UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEONARDO DE MACÊDO NASCIMENTO

NÚMERO DE EULER, SUA IRRACIONALIDADE E SUA TRANSCENDÊNCIA

CAMPINA GRANDE
2022

LEONARDO DE MACÊDO NASCIMENTO

NÚMERO DE EULER, SUA IRRACIONALIDADE E SUA TRANSCENDÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Profa. EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

CAMPINA GRANDE
2022

N244n Nascimento, Leonardo de Macedo.
Número de Euler, sua irracionalidade e sua transcendência [manuscrito] / Leonardo de Macedo Nascimento. - 2022.
35 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Número de Euler. 2. Números irracionais. 3. História da Matemática. I. Título

21. ed. CDD 510.1

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 BC/UEPB

LEONARDO DE MACÊDO NASCIMENTO

NÚMERO DE EULER, SUA IRRACIONALIDADE E SUA TRANSCENDÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em: 23/11/2022

BANCA EXAMINADORA

Emanuela R. de S. Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maxwell Aires da Silva

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ademir Benteus Pampu

Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

Dedico este trabalho aos meus pais, pessoas que sempre fizeram o possível para permitir os meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão inicialmente aos meus pais, Edson e Ancilete, que me ensinaram a importância dos estudos, a importância do trabalho e do esforço. Agradeço também por eles terem me dado a oportunidade de estudar, por sempre priorizarem os meus estudos.

Agradeço também à minha noiva, Luana, que me motivou sempre que precisei, ficando empolgada com cada progresso. Agradeço também, pois ela conversou comigo quando eu precisava conversar, me divertiu quando eu precisava me divertir e sempre esteve comigo.

Agradeço muito à minha orientadora Emanuela por toda a paciência e por toda ajuda com o trabalho. Além de ter me ajudado com este trabalho, foi uma professora que me ensinou bastante e que acreditou em mim.

Sou grato também a todos os professores que tive o prazer de conhecer durante todo o curso, cada um teve uma grande contribuição em minha vida.

Agradeço aos meus irmãos por todo o apoio. Em especial sou grato à Bruna por ter me ajudado sempre que precisei estudar e Adson por sempre conversar comigo sobre Matemática. Ambos me aconselharam quanto às minhas decisões relacionadas ao curso e permitiram que eu chegasse até aqui.

Sou muito grato aos meus amigos também, os meus amigos de curso, os meus amigos de time, amigos da vida. Agradeço aos que me apoiaram e me aguentaram falando sobre Matemática o tempo todo.

"A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática."
-Carl Friedrich Gauss

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo sobre o Número de Euler, Números Irracionais e Transcendentes. A fim de contextualizar e motivar a leitura, apresentamos, inicialmente, um resgate histórico sobre o Número de Euler e o matemático que tem seu nome gravado nessa constante. Em seguida, fazemos uma introdução sobre números irracionais e transcendentes com alguns resultados e como resultado principal, apresentamos uma prova tanto para a irracionalidade como para a transcendência do Número de Euler.

Palavras-chave: Número de Euler. Números irracionais. História da Matemática.

ABSTRACT

In this work, a study is made about the Euler's Number, Irrational and Transcendent Numbers. In order to contextualize and motivate reading, we initially present a historical review of the Euler's Number and the mathematician whose name is engraved in this constant. Then, we make an introduction about irrational and transcendental numbers with some results and as the main result, it is presented a proof of the Euler's Number irrationality and transcendence.

Keywords: Euler's Number. Irrational numbers. History of Mathematics.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO

O Número de Euler, denotato por e, é uma constante que é bastante utilizada na Matemática, ela tem aplicações em diversos campos de pesquisa, como Epidemiologia Matemática, Economia e no estudo de Dinâmica Populacional. Esta constante apareceu com a notabilidade que vemos hoje através do estudo do Cálculo. A importância de e se dá pelas propriedades que possui. Em particular, destaca-se que é número irracional.

Genericamente, um número irracional é todo aquele que pertence ao conjunto do reais e que não pode ser escrito como uma fração de dois inteiros. Ao longo da vida estudantil nos deparamos com conjuntos numéricos cada vez mais elaborados e, em especial, quando conhecemos os irracionais é comum achar que não são muito usuais, mas na verdade utilizamos esses números constantemente.

Mostrar a irracionalidade de uma constante em específico pode ser simples em alguns casos, mas também pode ser uma tarefa não muito fácil quando se trata, por exemplo, de Números Transcendentes, como será visto neste trabalho com a prova da irracionalidade do Número de Euler.

Números Transcendentes são elementos do conjunto dos complexos que não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Apesar de ter sido estudada por diversos matemáticos como o próprio Euler, a existência de constantes de tal forma só foi garantida em 1844.

A Teoria dos Número Transcendentes não é muito antiga e possui muitos problemas ainda em aberto, isso se deve muito pela complexidade da área. Como veremos neste trabalho com a demonstração da transcendência de e, mostrar a transcendência de uma constante em específico geralmente se mostra uma tarefa bastante complicada.

Vários Matemáticos contribuíram para a Teoria dos Números Transcendentes, como por exemplo Liouville que foi um dos personagens principais para essa Teoria, isso porque foi ele que mostrou os primeiros números transcendentes que se tem registro.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo foi destinado à introdução. O segundo capítulo foi construído com o intuito de apresentar um pouco sobre a história de Euler e explicando de forma breve sobre a constante "e". Ao terceiro capítulo foi destinado a introdução do conjunto dos irracionais e em especial a apresentação de uma prova da irracionalidade de e. Foi dedicado ao quarto capítulo explicar e construir um pouco da ideia dos números transcendentes e, como foco principal, apresentar uma prova da transcendência do Número de Euler. Por fim, o quinto capítulo apresenta as considerações finais do que foi apresentado durante todo o texto.

2 APANHADO HISTÓRICO

Antes do nosso estudo sobre irracionalidade e transcendência, é interessante entendermos um pouco sobre a história do Número de Euler e também sobre o matemático que tem seu nome gravado nessa constante.

2.1 Euler

É notório que a história da Matemática durante o período moderno tem uma importante diferença em relação aos tempos anteriores: já não havia apenas um país específico que era detentor dos registros históricos das descobertas e pesquisas na área, como tínhamos na antiguidade com a Grécia, ou na Idade Média com os países árabes, mas ainda assim, ao analisarmos, percebemos que apesar de não haver um país específico, existe um continente que detém a maioria dos registros na área da Matemática, esse continente é a Europa. Os maiores pólos de Matemática sempre estavam na Alemanha, França, Inglaterra, Itália e Holanda. Até hoje com a facilidade de obter e propagar informação, a maioria das referências em pesquisa na área ainda se encontram na Europa, mesmo que existam várias outras ótimas referências vindas de outros continentes.

Durante o século XVII e XVIII temos registros de muitos matemáticos europeus que foram bastante importantes para o desenvolvimento da Matemática, como Newton[1] e Leibniz[2] para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral ou como Fermat[3] para o desenvolvimento de incríveis teoremas em Teoria dos Números e a sua contribuição em Geometria Analítica. A Matemática estava sendo revolucionada durante todo o século XVIII graças ao Cálculo Diferencial e Integral; esse estudo abriu portas para solução de muitos problemas.

