UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ VICTOR SOARES DA SILVA

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: HISTÓRIA, CONFLITOS, ENSINO E DESCOBERTAS

CAMPINA GRANDE – PB

2022

JOSÉ VICTOR SOARES DA SILVA

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: HISTÓRIA, CONFLITOS, ENSINO E DESCOBERTAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Abigail Fregni Lins

CAMPINA GRANDE – PB

2022

S586c Silva, Jose Victor Soares da.

O cálculo diferencial e integral [manuscrito] : história, conflitos, ensino e descobertas / Jose Victor Soares da Silva. - 2022.

53 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2022.

"Orientação : Profa. Dra. Abigail Fregni Lins , Departamento de Matemática - CCT."

1. História da Matemática. 2. Diagrama Metodológico. 3. Cálculo Diferencial e Integral. 4. Educação Matemática. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Deivid A. M. Neves - CRB - 15/899 BC/UEPB

JOSÉ VICTOR SOARES DA SILVA

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: HISTÓRIA, CONFLITOS, ENSINO E DESCOBERTAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 23/11/2022

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dra. Abigail Fregni Lins (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande- UEPB

____

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão (membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Campina Grande- UEPB

____

Profa. Drn. Andrea de Andrade Moura (membro externo)
Escola de Referência em Ensino Médio João XXIII

Esse trabalho é dedicado a meus pais que não tiveram a oportunidade de concluir o primeiro grau, mas me deram uma educação de qualidade e fizeram de tudo para me verem chegar até aqui. Como também à minha avó Zefinha, que não se encontra mais entre nós. Esse título de licenciado é para vocês, Marluce, José e Zefinha.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por permitir que eu chegasse até aqui, por não me desamparar e me dar forças para continuar, me fazendo sentir sua presença nos momentos mais difíceis.

À minha mãe Marluce e ao meu pai José Soares, por serem meu alicerce, minha base, meu tudo. Agradeço pela educação que me deram e por todo apoio que foi muito necessário para que eu pudesse chegar aqui hoje.

Às minhas irmãs Flávia, Fabiana e Cida e ao meu irmão Vinícius, por toda ajuda e momentos em família que amenizaram a tensão causada pela Universidade.

À minha vó Zefinha, que mesmo que o câncer a tenha levado dias antes dela poder me ver ingressar na Universidade, ela foi quem me deu forças para orgulhá-la lá de cima.

A todos os amigos que fiz durante o Curso, em especial Fabiana, Geovana, Jaqueline, Janily, Jucélia, Matheus, Monally, Raffael, Roberto e Rita. Que fizeram meus dias mais leves com todas as brincadeiras e momentos de descontração, assim como os momentos em que nos reuníamos para estudarmos para as disciplinas.

Aos meus amigos Victoria, Camila, Vinícius, Layla e Larissa, por me proporcionarem momentos incríveis, momentos que trouxeram mais leveza e descontração para seguir nessa caminhada. Assim como aos meus colegas do *apê*, Bruna, Fernando e Diego, por deixarem meu dia a dia mais leve.

Aos meus amigos do ônibus, que me acompanhavam nas idas e vindas da Universidade, transformando esse trajeto cansativo em momentos descontraídos.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UEPB *Campus* I, por todos os ensinamentos e conhecimentos compartilhados. Em especial, agradeço à Maravilhosa Prof. Dra. Abigail, quem chamo carinhosamente de Bibi, por toda paciência, compreensão, leveza e profissionalismo que a mesma possui. Sendo minha maior inspiração como profissional.

Aos Professores Israel e Andréa por terem aceito o convite para fazer parte da banca examinadora. Ambos fizeram parte da minha vida acadêmica. Andréa sendo minha professora no Ensino Médio e Israel na Universidade, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma se fizeram presentes nesse momento tão maravilhoso e ao mesmo tempo difícil, que foi o curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

O educador se eterniza em cada ser que educa.

Paulo Freire

RESUMO

SILVA, José Victor Soares da. **O Cálculo Diferencial e Integral: história, conflitos, ensino e descobertas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 55f, 2022.

O presente trabalho se deu a partir da necessidade de pesquisar sobre como a História da Matemática pode ajudar no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Decorrente disso, buscamos investigar quais matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e quais foram suas contribuições. A Guerra do Cálculo travada por Newton Leibniz, as dificuldades de aprendizagem no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, como também a História da Matemática como metodologia de ensino, apresentando uma proposta didática a ser trabalhada em sala de aula na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Desenvolvemos esse trabalho na modalidade de pesquisa bibliográfica, no qual buscamos pesquisadores que produziram trabalhos sobre a História da Matemática como metodologia de ensino e acerca da história do Cálculo Diferencial e Integral, para assim nos apropriarmos do tema. Diante disso, as questões que nortearam nosso trabalho foram: Qual a importância de se trabalhar a História da Matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral? Trabalhar História da Matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral auxiliaria na aprendizagem do mesmo? Como resultado de nosso trabalho, concluímos que utilizar a História da Matemática como metodologia de ensino desperta o interesse do aluno pelo conteúdo estudado, tornando a Matemática mais humanizada, visto que surgiu a partir da necessidade do homem.

Palavras-chave: História da Matemática; Diagrama Metodológico; Cálculo Diferencial e Integral; Educação Matemática.

ABSTRACT

SILVA, José Victor Soares da. **Differential and Integral Calculus: history, conflicts, teaching and discoveries**. Completion of course work (Degree in Mathematics) – State University of Paraíba – UEPB, Campina Grande, 55p, 2022.

The present work is on the need to research how the History of Mathematics can help in the teaching and learning of Differential and Integral Calculus. As a result, we sought to investigate which mathematicians contributed to the development of Differential and Integral Calculus and what their contributions were. The Calculus War fought by Newton Leibniz, the learning difficulties in the teaching of Differential and Integral Calculus, as well as the History of Mathematics as a teaching methodology, presenting a didactical proposal to be worked in the classroom in the subject of Differential and Integral Calculus . We developed this work in the form of bibliographical research, in which we sought researchers who produced works on the History of Mathematics as a teaching methodology and on the history of Differential and Integral Calculus, in order to appropriate the theme. Therefore, the questions that guided our work were: What is the importance of working the History of Mathematics in the teaching of Differential and Integral Calculus? Would working History of Mathematics in the teaching of Differential and Integral Calculus help in its learning? As a result of our work, we concluded that using the History of Mathematics as a teaching methodology arouses the student's interest in the content studied, making Mathematics more humanized, since it emerged from the man´s need.

Keywords: History of Mathematics. Methodological Diagram. Differential and Integral Calculus. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1: Zenão de Eleia....15

Figura 2: Eudoxo de Cnido....16

Figura 3: Arquimedes de Siracusa....17

Figura 4: Simon Stevin....17

Figura 5: Johann Kepler....18

Figura 6: Bonaventura Cavalieri....19

Figura 7: John Wallis....20

Figura 8: Isaac Barrow....21

Figura 9: Pierre de Fermat....21

Figura 10: Isaac Newton....22

Figura 11: Gottfried Wilhelm Leibniz....23

Figura 12: Diagrama metodológico de Miguel e Chaquiam – modelo atual....32

Tabela 1: Auxílio para a escrita do texto....33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI: Cálculo Diferencial e Integral

PIBID: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PRP: Programa Residência Pedagógica

TCC: Trabalho de Conclusão de Curso

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: HISTÓRIA, CONFLITOS, ENSINO E DESCOBERTAS

JOSÉ VICTOR SOARES DA SILVA

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11
2. CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL...14
2.1 DOS PARADÓXOS DE ZENÃO À NEWTON E LEIBNIZ: UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA...**14**
2.2 NEWTON E LEIBNIZ...24
2.3 A GUERRA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL...........................28
3. O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL VIA SUA HISTÓRIA 30
3.1 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL...30
3.2 DIAGRAMA METODOLÓGICO DE MENDES E CHAQUIAM.....................32
3.3 PROPOSTA DIDÁTICA 36
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS 38
REFERÊNCIAS 39
ANEXO...40

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Deparei-me com a Matemática ainda na infância, quando ainda nem sabia o que ela significava, apenas utilizava intuitivamente. Desde brincadeiras como pique esconde, no qual aprendia a contar mesmo sem saber o que representava cada número, à dividir doces com meus irmãos e brincar com as figuras geométricas sem as conhecer formalmente.

A Matemática veio se formalizar para mim assim que entrei na escola. Filho de mãe analfabeta e pai semianalfabeto, não tinha muita ajuda quando o assunto era atividade de casa. Porém, como meu pai era comerciante, ele me incentivava a aprender Matemática e estava sempre disposto a me ensinar as operações básicas de adição e subtração, que eram as que ele estava habituado a utilizar no dia a dia, pois ao me ensinar ele teria a minha ajuda em seu comércio.

No Ensino Fundamental I sempre me destaquei entre os demais na área de Matemática, assim como no Fundamental II. Todavia, no Fundamental II passei a ter uma grande dificuldade na área da Geometria Plana, principalmente quando se tratava de circunferência, devido a forma com que a professora ministrava o conteúdo, e foi essa dificuldade que me impulsionou a me debruçar mais sobre a Matemática.

No Ensino Médio, por ter mais facilidade em entender os conteúdos da Matemática, era grande meu interesse por um curso na área das ciências exatas, a dúvida estava entre os cursos de Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática.

Visto que sempre compartilhava aquilo que sabia com os meus colegas, surgiu o gosto pela docência. Ao entrar no curso de Licenciatura em Matemática no ano de 2018, me surpreendi com todos aqueles teoremas e demonstrações, que me assustaram logo de cara. No mesmo ano, ainda no primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, fiz a seleção e fui aprovado no Programa Institucional de Bolsas e Iniciação à Docência (PIBID), que foi onde descobri que eu havia feito a escolha certa e a paixão pela docência só aumentou. No PIBID adquiri muita experiência, tive contato com a sala de aula, publiquei artigos e participei de congressos.

No ano de 2020, ano acometido pela pandemia da COVID-19, as atividades passaram a ser de maneira remota. No ano em questão, cursei a disciplina de História da

Matemática e fiquei encantado com tudo que foi visto nas aulas, mas o que mais me chamou a atenção foi quando proposto uma atividade em grupo, mais precisamente um ensaio, onde poderíamos escolher dentre os seguintes temas: Artefatos no desenvolvimento da Matemática ao longo de sua história; As mulheres na história da Matemática; Construção da História do Cálculo em quadrinhos; Da Geometria grega às construções no GeoGebra; Das rochas às nuvens: uma história sobre os portadores da informação; e a Evolução da linguagem algébrica.

Só pelo título, o tema *a Construção da História do Cálculo em quadrinhos* me chamou muita atenção e logo o escolhi. Durante a construção do ensaio me apaixonei ainda mais pelo Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e fiquei encantado em descobrir como o mesmo foi desenvolvido, como também despertou em mim uma curiosidade em relação ao conflito envolvendo Newton e Leibniz pela autoria do CDI.

No segundo semestre de 2020 fiz uma seleção para participar do Programa Residência Pedagógica (PRP), no qual fui aprovado. No PRP a experiência foi ainda melhor, pois pude dar aula, coisa que não fazia no PIBID, e o contato com a turma foi ainda maior. Durante o Eixo I do Módulo I do PRP, eixo dedicado à formação, foi proposto utilizarmos a História da Matemática como recurso didático, e foi aí que encontrei a área na qual me interessei por pesquisar.

Ao trabalhar a História da Matemática no PRP, vi o quanto os alunos ficavam encantados ao verem todo o contexto histórico por trás de cada conteúdo e como cada conteúdo visto foi desenvolvido ao longo da história. Percebi o quanto é necessário o ensino da Matemática por meio da História da Matemática, e isso gerou um impulso e uma grande satisfação em pesquisar e me debruçar sobre a área. Com isso, levanto perguntas que norteiam todo o trabalho: Qual a importância de se trabalhar História da Matemática quanto ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral? Trabalhar História da Matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral auxiliaria na aprendizagem do mesmo?

