observação 2.3. *Nas próximas subsecções, vamos definir a ordem e a linearidade das EDO's, pois o presente trabalho é uma modelagem envolvendo este tipo de equações.*

2.1.2 Classificação quanto a ordem

Definição 2.4. A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que parece na equação. Pode-se representar uma EDO geral de n-ésima ordem pela equação:

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \cdots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0 \quad \forall\ t,\ y \in\ \mathbb{R}$$

Exemplo 2.4. A equação

$$\frac{(d^4 y)^2}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 3$$

é uma EDO de ordem 4.

2.1.3 Classificação quanto a linearidade

Definição 2.5. Uma equação diferencial é linear quando for escrita da forma:

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t),\ com\ a_n \neq 0,\ e\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos que as equações diferenciais lineares tem duas propriedades:

1. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau;

2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente t.

Exemplo 2.5. A equação
$$(1-t)y'' - 4ty' + 5y = \cos t$$
é linear, pois satisfaz as propriedades 1 e 2.

Se a equação não for linear , então dizemos que ela é não-linear.

Exemplo 2.6. A equação
$$\frac{d^3y}{dt^3} + y^2 = 0$$
é não-linear, pois não satisfaz as propriedades 1 e 2.

2.1.4 Classificação das soluções

Definição 2.6. Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade é chamada de **solução** para equação no inervalo I.

Ou seja, a solução para uma EDO da forma da equação (2.1) é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação (2.1).

Definição 2.7 (Solução Geral)**.** Chama-se solução geral de uma equação diferencial, toda solução para a equação (2.1) no intervalo I que pode ser obtida de
$$G(t, y, c_1 \ldots c_n) = 0$$
por uma escolha apropriada dos c_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo 2.7. A equação diferencial
$$y' = y \tag{2.2}$$
tem a seguinte solução geral
$$y(t) = e^t \quad \forall \ t \ \in \ \mathbb{R}.$$

Definição 2.8 (Solução Particular)**.** Chama-se particular toda solução de uma equação diferencial que se obtém atribuindo valores as constantes arbitrárias que figuram na solução geral.

Exemplo 2.8. Um exemplo para solução particular de uma equação diferencial é:

$$y = ce^t \tag{2.3}$$

a qual forma uma família de n soluções para equação diferencial:

$$y' = y.$$

Tem-se que, para cada valor de c obtemos uma solução particular para (2.2) respectivamente.

Definição 2.9 (Problema de Valor Inicial P.V.I)**.** Chamamos de Problema de Valor Inicial ou P.V.I uma equação diferencial cuja a solução esta sujeita a uma condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Exemplo 2.9. Usando a equação (2.3), vamos encontrar uma solução particular sujeita a condição inicial $y(1) = 3$.

Solução: Vimos que, a equação (2.3) forma uma família de n soluções para a equação (2.2).Dai, para resolvermos esse P.V.I devemos obedecer as condições iniciais. Substituindo os valores em (2.3) temos:

$$3 = ce^1$$

logo o valor de c é:

$$c = 3e^{-1}.$$

Portanto, voltando a equação (2.3), obtemos:

$$y = 3e^{t-1}.$$

2.2 EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Se $g(t)$ é uma função contínua dada, então a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{2.4}$$

pode ser resolvida por integração. A solução para (2.4) é:

$$y = \int g(t)dt + c$$

onde c representa uma constante arbitrária.

Definição 2.10. Chamamos de **equação diferencial separável** (ou **com variáveis**

separáveis) a equação escrita de forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}. \tag{2.5}$$

Vejamos que a equação (2.5) pode ser escrita também na forma

$$h(y)\frac{dy}{dt} = g(t). \tag{2.6}$$

É notável que se $h(y) = 1$ a equação (2.6) se reduz a equação (2.4). Dessa forma fazendo

$$y = f(t).$$

temos:

$$\frac{dy}{dt} = f'(t)$$

Daí, substituindo os valores de y e dy em (2.6) temos:

$$h(f(t))f'(t) = g(t). \tag{2.7}$$

Agora, integrando ambos os membros em (2.7) temos:

$$\int h(f(t))f'(t)dt = \int g(t)dt. \tag{2.8}$$

Mas como $dy = f'(t)dt$, assim (2.8) toma a forma:

$$\int h(y)dy = \int g(t)dt + c.$$

Assim, para $h(y) = 1$, obtemos: $y = \int g(t)dt + c$ que exatamente a solução da equação 2.4.

Exemplo 2.10. Seja a equação

$$\frac{dy}{sen\ t} + \frac{dt}{2y} = 0. \tag{2.9}$$

Agora, separando as variáveis tem-se:

$$2ydy + sen\ tdt = 0.$$

Daí integrando ambos os membros temos:

$$\int 2ydy + \int sen\ tdt = c. \tag{2.10}$$

Logo, resolvendo a equação (2.10), a solução geral da equação (2.9) é

$$y = \pm\sqrt{\cos t + c}.$$

Aplicação:

A Lei do Resfriamento de Newton é uma modelagem matemática que permite definir a taxa de mudança de temperatura de um corpo sendo proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e sua vizinhança. Desta forma Newton formulou a equação para modelar essa taxa de variação da seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m) \tag{2.11}$$

onde K é a constante de proporcionalidade, $T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t e T_m é a temperatura constante do meio ambiente em que o corpo está.