No século em que o Cálculo estava revolucionando a Matemática, mais especificamente no ano de 1707, nasce um dos maiores matemáticos que se tem registro da história, mais especificamente na Basileia, na Suíça, chamado Leonhard Euler. Ele estudou diversas áreas e desenvolveu pesquisas dos mais diversos níveis e dos mais diversos campos. O pai de Leonhard, Paul Euler, tinha conhecimentos de Matemática, pois foi aluno de Jacques Bernoulli[4]. Por ser ministro religioso, Paul esperava que Leonhard seguisse o mesmo caminho, porém era inegável que seu filho possuía a vocação para a matemática,

[1] Isaac Newton(1642-1727) foi um dos maiores matemáticos e físicos da história, em que o mesmo elaborou a lei da gravitação universal.

[2] Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716) foi um grande Matemático, físico e filósofo; contribuiu bastante para o estudo de análise combinatória e para conceitos que hoje são utilizados em computação.

[3] Pierre de Fermat (1601-1665) autor do "Último Teorema de Fermat", famoso teorema enunciado por Fermat, mas que só foi provado definitivamente mais de 300 anos depois de sua morte.

[4] Jacques Bernoulli(1654-1705) foi um grande matemático autor da famosa Desigualdade de Bernoulli.

descoberta, finalmente, através de Nicolaus Bernoulli[5] e Daniel Bernoulli[6], ambos filhos de Jean Bernoulli I[7]. Leonhard também foi ajudado por seu pai, que o ensinou alguns conteúdos mais básicos de Matemática.

Leonhard Euler teve incríveis contribuições em diversas áreas da matemática como Teoria dos Números, Análise Real, Análise Complexa e Geometria. Nem todos conhecem esse grande estudioso que além de sua principal área de pesquisa, também deu muitas contribuições para a Física e para áreas que hoje são fundamentais para a programação como a Teoria de Grafos.

Em Geometria, Leonhard contribuiu com a "Relação de Euler". Essa relação nos dá uma fórmula que liga o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Sendo então $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Em Teoria dos Grafos, Euler mostrou como resolver o problema das Pontes de Königsberg, assim contribuindo para o estudo de Grafos Eulerianos.

Teoria dos Números é o ramo da Matemática que busca estudar as propriedades dos números inteiros, como divisibilidade e números primos. É inegável a grande contribuição de Leonhard para esse ramo com o Teorema de Euler[8], esse teorema que leva o seu nome tem o papel de generalizar o Pequeno Teorema de Fermat[9]. Na época em que Euler estava estudando Teoria dos Números, até mesmo pessoas próximas dele não davam apoio para suas pesquisas na área. Segundo Peter Shiu (2007) Daniel Bernoulli enviou uma carta para Nicolas Fuss[10] que mostrava sua desvalorização às pesquisas de Euler: "Então o que? Por que o grande homem dá tanta atenção aos números primos? Pessoalmente, valorizo mais sua pesquisa sobre a resistência das vigas."

Euler foi responsável por grande parte das notações matemáticas que usamos hoje, como e para retratar a base do logaritmo natural, i para representar $\sqrt{-1}$ e também π sendo a constante obtida pela razão da circunferência pelo diâmetro do círculo. Durante todo o seu período de produção, que foi entre 1727 e 1783, Euler teve feitos incríveis, desenvolveu teoremas que até hoje são importantes para continuar desenvolvendo a Matemática.

Leonhard também era um grande estudioso de séries, tendo descoberto que apesar da

[5] Nicolaus Bernouli(1695-1726) irmão de Daniel, assim como outros Bernoulli tinha uma vocação para Matemática entrando na universidade com apenas 13 anos.

[6] Daniel Bernoulli(1700-1782) teve grande contribuição no estudo de hidrodinâmica, conhecido pelo Princípio de Bernoulli.

[7] Jean Bernouli(1667-1748) foi um dos principais matemáticos da família Bernouli. Jean estudou bastante sobre Cálculo e era chamado de Arquimedes do seu tempo.

[8] Teorema que diz que se $mdc(a, m) = 1$, então $a^{\phi(m)} \equiv 1$ (mod m).

[9] Caso particular do teorema de Euler que diz que: se p é primo, então $a^p \equiv 1$(mod p). É caso particular do Teorema de Euler pois mdc(a,p)=1.

[10] Nicolas Fuss(1755-1826) foi um matemático que por um bom tempo foi secretário de Euler, além disso, muitos dos seus artigos eram soluções de problemas propostos por Euler.

série harmônica divergir, a série dos recíprocos dos inteiros positivos ao quadrado converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ele continuou estudando sobre essas séries, tendo encontrado resultados fantásticos, como por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

E além desse importante resultado, temos também:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ainda sobre suas contribuiçõs, temos a Identidade de Euler, que por muitos é chamada de "fórmula mais bonita da Matemática", conhecida assim por reunir alguns dos elementos mais importantes da Matemática, sendo eles os elementos neutros da adição e da multiplicação, respectivamente, 0 e 1, e também reúne e, i e π. Essa fórmula é obtida da relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, quando tomamos $\theta = \pi$, utilizando os valores conhecidos do sen e do cos, então concluímos que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Segundo Roque e Pitombeira (2012), graças a Identidade de Euler, foi possível notar que $ln(-1) = \pi i$, com isso, durante os anos de 1747 e 1748 Leonhard Euler remeteu várias cartas para d'Alembert sobre sua descoberta acerca de logaritmos de números negativos, pois ao contrário do que se acreditava, um número negativo não possuía logaritmo real.

Depois de muita produção em Matemática, em 1735 Euler havia perdido a visão do olho direito, mas ao invés de parar de estudar, ele continuou com suas pesquisas. Durante toda a sua vida, Euler escreveu mais de 500 livros e artigos, então por seu constante esforço em estudar e propagar suas descobertas, conquistou prestígio internacional muito cedo e era notório que ele estava sempre pesquisando Matemática. Sua contribuição não se resumia a pesquisas avançadas, Euler também chegou a criar material escolar.

Por volta de 1766, Leonhard descobriu que também estava perdendo a visão do olho esquerdo devido a catarata, mas ele continuou produzindo, ditando para seus filhos enquanto eles escreviam. Em 1771 ele passou por uma cirurgia para tentar resolver o problema e obteve sucesso, mas somente por alguns dias, logo depois ele ficou totalmente cego e assim passou os últimos 17 anos da sua vida. Em 1783, aos setenta e seis anos de idade, Leonhard Euler morreu de forma súbita enquanto tomava chá com um dos seus netos.

2.2 Número de Euler

Diante da história desse grande Matemático e de algumas das suas contribuições, podemos agora tentar entender um pouco sobre o número que leva o nome dele. O número de Euler, que é denotado por e, é um número irracional que pode ser escrito e obtido de algumas formas diferentes

1º $2,71828182845904523\cdots$

2º $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

3º $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Segundo Maor (2008), a constante e era conhecida pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo, isso se deve ao fato de que esse número aparece em problemas cotidianos. O número deve ter aparecido em uma fórmula de cálculo de juros compostos, dada por $S = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$ sendo P o capital, t a quantidade de anos, r a taxa anual de juros, S o valor total obitido no final e n a quantidade de vezes que a taxa é aplicada por ano, daí basta termos $P = 1$, $r = 1$, $t = 1$ e n crescendo indefinidamente, daí chegamos que S é aproximadamente $2,718$.