Então decidi unir duas coisas que aprecio na Matemática, a História da Matemática e o CDI. Resolvi em meu TCC investigar toda a origem do CDI, quais foram os matemáticos que fizeram parte de toda essa construção, o porquê de todo o conflito para decidir quem foi que o desenvolveu, as dificuldades de aprendizagem do CDI e a importância de trabalhar o CDI por meio da História da Matemática.

Com isso, nosso TCC compõe-se de quatro capítulos. No Capítulo 2 abordamos a construção histórica do CDI, no qual relatamos quais foram os matemáticos que contribuíram, falamos sobre os principais personagens responsáveis pelo desenvolvimento do CDI, assim como discorremos sobre a guerra do CDI, que foi todo o conflito entre Newton e Leibniz pela sua autoria. No Capítulo 3 relatamos a dificuldade de aprendizagem do CDI, o porquê de trabalhar a História da Matemática em sala de aula e apresentamos uma proposta didática utilizando diagrama metodológico a ser trabalhado em sala de aula. Por fim, no Capítulo 4 trazemos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo, de três seções, dissertamos sobre a construção histórica do Cálculo Diferencial e Integral, mostrando a contribuição de diversos cientistas para o seu desenvolvimento. Sobre os grandes nomes do Cálculo Diferencial e Integral, Newton e Leibniz. Como também abordamos o conflito que existiu entre Newton e Leibniz pela autoria do Cálculo Diferencial e Integral, a famosa guerra do Cálculo.

2.1 DOS PARADÓXOS DE ZENÃO À NEWTON E LEIBNIZ: UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA

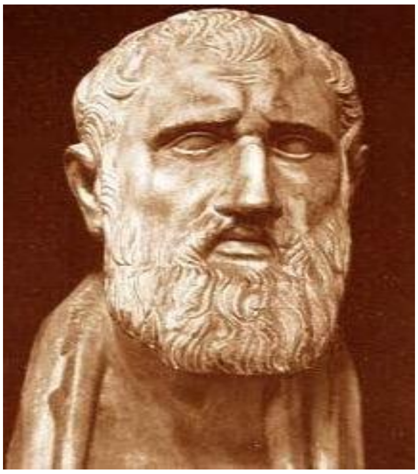
Não é novidade que o Cálculo Diferencial Integral (CDI) é um importante ramo da Análise, que serve para investigar tudo, desde as formas geométricas até as trajetórias dos planetas em movimento em torno do sol. Tal descoberta é uma das mais importantes do século XVII, se não a mais.

De acordo com Eves (2004), diferente de como é visto nas disciplinas de CDI ministradas nas Universidades, onde se inicia com o ensino de limites, depois com derivadas e por fim integrais, o desenvolvimento do CDI ao longo da história segue uma ordem cronológica contrária à maneira que é ensinada e posta nos livros. Primeiro surgiu o cálculo integral a partir de somatórios relacionados ao cálculo de determinadas áreas e determinados volumes e comprimentos, e só muito tempo depois surgiu o cálculo diferencial, que resultou de problemas envolvendo tangentes a curvas e também sobre máximos e mínimos. Tempo depois foi percebido que a integração e derivação possuem uma relação, na qual uma é a inversa da outra.

Fazendo um breve passeio pela história, trazemos alguns dos importantes nomes de grande importância para a construção do CDI. Iniciando na Grécia antiga, por volta do século V a.C., com Zenão de Eleia, até o final do século XVII, com Newton e Leibniz.

Por volta do século V a.C., na Grécia antiga, Zenão de Eleia foi um dos primeiros pensadores a sugerir problemas baseados no conceito de infinito:

Figura 1: Zenão de Eleia



Fonte: coladaweb.com

Os paradoxos de Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) tiveram influências profundas na Matemática. Vejamos dois desses paradoxos, da Dicotormia e de Flechas, apresentados no livro *Introdução à História da Matemática* de Eves (2004, p. 418):

> *A Dicotomia:* Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento e assim por diante, *ad infinitum.* Segue -se, então, que o movimento jamais começará.
>
> *A Flecha:* Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está em uma posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue -se que a flecha jamais se move.

Analisando o primeiro paradoxo, vemos claramente a noção de infinito, tendo em vista que se uma flecha é atirada de um ponta A em direção a um ponto B, ela terá que passar pela metade do caminho, ou seja, o ponto médio da distância AB, digamos um ponto C (isso antes de chegar ao ponto B). Porém, antes de chegar ao ponto C, ela teria que passar pelo ponto médio de A e C, digamos o ponto D. Realizando esse mesmo processo infinitas vezes em um intervalo de tempo finito.

De acordo com Eves (2004), os primeiros problemas de Cálculo que surgiram envolviam a determinação do comprimento de arcos e de áreas e volumes de figuras irregulares. Para solucionar esses problemas, era utilizado um método desenvolvido pelo Matemático grego Eudoxo de Cnido (c. 370 a.C.), chamado método da exaustão:

Figura 2: Eudoxo de Cnido

Fonte: gigantesdamatematica.wordpress.com

Segundo Eves (2004), Antífon (c. 430 a.C.) deu uma das contribuições mais antigas ao problema de quadratura do círculo, ele já afirmava que por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular, inscrito em um círculo, a diferença existente entre o círculo e o polígono iria se exaustar. Sabendo que pode construir um quadrado com a área igual a de qualquer polígono, seria possível construir um quadrado com a área igual à do círculo. Porém, logo surgiu a crítica que era contrária ao argumento de Antífon, que se baseava no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, o que indicava que o método de Antífon jamais iria esgotar a área do círculo.

O método de Antífon já continha um princípio do método da exaustão de Arquimedes, que defende que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, baseando-se na proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419).

Dos mais antigos, o que aplicou de forma mais elegante o método da exaustão e que mais se aproximou da verdadeira integral, a que vem sendo usada atualmente, foi de Arquimedes:

Figura 3: Arquimedes de Siracusa

Fonte: jornaltribuna.com.br

Arquimedes desenvolveu o método do equilíbrio para poder calcular a área de regiões limitadas por curvas, como espirais, parábolas, entre outras. Para calcular área ou volume de uma forma, o método do equilíbrio de Arquimedes estabelece que:

> Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume centroide conhecidos (EVES, 2004, p. 422).

Eves (2004) afirma que Arquimedes utilizava o método do equilíbrio e posteriormente utilizava o método da exaustão para que ele pudesse fornecer uma demonstração mais rigorosa. Segundo Eves (2004), foi só por volta do início do século XVII que as ideias de Arquimedes passaram por outros novos desenvolvimentos.

Um dos primeiros matemáticos do tempo moderno a utilizar métodos semelhantes ao de Arquimedes foi o engenheiro flamengo Simon Stevin:

Figura 4: Simon Stevin

Fonte: fisica926.wordpress.com

Stevin utilizava esse método nos trabalhos que ele desenvolvia no campo da Hidrostática, com o objetivo de determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical. De acordo com Eves (2004), a ideia de Stevin consiste em:

> ...dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado hoje em dia em nossos textos elementares de cálculo (EVES, 2004, p.424).

Um nome que especialmente deve ser mencionado por ser um dos primeiros europeus modernos que chegou a desenvolver ideias relacionadas aos infinitésimos em trabalhos com a integração é o alemão Johann Kepler:

Figura 5: Johann Kepler

Fonte: revistagalileu.globo.com

Segundo Eves (2004), Kepler chegou a usar o esquema de integração com o intuito de calcular áreas envolvidas na sua segunda lei do movimento planetário, assim como calcular volumes, do qual se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Ele tinha pouca paciência com o rigor excessivo do método da exaustão (como muitos de seu tempo), e mesmo com objeções sendo levantadas sobre seu método, no que diz respeito ao rigor matemático, ele conseguiu resultados corretos de forma bem mais simples. Atualmente seus métodos ainda são bastante utilizados por físicos e engenheiros para armar problemas.

Bonaventura Cavalieri foi um matemático muito influente do século XVI, aluno de Galileu e o grande responsável a introduzir os logaritmos na Europa:

Figura 6: Bonaventura Cavalieri

Fonte: pt.wikipedia.org

A obra que projeta a grande contribuição de Cavalieri à Matemática é o seu tratado *Geometria indivisibilibus*. Nessa obra Cavalieri apresenta o seu famoso *método dos indivisíveis*, que, segundo Boyer (2010), pode ser resumido pelo Teorema de Cavalieri, que diz que "se dois sólidos tem alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão". Sua real motivação para a obra possivelmente se deu pelas tentativas de Kepler para encontrar certas áreas e volumes.

Eves (2004) afirma que os princípios de Cavalieri equivale a ferramentas poderosas para o cálculo de área e volume. Além disso, sua base intuitiva pode tornar-se facilmente rígido com o Cálculo Integral atual. Os *princípios de Cavalieri*, segundo Eves (2004) são:

> 1.Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas é paralela à uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
>
> 2.Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Um dos grandes matemáticos da Inglaterra, que inclusive foi um dos predecessores de Isaac Newton, é o matemático inglês John Wallis:

Figura 7: John Wallis

Fonte: ecalculo.if.usp.br

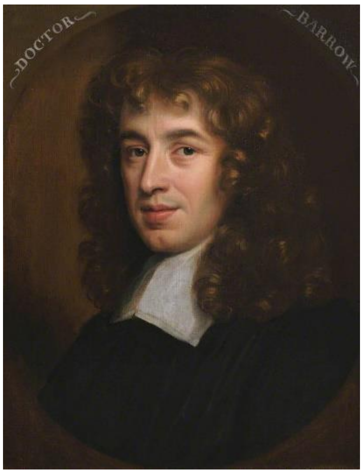
Wallis foi um dos matemáticos mais originais de sua época, muito produtivo, foi um dos primeiros a criar um sistema de ensino para surdos-mudos. Ele teve uma grande contribuição no desenvolvimento do Cálculo Integral. Segundo Eves (2004), ele fez uso sistemático das séries em análise, onde contribuiu bastante nesse campo.

John Wallis foi um dos primeiros matemáticos a considerar as cônicas como curvas do segundo grau, ao invés de considerá-las apenas como secções de um cone. Foi o primeiro a fazer a explicação do significado dos expoentes negativos, fracionários e nulos de maneira satisfatória, introduziu o atual símbolo de infinito (∞) e também se empenhou em determinar o π.

Além de ter sido um dos fundadores da Royal Society e ter assessorado o governo como criptologista, Wallis fez a edição de parte dos trabalhos de grandes matemáticos gregos e contribuiu bastante para a área da Física com seus escritos.

Se as principais contribuições de Wallis a respeito do Cálculo foram na Integração, as de seu contemporâneo, Isaac Barrow, foram na Diferenciação:

Figura 8: Isaac Barrow



Fonte: en.wikipedia.org

Segundo Eves (2004), o trabalho mais importante de Barrow na área da Matemática é *Lectiones opticae et geometricae.* Na qual é encontrada uma abordagem bem parecida com o processo atual da diferenciação, por meio do uso do *triângulo diferencial*, que atualmente ainda e encontrado nos livros de CDI.

Barrow foi o primeiro que percebeu que a diferenciação e a integração são operações inversas. Tal descoberta é conhecida como o famoso *Teorema Fundamental do Cálculo,* enunciado e provado em sua obra mais importante.

Para Eves (2004), a teoria da diferenciação surgiu de problemas referentes ao traçado de tangentes a curvas e de questões, que tinham como objetivo a determinação de máximos e mínimos de funções. Mesmo que isso remeta aos gregos antigos, é possível afirmar que a primeira manifestação clara do método diferencial é encontrada em ideias de Pierre de Fermat, na qual foram publicadas em 1629:

Figura 9: Pierre de Fermat

Fonte: pt.wikipedia.org

Johann Kepler já havia observado que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Daí Fermat tornou esse fato em um processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo (EVES, 2004):

> Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x-e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x-e)=f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor de zero. As raízes da equação resultante darão, então os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo e um mínimo (EVES, 2004, p. 429).