Observando a equação (2.11) percebe-se que estamos diante de uma equação diferencial de variáveis separáveis; então para resolvê-la iremos separar as variáveis e integrar ambos os membros.
Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = Kdt$$

Agora, integrando tem-se:

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int Kdt$$

$$\Rightarrow \ln{(T - T_m)} = Kt + C. \tag{2.12}$$

O objetivo central da Lei do Resfriamento de Newton é obter a temperatura de determinado corpo com o decorrer do tempo. Daí, como T é a temperatura do corpo, iremos isolar essa varável. Aplicando a exponencial em ambos os lados da equação (2.12) temos:

$$e^{\ln\,(T - T_m)} = e^{Kt + C}. \tag{2.13}$$

Da equação (2.13) temos:

$$T - T_m = e^{Kt}C_\circ.$$

Logo, isolando T temos a equação que modela a Lei do Resfriamento de Newton.

$$T = C_\circ e^{Kt} + T_m. \tag{2.14}$$

Na equação (2.14) observemos que $K > 0$ quando o corpo estiver esquentando e; $K < 0$ quando o corpo estiver resfriando.

Exemplo 2.11. Uma peça de metal foi posta em um forno industrial para ser submetida a um processo de revenimento. Após algumas horas, ela foi retirada do forno com a temperatura de 405°C e foi posta em uma sala refrigerada a 22°C. Depois de 5 minutos foi verificado, com o auxílio de um termômetro, que a mesma estava a 330°C. Em quanto tempo a peça estará na temperatura de 30°C?

Solução: A principio, coletando os dados iniciais, temos que no instante inicial $t = 0$ a temperatura da peça era $T = 405$°C e, a temperatura do ambiente onde a peça foi colocada era $T_m = 22$°C. Como o exemplo é um **P.V.I** da Lei do Resfriamento de Newton, sabemos que tal problema é solucionado por separação de variáveis. Daí pela equação (2.11) temos:

$$\frac{dT}{dt} = K.(T - T_m).$$

Substituindo os valores iniciais tem-se:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 22)$$

de onde segue que:

$$\frac{dT}{(T - 22)} = Kdt.$$

Integrando ambos os membros temos:

$$\int \frac{dT}{(T - 22)} = \int Kdt$$

ou seja:

$$\ln|T - 22| = Kt + C.$$

Agora aplicando a exponencial em ambos os lados tem-se:

$$e^{\ln|T-22|} = C_\circ e^{K.t}$$

de modo que

$$T - 22 = C_\circ e^{K.t} \tag{2.15}$$

ou ainda:

$$T = C_\circ e^{K.t} + 22.$$

Para o instante inicial $T(0) = 405°\text{C}$, temos:

$$405 = C_\circ e^{K\cdot 0} + 22.$$

ou seja:

$$C_\circ = 383.$$

Independente da existência de fatores limitantes no decorrer no resfriamento na peça, o valor de $C_\circ$ sempre será o mesmo pois ele foi encontrado a partir dos dados iniciais da peça.

Agora, vamos encontrar o valor de K para podermos resolver esse **P.V.I**. Para tal, vamos substituir os valores $T(5) = 330°\text{C}$ e $C_\circ = 383$ na equação (2.15):

$$330 - 22 = 383e^{5K}$$

$$\Rightarrow \frac{308}{383} = e^{5K}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{308}{383}\right) = \ln e^{5K}$$

$$\Rightarrow -0,2179352062 = 5K$$

Portanto o valor de K será

$$K = -0,0435870412$$

Agora, conhecido o valor de K, conseguimos encontrar a equação que modela esse resfriamento; isto é:

$$T = 383e^{-0,0435870412t} + 22. \tag{2.16}$$

Queremos saber em quanto tempo a peça irá atingir a temperatura de 30°C. Considerando agora $T(t) = 30$ e substituindo em 2.16 tem-se:

$$30 = 383e^{-0,0435870412t} + 22.$$

$$\Rightarrow \frac{30 - 22}{383} = e^{-0,0435870412t}.$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{8}{383}\right) = \ln e^{-0,0435870412t}.$$

$$\Rightarrow -3.8685934475 = -0,0435870412t.$$

$$\Rightarrow t \approx 90.$$

Portanto, o tempo que a peça irá atingir a temperatura estimada será de aproximadamente 90 minutos que é o equivalente a 1 hora e 30 minutos.

2.3 ALGUMAS DEFINIÇÕES DA FÍSICA

No dia a dia se tiramos algo da geladeira como, por exemplo, uma lata de cerveja e a colocarmos em uma temperatura ambiente, consequentemente a lata de cerveja irá ficar em temperatura ambiente, ou seja, esquentar. Da mesma forma, se colocarmos uma latinha de cerveja com a temperatura ambiente na geladeira ela irá resfriar. Isso irá acontecer pelo fato da *transferência de energia* do meio frio para o quente e vice versa. Esse tipo de processo dar-se sempre da maior temperatura para menor temperatura. E quando os objetos atingem mesma temperatura não há mais transferência de energia pois os mesmos então em equilíbrio térmico.

A palavra **Termodinâmica** vem do grego *termo*, interpretado como calor e *dýnamis*, interpretado como força. Deste modo a termodinâmica estuda os fenômenos e sistemas físicos onde pode ocorrer troca de calor, transformação de energia e variação de temperatura em dois aspectos: força e calor. Com isso vamos definir o conceito de temperatura.

Segundo Halliday (1916) ***Temperatura*** é uma das grandezas fundamentais do Sistema Internacional de Unidades, que é uma propriedade em que pela definição da lei zero da termodinâmica diz que quando dois ou mais corpos estão em equilíbrio térmico, suas temperaturas são iguais.

A temperatura é medida através de termômetros. Algumas substâncias (como por exemplo: o mercúrio), possuem grandezas que variam de acordo com a temperatura do objeto com o qual elas estejam em contato. Dessa forma, com auxílio de um termômetro, conseguimos fazer a aferição dessas grandezas para associá-las com a temperatura.

