



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**JOSÉ ROBÉRIO BARBOSA PATU**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA VELOCIDADE DA LUZ NO  
SISTEMA SOLAR: UMA MODELAGEM MATEMÁTICA E  
COMPUTACIONAL**

**MONTEIRO  
2023**

JOSÉ ROBÉRIO BARBOSA PATU

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA VELOCIDADE DA LUZ NO  
SISTEMA SOLAR: UMA MODELAGEM MATEMÁTICA E  
COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática aplicada.

**Orientador:** Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho

MONTEIRO

2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

P322s Patu, Jose Roberio Barbosa.  
Simulação numérica da velocidade da luz no sistema solar  
[manuscrito] : uma modelagem matemática e computacional /  
Jose Roberio Barbosa Patu. - 2023.  
53 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE. "

1. Velocidade da luz. 2. Linguagem de programação - Python. 3. Movimento unidimensional. I. Título

21. ed. CDD 005.711

JOSÉ ROBÉRIO BARBOSA PATU

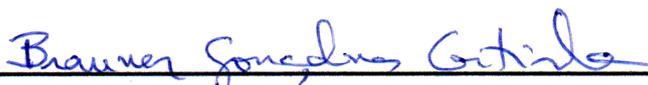
**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA VELOCIDADE DA LUZ NO SISTEMA SOLAR: UMA MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

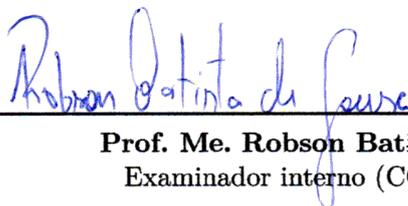
Aprovada em: 27/06/2023.

**BANCA EXAMINADORA**



---

**Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho**  
Orientador



---

**Prof. Me. Robson Batista de Sousa**  
Examinador interno (CCHE/UEPB)



---

**Prof. Dra. Ana Emília Victor Barbosa Coutinho**  
Examinador interno (CCHE/UEPB)

*Este trabalho é dedicado à minha amiga de turma Éllen Maria, que por conta da pressa de Deus foi chamada por Ele e, como um raio de luz, partiu tão rápido, não conseguindo concluir a sua graduação junto com a nossa turma. Seja onde estiver, saiba que sempre lembrarei da sua alegria e das nossas “gaiatices” nas aulas de programação.*

## AGRADECIMENTOS

Não posso iniciar esses agradecimentos, sem primeiro agradecer enormemente aos professores que passaram por mim durante toda a minha caminhada acadêmica no Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE), Campus Monteiro. A vocês o meu muito obrigado, vocês me ensinaram muito mais do que apenas padrões e números, me ensinaram a ser uma pessoa melhor. Junto disso, agradeço também a UEPB como um todo, desde os seguranças aos agentes de limpeza, os coordenadores, técnicos e administradores. Sou muito grato por ter sido acolhido por todos vocês e podem ter certeza que de alguma forma, cada um de vocês contribuiu com a minha formação, obrigado.

Não posso deixar também, de agradecer aos meus pais. Batalhadores que me incentivam sempre a ser uma pessoa melhor, todos os dias. Obrigado mãe, por me incentivar nos momentos em que eu queria desistir (e não foram poucos), por todo o carinho e amor. Obrigado meu pai, por toda força e conselhos dados, obrigado por não me deixar cair, por ser esse exemplo de homem forte e por investir em mim. E a todos os meus familiares, obrigado por todo o apoio e todos os conselhos que vocês me deram, se estou aqui na reta final, é porque os segui e continuei na luta.

Quero fazer um agradecimento especial aos meus dois professores de matemática, os mais importantes na minha caminhada e que tive o privilégio de conhecer. O professor Francisco (Chico) de Sertânia, que foi a minha base matemática durante todo o percurso do Ensino Fundamental. Ao professor Florisvaldo Gomes (Ripe Sanfoneiro) que, contrariando o bullying que eu sofria no ensino médio por ser o mais baixinho da turma, me disse: “Você é um pequeno grande. É pequeno, mas é grande na inteligência!”. Talvez seja por esse discurso, que escolhi cursar matemática, obrigado.

Agradeço ao meu orientador, Brauner Gonçalves Coutinho, por me guiar nessa jornada que é o trabalho de conclusão de curso. Pela paciência, por me incentivar a escrever e por me cobrar também, pois sem isso, não teria saído uma página desse trabalho, obrigado.

Por fim e não menos importante, a minha esposa e companheira. Agradeço pelos seus conselhos, pelas cobranças e pelo incentivo que você sempre me deu com a universidade. Obrigado por todo carinho, apoio e sobre tudo, obrigado por sempre tentar me entender, sei que é difícil, pois nem eu mesmo me entendo as vezes. O meu amor será sempre seu, obrigado.