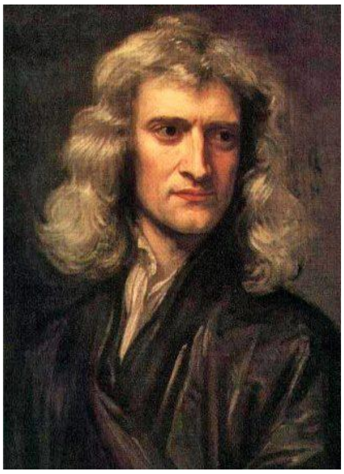
Esse método é muito conhecido até hoje como *Método de Fermat*.

Fermat também fez a descoberta de um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma força na qual a equação cartesiana é dada. A ideia de Fermat consistia em encontrar a *subtangente* relativa a esse ponto, ou seja, o segmento d3 reta na qual as extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo.

Pierre de Fermat foi um matemático brilhante. Além de desenvolver um trabalho pioneiro no que diz respeito à diferenciação, também fez o mesmo no que diz respeito à integração.

No ano de 1642 nasceu uma das mentes mais brilhantes que já possa ter existido, o matemático inglês Isaac Newton:

Figura 10: Isaac Newton



Fonte: infoescola.com

De acordo com Eves (2004), em 1671 Newton já escrevia sobre a sua mais importante descoberta matemática, o Método dos Fluxos (atualmente conhecido como

Cálculo Diferencial). Embora Newton já tivesse comunicado ao Isaac Barrow a essência do seu método em 1669, o Método dos Fluxos só chegou a ser publicado em 1736. Para Newton:

> ...uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt, onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que em alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava de *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal (EVES, 2004, p. 439).

Segundo Eves (2004), Newton ao se tratar do Método dos Fluxos considerou dois tipos de problemas:

- Dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, [...] isso é equivalente, como é claro, à diferenciação.
- Dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial (EVES, 2004, p. 439).

Newton foi um grande matemático. Além de fazer um grande número de importantes aplicações do Método dos Fluxos, ele "determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas". Se mostrou extremamente habilidoso em integrar algumas equações diferenciais (EVES, 2004, pp. 439-440).

Não há como falar sobre CDI sem citar o extraordinário filósofo e matemático inglês Gottfried Wilhelm Leibniz:

Figura 11: Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: pt.wikipedia.org

Leibniz foi considerado o grande gênio universal do século XVII, além de ser contemporâneo a Newton, que foi seu rival.

Segundo Eves (2004), Leibniz criou o seu Cálculo entre os anos de 1673 e 1676. Foi ele o primeiro a utilizar o símbolo de integral, o S alongado, oriundo da primeira letra da palavra *summa* (soma em latim), no dia 29 de outubro de 1675. Tal símbolo tinha como intuito indicar uma soma de indivisíveis. Semanas depois ele já estava escrevendo diferenciais e derivadas, da mesma forma que fazemos atualmente, bem como escrevia $\int x\,dy$ e $\int y\,dx$ para representar as integrais.

O seu primeiro trabalho referente ao Cálculo Diferencial só veio aparecer no ano de 1684, no qual ele "define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $dy : dx = y : subtangente$" (EVES, 2004, p. 443)

Boyer (2010, p. 296) afirma que por volta do ano de 1686, Leibniz fez uma publicação na qual trouxe explicação do Cálculo Integral, "que mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso dos da tangente. Aqui Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo".

De acordo com Eves (2004), Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação que são apresentadas no início do curso de CDI. Tal que a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções é conhecida como *regra de Leibniz:*

> Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernir com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz é, inquestionavelmente, é mais convincente e flexível que a de Newton (EVES, 2004, pp. 443–444).

Muito do que Leibniz desenvolveu no seu trabalho sobre o Cálculo é utilizado até hoje nos cursos de CDI.

2.2 NEWTON E LEIBNIZ

Não é todo dia que a humanidade presencia o nascimento de um gênio, mas no dia 25 de dezembro de 1642 esse feito ocorreu, nasceu Isaac Newton, uma das mentes mais brilhantes que já existiu. Newton nasceu na cidade de Woolsthorpe, na Inglaterra. Por ter sido filho póstumo de um proprietário agrícola, esperava-se que ele seguisse o mesmo caminho do pai. Ainda em sua juventude, Newton já demostrava suas habilidades em criar miniaturas mecânicas engenhosas. Ele chegou a construir um moinho de brinquedo que triturava o trigo e transformava em farinha, no qual utilizava um rato para fazer o moinho funcionar. Newton também criou um relógio de madeira movido a água (EVES, 2004).

Decorrente disso, a permanência de Newton na escola foi estendida. Ao ler um livro sobre Astrologia, os seus olhos se voltaram exclusivamente para a Matemática. Com isso, iniciou a leitura de importantes livros de Matemática. Seu primeiro livro foi *os Elementos* de Euclides, o qual achou muito óbvio. Depois leu a obra *La géometrie* de René Descartes, o qual achou difícil. Ele também leu a *Clavis* de Oughtred, *Aritthmatica infinitorum* de John Wallis, trabalhos de Kepler e Viète. Após ler tantas obras encantadoras e inspiradoras não demorou muito para que Newton começasse a criar a sua própria Matemática, iniciando com a descoberta do binômio generalizado e logo depois veio o seu famoso Método dos Fluxos, que conhecemos, como mencionado anteriormente, atualmente como Cálculo Diferencial (EVES, 2004).

Entre os anos de 1665 e 1667, a Universidade de Cambridge teve que fechar as portas devido a uma devastadora peste bubônica, com uma breve reabertura entre os meses de março e julho de 1666. Foi durante o primeiro ano de fechamento da Universidade que “Newton desenvolveu o seu Cálculo (até o ponto em que lhe era possível achar a tangente a uma curva num de seus pontos e o raio de curvatura respectivo)” (EVES, 2004, p. 436). Assim, como demostrou interesse por várias questões físicas, teve êxito em suas primeiras experiências em Óptica e realizou a formulação dos princípios básicos de sua Teoria da Gravitação. Porém, pesquisas feitas recentemente mostram que isso foi um mito criado pelo próprio Newton, para que ele saísse na frente da disputa pela autoria do Cálculo, mostrando também que essas descobertas não foram feitas antes do período de reabertura da Universidade de Cambridge (EVES, 2004).

Segundo Eves (2004), Newton ficou tão magoado com as críticas e ataques que recebeu de alguns cientistas sobre a sua Teoria das Cores e certas deduções que ele realizou a partir de suas experiências em Óptica, que jurou que jamais publicaria algo em prol da ciência. Por esse motivo que grande parte de suas criações só chegaram a ser publicadas anos depois de serem descobertas

Prosseguindo com suas buscas em Óptica, em 1675 Newton fez um comunicado à Real Society sobre a sua Teoria das Emissões ou Teoria Corpuscular da Luz. As atividades de Newton como professor universitário da Universidade de Cambridge, durante o período de 1673 a 1683, foram concentradas em Álgebra e Teoria das Equações. Foi nesse intervalo de tempo, no ano de 1679, para ser mais exato, que Newton verificou a sua Lei da Gravitação. Ele também fez "a compatibilidade de sua lei da gravitação com as leis do movimento planetário de Kepler". Porém, Newton não publicou nem informou a ninguém essas descobertas antes do ano de 1684 (EVES, 2004, p. 437)

No ano de 1685, com um esforço intelectual enorme, Newton escreveu o primeiro livro de seus *Principia*. Em 1689 ele foi representante da Universidade no Parlamento britânico. Cerca de três anos depois ele foi acometido por uma doença, algum tipo de distúrbio mental, que durou por volta de dois anos. Posterior a isso, ele dedicou grande parte de sua vida à Alquimia, à Química e à Teologia (EVES, 2004).

Segundo Eves (2004), no ano de 1696 Newton foi indicado Inspetor da Casa da Moeda, no qual foi promovido a Diretor três anos depois. Em 1703 foi eleito Presidente da Real Society, onde se reelegeu anualmente até a sua morte. No ano de 1705 recebeu o título de cavaleiro. Ele faleceu no ano de 1727, com 84 anos. O seu embate com Leibniz deixou seus últimos anos de vida bem turbulentos.

Com exceção de sua obra prima, *os Principia*, todas as suas outras publicações importantes só foram expostas anos depois dele ter descoberto os conteúdos e na maioria das vezes por causa da pressão de seus amigos para que ele publicasse. Suas obras foram publicadas na seguinte ordem cronológica:

> *Principia*, 1687; *Optikis*, com dois apêndices, *Cubic Curves e Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series,* 1704; *Analysis per series, Fluxionws, etc. e Methodus differentialis,* 1711; *Lectiones opticae,* 1729; *e The Method of Fluxions and Infinite Series,* traduzido do original latino de Newton por J. Colson em 1736. Caberia mencionar também duas importantes cartas escritas a H. Oldenburg, secretário da Royal Socyeti, nas quais Newton descreve alguns de seus métodos (EVES, 2004, p.438).

Os Principia de Newton revelou-se o mais admirado e influente trabalho da História das Ciências.

No ano de 1646 nasceu o grande gênio universal do século XVII, o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz nasceu na cidade de Leipzig, na Alemanha. Ele foi uma criança extremamente inteligente e autodidata, pois ainda bastante criança aprendeu grego e latim sozinho. Leibniz já tinha domínio de todo conhecimento corrente da Matemática, Teologia, Filosofia e leis que eram publicados em textos da sua época, aos 12 anos de idade (EVES, 2004).

Ainda criança já deu início ao desenvolvimento das primeiras ideias de sua obra *charactetistica generalis*, produção que envolvia uma Matemática universal, uma coisa que lá na frente iria penetrar na Lógica Simbólica de George Boole (1815 – 1864), e tempo depois, por volta de 1910, nos *Principia mathematica*, uma grande obra de Whitehead e Russel. Algo interessante é que devido a sua pouca idade lhe foi negado o título de doutor em leis na Universidade de Leipzig (EVES, 2004).

No ano de 1672, Leibniz executava uma missão diplomática em Paris, onde conheceu Huygens, que no momento morava lá e convenceu Leibniz a lhe dar aulas de Matemática. Em 1673 ele foi enviado a uma missão em Londres, onde fez amizade com Oldenburg. Teve também oportunidade de mostrar à Royal Society a máquina de calcular que ele inventou. Antes de deixar Paris para assumir a função de bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, ele já "havia descoberto o teorema fundamental do cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação" (EVES, 2004).

De acordo com Eves (2004), Leibniz executou diversos grandes projetos que não obtiveram êxito. A exemplo, temos a tentativa de reunir as igrejas católicas e protestantes e posteriormente as duas seitas protestantes de sua época. Ele era editor-chefe da Revista *Acta eruditorum*, que fundou junto com Otto Mencke. Vários de seus artigos matemáticos foram publicados nessa Revista, a qual ganhou grande repercussão pela Europa continental. Já no ano de 1700 ele criou a Academia das Ciências em Berlim, onde tempo depois se dedicou em criar outras academias semelhantes em cidades como Viena, São Pretesburgo e Dresden:

> ...Leibniz conseguiu, em terminologia corrente, formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão de classes e a implicação de proposições (EVES, 2004, p.443).

Em 1693 foi atribuído a Leibniz a criação da Teoria dos Determinantes, visando o estudo de sistemas de equações lineares, mesmo que considerações parecidas com as dele já houvessem sido feitas em 1683, no Japão por Seki Kōwa. Ele também fez a generalização do Teorema Binomial para o Teorema Multinominal, que consistia em realizar a expansão de $(a + b + \cdots + n)^r$. Também contribuiu bastante para o lançamento dos fundamentos da Teoria das Envoltórias e fez a definição do círculo osculador, onde mostrou a sua importância no estudo das curvas (EVES, 2004).