Além de problemas com juros, outros problemas comuns denunciam o Número de Euler, como a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Esses problemas já existiam antes do desenvolvimento do cálculo, mas somente na segunda metade do século XVIII, com os trabalhos de Leonhard Euler, a constante e veio ter o papel importantíssimo que desempenha no Cálculo como sendo a base do Logaritmo Natural.

Para o entendimento de alguns conceitos posteriores, vamos definir o que é uma Série de Taylor

Definição 2.1. Seja f uma função analítica com derivadas de todas as ordens, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Esse somatório é chamado de Série de Taylor em torno de a.

Há um caso especial que chamamos esse caso de Série de McLaurin que é para $a = 0$ e é da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

O Número de Euler é um número muito importante para diversas áreas na Matemática; possui incríveis propriedades e a função e^x possui uma Série de Taylor "bem comportada" e isso se deve justamente a uma de suas principais propriedades que é a derivada dessa função ser o próprio e^x.

O número e possui relações com outra constante muito importante, o número π. Essas relações são por suas semelhanças, suas características: ambos são números irracionais e transcendentes; são números que apesar de a primeira vista parecerem "artificiais", aparecem em problemas comuns do dia a dia. Uma das ligações mais importantes entre esses números é justamente a, já mencionada, "fórmula mais bonita da Matemática" que relaciona diretamente esses números.

Para mostrar outra semelhança do e com o π, basta vermos que dado um círculo, sua área é dada por $A = \pi r^2$, se tivermos $r = 1$, teremos que $A = \pi$. Agora dada uma hipérbole $y = \frac{1}{x}$, temos que a área sob essa hipérbole é dada por $A = \ln x$, mas se quisermos que $A = 1$, temos que $x = e$, ou seja, ambas constantes conseguimos obter através de funções que descrevem a área de determinadas cônicas fixando um determinado valor.

Chamamos a atenção para a diferença entre número de Euler e constante de Euler-Mascheroni. A constante de Euler-Mascheroni é um número obtido através da diferença entre a série harmônica e o logaritmo natural, denotado por γ, de forma que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$$

O Número de Euler é uma constante muito versátil, pois apesar de vermos ela com mais frequência no Cálculo Diferencial e Integral, ela aparece em diversos ramos da Matemática. Podemos ver o e em problemas de Geometria ou até mesmo em Matemática Financeira.

John Napier[11], desenvolvedor da ideia dos logaritmos, fez grandes avanços para, formalmente, encontrar o Número de Euler, que também é chamada de base do Logaritmo Natural ou Logaritmo Neperiano, ou até mesmo, base universal dos logaritmos.

Após apresentarmos um pouco sobre a história de Leonhard Euler e do número de Euler, vamos no capítulo seguinte apresentar uma introdução aos números irracionais e, em especial, exibir uma prova da irracionalidade de e.

[11]John Napier(1550-1617) foi um grande matemático, físico e astrônomo. Ele fez muitas contribuições à Matemática, mas com certeza a invenção dos logaritmos foi a mais fantástica e relevante delas.

3 IRRACIONALIDADE DE e

Números irracionais são aqueles que possuem infinitas casas decimais e não há periodicidade na sua representação. De outra forma, podemos dizer que esses números são os números reais que não são racionais, ou seja, não podem ser escritos em forma de fração de inteiros. O Número de Euler é um número irracional muito conhecido e utilizado, a prova de sua irracionalidade será feita nesse capítulo, mas antes é interessante conhecermos e nos familiarizarmos com alguns outros números irracionais.

3.1 Irracionalidade

Para entender o que de fato é um número irracional, é necessário entender a definição de um número racional.

Definição 3.1. Se k pode ser escrito como uma fração de inteiros, então k é dito racional e o conjunto de números que podem ser escritos dessa forma é denotado por $\mathbb{Q}$, ou seja

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Assim, números irracionais são justamente os números reais que não são racionais, ou seja, são os reais que não podem ser escritos como uma razão de inteiros.

Durante a vida escolar somos apresentados a alguns números irracionais como $\sqrt{2}$ e π, mas o conjunto desses números é infinito. Em um primeiro pensamento, parece ser difícil encontrar no nosso cotidiano um número que seja irracional, mas na verdade eles estão por toda parte. Para ser mais específico, o conjunto dos números racionais de certa forma pode ser listado, ou seja, é possível fazer uma associação de números naturais com números racionais, mas isso não é possível com o conjunto dos números irracionais. Isso quer dizer que o conjunto dos números irracionais é, em um certo sentido, maior que o dos números racionais, mesmo os dois sendo conjuntos infinitos.

π é um número irracional muito importante, além de ser um dos números mais conhecidos da Matemática. Este número é obtido a partir da divisão do perímetro pelo diâmetro de qualquer círculo. π é aproximadamente 3,1415. Essa constante é estudada desde a antiguidade. Arquimedes deu ótimas aproximações de π para a época, ele chegou que $\frac{233}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

$\sqrt{2}$ é um exemplo muito comum quando é apresentado o conjunto dos números irracionais. Quando tentamos mostrar que um número é irracional, acaba sendo um trabalho não muito difícil se estamos tratando de números algébricos, isto é, números que são raízes de polinômios de coeficientes inteiros. Quando queremos avaliar a irracionalidade de números que não podem ser obtidos por meio desses polinômios, a tarefa acaba se complicando um pouco.

Para exemplificar esse fato, vamos ainda nessa nessa sessão fazer uma simples prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Para que essa demonstração seja bem estruturada, vamos inicialmente provar um lema que nos ajudará na demonstração principal.

Lema 3.1. *Seja $p \in \mathbb{Z}$. Se p^2 é par, então p é par.*

Demonstração. Essa prova é simples e será dada por contrapositiva.
Vamos supor que p não é par. Como p é inteiro e não é par, então p só pode ser ímpar. Assim, com $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$p = 2k + 1 \iff p^2 = 4k^2 + 4k + 1 \iff p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Como k é inteiro, então $2k^2 + 2k$ também é inteiro e o chamaremos de n, daí $p^2 = 2n + 1$. Concluímos que p^2 não é par. Isso foi obtido por termos suposto que p não era par, ou seja, negamos a nossa tese e chegamos na negação da nossa hipótese. Por fim, isso significa que se p^2 é par, então p é par. □

Teorema 3.2. *$\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração. Como $\sqrt{2}$ é um número real, então ele só pode ser racional ou irracional. A demonstração será feita por contradição.
Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional, então podemos escrevê-lo como uma fração $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$. Daí

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$$

ou seja, p^2 é par, mas pelo Lema 3.1 isso implica que p é par. Logo podemos escrevê-lo como $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$2q^2 = (2k)^2 \iff 2q^2 = 4k^2 \iff q^2 = 2k^2$$

Então q^2 é par e pelo Lema 3.1, q é par.
Como supomos inicialmente que $\frac{p}{q}$ era uma fração irredutível, mas p e q são números pares, há uma contradição da nossa hipótese. Assim $\sqrt{2}$ não é racional, logo é irracional. □

De forma mais geral, a raiz de qualquer número primo é irracional. A prova segue de maneira análoga.