*“Não adentre a boa noite apenas com ternura, pois a velhice queima e clama ao cair do dia. Fúria contra luz que já não fulgura. Embora os sábios ao fim da vida saibam, que é a treva que perdura, pois suas palavras não mais capturam a centelha tardia. Não adentre a boa noite apenas com ternura. Fúria, fúria contra a luz que já não fulgura...”*

*Dylan Thomas, citado no filme Interstellar*

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de um simulador em 3D para investigar as limitações da velocidade da luz no espaço. Utilizando a tecnologia de modelagem 3D, o simulador permite a criação interativa de objetos em um ambiente virtual tridimensional através de linhas de código. Foi utilizada a biblioteca VPython, que é uma opção gratuita, simples e compatível com várias plataformas, podendo ser usado pelo navegador de internet, sem a necessidade de instalação de nenhum software. O simulador foi baseado em um vídeo postado por James O'Donoghue, um ex-cientista da NASA, em seu canal no YouTube. Nosso desafio foi reproduzir a sua animação usando a linguagem de programação Python. O modelo matemático utilizado foi o do movimento unidimensional de partículas que, apesar de bastante simples, apresentou resultados satisfatórios. A solução numérica foi obtida utilizando o método de Euler. Os resultados obtidos dos tempos de viagem do fóton, bem como as cenas simuladas, apresentaram boa concordância quando comparados com a simulação apresentada por O'Donoghue. Além disso, as cenas modeladas forneceram uma representação bastante interessante do problema, uma vez que este tipo de visualização só pode ser obtida por meio de simulações. Com a plataforma Glowscript, o simulador foi disponibilizado na web, podendo ser acessado gratuitamente em qualquer dispositivo com conexão à internet, permitindo que estudantes, professores e entusiastas possam explorar livremente como a velocidade da luz pode se tornar “lenta” se considerarmos as longas distâncias envolvidas.

**Palavras-chave:** velocidade da luz; simulação; VPython; movimento unidimensional.

## ABSTRACT

The present work aims to present the development of a 3D simulator to investigate the limitations of the speed of light in space. Using 3D modeling technology, the simulator allows for the interactive creation of objects in a three-dimensional virtual environment through lines of code. The VPython library was used, which is a free, simple, and cross-platform option that can be used directly in a web browser without the need for any software installation. The simulator was based on a video posted by James O'Donoghue, a former NASA scientist, on his YouTube channel. Our challenge was to replicate his animation using the Python programming language. The mathematical model used was the one-dimensional motion of particles, which, despite being quite simple, yielded satisfactory results. The numerical solution was obtained using the Euler method. The results obtained for photon travel times, as well as the simulated scenes, showed good agreement when compared to O'Donoghue's simulation. Furthermore, the modeled scenes provided a visually interesting representation of the problem, as this type of visualization can only be achieved through simulations. With the Glowscript platform, the simulator was made available on the web, allowing free access from any internet-connected device. This enables students, teachers, and enthusiasts to freely explore how the speed of light can become "slower" when considering the vast distances involved.

**Key-words:** speed of light; simulation; VPython; one-dimensional motion.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ilustração original do trabalho de Rømer no “Journal des Sçavans”, 1676. . . . .	20
Figura 2 – Ilustração do arranjo experimental utilizado por Fizeau, 1849. . . . .	22
Figura 3 – Explicação do experimento de Fizeau. . . . .	23
Figura 4 – Deslocamento e trajetória de uma partícula entre dois pontos. . . . .	31
Figura 5 – Gráfico posição-tempo para uma partícula sob velocidade constante. . . . .	33
Figura 6 – Método de Euler mostrado graficamente. . . . .	34
Figura 7 – Capturas de tela mostrando as três cenas simuladas. . . . .	39
Figura 8 – Exemplo de uma cena com objetos e o seu respectivo código-fonte. . . . .	41
Figura 9 – Modelagem do Sistema Solar. . . . .	42
Figura 10 – Trecho do código que cria os elementos principais da cena do Caso 1. . . . .	43
Figura 11 – Trecho do código referente ao movimento do fóton. . . . .	44
Figura 12 – Trecho do código que cria os elementos principais da cena do Caso 2. . . . .	44
Figura 13 – Imagens com a posição do fóton no Caso 1 em dois momentos. . . . .	46
Figura 14 – Imagens com a posição do fóton no Caso 2 em dois momentos. . . . .	47
Figura 15 – Imagens com a posição do fóton no Caso 3 em três momentos. . . . .	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados astronômicos utilizados na modelagem dos casos. . . . .	41
Tabela 2 – Tempos e erros relativos. . . . .	49

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA . . . . .	14
2.1	Antiguidade . . . . .	14
2.2	Idade Média . . . . .	15
2.3	Renascimento . . . . .	16
2.4	O experimento de Galileu . . . . .	17
2.5	Das observações astronômicas ao século XX . . . . .	18
2.6	A teoria de Maxwell . . . . .	24
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	25
3.1	O papel do computador na educação . . . . .	25
3.2	Equações do Movimento Unidimensional . . . . .	29
3.2.1	<i>Velocidade Média</i> . . . . .	30
3.2.2	<i>Velocidade Instantânea</i> . . . . .	31
3.2.3	<i>Partículas sob velocidades constantes</i> . . . . .	32
3.3	Solução numérica de EDOs via método de Euler . . . . .	32
3.3.1	<i>Erros</i> . . . . .	35
3.3.1.1	<i>Erros de arredondamento e erros de truncamento</i> . . . . .	35
3.3.1.2	<i>Erro total</i> . . . . .	35
4	METODOLOGIA . . . . .	37
4.1	Casos simulados . . . . .	37
4.2	Modelagem 3D . . . . .	38
4.2.1	<i>A biblioteca VPython</i> . . . . .	38
4.2.2	<i>Modelagem dos corpos celestes</i> . . . . .	40
4.2.3	<i>Comentários acerca da modelagem</i> . . . . .	42
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	45
5.1	Caso 1 - Terra até a Lua . . . . .	45
5.2	Caso 2 - Terra até Marte . . . . .	45
5.3	Caso 3 - Sol até a Terra, passando por Mercúrio e Vênus . . . . .	47
5.4	Soluções Analíticas e Erros Relativos . . . . .	49
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	51
	REFERÊNCIAS . . . . .	53