Segundo Eves (2004), Leibniz passou os últimos sete anos de sua vida desgostoso pelo embate polêmico com Newton pela autoria do Cálculo. Após seu empregador se tornar o primeiro rei alemão da Inglaterra, ele foi marginalizado em Hanover, o que fez com que no seu funeral, em 1716, comparecesse apenas seu fiel secretário.

2.3 A GUERRA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O início do século XVIII foi marcado por um dos maiores embates entre duas das mais brilhantes mentes da época, Newton e Leibniz. Essa famosa batalha, que se encontra em detalhes na obra *A Guerra do Cálculo* de Bardi (2008), travada por Newton e Leibniz, durou mais de dez anos, até o fim de suas vidas. Cada um defendia seu direito de reivindicar a autoria do Cálculo.

Newton desenvolveu o Cálculo bem antes de Leibniz, entre os anos de 1665 e 1666, que foram seus anos mais criativos. Porém, Newton não publicou nada referente ao Cálculo, nem o que ele desenvolvia, pois estava bastante magoado com alguns cientistas que atacaram veemente algumas de suas descobertas. A partir daí Newton jurou que jamais publicaria algo para a ciência (BARDI, 2008).

Porém, mesmo sem publicar seus trabalhos desenvolvidos, Newton compartilhava algumas cópias privadas de seus trabalhos com alguns amigos próximos. O que levou Newton a crer que nesses envios de trabalhos para seus colegas, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz tenha de certa forma tido acesso a eles, em especial ao que falava sobre o seu Cálculo, que ele chamou de *fluxos e fluentes* (BARDI, 2008).

De acordo com Bardi (2008), Leibniz só veio desenvolver o seu Cálculo dez anos depois, por volta 1675. No decorrer desse ano, ele aprimorou o seu Cálculo, criando um sistema totalmente original de símbolos e representações gráficas. Mesmo que ele tenha sido o segundo a desenvolver o Cálculo, ele foi o primeiro a publicá-lo, tendo dois de seus trabalhos publicados datados de 1684 e 1686.

Decorrente dessas publicações, Leibniz tinha propriedade para reivindicar a autoria do Cálculo, pelo seu desenvolvimento original. “E o cálculo foi uma invenção tão promissora que, em 1700, Leibniz seria considerado por muitos na Europa como um dos maiores matemáticos vivos” (BARDI, 2008, p. 12).

Segundo Bardi (2008), Leibniz tinha visto alguma parte do trabalho inicial desenvolvido por Newton, e foi o que bastou para que ele fosse considerado ladrão. Foi a partir daí que iniciou os ataques de ambas as partes. Sabendo Newton que havia sido o primeiro a inventar o Cálculo e tinha condições de provar isso, ele contratou pessoas que eram de sua confiança para que escrevessem ataques a Leibniz, apontando que ele havia roubado a ideia de dele.

Leibniz não ficou quieto perante as acusações, ele teve ajuda de partidários que garantiram que Newton quem havia roubado as ideias dele. Sem se contentar com isso, "Leibniz atuou com a comunidade de intelectuais da Europa, escrevendo carta após carta em apoio à sua própria causa" (BARDI, 2008, p. 13). Ele também escreveu vários e vários artigos que o defendiam dos ataques de Newton, assim como também o atacava anonimamente. Ele fez essa disputa chegar ao conhecimento dos mais altos cargos do governo, como também ao rei da Inglaterra (BARDI, 2008).

Se Leibniz não tivesse morrido no ano de 1716, essa disputa teria se estendido por muito mais tempo. Até mesmo após a morte de Leibniz, Newton continuou a publicar matérias se defendendo dos ataques feitos por Leibniz antes de sua morte (BARDI, 2008).

> Newton descobriu o cálculo primeiro, dez anos antes que Leibniz fizesse qualquer coisa. Mas, novamente, e daí? Leibniz tinha todo o direito de proclamar sua prioridade na invenção do cálculo. Ele inventou o cálculo independentemente e, mais importante, foi o primeiro a publicar suas idéias desenvolveu o cálculo mais do que Newton, usava um sistema de representação gráfica muito superior (e usado ainda hoje) e trabalhou durante anos para levar o cálculo adiante, transformando-o numa estrutura matemática que outros também pudessem utilizar. Pode-se facilmente argumentar que a metodologia de Leibniz foi uma contribuição mais importante para a história da matemática (BARDI, 2008, p. 14).

Tanto Newton, quanto Leibniz utilizaram representações totalmente diferentes, as únicas semelhanças que eles tinham em suas obras eram as simbologias aproveitadas de trabalhos de outros matemáticos (GAYO, 2010).

Se eles tivessem se conhecido em uma outra situação, talvez pudessem ter tido uma relação de amizade, pois ambos possuíam algumas coisas em comum, liam os mesmos livros e fizeram estudos sobre os mesmos problemas relacionados à Filosofia e à Matemática de sua época (BARDI, 2008).

CAPÍTULO 3
O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL VIA SUA HISTÓRIA

Neste capítulo, de três seções, apontamos as dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, apresentamos o modelo metodológico de Mendes e Chaquiam e sugerimos uma proposta didática para auxiliar os professores no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

3.1 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Vocês já devem ter ouvido frases do tipo *Ah, mas a Matemática é muito difícil*; *Eu não consigo entender nada de Matemática*; *Eu odeio a Matemática*; *Onde eu vou usar isso? Matemática não é coisa de Deus não*. Frases como essas desenvolvem o preconceito para com a Matemática, na qual crianças, antes mesmo de terem contato com a Matemática de maneira formal, dentro de uma sala de aula, o adquirem ao ouvi-las e passam a reproduzi-las.

Todavia esse pavor pela Matemática pode se dar também pela maneira com que o professor ministra a disciplina. Muitos professores dão aula de maneira errônea, deixando transparecer uma visão errada da Matemática, como se a mesma fosse algo pronto e acabado, que já nasceu dessa forma, e acabam não mostrando a beleza dessa ciência. Se prendem ao método tradicional de dar aula, utilizando apenas quadro, lápis e livro didático, dando sua aula da mesma forma quando iniciou sua carreira, esquecendo que as coisas mudam, que o sexto ano do Ensino Fundamental que ele tem hoje não é o mesmo sexto ano que ele teve há dois anos. O modo e eficácia de sua metodologia vão diminuindo com o passar do tempo, como afirma Lorenzato (2010).

De acordo com Macêdo e Gregor (2020), a educação básica está precária, formando alunos que mal dominam as quatro operações matemáticas, bem como noções de matemática básica. O que reflete no Ensino Superior, no qual os alunos estão chegando com um conhecimento matemático muito superficial.

Para Macêdo e Gregor (2020), ao ingressar no Ensino Superior o aluno já nota a diferença com relação ao Ensino Médio, pois se depara com uma realidade diferente da que ele estava acostumado. Nessa nova realidade há agora a independência e responsabilidade no que diz respeito ao ato de estudar. Macêdo e Gregor (2020) ainda afirmam que os alunos ainda não têm maturidade suficiente para isso, o que dificulta sua adaptação ao Ensino Superior, bem como sua aprendizagem.

No Ensino Superior o amedrontamento não é diferente. Como aluno do curso de Licenciatura em Matemática, vejo e presencio os alunos veteranos aterrorizarem os calouros, e um dos principais alvos é a disciplina de CDI. Ela é uma das disciplinas que os alunos de graduação mais têm pavor. É sabido que a disciplina de CDI, comum a diversos cursos de graduação, de diferentes áreas, como saúde, ciências exatas e ciências da natureza, é tida, por parte dos alunos, como uma disciplina complicada e difícil de ser entendida. Levando a um alto índice de reprovação e trancamento da disciplina, e até mesmo a desistência do curso.

Segundo Godoy e Faria (2012), a reprovação nessa disciplina já se tornou algo comum, está dentro da normalidade para professores e alunos, principalmente nos cursos de Engenharia, no qual as disciplinas de CDI estão presentes nos primeiros períodos:

> Esta naturalidade pode ser uma consequência das justificativas deste insucesso, que são invariavelmente atribuídas à falta de conhecimentos oriundos dos ensinos fundamental e médio, o que se completa com o discurso da falta de hábito de estudo dos novos alunos. Contudo, faz-se necessário alterar a ótica dessas análises, é preciso avaliar também em outra direção: currículo x prática docente (GODOY e FARIA, 2012, p. 1).

Ou seja, o professor tenta jogar a responsabilidade do insucesso do aluno na disciplina de CDI na formação durante sua educação básica, com o discurso de que o aluno possui um conhecimento matemático superficial, não dominando conteúdos necessários para a aprendizagem do CDI, interligado à falta de uma rotina onde o mesmo tenha o hábito de estudar.

Ademais, o professor deve analisar e refletir a forma como o mesmo ministra a disciplina de CDI, pois se ela é tão temida e há esse alto índice de reprovação e trancamento da disciplina, a metodologia que o professor utiliza em suas aulas deve ser repensada e atualizada, para que possa haver uma melhora significativa no processo de ensino e aprendizagem da mesma.

Um dos recursos didáticos, ainda pouco utilizado nas aulas de Matemática, mas muito necessário, é a História da Matemática. Ao utilizar a História da Matemática como metodologia, o professor mostra para o aluno que a Matemática não é uma ciência que já nasceu pronta, deixando claro que o conteúdo que está sendo ministrado surgiu a partir das necessidades do homem. Silva, Oliveira e Lins (2021) afirmam que a História da Matemática estimula a curiosidade do aluno, fazendo-o se interessar pelo conteúdo para que assim possa entender o motivo do seu surgimento.

De acordo com Silva (2010), esse importante recurso metodológico ajuda tanto professor quanto aluno a adquirir o interesse pela Matemática, por meio da descoberta, da curiosidade, como também dos significados históricos. Os instiga a pesquisar e investigar aquilo que estão estudando, descobrindo fatos interessantes e dificuldades que estiveram presentes no desenvolvimento do conteúdo.

Tal pensamento nos mostra a importância de se trabalhar com a História da Matemática, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, visto que nos cursos de graduação, em especial o de Licenciatura em Matemática, há disciplinas que os alunos sentem grande dificuldade, a exemplo das que citamos anteriormente, disciplinas de CDI. Para Silva (2010):

> ... explorar cada vez mais os conhecimentos históricos proporciona um estudo mais prazeroso dos conceitos matemáticos através da pesquisa, da descoberta e do entendimento mais aprofundado, o que contribui bastante para mais interesse dos alunos pela matemática (SILVA, 2010, p. 44).

Apresentar a História do CDI aos alunos torna a disciplina mais interessante, instiga a curiosidade do aluno e dá mais sentido ao que ele está estudando.

3.2 DIAGRAMA METODOLÓGICO DE MENDES E CHAQUIAM

A obra de Mendes e Chaquiam (2016), intitulada *História nas aulas de Matemática: fundamentos e propostas didáticas para professores*, nos foi apresentada no PRP pela docente orientadora do subprojeto Matemática da UEPB *Campus I* no nosso eixo de formação, no qual também tivemos a honra de poder conversar, de forma remota pela plataforma *Google Meet*, com um dos autores do livro, o professor Iran Abreu Mendes, que nos proporcionou um momento muito prazeroso e enriquecedor, falando sobre sua obra, tirando dúvidas e dialogando sobre o diagrama metodológico.