2.3.1 Calor

Ghajar (2012), diz que o Calor é uma forma de transferência de energia que pode ser transferida de um sistema para outro em consequência da diferença de temperatura entre eles. Dentre os vários tipo de energia vamos destacar no nosso trabalho as energias cinética e potencial. A primeira faz referência a agitação das partículas; a temperatura absoluta, também conhecida como energia sensível. A segunda faz referência à desagregação das partículas, ao estado físico da matéria conhecida também como energia latente.

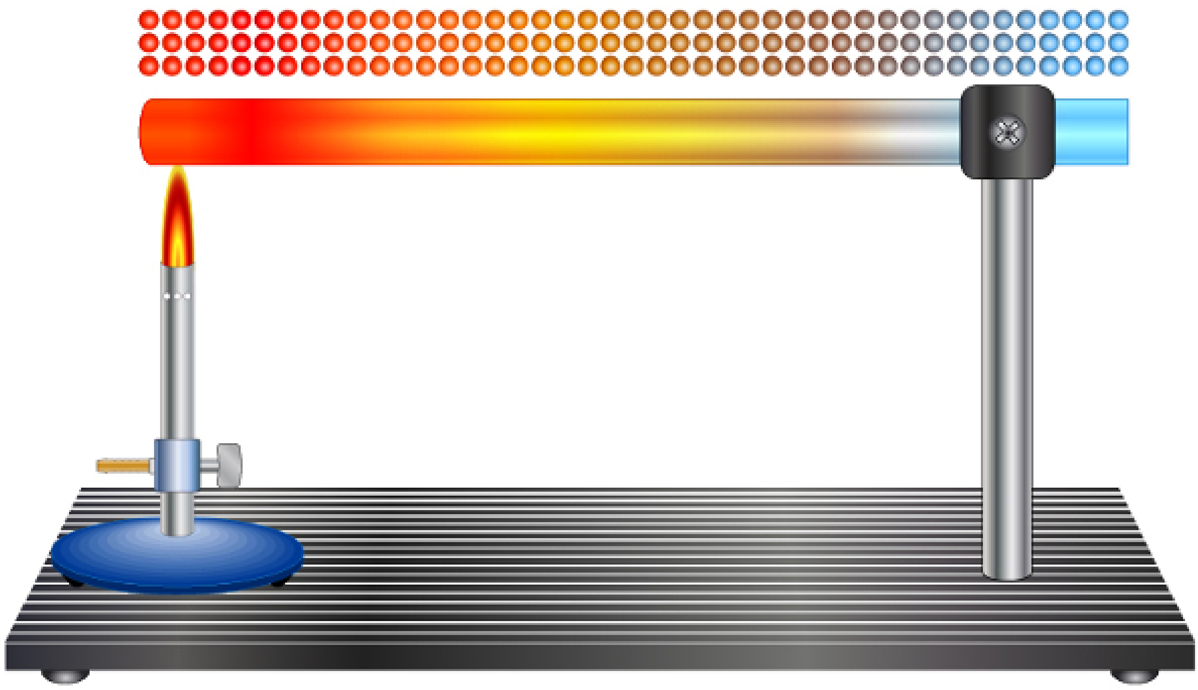
2.3.2 Transferência de Calor

A transferência de calor é a ciência que pesquisa sobre as taxas de transferência de energia. Essa transferência de energia em forma de calor sempre se dar do meio de maior temperatura para o de menor temperatura. E quando essas temperaturas chegam ao equilíbrio térmico; ou seja, os corpos têm mesma temperatura,e a transferência de energia é cessada. Se observarmos, a transferência de calor é encontrada no nosso dia a dia como, por exemplo, em um aperto de mão, em um abraço, entre outros casos. Tem alguns eletrodomésticos que também fazem muito bem essa transferência de calor como por exemplo: fogões, fornos, geladeiras, freezers e até mesmo tv's. A transferência de energia pode acontecer de três formas diferentes que são: condução, convecção e irradiação. A seguir iremos definir cada uma dessas formas mais detalhada.

Condução

A condução é um dos processos de transferência de energia que pode ocorrer em meios sólidos, líquidos e gasosos. Ela faz com que as partículas de uma certa substância bem energizada interajam com as partículas adjacentes menos energizadas. Esse processo é definido pela interação das partículas em diferentes temperaturas. Daí as partículas mais energizadas, ou seja, com maior temperatura cedem energia cinética para as partículas menos energizadas até chegar ao ponto de equilíbrio térmico, que ocorre quando a substância está toda em uma mesma temperatura. A Figura (2.1) ilustra como pode acontecer o processo de tranferência de energia por condução.

Figura 2.1 – Condução



Fonte: Google. [1]