Durante toda a história, vários números irracionais muito importantes foram descobertos como, por exemplo, o número ϕ que é chamado de número de ouro. Esse número é responsável por proporções que aparecem na natureza com o comportamento de animais e também com a anatomia do ser humano. Esse número por muitas vezes é associado a conceitos de estética, beleza e harmônia.

A constante ϕ pode ser obtido a partir da equação

$$\phi^2 = \phi + 1$$

daí, tomando o caso positivo, temos $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\phi \approx 1,618$

Esse número possui uma forte relação com a Sequência de Fibonacci[1], pois ϕ pode ser aproximado ao tomarmos a razão entre 2 números seguidos da sequência de fibonacci da seguinte forma $\phi \approx \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Quanto maior o n, maior a precisão dessa razão, ou seja $\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Uma constante bem interessante que também é irracional é $\zeta(3)$, também chamado de constante de Apéry. Esse número é obtido a partir da Função Zeta de Riemann[2]. Essa função é dada pelas potências dos recíprocos dos números inteiros não negativos:

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Assim, temos $\zeta(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202056...$

Após apresentarmos um breve estude sobre números irracionais, vamos na seção seguinte tratar da irracionalidade de e.

3.2 O Número de Euler é irracional

Quando nos é apresentado o Número de Euler geralmente não é demonstrada a sua irracionalidade; isso se deve ao fato de essa prova não ser tão simples. Como e não é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros, efetuando as operações algébricas convencionais não nos será muito útil como foi pra mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ anteriormente.

Para a demonstração que será dada a seguir da irracionalidade de e iremos utilizar a sua Série de Taylor. Esse tipo de série[3] nos permite escrever uma função analítica indefinidamente derivável como uma série de potências.

Teorema 3.3. *e é irracional.*

Demonstração. A partir da Série de MacLaurin para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, temos $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Vamos fazer um truncamento dessa série, ou seja, vamos tomar o somatório até um certo $m \in \mathbb{N}$.

Como

$$0 < e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \tag{3.1}$$

[1]Sequência em que cada termo é a soma dos dois anteriores, isto é $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ com $a_1 = 1 = a_2$

[2]Para um melhor entendimente sobre este tema, é recomendada a leitura de Edwards (1974)

[3]Com o intuito de um estudo mais aprofundado sobre séries, recomendamos Elon (2019) p. 251

multiplicando a expressão (3.1) por $m!$, temos:

$$0 < m!e - m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = m!\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!},$$

pois,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Para termos essa série começando de 0, basta substituirmos k por $k+m+1$. Agora

$$\begin{aligned} m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+m+1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m!}{(k+m+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdots m}{1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)\cdots(m+k)\cdot(m+k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+k)\cdot(m+k+1)} \end{aligned}$$

Mas $k! < [(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+k)]$, pois $[(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+k)]$ é o produto de k números consecutivos e $(m+k) > k$, então, em especial, $k! < [(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+k)]$. Além disso, $m < k+m+1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)\cdot(m+2)\cdots(k+m)\cdot(k+m+1)} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!m}$$

Assim, finalmente, encontramos um limitante superior. Unindo as desigualdades temos:

$$0 < m!e - \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!m},$$

ou seja,

$$0 < m!e - \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!} < \frac{1}{m}e \tag{3.2}$$

Agora iremos contradizer a nossa tese, iremos supor que e é racional, então pode ser escrito como uma fração de inteiros $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1$. Assim em (3.2) obtemos:

$$0 < m!\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!} < \frac{p}{qm}$$

agora, como m é um número qualquer em $\mathbb{N}$ e, além disso, $e > 0$, e $e = \frac{p}{q}$, basta tomarmos $m = pq$, então

$$0 < (pq)!\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{pq}\frac{(pq)!}{k!} < \frac{p}{pq^2}$$

ou seja,

$$0 < \frac{(pq)!p}{q} - \sum_{k=0}^{pq} \frac{(pq)!}{k!} < \frac{1}{q^2}$$

Como $q|(pq)!p$ então $\frac{(pq)!p}{q}$ é um número inteiro e $\sum_{k=0}^{pq} \frac{(pq)!}{k!}$ é uma soma finita de inteiros, logo também é um inteiro.

Como $\frac{(pq)!p}{q}$ e $\sum_{k=0}^{pq} \frac{(pq)!}{k!}$ são inteiros, então $\frac{(pq)!p}{q} - \sum_{k=0}^{pq} \frac{(pq)!}{k!}$ também é um inteiro; e q é um número inteiro, então, em especial, $\frac{1}{q^2} \leq 1$
Assim, chegamos em

$$0 < \frac{(pq)!p}{q} - \sum_{k=0}^{pq} \frac{pq!}{k!} < 1$$

e concluimos que existe um inteiro entre 0 e 1. Absurdo!
Esse absurdo foi alcançado por termos suposto que e é racional, logo, obtemos que o mesmo é irracional

$\square$

Essa demonstração foi baseada na demonstração dada por Fourier em 1815, mas segundo Marques (2013), historicamente, a primeira demonstração foi dada pelo próprio Euler utilizando frações contínuas. Foi escolhida para ser apresentado neste trabalho essa demonstração por ser considerada a mais simples. Além dessas duas demonstrações mencionadas, há outras formas de se provar a irracionalidade de e como a prova geométrica que utiliza o Teorema dos Intervalos Encaixados. Essas provas podem ser encontradas em Marques (2013).

É notável que a demonstração da irracionalidade do número e não é tão simples quanto a irracionalidade do número $\sqrt{2}$, isso se deve ao fato de que $\sqrt{2}$ é um número algébrico, enquanto e não pertence a esse conjunto. No capítulo a seguir será apresentado um pouco sobre esses números que não são algébricos; chamados de Números Transcendentes.

4 TRANSCENDÊNCIA DE e

A história dos números transcendentes é relativamente recente e essa área ainda possui muitos problemas em aberto. O nome "transcendente" geralmente é atribuído à Leibniz, e foi justificado por Euler no século XVIII, e significa que esses números "transcendem" o poder das operações algébricas. Apesar de o próprio Euler ter estudado esses números, a existência de números transcendentes só foi garantida em 1844 por Liouville, um dos grandes nomes dessa área.

A teoria dos números transcendentes é pouco conhecida mesmo tendo contribuição de grandes matemáticos como Euler, Liouville, Cantor, Hilbert e Hermite. Segundo Marques (2013) isso provavelmente se deve ao fato de que os métodos da teoria transcendente são difíceis e a área não possui teoremas fundamentais como outras áreas possuem.

4.1 Números transcendentes

Números transcendentes não são definidos essencialmente pelo que eles são, mas sim pelo que eles não são. Para entender o que é um número transcendente, é necessário entender o que é um número algébrico.

Definição 4.1. Considere um polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

com os coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, ..., n$. Qualquer solução para um polinômio desta forma é chamado de número algébrico, ou seja, número algébrico é todo número que é raiz de algum polinômio de coeficientes inteiros.

Todo número racional é necessariamente algébrico, pois dado um número racional $r = \frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, temos que r é solução do polinômio $qx - p = 0$, assim todo número racional é algébrico. Dizemos também que os números racionais são algébricos de grau 1, pois são todos soluções de polinômios de grau 1. No geral dizemos que um número α é algébrico de grau n se α é raiz de um polinômio de grau n e não é raiz de nenhum polinômio de grau menor.