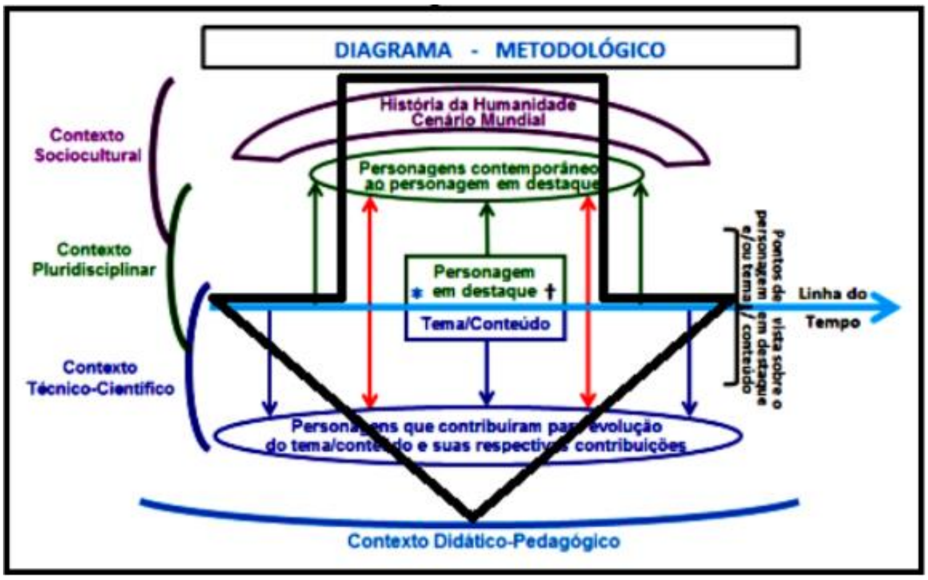
A ideia de apresentar essa proposta didática veio do PRP, no qual utilizamos o diagrama para trabalharmos o conteúdo de Área e Perímetro numa turma de 9° Ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Padre Antonino, localizada no Bairro de Bodocongó, Campina Grande - PB.

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), o diagrama metodológico não tem como objetivo fazer uma discussão de maneira detalhada do tema/conteúdo escolhido, mas sim auxiliar o leitor mostrando caminhos que dê condições suficientes para a construção de uma história ligada ao desenvolvimento histórico do conteúdo matemático escolhido, fazendo a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade.

Para Mendes e Chaquiam (2016), uma das preocupações na elaboração do diagrama é a de evitar que a História da Matemática seja construída de forma fantasiosa, retida a nomes, datas e às famosas pessoas *iluminadas*.

O diagrama metodológico foi criado pelo professor Miguel Chaquian, um dos autores da obra mencionada, em suas aulas da disciplina de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Após experimentações com o diagrama, ele foi modificado e aperfeiçoado por diversas vezes. A cada experimentação feita, o diagrama era melhorado. Atualmente o diagrama está no formato:

Figura 12: Diagrama Metodológico de Miguel e Chaquiam - modelo atual



Fonte: página 101

Após realizar experimentações com o diagrama metodológico em suas aulas de História da Matemática, o professor Miguel Chaquiam, um dos autores a obra, resolveu incorporar ao diagrama o modelo de um texto que serve de auxílio para o entendimento do mesmo. No texto há os seguintes componentes: tema/conteúdo; evolução do tema/conteúdo; personagens que contribuíram para a evolução do tema\conteúdo; escolha do personagem\matemático que será evidenciado; personagem contemporâneo ao personagem evidenciado; história da humanidade\cenário mundial e o ponto de vista sobre o personagem em destaque ou tema.

Mendes e Chaquiam (2016) apresentam na obra uma forma de dissertar sobre cada componente presente no diagrama. Trazemos na Tabela abaixo as informações apresentadas pelos mesmos para auxiliar na escrita de cada componente do diagrama, facilitando a escrita do texto baseado no diagrama metodológico:

Tabela 1: auxílio para a escrita do texto

Tema/conteúdo	Eleja um tema/conteúdo matemático previsto para um dos níveis de ensino, preferencialmente Educação Básica, ao qual se pretende apresentar paralelamente ao desenvolvimento e formalização uma abordagem histórica do mesmo, seja com o intuito de introduzi-lo, para incentivar os alunos ou apresenta-lo segundo sua evolução histórica, dentre outros motivos.
Evolução do tema/conteúdo	Em função das experiências realizadas, acredito que seja parte mais complexa do processo, isto é, identificar os elementos necessários para compor a evolução do tema/conteúdo elencado inicialmente. Na grande maioria dos casos não existe uma única bibliografia que contenha o procura na ordem sequencial desejada. De um modo geral, os dados serão garimpados nas diversas bibliografias que abordam história da matemática ou, mais especificamente, história dos conteúdos matemáticos. Neste momento, é importante identificar o(s) problema(s) gerador(es), as forças que o impulsionaram ou os obstáculos que impediram sua evolução. Ressalto novamente que na constituição deste componente se deve observar o formalismo e o rigor matemático, o uso correto das nomenclaturas e impedir a ocorrência de eventuais induções ao erro ou equívocos conceituais e históricos, no entanto, sem perder de vista que se trata de um texto didático-pedagógico num contexto técnico-científico.
Personagens que contribuíram para a evolução do tema\conteúdo	É muito provável que durante o processo de constituição da evolução do tema/conteúdo matemático se consiga identificar os personagens/matemáticos que contribuíram para evolução e/ou formalização deste, enfatizando sua contribuição.
Escolha do personagem\matemático que será evidenciado	Dentre os personagens/matemáticos que contribuíram para a evolução e/ou formalização do tema, eleja um para ser evidenciado/destacado em relação aos demais. Durante a realização das experiências observou-se que foram estabelecidos

	os mais diversos critérios de escolha, neste sentido, decidiu-se inicialmente que os critérios para eleição do personagem ficam ao encargo de cada um. Eleito o personagem/matemático, construa um perfil deste de modo a contemplar minimamente os seguintes itens: a) Nome completo e pseudônimo, quando for o caso; b) Constituição da árvore genealógica, quando for possível identificar os familiares ascendentes ou descendentes; c) Traços biográficos para além do acadêmico e profissional; d) Trabalhos produzidos, dando ênfase aos mais importantes e/ou soluções de importantes problemas; f) Frases célebres vinculadas ao eleito; g) Fotografias pessoais e de familiares, de livros e trabalhos de sua autoria ou em coautoria, com outras pessoas, dentre outras; h) Curiosidades, fatos pitorescos ou anedotas.
Personagem contemporâneo ao personagem evidenciado	Identifique personagens/matemáticos contemporâneos ao personagem/matemático destacado. Apresente um resumo biográfico destes e suas contribuições para os diversos campos do conhecimento, em especial, para o desenvolvimento das ciências, em particular da Matemática. Estes personagens contemporâneos podem ter contribuído, ou não, na mesma área do personagem eleito. Sugere-se que sejam identificados personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço, além de proporcionar uma visão contextual pluridisciplinar.
História da humanidade\cenário mundial	Um dos objetivos deste componente é delimitar em tempo e espaço o personagem principal e seus contemporâneos. Deve-se caracterizar o cenário mundial da época do personagem principal tendo em vista à vinculação da história da matemática a história da humanidade e identificar as forças que o impulsionaram ou geraram obstáculos para o desenvolvimento do tema/conteúdo eleito inicialmente, de modo a constituir um contexto sociocultural.
Ponto de vista sobre o personagem em destaque ou tema	Considerando que não é nosso objetivo investigar, analisar ou tirar conclusões sobre o personagem principal ou tema, recomendamos que sejam empregados esforços no sentido de identificar historiadores/pesquisadores que fizeram leituras e interpretações sobre o personagem principal ou tema abordado e apresentaram seus pontos de vista. Esse complemento enriquecerá o trabalho, proporcionará questões para debates e proporcionará diferentes visões e/ou interpretações a respeito do personagem principal e/ou do tema, podendo gerar novas pesquisas para maiores esclarecimentos.

Fonte: Mendes e Chaquiam (2016)

Segundo Mendes e Chaquiam (2016), o texto elaborado a partir do diagrama possui como um de seus objetivos unir a história da humanidade à história da Matemática e aos seus conteúdos, dar destaque a personagens/matemáticos que contribuíram para a evolução do tema escolhido e criar um contexto didático-pedagógico para se trabalhar em sala de aula.

Os autores frisam que há diversas formas para compor o texto. Porém, indicam uma ordem para que o texto seja desenvolvido: a) história da humanidade/cenário mundial; b) apresentação dos personagens contemporâneos ao principal; c) o personagem principal, exceto suas contribuições para o tema/conteúdo; d) evolução do tema e os principais personagens que contribuíram para a evolução do mesmo; e e) apresentação do ponto de vista atual de historiadores/pesquisadores sobre o tema/conteúdo ou personagem principal.

3.3 PROPOSTA DIDÁTICA

Tal proposta, encontrada na obra *História da matemática na sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos,* elaborada por Gabriela Coêlho Rodrigues, está baseada no modelo metodológico apresentado na obra *História nas aulas de Matemática: fundamentos e propostas didáticas para professores* Chaquiam (2015).

A proposta tem por objetivo expor uma abordagem histórica acerca de Gottfried Wilhelm Leibniz e o desenvolvimento e avanço do Calculo Infinitesimal, também conhecido como o Cálculo Diferencial e Integral, tendo em vista a grande dificuldade que alguns graduandos têm ao estudá-lo e o grande conflito que houve para se decidir sua autoria.

O tema foi escolhido devido à curiosidade de saber como surgiu o CDI e quem o desenvolveu, visto que nas aulas das disciplinas de CDI não é relatado, assim como o porquê de toda essa briga entre Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz pela autoria.

O diagrama metodológico, contendo quatorze páginas, está como anexo. Pode ser apresentado aos alunos da disciplina de CDI para instigar interesse e mostrar sua história e os personagens responsáveis pelo desenvolvimento do mesmo. Como também pode ser construído com os alunos em sala de aula no decorrer da disciplina, visto que a construção do diagrama demanda tempo para pesquisa e escrita do texto. Ou apresentar o modelo do diagrama, explicar o passo a passo de sua construção e solicitar como atividade, ficando a critério do professor.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Duas perguntas nortearam nosso trabalho: *Qual a importância de se trabalhar a História da Matemática quanto ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral? Trabalhar História da Matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral auxiliaria na aprendizagem do mesmo?*

Tendo em vista que o CDI é uma das disciplinas que mais aterroriza os alunos de graduação que a cursam, notamos que é necessário fazer algo para que eles melhorem o desempenho e se interessem pelo estudo, baixando o alto índice de reprovação, trancamento de matrícula e até mesmo desistência do curso.

Utilizar a História da Matemática no ensino do CDI é uma forma de mostrar que essa área da Análise Matemática não nasceu pronta, mas surgiu da necessidade do homem, e assim torná-la mais humanizada. Visto que muitas vezes a Matemática é entendida como uma área que já nasceu pronta e acabada.

Trabalhar com a História da Matemática, segundo Silva (2010), ajuda o professor e o aluno a se interessar mais pela Matemática, devido as descobertas e curiosidades presentes na construção histórica dos conteúdos. Incentivando a pesquisa e aprofundamento do conteúdo, trabalhando de uma forma mais prazerosa.

Para Silva, Oliveira e Lins (2021), trabalhar com a História da Matemática desperta a curiosidade do aluno, o que facilitará a aprendizagem dele. Ao conhecer a origem e as necessidades que impulsionaram o seu surgimento, o aluno acaba aprendendo mais e vendo algum sentido em estudá-la.

Utilizar a História da Matemática para se trabalhar determinado conteúdo não se baseia em mostrar apenas a biografia dos personagens que estão por trás do surgimento de um conteúdo específico, mas sim mostrar toda a construção histórica, a necessidade que o fez surgir e a importância que esse conteúdo vem tendo ao longo da história.

Portanto, a História da Matemática deve ser utilizada, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, visto que é um excelente recurso rico em informações e que pode ajudar muito no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

BARDI, Jason S. **A Guerra do Cálculo.** Rio de Janeiro: Record, 2008.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. Ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CHAQUIAM, Miguel. **História da matemática na sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos**. São Paulo: SBHMat, 2015.