# 1 INTRODUÇÃO

Desde a infância, minha fascinação pela astronomia e pela compreensão do funcionamento do universo despertou uma curiosidade genuína (a de sempre querer saber como as coisas funcionam), me levando a pesquisar e consumir conteúdos relacionados ao tema. Além disso, sempre fui inspirado pela posição geográfica onde resido, com um céu, digamos, privilegiado, sem interferência luminosa alguma. Isso rendeu longas noites de observações do firmamento, o que acabou influenciando na minha decisão de cursar Matemática. Meu interesse logo me levou a uma afinidade com o professor Brauner Gonçalves Coutinho, com quem acabei dialogando muitas vezes sobre o tema e que acabou se tornando o meu orientador nesta pesquisa.

Em uma dessas conversas, o professor compartilhou um vídeo do *YouTube*<sup>1</sup> mostrando como a velocidade da luz pode ser “lenta” ao se considerar o tempo que ela leva para percorrer as distâncias no espaço, até mesmo entre os corpos celestes do nosso sistema solar: Lua, Sol, Vênus, Marte, etc. O professor então propôs um trabalho com o objetivo de estudar o problema físico ilustrado no vídeo, assim como toda a modelagem matemática necessária para criar os modelos tridimensionais representando os corpos celestes e a representação do movimento. Além disso, o desafio seria responder a seguinte questão: “Seria possível criar uma simulação semelhante usando a linguagem de programação Python?”. A possibilidade de estudar um assunto de grande interesse para mim, aliada à possibilidade de aprofundar meus conceitos da programação de computadores, além de trabalhar com diversos conteúdos matemáticos e físicos com os quais tive contato durante o curso de graduação, serviram de motivação para o desenvolvimento da presente pesquisa.

Os objetivos da pesquisa são: compreender a história do cálculo da velocidade da luz, estudar o movimento unidimensional de partículas, aplicar o método de Euler para obter a solução numérica que represente o movimento do fóton entre os corpos celestes do Sistema Solar. A partir daí, construir um simulador capaz de produzir uma animação semelhante àquela apresentada no vídeo criado com CGI<sup>2</sup> por O’Donoghue (2019)<sup>3</sup>, que mostra a luz viajando no Sistema Solar e demonstra como, em termos temporais, essa velocidade tão rápida sob o nosso ponto de vista, se torna relativamente lenta quando comparada às escalas do universo. A ideia é utilizar a linguagem de programação Python, particularmente a biblioteca VPython de modelagem 3D, mas antes estudar a física do problema, bem como o modelo matemático a ser empregado. Pretende-se que este trabalho

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nQUwHdSAhmw>.

<sup>2</sup> CGI é uma sigla para o termo em inglês *Computer Graphic Imagery* que significa imagens geradas por computador, termo comumente definido na nossa língua como computação gráfica.

<sup>3</sup> Ex-Cientista da NASA, atualmente é astrônomo planetário da Agência de Exploração Aeroespacial do Japão (JAXA) e divulgador científico.

sirva como referência bibliográfica para possíveis pesquisas futuras nessa área de aplicação.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), há diversas recomendações sobre uso de tecnologias como ferramentas didáticas, incluindo-as entre as competências gerais para a educação básica:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Ao desenvolver o simulador, entendemos que estamos alinhados com o trecho citado acima, principalmente por estarmos, nós mesmos, “criando tecnologias” para “produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo”. Além disso, ao resolver o problema proposto por meio de algoritmos escritos na forma de um programa de computador, estamos trabalhando o pensamento computacional, definido pela BNCC como:

Pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BRASIL, 2018, p. 474).

O caráter interdisciplinar deste trabalho, envolvendo Física, Astronomia, Matemática e Computação está em conformidade com a metodologia de ensino STEM, que representa a abreviação em inglês para Science, Technology, Engineering and Mathematics (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática), um sistema de aprendizado que propõe trabalhar simultaneamente com estas quatro áreas de conhecimento em uma abordagem voltada a aplicações do mundo real (HOM; DOBRIJEVIC, 2022).

A seguir, será apresentada a organização do trabalho. No Capítulo 2 abordaremos a fascinante história dos esforços para o cálculo da velocidade da luz ao longo do tempo, desde os filósofos gregos até a ciência moderna do século XX. Apresentaremos os debates sobre a natureza da luz, sua propagação e as posições adotadas pelos pensadores e cientistas de cada época, juntamente com suas argumentações. Também discutiremos os testes práticos realizados para medir a velocidade da luz e suas consequências na ciência. No Capítulo 3 trataremos na fundamentação teórica de alguns temas que serviram de base para o desenvolvimento da pesquisa. Em seguida, no Capítulo 4, descreveremos os procedimentos metodológicos que seguimos no decorrer da pesquisa. O Capítulo 5 traz os resultados obtidos e discussões relevantes. Finalmente, as conclusões e recomendações para trabalhos futuros constituem o Capítulo 6.