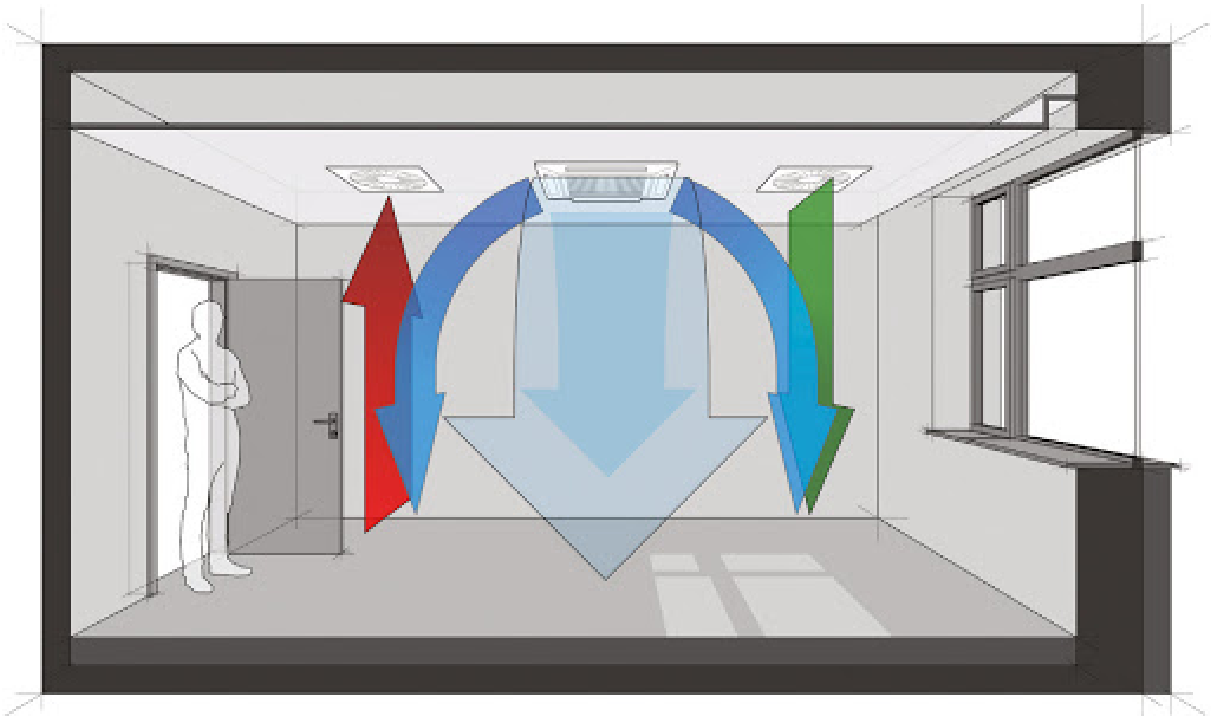
[1] "Condução térmica"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/conducao-termica.htm. Acesso em 23 de julho de 2021.

Convecção

Ghajar (2012) afirma que a convecção é a forma de transferência de energia entre sólidos e/ou fluidos vizinhos que estão em total movimentação. Consequentemente quanto maior for a intensidade dos movimentos de um fluido maior será transferência de energia.

Exemplo disso ocorre no nosso dia a dia: quanto mais próximo de um ventilador você esteja mais rápido você irá se refrescar. Além disso, segundo Ghajar (2012) a convecção é chamada de *forçada* se o fluido for estimulado a fluir sobre a superfície através de uma força externa como, por exemplo, um ventilador ou um ar-condicionado. Por outro lado, a convecção é chamada de *natural* ou *livre* se a interação do fluido for através do ar natural. Será por condução essa transferência de energia se a diferença de temperatura entre o solido e o fluido não gerar as correntes de convecção. A Figura (2.2) ilustra como se dá a transferência de energia por convecção.

Figura 2.2 – Convecção



Fonte: Google.[2]

Irradiação ou Radiação

Irradiação ou Radiação é o processo de transferência de energia através de ondas eletromagnéticas. A radiação, diferentemente da condução e da convecção, não precisa de um meio para a transferência de energia pois as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo.

[2] "Métodos para o cálculo da carga térmica"; EA Engenharia e Arquitetura. Disponível em: http://www.engenhariaearquitetura.com.br/2018/01/metodos-para-o-calculo-da-carga-termica Acesso em 23 de julho de 2021.

A Figura (2.3) ilustra como se dá a transferência de energia por irradiação.

Figura 2.3 – Irradiação ou Radiação

Fonte: Google.[3]

[3] "Irradiação Térmica"; Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/irradiacao-termica/ Acesso em 23 de julho de 2021.

3 APLICAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

3.1 ISAAC NEWTON

Diva (2020), afirma que Isaac Newton estar, entre os principais físicos, astrônomos e matemáticos até os dias atuais. Ele nasceu em Woolsthorpe na Inglaterra no dia 4 de janeiro de 1643. Ainda cedo Newton ficou órfão e foi morar com sua avó; donde passava maior parte do seu tempo fazendo algumas invenções como por exemplo: um Moinho de Vento como mostra a Figura (3.1).

Figura 3.1 – Moinho de Vento

Fonte: Google.[1]

Aos 22 anos ele recebeu seu primeiro título, de bacharel em Artes pela Universidade de Cambridge onde ele conheceu o professor Isaac Barrow que lhe ajudou a aguçar seus

[1] "Moinho de Vento"; Wikipedia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Moinhodevento Acesso em 23 de julho de 2021.

interesses pela matemática. Entre os anos de 1665 à 1667 Newton fez algumas descobertas que até hoje contribui com a ciência. Dentre elas citamos as famosas: Três Leis de Newton.

Aos 26 anos Newton tornou-se professor da Universidade de Cambridge sucedendo o lugar de Isaac Barrow cujo era seu mestre. Segundo Souza (2007), em 1701 Newton publicou ocultamente um artigo nomeado como "Scala Graduum Calori" que descreve o método de medir temperaturas de até 1000^0C, algo impossível com os instrumentos de medições da época. Tal método estava baseado no que hoje chamamos de Lei do Resfriamento de Newton onde a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional a diferença da temperatura do corpo e sua vizinhança.

Isaac Newton faleceu em Londres, no dia 20 de março de 1727. Seu funeral foi grandioso. Seis nobres membros do Parlamento inglês carregaram seu ataúde, até a Abadia de Westminster, onde repousa até hoje seus restos mortais.