DE MACÊDO, Josué A.; GREGOR, Isabela C. S. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. **Educação Matemática Debate**, p. pp. 1-24, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

GAYO, Jairo. **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Uniasselvi, 2010.

GODOY, Luiz F. S.; FARIA, Wellington C. O Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações no ensino da Engenharia: uma análise de currículo. **Congresso de Iniciação Científica do INATEL,** pp. 125-13, 2012.

LORENZATO, Sérgio. **Para Aprender Matemática**. 3 ed. Campinas: Autores associados, 2008.

MENDES, Iran A.; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

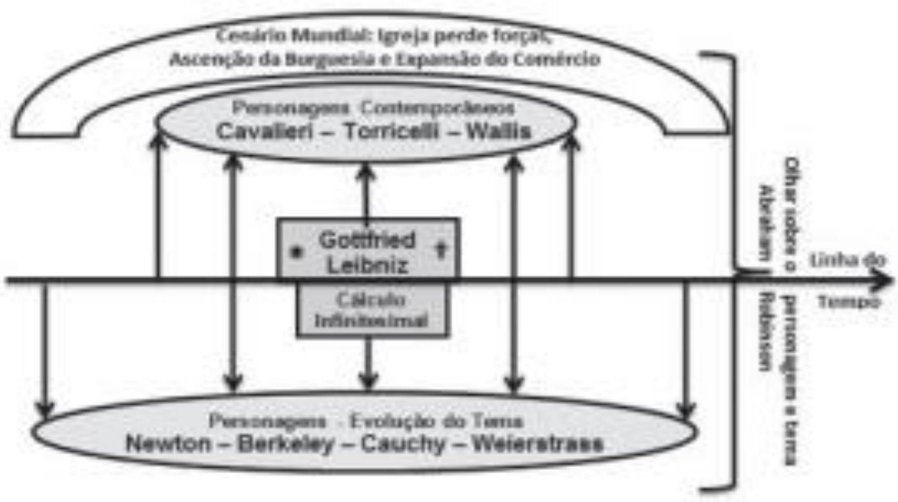
SILVA, José V. S.; OLIVEIRA, Sonaly D.; LINS, Abigail F. Área e Perímetro de um ponto de vista histórico: uma experiência vivenciada no Programa Residência Pedagógica. **Anais VI CONEDU**, 2021.

SILVA, Tony R. F. **Um estudo sobre o uso da História da Matemática como metodologia no Ensino Fundamental e Médio do município de Sumé.** TCC, Universidade Estadual da Paraíba *Campus* Monteiro, 2010.

ANEXO

O texto é iniciado com uma visão histórica da Europa do Século XVII, em particular, sobre o movimento renascentista, seguido de comentários sobre contemporâneos de Leibniz ou de personagens que contribuíram para o desenvolvimento do tema em questão. Discute as contribuições de Leibniz para a Matemática, bem como, críticas e aprimoramentos relativo ao cálculo infinitesimal. A bibliografia citada ao final do texto refere-se apenas a bibliografia consultada pela aluna para efetuar a composição do texto abaixo apresentado:

Figura 5: Diagrama III



Fonte: Elaborado por Gabriela Coêlho Rodrigues

O Cálculo Infinitesimal de Gottfried Leibniz

Introdução

O presente trabalho tem por objetivo estudar o cálculo infinitesimal a partir de Gottfried Whilhelm von Leibniz, possibilitando assim situar a matemática como manifestação cultural em determinado tempo e espaço, na sua diversidade de linguagens e simbologias, destacando sua origem e principalmente sua evolução, de modo a mostrar que a matemática escolar é, pois, apenas uma das muitas maneiras de se estudar matemática desenvolvidas por uma sociedade.

Para tal, começaremos com uma visão histórica da Europa do Século XVII, mais especificamente na Alemanha, analisando práticas, ensinamentos e enfoques culturais, bem como o desenvolvimento filosófico e tecnológico da população da época para então nos atermos ao personagem em questão, estudando suas produções e o desenvolvimento de seu saber matemático, inserindo-o num contexto onde suas pesquisas não eram as únicas deste ramo e expondo algumas controvérsias que surgiram quanto à originalidade de suas ideias e quanto ao método empregado.

Por fim, discute-se as repercussões de suas teorias em sua época, suas críticas e aprimoramentos, bem como seu reflexo na matemática ensinada hoje nas universidades.

Um panorama histórico da Europa do século renascentista

Para que se possa entender um pouco mais a respeito não só da Matemática de Leibniz, mas de suas motivações, é necessário que se entenda o contexto social em que este viveu e, com isto, não se refira apenas à Alemanha, seu país Natal, mas a toda Europa do século XVII.

Voltando rapidamente ao século XIV, ainda durante a dita Idade Média e lembremos que a Europa Ocidental sofreu várias transformações que culminaram no fim do feudalismo e contribuíram para o modelo que hoje denominamos o início da modernidade. A burguesia ascende, expandindo consigo a atividade comercial, a Igreja gradativamente vai perdendo força neste novo modelo social e vários de seus dogmas começam a ser contestados por filósofos e cientistas sujeitos a uma nova visão de mundo.

Crises políticas, econômicas e sociais atingem a população, dando início a um êxodo rural no qual as cidades passam a ser o novo centro de migração. Como se não bastasse, a Europa ainda é assolada por guerras (em especial a guerra dos 100 anos entre Inglaterra e França) e pela peste negra que, com a expansão marítima, alastrou-se rapidamente por todo o continente. A alta taxa de mortalidades somada às precárias condições de agricultura provocou uma queda na produção de alimentos e a Europa viu-se diante de três grandes males: guerra, peste e fome.

A busca por novas terras e uma solução para tantos problemas perdurou até meados do século XVI, período em que a Europa tornou-se palco não só de uma reforma política, mas cultural. Esta é a época do Renascimento, um desenvolvimento artístico, cultural e científico cujas concepções consistiam num *renascer* da antiguidade clássica e uma análise crítica da história passada. Destaca-se então o alto interesse pelo estudo do direito romano, uma rejeição do misticismo medieval, uma multiplicação das Universidades (as quais romperam com o domínio da Igreja sobre a construção do conhecimento), o apoio da burguesia às novas descobertas científicas e ainda a queda de Constantinopla, levando à fuga dos bizantinos para a Itália, o que restabeleceu os antigos escritos gregos agora com a influência ocidental.

Com isso, um novo movimento intelectual então toma forma: o Iluminismo, o qual pregava maior liberdade econômica e política, sendo apoiado pela burguesia cujos pensado res possuíam interesses comuns, defendendo a liberdade econômica e, principalmente, o avanço da ciência e da razão. Foi neste século que o que hoje reconhecemos como ciência começou a tomar forma, de modo que se fez necessário utilizar de métodos mais rigorosos para obtenção de conhecimento, explicando fenômenos através de características que, sob de terminadas condições, se repetem. Inicia-se assim o período das experimentações.

Todas estas condições, aliada à invenção da *imprensa móvel*, foram fatores cruciais para a difusão de novos conhecimentos, cuja disseminação tornou-se mais rápida e barata. O desenvolvimento de conceitos matemáticos, tais como Aritmética, Trigonometria e Álgebra em geral, estava centrado principalmente em cidades italianas, francesas e alemãs. Neste período, a população volta a ter um interesse maior pela educação e uma significativa expansão matemática começa a tomar forma.

Algumas mentes do século XVII

Dentre os defensores do Iluminismo e patronos desta nova visão de mundo, onde a Matemática é uma ciência de volta à ascensão, estão Descartes, Galileu, Kepler e Fermat. A eles deve-se a inserção de novas simbologias, tais como + (mais) e - (menos), bem como √ (raiz quadrada) e o uso das letras x e y para representar incógnitas, com a introdução de um novo enfoque, no qual a atenção recai muito mais sobre o processo que sobre o resultado, assim como a distinção entre parâmetros e variáveis proporcionou uma nova visão acerca dos problemas. Deste modo, a atenção matemática voltou-se não mais para a resolução de problemas particulares e sim para a investigação de métodos mais gerais de resolução, explica Silva (2010).

Podemos, entre os matemáticos deste período, citar ainda Bonaventura Cavalieri (1598-1647), um sacerdote jesuíta e matemático italiano, também considerado um dos precursores do Cálculo, desenvolvendo um novo processo para a determinação de áreas e de volumes, misturando o método da exaustão grega ao método infinitesimal de Kepler, incorrendo, porém, a falhas grosseiras. Segundo Carvalho e D’Ottaviano (2002/5, p. 80), Cavalieri aproveita as críticas ao seu trabalho aprimorando seu método, que é reapresentado na edição póstuma de 1653, servindo de base para os trabalhos de Torricelli:

> O princípio defendido foi de que uma área podia ser vista como formada de um número infinito de segmentos paralelos equidistantes (indivisíveis) e um

> sólido como com posto de planos paralelos equidistantes, considerados como volumes indivisíveis. Portanto, os indivisíveis eram objetos produzidos em relação a estipulações locais vi suais-geométricas (SAD, 2002, p. 72).

Conforme explicam também Jeanrenaud, Martins e Kubrusly (2011), Cavalieri e posteriormente Torricelli, embasado por seus trabalhos, retomaram a ideia da possibilidade de divisão de um contínuo num conjunto infinito de partes indivisíveis de modo que Cavalieri fundou e Torricelli desenvolveu a chamada *Geometria dos indivisíveis*:

> Embora admitindo um número infinitamente grande (dos elementos indivisíveis), Cavalieri não especulou sobre isto em suas obras e o seu emprego era somente como uma noção auxiliar, o central era a correlação entre os indivisíveis (SAD, 2002, p. 72).

Cavalieri adotou assim uma *postura agnóstica* quanto ao infinito, valendo-se dos indivisíveis (termo que usa para elementos infinitesimais) apenas como uma noção auxiliar e para efeito de demonstração. Todavia, os mesmos não se faziam presentes na conclusão dos resultados.

Evangelista Torricelli (1608-1647) foi um matemático e físico italiano que teve influência de grandes estudiosos como Galileu, do qual foi secretário e discípulo. Torricelli fez grandes avanços na área da Matemática usando, segundo Yuste (2002), o método de Cavalieri, valendo-se do mesmo indivisível imaginado por ele, porém ordenando-os e distribuindo-os de duas maneiras diferentes. Em 1641, e com o método de indivisíveis, Torricelli conseguiu provar que um corpo sólido de altura infinita possui. No entanto, um volume fixo e determinável.

Yuste (2002) explica que Torricelli baseava-se na noção de *indivisíveis curvos* (os quais consistiam na circunferência – periferia dos círculos – ao trabalhar no plano, ou às periferias de cilindros, esferas ou cones ao se tratar de sólidos), conferindo a esta entidade indivisível algo que Cavalieri jamais mencionara: uma espessura sempre igual e uniforme. Entretanto, não garantiu sua existência com algum axioma ou postulado preliminar, *apenas nomeando-os*, pois sua exposição era meramente intuitiva.

Torricelli assumiu então que cada um destes agregados indivisíveis possuia um determinado tamanho ou espessura que juntos comporiam a área de um círculo ou o volume de um sólido, ou seja, a medida do volume de um sólido é determinada pelo conjunto de todos os seus componentes planos sobrepostos, cujas áreas são, analogamente, o conjunto de todas as periferias circulares concêntricas que a formavam. Deste modo, o sólido de Torricelli, infinitamente longo (contrariando as ideias de Aristóteles), supõe, por consequência, a existência de um espaço ilimitado. Este assunto tornou-se polêmico, originando novas discussões entre os matemáticos do século XVII. Alguns dos quais exigiam que as proposições geométricas fossem sustentadas em um espaço físico real, que eles consideravam de tamanho limitado.