## 2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Estudar a natureza da luz não é algo recente, filósofos na Grécia antiga já tentavam entender como ela funcionava. Alguns até argumentavam que, na verdade, a luz saía de nossos olhos, incidia nos objetos e então retornava, o que explicava como a gente podia enxergar o mundo a nossa volta. Essa hipótese, no entanto, não explicava o fato de não enxergarmos nada durante a noite. Mas, nessa época, devido a limitação tecnológica, não era possível elaborar experimentos complexos a fim de entender a natureza das coisas, principalmente a respeito da velocidade da luz. Nos primórdios, os estudiosos baseavam-se em observações da vida cotidiana:

Fenômenos como o imediato surgimento e desaparecimento das imagens nos espelhos; a incidência simultânea da luz em objetos que se encontram a distâncias diferentes da fonte, assim como a incidência instantânea da luz solar quando deixa de existir obstáculo (nuvens)[...](SILVA, 2002, p.10)

Apesar de bastante primitivas, foi a partir dessas observações que o entendimento sobre esses fenômenos gradativamente começou a ser desenvolvido e, de tempos em tempos, pensadores tentaram elaborar teorias capazes de explicar tais fenômenos de forma eficiente e condizente com as leis da física de suas épocas.

### 2.1 Antiguidade

O debate entre os filósofos e estudiosos que se debruçavam sobre o tema, não fez com que chegassem a um consenso, tendo uns defendido que a luz se propagava de forma instantânea e outros defendendo que tinha velocidade finita. De acordo com Silva (2002), Aristóteles (384 – 322 a.C) acreditava de que a luz se propagava instantaneamente, fora do domínio do tempo, propagando-se em todas as direções e preenchendo todo o espaço. Ele argumentava, por exemplo, que era impossível perceber um intervalo de tempo entre o estabelecimento da luz nos extremos leste e oeste do horizonte. A luz não era uma emissão que se propagava dos objetos luminosos para os olhos, mas sim um estado que o meio adquiria simultaneamente a partir do objeto luminoso.

Conforme argumenta (SILVA, 2002), a teoria da visão de Platão (427 – 347 a. C), por outro lado, deixava claro que as substâncias materiais requeriam tempo para percorrer o espaço. No entanto, dentro da mesma obra, encontramos expressões contraditórias, onde Platão menciona tanto a propagação instantânea da luz, como também sua propagação em alta velocidade em diferentes trechos. No entanto, seria uma teoria que se sustentaria durante muito tempo.

Outro nome que se dividia entre as duas vertentes de pensamento foi Santo Agostinho (354 – 430 d.C). Por um lado, ele afirmava que os raios visuais se propagavam instantaneamente no tempo, ou seja, que a luz se espalhava simultaneamente. Por outro lado, mencionava que a velocidade da luz era tão grande que tornava impossível qualquer tipo de medida ou estimativa. Assim, Santo Agostinho reconhecia tanto a propagação instantânea da luz no tempo, como sua velocidade extremamente rápida, que desafiava a possibilidade de medição e estimativa (SILVA, 2002).

## 2.2 Idade Média

Com a queda do Império Romano Ocidental e o surgimento dos estados feudais, houve poucos avanços significativos no campo científico. Durante mais de mil anos, com a ascensão do Cristianismo, os mosteiros se tornaram os centros intelectuais, com o foco principal nos problemas teológicos. Foi nesse período que a ciência grega encontrou refúgio no Império Árabe (D'AMBROSIO, 2007). O século VII marcou o início do domínio árabe na Europa. Apesar de serem frequentemente considerados intermediários por apenas introduzir a cultura grega na Europa medieval, eles também desenvolveram diversos ramos da ciência. De acordo com Silva (2002), um dos campos da ciência que foi desenvolvido pelos árabes foi a ótica, principalmente através do trabalho de Alhazen.

Segundo Azevedo e Júnior (2020), Alhazen (965 – 1039), também conhecido como Al-Haytham, foi responsável pela obra “O Tesouro da ótica” no século XI, que teve um grande impacto no continente europeu. Em seu trabalho, Al-Haytham discutiu amplamente sobre espelhos esféricos, parabólicos, sistemas de lentes e a formação de imagens em câmaras escuras. Sua contribuição, conforme afirma Laporte (2017), foi fundamental para o avanço dos estudos óticos e influenciou significativamente o conhecimento no campo da ótica na Europa e muito provavelmente, contribuiu com as ideias de muitos outros pensadores que vieram depois dele. Al-Haytham conduziu estudos minuciosos sobre os fenômenos da luz, utilizando câmaras escuras e outros dispositivos em seus experimentos. A partir dessas investigações, o filósofo chegou à conclusão de que a luz era capaz de se propagar de uma abertura até uma tela em um intervalo de tempo, mesmo que esse intervalo fosse imperceptível aos nossos sentidos.

Por volta do século XVII, como aponta Silva (2002), surgiram diferentes teorias em oposição à visão de Platão sobre a propagação da luz, que defendia uma velocidade finita. Um dos filósofos que contribuiu para essa discussão foi John Peckham (1230 – 1292), que seguiu as opiniões de Santo Agostinho e Aristóteles, argumentando que a luz se propagava instantaneamente. No entanto, suas ideias entraram em conflito com os estudos de Al-Haytham.