3.2 Coleta de Dados

Essa coleta de dados foi dividida em três experimentos. No primeiro experimento eu analisei o resfriamento de uma peça de metal após a mesma ter passado por um processo de revenimento[2]; com a peça suspensa por um gancho de metal que teve inicio as 7 horas e 40 minutos da manhã. No segundo experimento eu analisei o resfriamento da mesma peça porém, a uma temperatura mais baixa do que a do primeiro experimento e deixei-a resfriando sobre um material não condutor de calor (CELERON) que teve inicio as 17 horas e 30 minutos. No terceiro e último experimento eu analisei o resfriamento da mesma peça com a mesma temperatura do segundo experimento e deixei-a resfriando suspensa por um gancho de metal, o que teve inicio as 16 horas e 43 minutos.

Estes experimentos foram realizados em Maio do ano de 2021 na **Assa Abloy Group Metalúrgica Silvana**, empresa na qual trabalho como ferramenteiro no setor da **Ferramentaria** em Campina Grande - Paraíba. A ideia surgiu com o objetivo de comprovar, no meu trabalho cotidiano, através do uso das Equações Diferenciais, a modelagem do resfriamento de uma peça de metal, após o processo de revenimento. Essa peça passa por esse processo de revenimento pelo fato que nós, da ferramentaria trabalhamos com confecções e manutenções de matrizes de corte, dobra (trabalhamos com chapas de ferro e aço inox) e moldes. Logo, para que um aço consiga estampar outro aço ele terá que passar por um processo de têmpera[3]que, no meu local de trabalho, é feito em um forno industrial à temperaturas que variam de 850°C á 1060°C (isso para o processo de têmpera) de acordo com o tipo do material. Após o processo de têmpera ocorrem algumas transformações na estrutura do material fazendo com que apareçam algumas trincas internas. Por isso

[2]Revenimento segundo KONINCK (1980) é um tratamento térmico aplicado em peças temperadas. Ou seja, é o reaquecimento das peças temperadas com o objetivo de suprimir as tensões internas provocadas pela tempera.

[3]Têmpera segundo KONINCK (1980) é um tratamento térmico que consiste em aquecer a peça e resfria-la bruscamente com o objetivo de aumentar a dureza.

é necessário que a peça passe pelo processo de revenimento para normalizar o material, deixando-o na dureza adequada.

Nesse experimento foi usado um forno industrial **Healting** com aquecimento elétrico e temperatura máxima de trabalho chegando até 1200° além de um termômetro digital infravermelho da fabricante **Minipa** do modelo **MT-350** , cuja faixa de medição vai de -30° à 550° e, tem uma precisão de ± 2% entre -30° à 100° e de 2% da leitura entre 101° a 550°.

As Figuras (3.2) e (3.3) são fotos do forno descrito anteriormente e, a Figura (3.4) ilustra o termômetro.

Figura 3.2 – Forno

Fonte: Foto tirada pelo autor

Figura 3.3 – Forno (interior)

Fonte: Foto tirada pelo autor

Figura 3.4 – Termômetro Digital (Infravermelho)

Fonte: Foto tirada pelo autor

Experimento 1: No primeiro experimento eu analisei o resfriamento de uma peça de metal de uma das diversas matrizes de corte com as quais eu trabalho. As dimensões do metal são: 198mm de comprimento por 50mm de largura e, 45mm de altura , o qual, após ter passado pelo processo de revenimento, pesou 3,125Kg. O objetivo aqui é obter a resposta sobre o tempo necessário para que a peça esteja a uma temperatura de manuseio (Temperatura que conseguimos pegar a peça sem que nos seja causado um acidente de trabalho). Ao sair do forno a peça tinha uma temperatura de 405°C e foi posta em uma sala resfriada por um ar-condicionado a uma temperatura de 22°C. A peça ficou suspensa por um gancho de metal livrando toda sua superfície de estar em contato com outro corpo. O experimento teve duração de 1 hora e 40 minutos. A Figura (3.5), nos mostra o resfriamento da peça suspensa por um gancho de metal.

Figura 3.5 – Peça Resfriando

Fonte: Foto tirada pelo autor

Deste modo, como já descrito anteriormente, a Lei do Resfriamento de Newton permite definir a taxa de temperatura de um corpo, em relação ao tempo, como sendo proporcional a diferença de temperatura do corpo e sua vizinhança. Ao aplicar o modelo da Lei do Resfriamento de Newton obtivemos resultados não tão distantes do experimento prático, os quais são apresentados na Tabela (3.1).

Tabela 3.1 – Temperatura da peça em função do tempo.

Tempo(Minutos)	Temperatura °C (Prática)	Temperatura °C (Teoria)
0	405	405
5	330	330
10	270	269,68
15	220	221,18
20	190	182,17
25	170	150,8
30	145	125,58
35	130	105,29
40	110	88,98
45	95	75,87
50	80	65,32
55	75	56,83
60	70	50,01
65	65	44,53
70	60	40,11
75	55	36,57
80	50	33,71
85	45	31,42
90	40	29,58
95	37	28,09
100	31	26.9