Alguns números irracionais também são algébricos como o $\sqrt{2}$, pois este é solução da equação $x^2 - 2 = 0$. Até mesmo números complexos que não são reais podem ser algébricos, como por exemplo i, pois este número é a solução para $x^2 + 1 = 0$.

Podemos definir números transcendentes como sendo todos os números complexos que não são algébricos, ou seja, números transcendentes são números complexos que não são soluções de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros.

Vamos denotar o conjunto dos números algébricos como $\overline{\mathbb{Q}}$ e o conjunto dos números transcendentes como $\mathbb{T}$.

Para entender um mais pouco sobre o conjunto dos números transcendentes e sobre como eles se comportam em relação ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, vamos fazer uma definição e posteriormente utilizaremos o conceito para continuar nosso estudo.

Definição 4.2. Dizemos que um conjunto A é enumerável quando é possível fazer uma bijeção de A com algum subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Alguns números bem conhecidos são transcendentes, como o próprio π. A transcedência desse número tem uma implicação interessante em um problema muito antigo denominado quadratura do círculo. Esse problema consiste em construir um quadrado com mesma área de um círculo dado utilizando apenas régua e compasso. Todo número construtível por régua e compasso é algébrico. Para construir um quadrado com a mesma área de um círculo, o lado do quadrado precisaria ser $l = r\sqrt{\pi}$ sendo l o lado do quadrado e r o raio da circunferência, então, em especial, $\sqrt{\pi}$ precisaria ser algébrico, mas como π é transcendente, $\sqrt{\pi}$ também é. Assim o problema não tem solução.

Dentre vários matemáticos que contribuíram ou contribuem para essa área da Matemática, destaca-se o Liouville. Liouville acabou sendo um personagem muito importante para a teoria dos números transcendentes, pois foi ele quem apresentou os primeiros números transcendentes. A ideia apresentada por Liouville para construir um número transcendente foi encontrar uma propriedade satisfeita por todo número algébrico e depois construir um número que não apresentasse tal propriedade.

A propriedade encontrada por Liouville é chamada de Teorema de Liouville e diz que se α é uma raiz real de um polinômio irredutível de coeficientes inteiros $P(x)$ de grau $n \geq 2$, então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n}, \tag{4.1}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Para construirmos a ideia de como foram descobertos os primeiros números transcendentes, vamos definir o conceito a seguir. Essa definição nos ajudará a chegar nos primeiros números transcendentes descobertos; os números de Liouville.

Definição 4.3. Dizemos que um número α é aproximável na ordem n por racionais se existem uma constante $C > 0$ e uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\geq 1}$ de racionais distintos com $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{C}{q_j^n},$$

para todo $j \geq 1$.

Definição 4.4. Um número real α é chamado número de Liouville se existir uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ com $q_j > 1$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},$$

para todo $j \geq 1$. Iremos representar o conjunto dos números de Liouville como $\mathbb{L}$.

Agora que fizemos algumas definições vamos seguir com alguns resultados muito importantes para o nosso estudo sobre os números de Liouville.

Teorema 4.1. *A sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada.*

Demonstração. Vamos supor que a sequência é limitada, daí existe $M > 0$, tal que $q_j \leq M$, para todo $j \geq 1$. Como $|\alpha - \frac{p_j}{q_j}| < \frac{1}{q_j^j} < 1$, temos

$$\left|\frac{q_j\alpha - p_j}{q_j}\right| < 1 \iff |q_j\alpha - p_j| < |q_j|$$

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$|p_j| - |q_j\alpha| < |q_j\alpha - p_j| < |q_j| \iff |p_j| < |q_j\alpha| + |q_j|$$

Utilizando a desigualdade triangular novamente, temos

$$|p_j| < |q_j\alpha + q_j| = |\alpha + 1|\,|q_j|$$

Por hipótese temos que $q_j \leq M$ e $q_j > 1$, então $|q_j| = q_j$ e além disso

$$|p_j| < |\alpha + 1|\, q_j < |\alpha + 1|\, M,$$

ou seja, temos uma limitação para $(p_j)_{j\geq 1}$, pois $|p_j| < |\alpha+1|M$, logo $|\alpha+1|M \in (-p_j, p_j)$. A partir disso, temos uma quantidade finita de valores p_j, ademais como q_j por hipótese é limitado e $q_j \in \mathbb{N}$, então há uma quantidade finita de valores q_j. Em particular, se temos uma quantidade finita de valores p_j e q_j, temos uma quatidade finita de valores $\frac{p_j}{q_j}$, mas isso contraria o fato de que a sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ ser infinita. Logo a sequência $(q_j)_j \geq 1$ é ilimitada □

Corolário 4.1.1. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ que é número de Liouville. Daí, existem infinitos $\frac{p_j}{q_j}$, diferentes de $\frac{p}{q}$, tais que

$$\frac{1}{q_j^j} > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\frac{pq_j - p_jq}{qq_j}\right| \geq \frac{1}{|q|q_j}$$

Assim $q_j^{j-1} < |q|$, contrariando o fato de que $(q_j)_j$ é ilimitado. □

Existe um número bastante conhecido chamado de constante de Liouville, esse número é da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001000 0...$$

Essa constante é um número de Liouville. De forma mais geral temos que todo número da forma $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n!}}$ com $b \geq 2$ inteiro é um número de Liouville para todo $a_n \in \{1, \cdots, b-1\}$.

Teorema 4.2. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.1.1, um número de Liouville α não pode ser racional. Daí vamos supor que α é algébrico de grau $n > 1$. Então pelo Teorema 4.1 temos que a inequação (4.1) será válida para todo número racional. Assim, levando em consideração os $(\frac{p_j}{q_j})$ da Definição 4.4, temos que

$$\frac{c(\alpha)}{q_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \Longleftrightarrow \frac{c(\alpha)}{q_j^n} < \frac{1}{q_j^j} \Longleftrightarrow q_j^{j-n} < \frac{1}{c(\alpha)}$$

Daí, se $j > n+1$, então $q_j < q_j^{j-n} < \frac{1}{c(\alpha)}$ o que significa que q_j é limitada. Absurdo, pois já foi mostrado no Teorema 4.1 que a sequencia q_j é ilimitada. Essa contradição foi obtida por termos suposto que existe um número de Liouville que é algébrico, ou seja, todo número de Liouville é transcendente.

$\square$

Os resultados anteriores nos ajudam a entender um pouco da natureza do conjunto dos Números Transcendentes, embora o conjunto que apresentamos, dos Números de Liouville, seja de certa forma "artificial", no sentido de que este conjunto foi contruído para ser transcendente. Como foi dito anteriormente, o conjunto dos Números Transcendentes é não-enumerável enquanto o seu complementar, o conjunto dos Números Algébricos, é enumerável, concluímos então que existem muito mais números Transcendentes do que Algébricos, mas provar a trancendência de um número em particular não é fácil. Na seção a seguir vamos provar a transcendência do número que é o objeto de estudo deste trabalho, o Número de Euler.

4.2 O Número de Euler é transcendente

Como dito, mostrar que um número em específico é transcendente não é fácil, mas vamos aqui passo a passo mostrar que o Número de Euler é transcendente. Antes de partirmos para a demonstração, é interessante saber que a transcendência de e é garantida por ser um caso particular do Teorema de Hermite-Lindemann[1], mas para não recorrermos a resultados mais rebuscados, aqui veremos uma demonstração específica sem utilizar a esse Teorema.