Outro pensador importante desse período foi Roger Bacon (1214 – 1294), que

questionou as concepções aristotélicas. Bacon afirmava que a luz era uma entidade distinta que se propagava no espaço, não podendo ser considerada como uma substância material. Ele argumentava que a propagação da luz diferia da do som, pois não exigia tempo. No entanto, Bacon também reconhecia que a luz demandava menos tempo do que o som. Além disso, ele enfatizava que a luz não poderia estar presente em diferentes lugares simultaneamente, pois isso seria equivalente a ser onipresente, uma característica atribuída apenas a Deus. Assim como Al-Haytham, Bacon associava a refração ao aspecto temporal da propagação da luz (SILVA, 2002).

Vitello (c. 1230 – 1280/1314), contemporâneo de Bacon, defendia a ideia de que a luz se propagava instantaneamente. Além disso, ele observou que a luz se movia mais rapidamente em meios transparentes e tênues do que em meios mais densos, fornecendo uma explicação para o fenômeno da refração, no qual a luz é “refreada ou difundida” de acordo com as características do meio. Por sua vez, Tomás de Aquino (1225 – 1274) reafirmou a visão aristotélica de que a luz não necessita de tempo para se propagar. Já Blasius de Parma (c. 1350 – 1416) defendia ambas as possibilidades, argumentando que as duas alternativas eram defensáveis. Ele concluiu que, se a propagação da luz fosse temporal, seria verdade que o Sol e as estrelas não seriam vistas em suas posições reais, pois se deslocariam para uma nova posição enquanto a luz alcançasse os olhos do observador (SILVA, 2002).

Observamos que, durante toda a Idade Média, havia ainda uma falta de consenso em relação à natureza da velocidade da luz, os filósofos e pensadores desse período se debruçaram sobre essas questões principalmente através de argumentos lógicos, devido ainda às limitações tecnológicas e à escassez de experimentos práticos. A falta de evidências concretas impossibilitava a confirmação ou refutação das diferentes hipóteses vigentes. Assim, as discussões sobre a velocidade da luz na época eram baseadas principalmente em especulações teóricas, sem resultados experimentais robustos que pudessem apoiar ou contradizer de forma conclusiva as afirmações defendidas por eles. Conforme escreve Silva (2002):

Ao longo da Idade Média nenhum consenso surgiu acerca das duas alternativas para a propagação da luz, o que era impossível devido às condições técnicas da altura; apenas se discutiam as ideias dos autores gregos. [...] A única ideia consensual é que a luz solar parece mover-se instantaneamente de um extremo ao outro do horizonte e que se a luz requer tempo na sua propagação, este é imperceptível (SILVA, 2002, p. 15).

## 2.3 Renascimento

No contexto do fim da Idade Média e o surgimento do Renascimento, um evento de importância fundamental para o desenvolvimento da ciência foi a invenção da imprensa, o

que, de acordo com Ribeiro, Chagas e Pinto (2007), “foi uma descoberta que marcou a história”. Com a disseminação da imprensa, houve uma democratização do conhecimento, possibilitando o compartilhamento de ideias e o acesso a obras literárias, filosóficas e científicas em larga escala, trazendo consigo transformações sociais, políticas e psicológicas significativas (RIBEIRO; CHAGAS; PINTO, 2007). Esse movimento cultural, conhecido como Renascimento, abrangeu diversas áreas, desde a literatura até a pintura, e influenciou o progresso da ótica. Através da livre circulação de conhecimento, os estudiosos puderam explorar novas perspectivas e avançar em seus estudos científicos. Foi no final do Renascimento que ocorreram avanços significativos na física, impulsionados por notáveis sábios, entre os quais se destacam Johannes Kepler (1571 – 1630) e Galileo Galilei (1564 – 1642), cujas contribuições foram fundamentais para a compreensão da natureza da luz e para o desenvolvimento da ciência como um todo (WOORTMANN, 1996).

Até então, conforme descreve Silva (2002) a ótica ainda carecia de uma teoria consistente sobre a luz, o que limitava o progresso da astronomia. Kepler, interessado nessa questão, desenvolveu uma teoria abrangente que abordava a natureza e a propagação da luz, investigando fenômenos que vão desde o funcionamento de câmaras escuras até a utilização de lentes e a formação de imagens em espelhos. Ele concluiu que a luz era uma entidade imaterial que se difundia esfericamente, propagando-se instantaneamente e variando em intensidade de acordo com o inverso do quadrado da distância. Apesar de considerar que a luz se propagava instantaneamente, as descobertas de Kepler proporcionaram avanços significativos nos estudos sobre a ótica e contribuíram para uma compreensão mais aprofundada da luz naquela época.

## 2.4 O experimento de Galileu

Galileo Galilei (1564 – 1642), de acordo com Rosa (2012), foi um renomado cientista do século XVII, realizou descobertas significativas em diversas áreas do conhecimento, destacando-se por sua abordagem inovadora: o método experimental. Em sua busca pelo entendimento da natureza, Galileo empreendeu uma das primeiras tentativas de determinar a velocidade de propagação da luz. Suas contribuições pioneiras no estudo da luz foram fundamentais para o avanço da ótica e abriram caminho para futuras investigações nesse campo.