Fonte: Autor

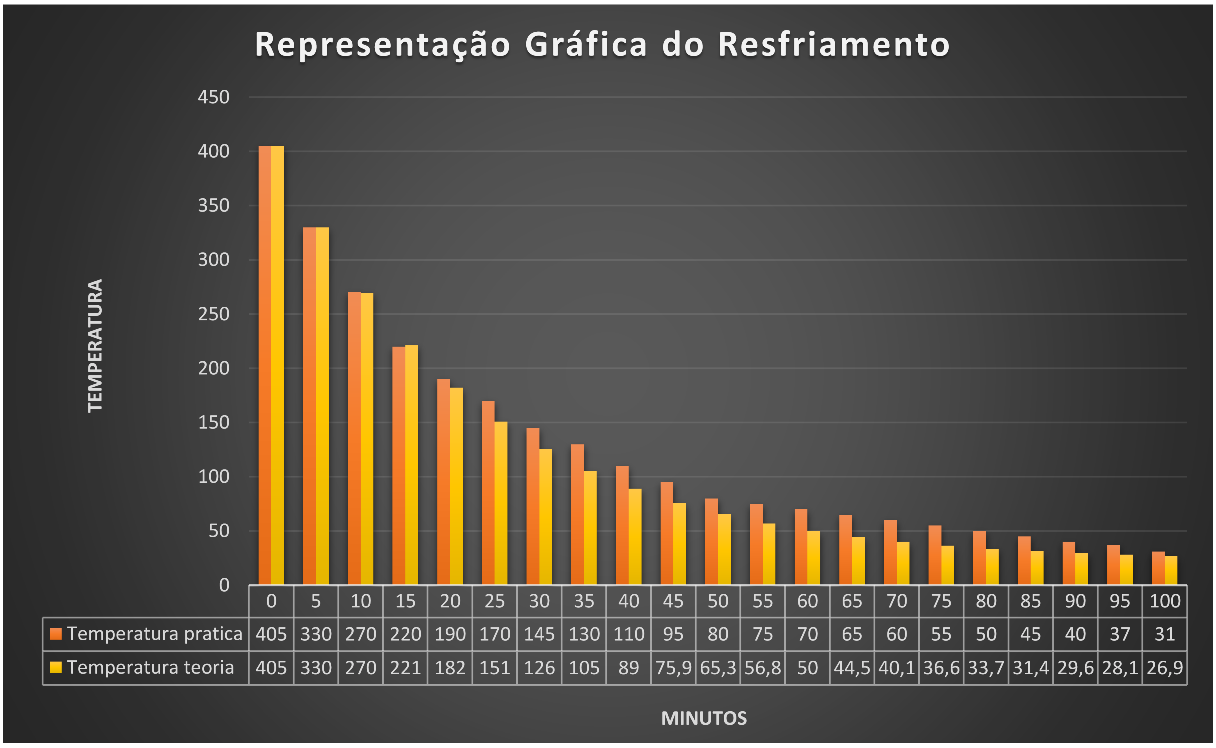
Observação 3.1. *Os valores da Tabela acima foram obtidos através da equação (2.16) encontrada no exemplo (2.11).*

Pode-se perceber que os resultados do modelo não ficaram tão distantes da prática. Houve sim diferença nas temperaturas mas, temos que levar em consideração fatores que consideramos limitantes como: a abertura da porta; a sala contém um exaustor e o tubo de sucção também pode ser um fator limitante e; o horário, dentre outros fatores que não nos deixa chegar a uma maior exatidão.

O exemplo, (2.11) foi a problematização desse experimento, onde descrevi a situação problema, com o objetivo de encontrar o tempo necessário para a peça estar na temperatura desejada. Com auxílio da equação (2.16), que modela o resfriamento da peça em questão, encontrei o tempo no qual a peça estaria na temperatura desejada.

Na Figura (3.6) segue uma comparação gráfica do resfriamento da peça.

Figura 3.6 – Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática



Fonte: Gráfico produzido pelo autor com auxílio do aplicativo EXCEL

Experimento 2: No segundo experimento eu analisei o resfriamento da mesma peça que estava a uma temperatura menor pois ela estava sobre um tipo de material derivado do algodão chamado de CELERON. Por este motivo, eu não aqueci a peça na mesma temperatura do primeiro momento para que não ocorresse algum dano ao CELERON o qual a peça estava sobreposta. Neste caso, ao sair do forno a peça tinha uma temperatura de 220°C e foi posta na mesma sala resfriada por um ar-condicionado a uma temperatura de 20°C. Após 5 minutos a peça estava com 190°C. A peça ficou sobre o CELERON livrando toda sua superfície de estar em contato com outro corpo. O experimento teve duração de 1 hora e 30 minutos.

A Figura (3.7), nos mostra o resfriamento da peça sobre o CELERON.

Figura 3.7 – Peça sobre o CELERON

Fonte: Foto tirada pelo autor

Considerando $T(5) = 190$ e o exemplo (2.11) e, alterando os devidos valores do P.V.I, obtive a equação que modela o resfriamento desse segundo momento:

$$T_2 = 200e^{-0{,}0325037859t} + 20. \tag{3.1}$$

A Tabela (3.2) nos mostra os valores (práticos e teóricos) da temperatura da peça ao longo do seu resfriamento..

Tabela 3.2 – Temperatura da peça em função do tempo.