[1]Teorema que diz que se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.

A prova da transcendência de e é um pouco extensa por isso será dividida na forma de resultados prévios que serão demonstrados a seguir. Ao final dos resultados prévios será enunciado o Teorema e devidamente provado utilizando os Lemas anteriores. Essa prova foi baseada nos exercícios que se encontram em Figueiredo (2011) e ela garante a transcendência de e.

Lema 4.3. *Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau r. Definimos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x)$$

de forma que $P^{(r)}$ representa a derivada de ordem r de P. Então

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)] = -e^{-x}P(x).$$

Demonstração. Utilizando a definição que foi dada para $F(x)$ e utilizando a regra para derivada de um produto, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)] &= \frac{d}{dx}[e^{-x}(P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x))] && (4.2)\\
&= -e^{-x}(P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x)) + e^{-x}(P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x)) && (4.3)\\
&= e^{-x}(-P(x) - P'(x) - \cdots - P^{(r)}(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x))\\
&= e^{-x}(-P(x))\\
&= -e^{-x}P(x)
\end{aligned}$$

De (4.2) para (4.3) foi utilizado a regra do produto e posteriormente foi utilizado o fato de que $P^{(r+1)}(x) = 0$, pois $P(x)$ tem grau r.

□

Para o Lema a seguir será necessária a utilização do Teorema do Valor Médio[2]. Este Teorema garante que se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e, além disso, é derivável no intervalo aberto (a, b), então existe um elemento c no intervalo aberto (a, b) tal que $f'(c)$ corresponde a taxa de variação média de f em [a,b].

Lema 4.4. *Sejam $F(x)$ e $P(x)$ como no Lema 4.3. Então*

$$F(k) - e^k F(0) = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)}$$

para todo $k > 0$ e, além disso, θ_k é um número entre 0 e 1.

[2]Para um estudo mais aprofundado sobre o assunto, recomendamos Elon (2019) p. 184.

Demonstração. Seja $k > 0$. Definindo a função

$$\begin{aligned} G:\ [0,k] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = e^{-x}F(x) \end{aligned}$$

Observamos que G é contínua em $[0,k]$ e derivável em $(0,k)$, já que e^x e $F(x)$ também possuem essas mesmas propriedades. Logo podemos utilizar o Teorema do Valor Médio, daí existe $c \in (0,k)$ tal que

$$\begin{aligned} G(k) - G(0) = G'(c).(k-0) &\Rightarrow e^{-k}F(k) - e^0F(0) = -e^{-c}P(c)k \\ &\Rightarrow e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{-c}P(c)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pois, do lema anterior

$$G'(c) = \frac{d}{dx}(e^{-c}F(c)) = -e^{-c}P(c)$$

Observe que como $c \in (0,k)$, existe $\theta_k \in (0,1)$, tal que

$$c = k\theta_k \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) em (4.4), temos

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{-k\theta_k}P(k\theta_k))$$

Por fim, multiplicando ambos os lados da equação por e^k obtemos

$$e^ke^{-k}F(k) - e^kF(0) = -e^{-k}k(e^{(-k\theta_k)}P(k\theta_k))$$

Portanto,

$$F(k) - e^kF(0) = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)}.$$

□

Observação 4.1. Sejam $F(x)$ como antes e $A_k = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)}$. Se e não fosse transcendente, ou seja, se e fosse algébrico, existiriam inteiros $c_0, c_1, \cdots, c_n$ tais que

$$c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

Então

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.4, $A_k = F(k) - e^k F(0)$, então para $k \in 1, 2 \cdots n$, temos

$$\begin{aligned} c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n &= c_1(F(1) - eF(0)) + \cdots + c_n(F(n) - e^n F(0)) \\ &= c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) - F(0)(c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_n e^n) \end{aligned}$$

Como $-(c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_n e^n) = c_0$, obtemos

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_n A_n = c_0 F(0) + C_1 F(1) + \cdots + c_n F(n).$$

□

Lema 4.5. *Seja*

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j, a_j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

$j = 0, 1, ..., r$ *e* $p < r$, *então*

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r.$$

Demonstração. Para essa demonstração, será utilizado o Princípio de Indução Finita. Primeiro Vamos averiguar se vale para i=1

Note que

$$Q^{(1)}(x) = [Q(x)]'$$

e

$$\begin{aligned} [Q(x)]' &= [\sum_{j=0}^{r} a_j x^j]' \\ &= (a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_r x^r)' \\ &= a_1 x^{1-1} + 2a_2 x^{2-1} + ... + r a_r x^{r-1} \\ &= \frac{1!}{(1-1)!} a_1 x^{1-1} + \frac{2!}{(2-1)!} a_2 x^{2-1} + ... + \frac{r!}{(r-1)!} a_r x^{r-1} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1} \end{aligned}$$

Ou seja, é válido para $i = 1$. Agora, por hipótese de indução, vamos supor que vale para $i = k$, ou seja

$$Q^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{r} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k} \tag{4.6}$$

O passo seguinte é mostrar que a expressão vale para o caso $k + 1$, ou seja, queremos mostrar que a expressão

$$Q^{(k+1)}(x) = \sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}$$

é válida.

Para isso basta lembrarmos que $Q^{(k+1)}(x) = [Q^{(k)}(x)]'$, daí pela equação 4.6, temos

$$\begin{aligned}
[Q^{(k)}(x)]' &= \left[\sum_{j=k}^{r} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k}\right]' \\
&= \left[\frac{k!}{(k-k)!} a_k x^{k-k} + \frac{(k+1)!}{(k+1-k)!} a_{k+1} x^{k+1-k} + \cdots + \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k}\right]' \\
&= (k+1-k)\frac{(k+1)!}{(k+1-k)!} a_{k+1} x^{k+1-k-1} + \cdots + (r-k)\frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k-1} \\
&= \frac{(k+1)!}{(k+1-k-1)!} a_{k+1} x^{k+1-k-1} + \cdots + \frac{r!}{(r-k-1)!} a_r x^{r-k-1} \\
&= \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!} a_{k+1} x^{(k+1)-(k+1)} + \cdots + \frac{r!}{(r-(k+1))!} a_r x^{r-(k+1)} \\
&= \sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, vale que

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r.$$

□

Lema 4.6. *Considerando Q como no Lema 4.5, é válido que, para $p \leq i$, $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.*

Demonstração. Do lema anterior, sabemos que

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x) &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i} \\
&= \sum_{j=i}^{r} \frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}
\end{aligned}$$

Daí, podemos perceber que o polinômio dado pelo somatório acima tem cada coeficiente dado por $b_j = \frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j$. Nesse caso, basta mostrar que cada b_j é inteiro divisível por

p.
Note que $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{p!}$, ou seja $b_j = \frac{p}{p!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j$. Como para b_j ser inteiro divisível por p devemos ter $b_j = kp$, em que $k \in \mathbb{Z}$, então precisamos mostrar que $k = \frac{j!}{p!(j-i)!}a_j \in \mathbb{Z}$
Já que $a_j \in \mathbb{Z}$, então se mostrarmos que $\frac{j!}{p!(j-i)!} \in \mathbb{Z}$, o Lema estará provado.