Conforme descreve, Azevedo e Júnior (2020) e Laporte (2017), uma das primeiras tentativas que se tem registro, de se colocar em teste e tentar medir a velocidade da luz foi feita com Galileu, por volta do ano de 1600. No experimento, ele e um assistente ficaram em uma colina, com uma distância de mais ou menos um quilômetro um do outro. Cada um deles portando uma lanterna que ficava tampada com um cobertor, e assim que Galileu descobrisse a sua lanterna o seu assistente faria a mesma coisa. A ideia do experimento era de medir o tempo de resposta. No instante em que Galileu removesse o cobertor de

sua lanterna até o momento em que ele visse a lanterna de seu assistente que estava no outro lado da colina, a luz teria de fazer uma viagem de ida e também de volta. Como a velocidade é medida pela distância sobre o tempo, Galileu poderia então saber a velocidade da luz, dado o tempo de resposta do experimento. O problema desse experimento, é que a luz é muito rápida e Galileu mal teve tempo de medir alguma coisa. A conclusão do seu experimento foi a de que ou a luz era muito rápida ou era infinita.

Dessa forma, o debate entre a finitude e a infinitude da luz continuou em aberto na física por muito tempo, todavia, as contribuições de Galileu nesse período foram de suma importância para os estudos a respeito da velocidade da luz que viriam mais de um século depois, onde o experimento que Galileu realizara serviria de referência para experimentos mais elaborados no futuro (SILVA, 2002).

## 2.5 Das observações astronômicas ao século XX

No período que se estende desde Galileu até o início do século XVIII, os instrumentos de observação passaram por melhorias significativas. Uma das mudanças foi a substituição da lente objetiva por um espelho côncavo nos telescópios, o qual refletia a imagem para a ocular. Além disso, o uso do micrômetro<sup>1</sup> começou a substituir os círculos graduados para a medição de ângulos. Esses avanços técnicos possibilitaram uma maior precisão na determinação da posição das estrelas e no cálculo antecipado da localização dos planetas.

Conforme descreve Laporte (2017), René Descartes (1596-1650), renomado filósofo do século XVII, teve uma notável contribuição no campo da ótica, assim como em outras áreas do conhecimento. A natureza e as propriedades da luz foram importantes objetos de investigação de Descartes (MARTINS; COTTINGHAM, 1995). Assim como Aristóteles, Descartes também acreditava que a luz se propagava de modo instantâneo e apresentou argumentos baseando-se nos eclipses da Lua para justificar essa velocidade infinita (SABRA, 1981 apud MARTINS; SILVA, 2015, p. 4202-3). Apesar de ser capaz de explicar fenômenos como reflexão e refração, a hipótese da infinitude da velocidade da luz foi criticada por outros filósofos e estudiosos da época. O matemático francês Pierre de Fermat (1607 – 1665), renomado matemático e estudioso desse período, foi também um grande opositor das teorias de Descartes a respeito da natureza da luz. Fermat, partindo de hipóteses matemáticas, demonstrou algumas vezes as fragilidades do modelo cartesiano para a luz. Segundo Laporte (2017):

A diferença entre ambos é de natureza matemática e metodológica: enquanto Fermat presa pelo rigor matemático, Descartes se apoia na

<sup>1</sup> Na prática astronômica, os micrômetros eram usados para medir o tamanho aparente de objetos celestes, como estrelas e planetas, ou para medir ângulos de separação entre diferentes objetos. Essas medições eram importantes para a determinação de posições astronômicas mais precisas, o que contribuiu para o avanço do conhecimento astronômico na época (ROSA, 2012).

experimentação como um caminho para simplificar sua demonstração, e desconsiderando o fato de que as críticas de Fermat eram consistentes do ponto de vista geométrico (LAPORTE, 2017, p. 41-42).

Para Fermat, a velocidade da luz não era infinita, ou seja, a propagação se dava através do tempo. Ele observou que a luz se desloca mais rapidamente no ar do que na água, destacando as diferenças de velocidade de propagação em diferentes meios. Sua análise contribuiu para uma compreensão mais aprofundada sobre o comportamento da luz em meios distintos (SILVA, 2002). Todavia, esse debate sobre a velocidade da luz ser ou não instantânea que perdurava até então, acabaria mudando em 1676, por conta do astrônomo dinamarquês Ole Christensen Rømer <sup>2</sup> (1644 – 1710) e as suas observações dos satélites de Júpiter.

No final do século XVII, Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712), um renomado e jovem astrônomo italiano, começou a ganhar fama em toda a Europa devido às suas realizações. Sua reputação chegou aos ouvidos de Colbert (1619 – 1683) o então ministro do rei da França, que o convidou para trabalhar em Paris. Em 1669, Cassini assumiu o cargo de primeiro diretor do Observatório de Paris. Durante os primeiros anos no Observatório, Cassini conduziu observações detalhadas dos movimentos dos satélites de Júpiter, além de realizar estudos do Sol, planetas, satélites e estrelas. Essas observações permitiram significativos avanços na astronomia e na geodésia (SILVA, 2002). Em colaboração com Jean Picard (1620 – 1682) e Jean Richer (1630 – 1696) seus assistentes, Cassini realizou a medição da distância entre a Terra e o Sol em 1672, estimada em aproximadamente 132 milhões de quilômetros. Para isso, Richer liderou uma expedição à Guiana Francesa, enquanto Cassini e Picard realizavam observações em Paris, utilizando a técnica de triangulação. Com base na posição simultânea de Marte registrada por cada equipe, eles deduziram as distâncias entre Marte, o Sol e a Terra, utilizando as leis de Kepler. Medidas modernas confirmam que a distância média entre a Terra e o Sol é de aproximadamente 149,6 milhões de quilômetros (SILVA, 2002).