Deve-se lembrar de que estamos falando de pensamentos oriundos de meados do século XVII, no auge da revolução científica, um período em que a Europa era uma sociedade na qual as visões de mundo estavam passando de meros dogmas a assuntos de debate e onde crenças há tanto tempo aceitas começaram a ser derrubadas por experiências controladas.

Posteriormente a Torricelli, nasce o matemático britânico John Wallis (1616 - 1703), que explorou as vantagens das construções baseadas no método dos infinitesimais (indivisíveis de Torricelli) e tentou superar as armadilhas que prejudicavam seu aceitamento definitivo. Assim, Wallis decidiu usar somas infinitas (ou uma série de elementos de magnitude infinitesimal), descobrindo, como exposto em Yuste (2002) duas técnicas para calcular áreas e volumes de figuras curvas.

É importante salientar, no entanto, que Wallis abraçava a concepção pitagórica de número como uma coleção de unidades e desaprovava a compreensão dos objetos matemáticos como entes ideais, recusando assim o uso de quantidades irracionais no âmbito da matemática (SBARDELLINI, 2005). Logo, o que Wallis toma por indivisível nada mais é do que o infinitésimo utilizado por Torricelli e Cavalieri, adotando este artifício como uma possibilidade de tratar magnitudes como somas de elementos homogêneos e, de acordo com Yuste (2002), Wallis aventurou-se também a introduzir a Álgebra em suas deduções, tentando basear seus argumentos e deduções em Geometria Algébrica.

Wallis explica que estes infinitésimos surgem da divisão de uma magnitude finita e outra infinita, sendo este um in finito real (ou absoluto), o qual é uma quantidade maior que qualquer outra (toda) atribuível. Por conseguinte, o infinitésimo, expressado na simbologia racional, passa a ser e reflete o fato de que, a partir de uma superfície ou de um volume, pode-se determinar infinitas pequenas porções de uma magnitude concreta. Entretanto, este procedimento não é nada além de uma conjectura, pois conceber um infinito atual não passa de uma suposição útil.

Traços biográficos de Gottfried Leibniz

Ainda no século XVII, introduzimos agora o tema central deste trabalho. Nascido em 1º de Julho de 1646, em Leipzig, Alemanha, Gottfried Wilhelm von Leibniz foi um matemático e filósofo hoje considerado gênio universal e um dos principais fundadores da ciência moderna. Filho de Friedrich Leibniz e Catharina Schanuck, Leibniz foi criado praticamente pela mãe, visto que seu pai morrera seis anos após seu nascimento.

Conforme Strathern (2002), Leibniz foi criado pela mãe com a irmã. Aos sete anos começou a frequentar a Escola Nicolai em sua cidade natal, onde aprendeu latim. Entretanto, a maior parte de sua educação deu-se em casa através das leituras na biblioteca de seu falecido pai, onde aprendeu o grego. Ainda na escola, aprendeu sobre a lógica aristotélica. Não satisfeito com sua teoria, começou ele próprio a desenvolver e aperfeiçoar as próprias ideias.

Percebemos ainda em Strathern (2002) que Leibniz aos 14 anos ingressou na Universidade de Leipzig, bastante conceituada no ramo da Filosofia, mas precária nas ciências matemáticas. Três anos depois, consegue o título de doutor em Direito em Nuremberg (visto que não foi aceito no Programa de doutorado da Universidade de Leipzig), onde foi premiado com uma cátedra, a qual recusou. Foi neste período que se filiou à Sociedade Rosa-Cruz, da qual seria secretário durante dois anos.

O ingresso nesta sociedade rendeu-lhe uma pensão e lhe permitiu também inserir-se na vida política. Strathern (2002) relata que lhe foi dado um cargo menor na corte do arcebispo de Mainz, Johann Philip von Schönborn, com um trabalho no qual mostrava a necessidade de uma Filosofia e uma Aritmética do Direito, além de uma tabela de correspondência jurídica, sendo posteriormente nomeado conselheiro da Alta Corte de Justiça.

Dois anos depois, em 1672, Leibniz foi encarregado de uma *missão* em Paris. Após a Guerra dos Trinta Anos (ocorrida entre 1618 e 1648) a maioria dos principados que compunham o Sacro Império Romano-Germânico vivia uma situação relativamente tranquila e quase independente. Contudo, tal realidade não condizia com o que ocorria do outro lado de Reno, na França, onde Luiz XIV, o Rei Sol, tinha planos de expansão.

Com a França católica e vários estados alemães protestantes, Leibniz foi incumbido de convencer Luiz XIV a realizar uma cruzada, empreendendo uma grande expedição para conquistar o Egito, expandindo suas terras para o outro lado, sem comprometer as terras e a cultura da Alemanha. Assim, Leibniz foi enviado a Paris.

Contudo, não foi fácil. Além da dificuldade de uma audiência com o Rei, Leibniz precisaria ainda convencer seus ministros de que este seria um empreendimento importante. Porém, com uma abundância tão grande de detalhes, desde mapas de rotas ao tamanho de exércitos e diagramas de cidades-alvo, seu plano logo minguou, uma vez que a França não empreendia uma cruzada há pelo menos quatro séculos. Todavia, mesmo tendo seu projeto rejeitado, seus três anos de estadia em Paris ainda foram proveitosos.

Reconhecida naquele período como o principal centro cultural e intelectual da Europa, Paris abrigava renomadas lideranças intelectuais, as quais Leibniz apressou-se a conhecer. Dentre elas, podemos citar os físicos e matemáticos Arnauld (1612 – 1694) e Huygens (1629 – 1695), que o influenciaram a se aprofundar neste ramo.

O peso de suas descobertas e contribuições para a Matemática, a Física e a Filosofia é tanto que há quem o considere um dos sete filósofos modernos mais importantes. Patriota, cosmopolita e um dos gênios mais influentes da civilização ocidental, Leibniz adoeceu em julho de 1716, permanecendo acamado até a sua morte, em novembro, em Hannover, Alemanha.

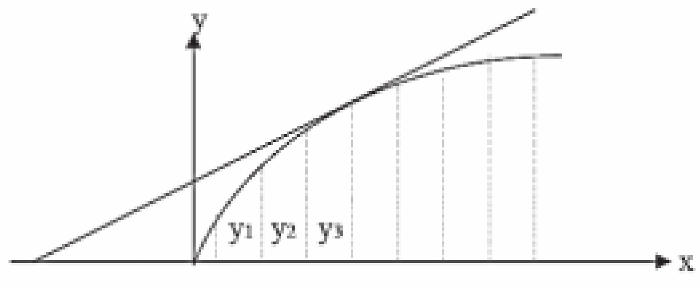
Leibniz e a Matemática

Leibniz, embora sendo advogado, mostrou incrível talento matemático, tendo o auge de suas descobertas durante o período que esteve em Paris entre os anos 1672 e 1676, conforme escreve Bardi (2010), refinando seus conhecimentos ao longo dos dez anos seguintes, desenvolvendo ainda sistemas de símbolos e de notações, o que culminou em dois artigos publicados em 1684 e 1686, devendo-se a ele a criação da palavra *cálculo*.

Segundo Carvalho (2007), Huygens, matemático holandês, foi quem se tornou conselheiro de Leibniz em uma de suas visitas a Paris e propôs a ele que resolvesse o problema de somar a série, cujos termos são os valores recíprocos dos números triangulares. Deste modo, realizou várias deduções sobre adição de sequências semelhantes, utilizando ideias que, apesar de já existirem, lhe serviram de base com conhecimentos, importantíssimos ao seu desenvolvimento do cálculo.

Após o estudo de diversas séries infinitas, Leibniz dedicou- -se ainda à Geometria e ao problema da quadratura de curvas desenvolvido por Cavalieri. Assim, admitindo as ordenadas de comprimentos y1, y2, y3 indefinidamente, sendo todas equidistantes entre si (com uma diferença *l*), ao fazer o somatório das respectivas ordenadas, teríamos um valor aproximado da quadratura da curva, conforme indicado na Figura 6:

Figura 6: Quadratura da Parábola de Leibniz.



Fonte: Adaptado de Carvalho (2007, p. 29)

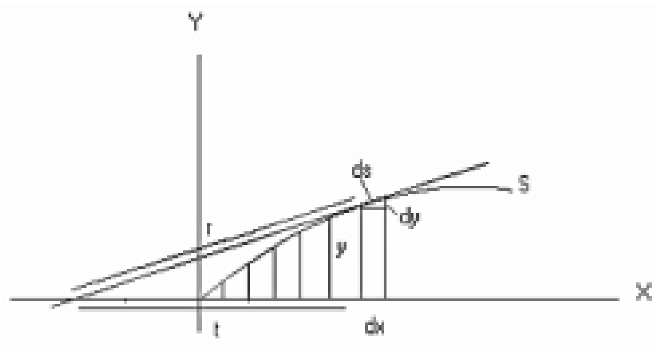
Tomando agora estas diferenças consecutivas das ordenadas, teríamos valores aproximados da declividade das tangentes. Leibniz observou que para distâncias *l* cada vez menores entre as ordenadas, melhor seria a aproximação da quadratura da curva, bem como da declividade das tangentes à curva. Esse foi um de seus primeiros trabalhos como a percepção de que admitir tais diferenças infinitamente pequenas e somá-las seriam operações inversas, de modo que determinar a área abaixo de uma curva e determinar as tangentes à curva seriam também operações inversas.

Encontramos em Carvalho (2007) e em Cajori (2007) que para denotar um somatório de termos cuja diferença de um para outro é infinitamente pequena, Leibniz utiliza a notação ∫ e, logo em seguida, para representar a diferença das ordenadas (*y*) e a operação inversa às quadraturas, introduz o símbolo *d*.

Leibniz utiliza ainda as notações *x*, *y* e *w* para medidas de segmentos, bem como *l*, sendo, portanto, valores uni dimensionais. Como o produto de dois segmentos determina uma área, (bidimensional) Leibniz escreve $\int l = ay$ (onde a é um valor introduzido para igualar as dimensões). Assim, o símbolo ∫ passa a significar as dimensões de um comprimento e $\int l$ é uma soma, logo as diferenças dos valores consecutivos de $\int l$ são iguais ao próprio l. Portanto, $l = ay/d$, sendo *ay* a área compreendida entre duas ordenadas consecutivas (*y1* e *y2*, por exemplo).

Carvalho (2007) explica que, para Leibniz, se d e ∫ possuem a mesma propriedade (retratar dimensões), então deveria ser escrito no denominador e como *ay* é uma área, já que $\int l = ay$, então *ay/d* é sua diferença, um segmento de reta. Das notações e descobertas de Leibniz surgem então alguns conceitos. Consideremos a Figura 7 (abaixo):

Figura 7: Curva traçada segundo os eixos *x* e *y*.



Fonte: Carvalho (2007, p. 38)

Primeiramente, admitem-se as coordenadas *y* infinitamente próximas a uma distância *dx* igualmente pequena entre as abscissas. Logo, para segmentos paralelos ao eixo x, cuja distância é infinitamente pequena, os *dy's* (respectivas diferenças infinitamente pequenas de y).

Sendo *dx* e *dy* grandezas infinitamente pequenas, são também desprezíveis a soma e o produto entre as mesmas. Portanto, $x + dx = x; adx + dydx = adx; a + dy = a$. Com base na Figura acima, teríamos que o triângulo característico formado por *dx*, *dy* e *ds* seria então semelhante ao triângulo de lados *t*, *y*, *r* (nesta ordem), sendo válida a proporção:

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{y} = \frac{ds}{r}$$

Para determinar a tangente à curva, seria suficiente que se calculasse a razão *dy/dx* e, estando x e y relacionados como função, bastaria determinar as diferenças infinitamente pequenas entre estas equações.