Como $i \geq p$, então $(j-i) \leq (j-p)$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{j!}{p!(j-i)!} &= \frac{j!}{p!(j-i)!}\left[\frac{(j-p)\cdot(j-(p+1))(j-(p+2))\cdots(j-(i-1))}{(j-p)\cdot(j-(p+1))(j-(p+2))\cdots(j-(i-1))}\right] \\
&= \frac{j!(j-p)\cdot(j-(p+1))(j-(p+2))\cdots(j-(i-1))}{p!(j-p)!} \\
&= \begin{pmatrix} j \\ p \end{pmatrix}(j-p)\cdot(j-(p+1))(j-(p+2))\cdots(j-(i-1))
\end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} j \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$ e $(j-p)(j-(p+1))(j-(p+2))\cdots(j-(i-1)) \in \mathbb{Z}$, então $\frac{j!}{p!(j-i)!} \in \mathbb{Z}$. Isso garante que, para $p \leq i$, $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p. □

Lema 4.7. *Considerando $P(x)$ como sendo da forma*

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p, x \in \mathbb{R}$$

em que p é um número primo tal que $p > n$, $p > c_0$, com n e c_0 dados pela Observação 4.1, então $P(x)$ pode ser escrito como

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!}x^p + \cdots + \frac{b_{np}}{(p-1)!}x^{np+p-1}, x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Considere

$$H(x) = (1-x)(2-x)\cdots(n-x)$$

Daí, $H(x)$ pode ser reescrito como

$$H(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + n!$$

com $a_1, a_2, \cdots, a_n$ constantes. Então

$$\begin{aligned}
[H(x)]^p &= (1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p \\
&= [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + n!]^p \\
&= b_{np}x^{np} + b_{np-1}x^{np-1} + \cdots b_1 x + (n!)^p
\end{aligned}$$

De forma que $b_1, b_2, \cdots, b_{np}$ são constantes. Por conseguinte

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[H(x)]^p \\ &= \frac{b_{np}x^{np}x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{b_{np-1}x^{np-1}x^{p-1}}{(p-1)!} + \cdots + \frac{b_1 x x^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{(n!)^p x^{p-1}}{(p-1)!} \\ &= \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!}x^p + \cdots + \frac{b_{np}}{(p-1)!}x^{np+p-1}. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.7.1. *Nas condições do Lema 4.7, temos $P^{(i)}(k) = 0$ para $k = 1, \cdots, n$, com $i < p$.*

Demonstração. De fato, basta considerarmos

$$P(x) = (k-x)^p g(x)$$

de forma que

$$g(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \cdots (k-1-x)^p(k+1-x)^p \cdots (n-x)^p$$

Daí,

$$\begin{aligned} P'(x) &= p(k-x)^{p-1}(-1)g(x) + g'(x)(k-x)^p \\ &= (k-x)^{p-1}(-pg(x) + g'(x)(k-x)) \\ &= (k-x)^{p-1}g_1(x) \end{aligned}$$

Com $g_1(x) = -pg(x) + g'(x)(k-x)$. Então generalizando, temos

$$P^{(i)}(x) = (k-x)^{p-i}g_i(x)$$

Que nos garante $P^{(i)}(k) = 0$ para $k = 1, \cdots, n$ sendo $i < p$. □

Corolário 4.7.2. *Nas condições do Lema 4.7, vale que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e $P^{(i)}(0) = 0$ com $i < p-1$.*

Demonstração. Para a primeira parte temos

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!}x^p + \cdots + \frac{b_{np}}{(p-1)!}x^{np+p-1}$$

Daí,

$$\begin{aligned} P^{(p-1)}(x) &= (p-1)!\frac{(n!)^p}{(p-1)!} + (p-1)!\frac{b_1}{(p-1)!}x + \cdots + (p-1)!\frac{b_{np}}{(p-1)!}x^{np} \\ &= (n!)^p + b_1 x + \cdots + b_{np}x^{np} \end{aligned}$$

Como todos os termos, com a excessão do termo independente $(n!)^p$, estão sendo multiplicados por x, aplicando $P^{(p-1)}(x)$ em $x = 0$, vamos obter

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$$

Para a segunda parte devemos mostrar que $P^{(i)}(0) = 0$, com $i < p-1$. Nesse caso, como $i < p-1$, então para qualquer i todos os termos de $P^{(i)}(x)$ são múltiplos de x, então $P^{(i)}(0) = 0$. □

Lema 4.8. *Se d_i com $i = 0, 1, \cdots, r$ são inteiros tais que os d_i para $i \geq 1$ são divisíveis por p e d_0 não é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{r} d_i$ não é divisível por p.*

Demonstração. Supondo por contradição que $\sum_{i=0}^{r} d_i$ seja divisível por p, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\sum_{i=0}^{r} d_i = kp$$

Como d_i é divisível por p, para $1 \leq i \leq r$, temos

$$\sum_{i=0}^{r} d_i = kp = d_0 + d_1 + \cdots + d_r = d_0 + k_1 p + k_2 p + \cdots + k_r p = d_0 + p(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$$

Logo,

$$d_0 = kp - p(d_1 + d_2 + \cdots + d_r) = p(k - (k_1 + \cdots + k_r))$$

Como $L = (k-(k_1+k_2+\cdots+k_r)) \in \mathbb{Z}$, temos $d_0 = Lp$, portanto d_0 é divisível por p. Absurdo, pois por hipótese temos d_0 não divisível por p. Logo $\sum_{i=0}^{r} d_i$ não é divisível por p.

□

Lema 4.9. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como antes, então $F(0)$ é um inteiro não é divisível por p e, para todo $k = 1, 2, \cdots n$, $F(k)$ é um inteiro divisível por p.*

Demonstração. Temos que $F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(p)}(x)$, então $F(0) = P(0) + P'(0) + \cdots + P^{(p-2)}(0) + P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0)$, mas pelo Corolário 4.7.2, chegamos que

$$F(0) = P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0)$$

Ainda do Corolário 4.7.2, sabemos que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e pelo Lema 4.7, sabemos também que

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!}x^p + \cdots + \frac{b_{np}}{(p-1)!}x^{np+p-1}$$

Então

$$P^{(p)}(x) = p!\frac{b_1}{(p-1)!} + \cdots + (np+p-1)\cdots(np)\frac{b_n p}{(p-1)!}x^{np-1}$$

daí aplicando em $x = 0$, vamos obter

$$P^{(p)}(0) = p!\frac{b_1}{(p-1)!} = pb_1$$

Por fim, chegamos que $F(0) = (n!)^p + pb_1$. Este não é divisível por p, pois se fosse de tal forma, $(n!)^p$ também seria divisível por p, mas isso caracterizaria um absurdo, pois $p > n$ e p é primo. Nos resta mostrar que $F(k)$ para $k = 1, \cdots, n$ é inteiro divisível por p. Para isso, note que

$$F(k) = P(k) + P'(k) + \cdots + P^{(p-1)}(k) + P^{(p)}(k)$$

Do Lema 4.6 sabemos que $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p. Daí basta notarmos que $P^{(i)}(x)$ com $i = 1, 2, \cdots p$ é da mesma forma do Lema 4.6, então vale que os coeficientes de $P^{(i)}(x)$ são inteiros divisíveis por p, agora substituindo $x = k$. Chegamos que cada $P^{(i)}(k)$ será um número inteiro, pois $k \in \mathbb{Z}$. Por fim, como $F(k)$ é um soma finita de números inteiros, então $F(k)$ é número inteiro.