Conforme escreve Laporte (2017) e Azevedo e Júnior (2020), Rømer estava fazendo observações astronômicas de Io, uma das várias luas de Júpiter. O tempo de órbita da lua já era bem conhecido, algo em torno de 42 horas e o plano no qual Io orbitava estava aproximadamente alinhado com o da terra. Isso significa que em determinados momentos de sua órbita, Io seria eclipsada por Júpiter, ou seja, o satélite natural do planeta se ocultaria por trás do gigante gasoso. Como a órbita de Io sempre leva o mesmo tempo, então é lógico afirmar que dois eclipses sempre aconteceriam com o mesmo intervalo de tempo, mas isso não foi o que Rømer constatou durante suas observações. Ele observou que, entre dois eclipses, sempre havia uma variação de alguns minutos em relação ao esperado.

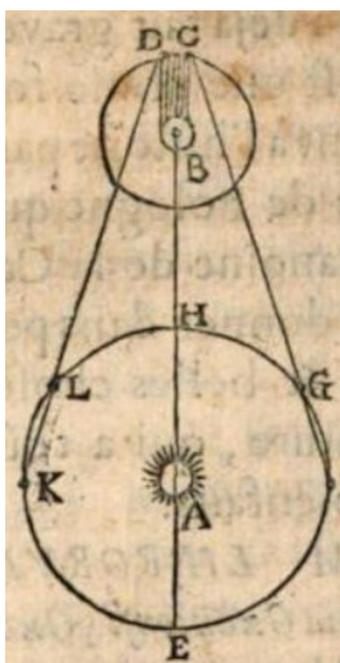
<sup>2</sup> Em algumas referências utilizadas neste trabalho, há diferenças no nome de Rømer devido as traduções para o português ou inglês, sendo possível encontrar Olaf, Ole e Olaus com o sobrenome Rømer, Romer ou Roemer.

A única explicação possível para isso, era que, no tempo de Io voltar a estar em posição de outro eclipse, a terra havia se movido em sua órbita se afastando ou se aproximando de Júpiter, ou seja, agora a luz precisaria percorrer essa distância adicional antes que se observasse um novo eclipse. Rømer concluiu que isso representava um indício de que a luz não possuía uma velocidade infinita, visto que, ela levava mais tempo para percorrer a distância entre um eclipse e outro. Assim, acabou apresentando um trabalho com sua descoberta que a luz viajava com velocidade finita no espaço e não instantaneamente, como defendido por muitos até então, incluindo nomes como Aristóteles e Descartes. A prova havia finalmente sido obtida a partir das observações do satélite de Júpiter (SILVA, 2002).

A ilustração de Rømer, mostrada na Figura 1, foi apresentada na publicação do “Journal des Sçavans”, em 1676, e pode ser usada aqui para ajudar na compreensão de suas observações. Considere que A represente o sol, B, Júpiter, C, o primeiro satélite que entra na sombra de Júpiter (Io), para sair novamente em D, e E, G, H, L e K representam a Terra em diferentes pontos de sua órbita, a diferentes distâncias de Júpiter. Note que a letra indicando o ponto que seria o F não aparece na ilustração.

Agora suponha que quando a Terra está em L na segunda quadratura de Júpiter, o satélite Io é visto logo após a sua saída da sombra em D. Após uma nova revolução completa deste satélite em torno de Júpiter, a Terra está passando por K e Io é visto novamente voltando para D. Fica então claro que, se a luz precisa de tempo para percorrer a distância LK, o satélite parecerá retornar a D mais tarde do que se a Terra tivesse permanecido em K, de modo que a revolução desse satélite, determinada assim por suas

Figura 1 – Ilustração original do trabalho de Rømer no “Journal des Sçavans”, 1676.



Fonte: Cusson (1676, p. 234).

saídas da sombra, será retardada proporcionalmente ao tempo que a luz leva para viajar de L a K. O inverso pode ser observado quando a Terra passa pela outra quadratura representada por FG, quando se aproxima de Júpiter e os tempos das revoluções em torno de Júpiter parecerão diminuir entre F e G (MAGIE, 1963).

Apesar de Rømer ser veementemente atacado no início por suas descobertas, a comunidade científica começou a aceitar o fato de que a luz possuía uma velocidade finita e não infinita como se acreditava até então. De acordo com Laporte (2017):

Embora a explicação para os atrasos proposta por Rømer nos pareça hoje óbvia, ela não foi imediatamente aceita. Como vimos, as ideias de Descartes sobre a luz eram bem influentes nesta época e ainda não existia uma forma confiável de se medir a velocidade da luz. Neste contexto, Cassini foi a principal personalidade a se opor às ideias de Rømer, apesar dele mesmo ter notado irregularidades nos eclipses de Io justificando essas de outra forma (LAPORTE, 2017, p. 48).