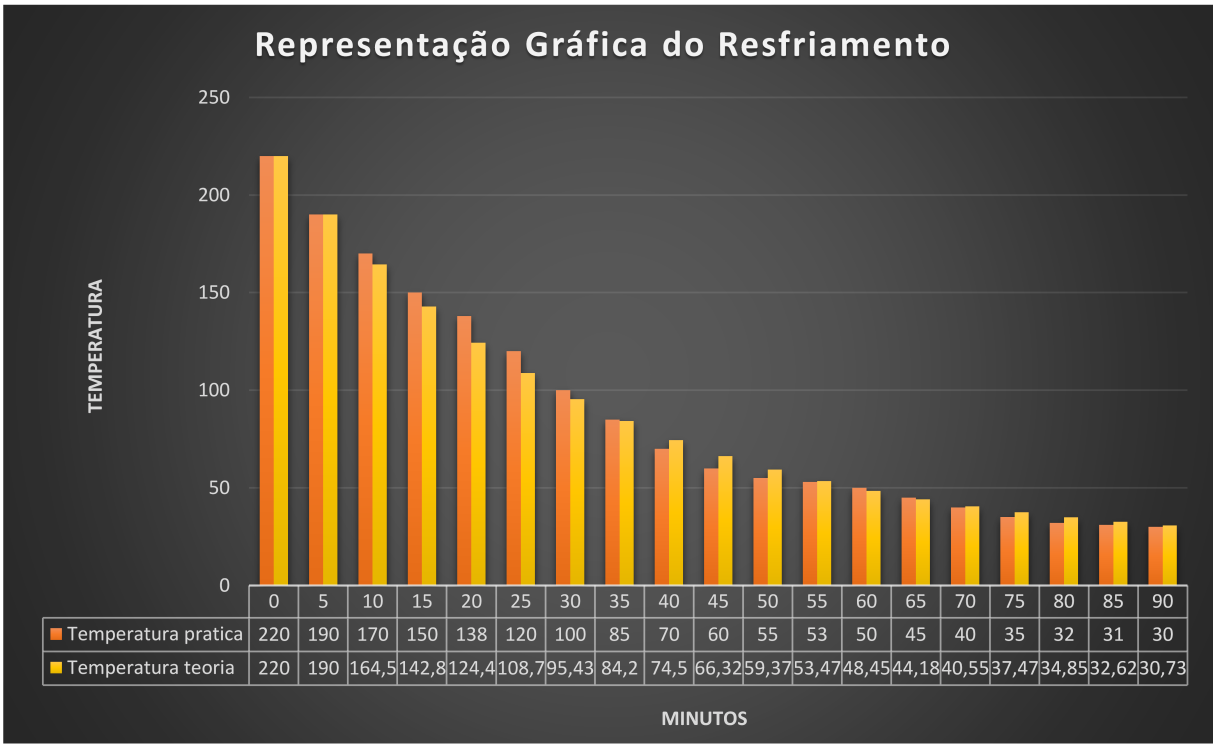
Tempo(Minutos)	Temperatura °C (Prática)	Temperatura °C (Teoria)
0	220	220
5	190	190
10	170	164,5
15	150	142,82
20	138	124,4
25	120	108,74
30	100	95,43
35	85	84,2
40	70	74,5
45	60	66,32
50	55	59,37
55	53	53,47
60	50	48,45
65	45	44,18
70	40	40,55
75	35	37,47
80	32	34,85
85	31	32,62
90	30	30,73

Fonte: Autor

Observação 3.2. *Os valores da Tabela acima foram obtidos através da equação (3.1).*

A Figura (3.8) nos mostra uma representação gráfica desse resfriamento.

Figura 3.8 – Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática



Fonte: Gráfico produzido pelo autor com auxílio do aplicativo EXCEL

Pode-se perceber que os valores do modelo mais uma vez não ficaram distantes da prática. Houve uma diferença, mas acredita-se que seja pelo fato que peça esteja com uma das suas faces em contato direto com o CELERON, provocando a não troca de calor dessa face com a temperatura ambiente. Portanto, só cinco das seis faces estavam trocando calor com a temperatura ambiente.

Experimento 3: Nesse terceiro experimento eu analisei o resfriamento da mesma peça, na mesma temperatura do segundo momento, com o intuito de poder comparar o resfriamento da mesma peça sobreposta em materiais diferentes. Ao sair do forno a peça tinha uma temperatura de 220°C e foi posta na mesma sala também resfriada por um ar-condicionado a uma temperatura de 20°C. Após 5 minutos a temperatura da peça era 190°C. A peça ficou suspensa pelo o mesmo gancho de metal do primeiro momento livrando toda sua superfície de estar em contato com outro corpo. O experimento teve duração de 1 hora e 30 minutos. A Figura (3.5) nos mostra como a peça ficou suspensa.

Vejamos que os dados iniciais do terceiro momento são iguais ao do segundo momento. Por este motivo, a equação que modela esse resfriamento é a mesma equação (3.1) que modela o resfriamento do segundo momento. Porém, os valores verificados na prática foram diferentes.

A Tabela (3.3) nos mostra os valores do resfriamento da peça nesse terceiro momento da prática e da teoria.

Tabela 3.3 – Temperatura da peça em função do tempo.