Apesar de usar os infinitésimos em seus cálculos, Leibniz declara na Academia de Paris sua descrença quanto à extensão material dos mesmos, considerando-os ficções úteis, incluindo ainda as totalidades infinitas, capazes apenas de justificar propriedades de objetos com existência real.

A diferenciação sob novos olhares

Críticas e Aprimoramentos

Embora contemporâneo de Leibniz, o londrino Isaac Newton também desenvolveu seus estudos quanto ao Cálculo independente de Leibniz, o que gerou certas controvérsias na época, por mais que seus métodos fossem em si diferentes.

Com base nos trabalhos de Galileu, o qual deduziu que a trajetória do corpo em queda seria uma parábola e com a elipse de Kepler para a análise das órbitas planetárias, Stewart (2013, p. 58) coloca que Newton então deduziu que o padrão de ambos os métodos (e outros mais desta mesma natureza estudados neste mesmo período) eram as taxas de variação das grandezas envolvidas.

A fim de tentar compreender mais profundamente os padrões apontados por seus precedentes, Newton estava em busca de uma taxa de variação pertinente que considerasse um intervalo de tempo menor que qualquer outro. Do mesmo modo como tratado por Barrow (seu tutor) e seus antecessores, desenvolvendo o que ficou conhecido por Método das Fluxões.

Considerando então o padrão de movimento de Galileu (de que o espaço percorrido por um corpo em queda descreve uma parábola) podemos ilustrar o método de Newton a partir de uma grandeza *y* que varia segundo o quadrado de outra grandeza *x*, sendo neste exemplo *y* ilustrando a posição e *x* o tempo.

Newton considera então uma nova grandeza o representante da pequena variação de tempo (*x*), de modo que a cor respondente variação de y seria a diferença entre $(x + o)^2$ *e* x^2, que simplificadamente resultaria em $2xo + o^2$. Assim, a taxa de variação do espaço (*y*) em relação ao tempo (*x*) seria a razão:

$$\frac{2xo + o^2}{o} = 2x = o$$

Segundo Stewart (2013), era perfeitamente esperado que este resultado dependesse ainda do acréscimo o adotado, uma vez que esta taxa de variação está se dando num intervalo diferente de zero. Porém, Newton considera este o cada vez menor, “fluindo” rumo à zero, de modo que a taxa de variação $2x + o$ se aproxime mais e mais de $2x$, que não dependeria de *o* e seria a taxa de variação instantânea de *y* em relação a *x*.

É relevante ainda mencionar que Newton nada publicou sobre suas descobertas matemáticas em sua obra *A Quadratura das Curvas* (inclusa em *Ótica*, sua obra principal) ao final do ano de 1704. Apesar de seus estudos se darem por volta 1665 e 1666 enquanto ainda estudava em Cambridge, tendo concluído seu material desde pelo menos 1695, quando John Wallis, um de seus correspondentes, insistiu para que publicasse seus avanços. Sua obra completa do Método das Fluxões só foi publicada em 1743, após sua morte.

Cajori (2007) aponta, porém, que no texto *A Quadratura das Curvas* as quantidades infinitamente pequenas são completamente abandonadas, mostrando que no Método das Fluxões (ou Fluxos) os termos envolvendo a grandeza o foram rejeitados, pois são infinitamente pequenos se comparados com outros termos.

Este raciocínio é, no entanto, insatisfatório, uma vez que por menor que seja *o*, esta não pode ser abandonada sem que isto afete o resultado, pois na Matemática os mínimos erros não devem ser desconsiderados.

Conforme Stewart (2013), Leibniz e Newton realizaram, em essência, o mesmo cálculo, substituindo apenas o por *dx*, para representar uma pequena diferença em *x*:

> Deve ser observado que no Método dos Fluxos (bem como no seu De Analysi e em todos os textos anteriores), a abordagem usada por Newton é estritamente infinitesimal, e em substância idêntica a de Leibniz, assim, a concepção original do cálculo na Inglaterra como no continente está baseada em infinitésimos. [...] A diferença primordial entre o sistema de Newton e o de Leibniz está em que o primeiro, mantendo a concepção de velocidade ou fluxo, usou incremento infinitamente pequeno como meio de cálculo do próprio incremento, enquanto com Leibniz a relação de incrementos infinitamente pequenos é, por si mesma, objeto de cálculo. De resto, a diferença dos dois sistemas está no modo de gerar as quantidades (CAJORI, 2007, pp. 270-2).

Com esta diferença básica de notação, mas sem muitas diferenças substanciais quanto ao método utilizado, a primazia do então chamado *Cálculo* tornou-se objeto de disputa entre Newton e Leibniz:

> Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinações de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no Continente em prejuízo de sua própria matemática (EVES, 2011, p. 444).

Contudo, tal conflito não é o foco de estudo do trabalho, podendo ser mais bem entendido com a leitura de *A Guerra do Cálculo* de Jason Bardi (2013). Quanto às principais diferenças entre os dois métodos citados, temos que Newton considerava as variáveis como dependentes do tempo denominando-as *quantidades fluentes*, uma vez que Newton baseava-se em movimentos. Os fluentes seriam, portanto, as distâncias percorridas e por *fluxões* teríamos as velocidades (diferenças entre as concepções de quantidades variáveis). Deste modo, uma quantidade pequena do espaço percorrido (fluente), poderia ser expressa pelo produto da fluxão pelo tempo, de modo que o tempo fosse infinitamente pequeno.

Por outro lado, Leibniz considerava a diferencial como sendo a diferença entre valores sucessivos (considerados infinitamente pequenos) de uma sequência, cujas diferenças não poderiam ser finitas, tornando-se cada vez menores à medida que se aproximava do ponto desejado. Todavia, apesar de se basear nesses fatos para o desenvolvimento de seu Cálculo, Leibniz conseguiu publicá-lo evitando o uso das quantidades infinitamente pequenas, baseando-se em dois segmentos de retas finitos que satisfaziam a condição proporcional $dy/y = dy/t$.

Como percebemos, apesar das diferenças de método e do caráter atribuído aos infinitesimais nos trabalhos de Newton e de Leibniz, ambos valiam-se da eliminação de diferenciais ou das quantidades infinitamente pequenas sem uma justificativa plausível, o que veio a ser duramente criticado, em especial pelo bispo anglicano George Berkeley (1685 – 1753).

Conforme D'Ottaviano e Bertato (2013), as investigações de Berkeley em Filosofia da Matemática começaram em seus dois *cadernos*, cada um contendo aproximadamente quatrocentas notas sobre tópicos filosóficos, e é em *of infinites* que Berkeley tece diversas observações críticas sobre a prática matemática de seu tempo, envolvendo desde questões de Análise, Geometria e Álgebra a investigações mais gerais, voltadas à verdade matemática, ao rigor de demonstrações, a aplicabilidade desta ciência ao mundo experimental e quanto a abrangência e aos limites do conhecimento matemático.

De todas as críticas à metodologia do Cálculo Diferencial e Integral, escritas no século XVIII, *The Analyst*, mesmo não sendo a obra que concentra as discussões mais profundas sobre as inconsistências do método infinitesimal, é, para Carvalho e D'Ottaviano (2002-5), a mais citada.

George Berkeley ataca a lógica do método de Newton e Leibniz, alegando que o infinitésimo era autocontraditório ou, como coloca D'Ottaviano e Bertato (2013, p. 6), um *zero-incremento*, uma quantidade finita de nenhum tamanho tratada inicialmente como grandeza finita e posteriormente como zero, de acordo com a conveniência, cujo efeito era mantido mesmo após desconsiderá-lo.

Assim, Berkeley classifica os infinitésimos como *fantasmas* de quantidades de partida, ou *grandezas que somem*, não reconhecendo, conforme D'Ottaviano e Bertato (2013), uma noção matemática significativa, capaz de assentar as bases de uma teoria satisfatória.

Outra crítica de Berkeley é quanto à existência de infinitesimais de ordens distintas, pois dada uma linha infinitamente pequena, haveria outra linha que fosse infinitamente menor que ela? Seu argumento baseava-se na existência de um infinitesimal a. Portanto, a seria uma grandeza menor que qualquer outra. Entretanto, $a/2$ é também um infinitésimo. Seria então $a < a/2$ (visto que a deveria ser menor que qualquer outra grandeza) ou $a/2 < a$?

Apesar das críticas (não só de Berkeley, mas de outros que o apoiavam), os trabalhos de Newton e de Leibniz continuaram sendo bastante divulgados e tamanho debate foi levado à Academia Real de Ciências de Paris entre os anos 1700 e 1706. Dentre os defensores do Cálculo Infinitesimal, podemos citar Pierre Varignon (1654 – 1722), matemático francês, nascido em Caen, e grande entusiasta de Leibniz, acreditando ainda numa existência real dos infinitésimos.

Foram os matemáticos que tentaram solucionar a inconsistência gerada pelo Cálculo Infinitesimal. Dentre eles, podemos citar o francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) que, baseando-se na nascente teoria de limites (a qual se pautava em séries numéricas), trata os infinitésimos não mais como quantidades fixas, mas variáveis tendendo a um limite (zero). Contudo, D'Ottaviano e Bertato (2013) colocam que quase dois séculos depois é que Weierstrass, considerado o *pai* da Análise Matemática contemporânea, por intermédio de sua aritmetização da Análise Matemática, já desenvolvida no século XVIII, soluciona questões remanescentes dos trabalhos de Cauchy e a questão conceitual envolvendo a inconsistência da noção de infinitésimo, com sua definição rigorosa de limite, através dos ε's e δ's, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins.

Comentários Finais

Neste trabalho discorre-se sobre o Cálculo Infinitesimal a partir de Gottfried Whilhelm von Leibniz, situando a Matemática em determinado tempo e espaço, percebendo sua evolução e entendendo-a como manifestação cultural. Reconhecemos a importância de se conhecer a história, seja da humanidade ou da Matemática, embora possa existir divergência nas informações disponibilizadas. Fato que pode dificultar a composição da pesquisa, cabendo a quem escreve averiguar fatos, comparando versões e autores, buscando as fontes principais e mais originais.

Acreditamos que seja complicado escrever sobre outra pessoa, ou algum método, sem deixar transparecer suas impressões no que tange ao assunto, principalmente quando estamos diante de um arquivo que necessita tradução, visto que cada um traduz conforme sua interpretação dos fatos. Contudo, embora haja dificuldades, a História da Matemática aqui trabalhada pode vir a ser um valioso recurso para o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que com esse recurso o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores positivos frente ao conhecimento matemático. De modo a reconhecer, ele próprio, a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, identificando as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos, bem como a utilização da Matemática em cada um deles. Estabelecendo comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, sendo capaz ainda de levar tais conhecimentos para a sala de aula, instigando a curiosidade dos alunos.

Primeiramente, percebemos que não foi somente Leibniz quem formalizou as ideias do que hoje temos por *Cálculo*. O Cálculo Infinitesimal precede Newton e Leibniz, que para muitos ainda são considerados os *pais do Cálculo*. Sendo mérito de um conjunto de pensadores, aprimorando resoluções e teorias, criando conceitos e solucionando problemas. Conforme Souza (2007), as biografias são bastante utilizadas em pesquisas na área educacional como fontes históricas, devendo cada texto escrito ser utilizado como objeto de análise considerando. Sobretudo, o contexto de sua produção, sua forma textual e seu conteúdo em relação ao projeto de pesquisa ou de formação a que esteja vinculado. Tal estudo, porém, não pretende ser mera reflexão, voltada apenas para o passado. Busca-se, com ênfase na pesquisa biográfica, sistematizar e apreender aspectos concernentes à construção da identidade profissional e do trabalho dos professores, uma vez que discussões sobre as histórias de vida como processo de conhecimento e de formação inscrevem-se ainda na biografia individual. Afinal a *história é émula do tempo, repositório dos fatos, testemunha do passado, exemplo do presente, advertência do futuro* (Miguel de Cervantes).