□

Lema 4.10. *Nas condições da Observação 4.1 para cada c_k e com $0 < c_0 < p$, $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, sabemos que $F(k)$, para $k = 1, \cdots, n$, é um inteiro divisível por p, então $c_1F(1), c_2F(2), \cdots, c_nF(n)$ são todos inteiros divisíveis por p. Restando apenas a parcela $c_0F(0)$. Do lema anterior, sabemos que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p. Essas informações nos garantem que cada parcela é um número inteiro e a soma finita de números inteiros continua sendo um número inteiro. Além disso, por hipótese, temos $0 < c_0 < p$, como p é primo, então p não divide c_0, então não divide $c_0F(0)$. Como p não divide apenas uma parcela, pelo lema 4.8, p não divide $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$.

□

Lema 4.11. *Nas condições da Observação 4.1 $|A_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$ para A_k como definido no Lema 4.4 e $k \leq n$.*

Demonstração. Como definido ao final do Lema 4.4, temos

$$A_k = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)}$$

Assim,

$$A_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p\cdots(n-k\theta_k)^p, 0 < \theta_k < 1$$

Daí

$$\begin{aligned} |A_k| &= \left|-ke^{k(1-\theta_k)}\frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p\cdots(n-k\theta_k)^p\right| \\ &= \frac{1}{(p-1)!}|-k||e^{k(1-\theta_k)}||(k\theta_k)^{p-1}||(1-k\theta_k)^p||(2-k\theta_k)^p|\cdots|(n-k\theta_k)^p| \\ &\leq \frac{1}{(p-1)!}ne^{n(1-\theta_k)}|(n\theta_k)^{p-1}||(1-\theta_k)^p||(2-\theta_k)^p|\cdots|(n-\theta_k)^p| \end{aligned}$$

Note que $e^{n(1-\theta_k)} \leq e^n$, pois $0 < 1-\theta_k < 1$ e $|n\theta_k|^{p-1} \leq n^{p-1}$. Então

$$|A_k| \leq \frac{1}{(p-1)!}ne^n n^{p-1}|(1-\theta_k)^p||(2-\theta_k)^p|\cdots|(n-\theta_k)^p|$$

Além disso, veja que

$$|(1-\theta_k)^p||(2-\theta_k)^p|\cdots|(n-\theta_k)^p| \leq (n!)^p$$

Para perceber isso basta expandir o fatorial e notar que ambos possuem a mesma quantidade de termos, mas comparando termo a termo, percebemos que $|y-\theta_k| \leq y$ para todo $y = 1, 2, \cdots n$. Daí

$$\begin{aligned} |A_k| &\leq \frac{1}{(p-1)!}ne^n n^{p-1}|(1-\theta_k)^p||(2-\theta_k)^p|\cdots|(n-\theta_k)^p| \\ &\leq \frac{1}{(p-1)!}ne^n n^{p-1}(n!)^p \\ &= \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.12. *Nas condições da Observação 4.1, se p for um número primo suficientemente grande, então* $|c_1A_1 + \cdots + c_nA_n| < 1$.

Demonstração. Pela desigualdade triangular, temos

$$|c_1A_1 + \cdots + c_nA_n| \leq |c_1A_1| + \cdots + |c_nA_n| = |c_1||A_1| + \cdots + |c_n||A_n|$$

Pelo 4.11, sabemos que $|A_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$ para $k \leq n$, então

$$|c_1||A_1| + \cdots + |c_n||A_n| \leq (|c_1| + \cdots + |c_n|)\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = \frac{Ce^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$$

Com $C = |c_1| + \cdots + |c_n|$. Daí, o problema se resume a mostrar que existe p suficientemente grande em que

$$\frac{Ce^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} < 1$$

considerando a sequência $X_p = \frac{Ce^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$, basta mostrar que essa sequência converge para 0.

Tomemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{X_{p+1}}{X_p}\right) &= \frac{Cn^{p+1}e^n(n!)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(p-1)!}{Ce^n n^p (n!)^p} \\ &= \frac{n \cdot n!}{p} \end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{X_{p+1}}{X_p}\right) = \lim_{p\to\infty}\frac{n \cdot n!}{p} = 0$$

Logo, como a sequência converge para 0, então existe p suficientemente grande de forma que $|c_1A_1 + \cdots + c_nA_n| < 1$. □

Por fim, todos esses resultados prévios são importantes para embasar o resultado que vem a seguir.

Teorema 4.13. *O número de Euler é transcendente.*

Demonstração. Pela Observação 4.1 supomos que e é algébrico, ou seja, existem $c_0, c_1, \cdots, c_n$ tais que $c_0 + c_1e + \cdots + c_ne^n = 0$ e chegamos que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$. Pelo Lema 4.10 concluímos que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p, porém pelo Lema 4.12 chegamos que nas mesmas condições $|c_1A_1 + \cdots + c_nA_n| < 1$, mas isso é um absurdo, pois um número inteiro não nulo tem módulo sempre maior ou igual a 1. Esse absurdo foi obtido por termos suposto que e é algébrico, logo e é transcendente. □

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito um estudo sobre o Número de Euler, inicialmente contando um pouco sobre a história desta constante e também do grande matemático Leonhard Euler, posteriormente foi introduzido o assunto de irracionalidade, em que o foco principal foi apresentar uma prova que garantisse a irracionalidade deste número que é o nosso objeto de estudo e finalmente foi introduzido o assunto de transcendência que teve como ponto central apresentar uma demonstração da transcendência do Número de Euler. Além disso, para fazer esse estudo, foi utilizada uma linguagem um pouco mais simples a fim de ser o mais claro possível, sem que de alguma forma perdesse o rigor matemático.

A Teoria dos Números é o ramo da Matemática que busca estudar as propriedades das constantes e, em especial, a Teoria dos Números Transcendentes busca estudar o conjunto dos transcendentes. Assim, por meio deste trabalho foi possível entender um pouco mais sobre o Número de Euler, tanto sobre a sua história como também em relação às suas propriedades. Além disso, através do estudo sobre o conjunto dos transcendentes podemos entender um pouco mais sobre o conjunto dos números complexos no geral e mostrando que e é transcendente foi possível entender um pouco mais sobre a natureza dessa constante em específico que é tão importante para a Matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3ª ed. [Tradução de Helena Castro] São Paulo: Blucher, 2012.

FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 1ª ed. Rio de Janeiro SBM, 2011.

MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise vol. 1**. 15ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

OLIVEIRA, Julimar C. de , GOMES, Carlos C. . **Números Irracionais e Transcendentes**. Monografia(Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina. Imperatriz, 2009.

ROQUE, Tatiana, PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012

SHIU, Peter. **Euler's Contribution to Number Theory.** The Mathematical Gazette 91, no. 522 (2007): 453–61. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40378418> Acessado em 20 set. 2021.

VASCONCELOS, Getulio de A. **A irracionalidade e transcendência do Número** e. Dissertação(Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2013.

EDWARDS, H. M. **Riemann's Zeta Function**. New York: Academic Press, 1974.