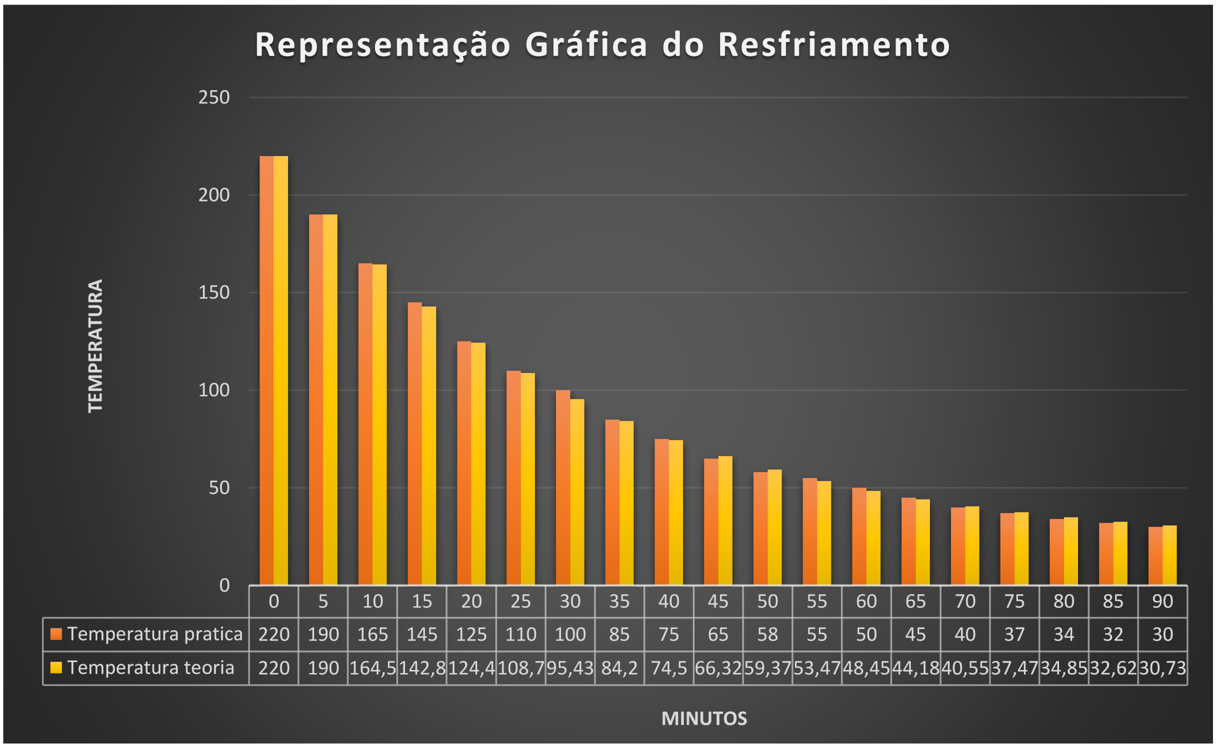
Tempo(Minutos)	Temperatura °C (Prática)	Temperatura °C (Teoria)
0	220	220
5	190	190
10	165	164,5
15	145	142,82
20	125	124,4
25	110	108,74
30	100	95,43
35	85	84,2
40	75	74,5
45	65	66,32
50	58	59,37
55	55	53,47
60	50	48,45
65	45	44,18
70	40	40,55
75	37	37,47
80	34	34,85
85	32	32,62
90	30	30,73

Fonte: Autor

Observação 3.3. *Os valores da Tabela acima foram obtidos através da equação (3.1).*

A Figura (3.9) nos mostra uma representação gráfica desse resfriamento.

Figura 3.9 – Gráfico de comparação das temperaturas obtidas na teoria e na prática



Fonte: Gráfico produzido pelo autor com auxílio do aplicativo EXCEL

Pode-se perceber que os resultados da prática ficaram bem próximos ao do modelo teórico. Acredita-se que, não chegamos a uma exatidão maior pelos mesmos fatores limitantes do experimento 1.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As Equações Diferenciais surgiram com o intuito de resolver problemas físicos e posteriormente de outras áreas. Elas contribuirão muito com a modelagem matemática, pois solucionaram problemas até então não resolvidos por outras áreas da matemática. Como consequência deste surgimento o problema da Lei do Resfriamento de Newton foi solucionado. Então podemos perceber como as Equações Diferenciais foram e são importantes na modelagem matemática.

Com este trabalho podemos ter a percepção de como as Equações Diferenciais estão presentes no nosso cotidiano como, por exemplo: a força que uma mola exerce para extrair um produto estampado de uma matriz de corte das quais eu trabalho. Esse é mais um exemplo de aplicação das Equações Diferenciais no dia a dia em meu trabalho.

No presente trabalho vimos que o modelo matemático foi eficiente para prever o resfriamento de uma peça de metal tendo em vista que as discrepâncias entre os valores teóricos e os valores medidos se deram por fatores limitantes que nos deixaram bem próximo a teoria da Lei do Resfriamento de Newton.

O presente trabalho, tem uma grande importância para sociedade tendo em vista que o modelo matemático se apresentou eficiente. Assim, este pode despertar o interesse de empresas como por exemplo: empresas de injetáveis, empresas que trabalham com grandes quantidades de objetos em resfriamento (empresas de tratamentos térmicos) e entre outras, tornando suas produções cada vez mais eficazes.

Acredita-se que este trabalho, futuramente possa ter uma análise mais específica envolvendo estatística e áreas afins para podermos ter uma melhor aproximação dos resultados práticos.

Portanto, o presente trabalho me fez perceber o quão é importante para nós matemáticos, uma pesquisa matemática envolvendo práticas reais, pois podemos ter uma noção ampla de como usar a matemática, tanto em nossa vida pessoal como, na vida profissional.

REFERÊNCIAS

CARLOS, Rodney Bassanezi; CASTRO, Ferreira Wilson. **Equações Diferenciais com Aplicação**. São Paulo: Harbra, 1988.

Boyce; DiPrima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC, 1930.

J, Afshin Ghajar; A, Yunus Çengel.**Transferência de Calor e Massa**.4° Edição. AMGH, 2012.

G,Dennis Zill; R, Michael Cullen. **Equações Diferenciais**. 3° Edição. Pearson, 2000.

HALLIDAY, D; RESNICK, Jearl Walker.**Fundamentos da fisica**. 8° edição. LTC, 1916.

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de Isaac Newton**. eBiografia.com, 2020. Disponível em: https://www.ebiografia.com/isaac-newton/. Acesso em: 09/08/2021.

DE, J Koninck; GUTTER D. **Manual do Ferramenteiro**. 3° Edição. Editora Mestre Jou, 1980.

FERNANDO, Luiz de Souza. **Um Experimento Sobre a Dilatação Termica e a Lei do Resfriamento de Newton**. 2007. Disponível em: https://www.if.ufrj.br/ carlos/inic/luizfernando/monografiaLuizFernando.pdf. Acesso em: 02/04/2021.