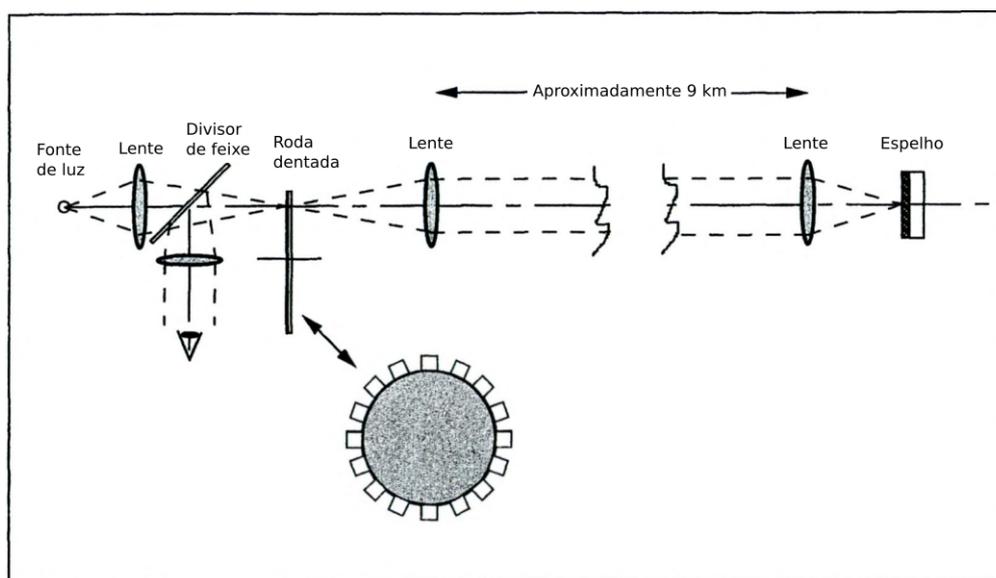
Embora Rømer não tenha publicado um valor exato para a velocidade da luz, ele observou que a luz levava cerca de onze minutos para percorrer essa distância. Vale salientar que, naquela época, a descoberta de que a luz se propagava no tempo era mais relevante do que conhecer o valor exato de sua velocidade, considerando-se que a distância entre a Terra e o Sol já era bem conhecida. Apesar de inicialmente se opor a descoberta de Rømer, em 1693, Cassini incorporou em suas tabelas astronômicas uma função empírica que levava em consideração que a luz demorava este tempo para percorrer a distância entre o Sol e a Terra (SILVA, 2002). Conforme escreve Laporte (2017), as ideias de Rømer sobre a finitude da velocidade da luz, apesar de não serem bem recebidas pela comunidade científica e em especial por Cassini, encontraram grande aceitação em Christian Huygens (1629 – 1695). Em seu livro “Tratado sobre a Luz”, Huygens incorporou as observações de Rømer, calculando a velocidade da luz com base no tempo mencionado por Rømer. Em 1678, Huygens também explorou as implicações da velocidade finita da luz nos eclipses da Lua, atribuindo um tempo de dez segundos para a luz percorrer a distância entre a Terra e a Lua. Com base na descoberta de Rømer, Huygens mencionou que a velocidade da luz é cerca de 600.000 vezes maior do que a velocidade do som. Considerando a velocidade do som como 351 m/s, Huygens estimou a velocidade da luz em 210.000 km/s (SILVA, 2002).

Conforme apontam Laporte (2017) e Silva (2002), outros nomes importantes dessa época que tomaram conhecimento da descoberta de Rømer sobre a finitude da velocidade da luz e que também divergiam quanto as conclusões levantadas por ele: John Flamsteed (1646 – 1719), primeiro astrônomo real da Inglaterra e fundador do observatório de Greenwich, compartilhou-a com Isaac Newton (1643 – 1727) que, por sua vez, atribuía um caráter mecanicista para a luz e a considerava com uma velocidade muito elevada porém muito distante da encontrada por Rømer; Robert Hooke (1635 – 1703), diretor de experimentos da Royal Society de 1662 e o astrônomo inglês Edmond Halley (1656 – 1742).

Enquanto Flamsteed e Newton aceitaram a ideia, Robert Hooke se opôs, sugerindo que a luz se propagava instantaneamente. Por outro lado, Edmond Halley apoiou a hipótese de Rømer, realizando observações e encontrando desigualdades que eram compatíveis com a propagação finita da luz. Halley também criticou a relutância de Cassini em aceitar as ideias de Rømer, apesar das divergências presentes em suas próprias tabelas.

Essa questão permaneceria em aberto por mais de um século, quando foi possível calcular a velocidade da luz com mais precisão, no ano de 1849, com o experimento do físico francês Armand Fizeau (1819-1896). Uma ilustração simplificada com os elementos básicos do seu arranjo experimental é mostrada na Figura 2. Al-Azzawi (2018) descreve que a ideia do experimento foi de medir o tempo total que a luz leva para viajar de uma fonte até um espelho distante e retornar. Para medir esse tempo, Fizeau usou uma roda dentada rotativa, de modo que a luz que passaria entre dois dentes, viajaria para um espelho a uma distância considerável, e então seria refletida de volta. Se a velocidade de rotação da roda dentada fosse ajustada adequadamente, a luz poderia passar pelo próximo intervalo entre dentes da roda.

Figura 2 – Ilustração do arranjo experimental utilizado por Fizeau, 1849.

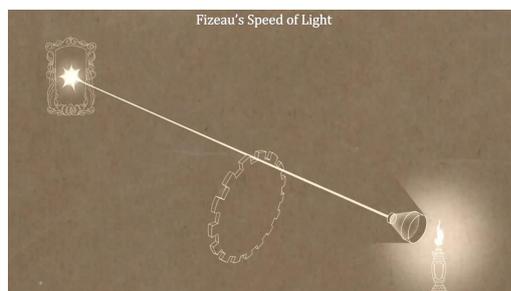


Fonte: Adaptada de Walker (1998, p. 14).

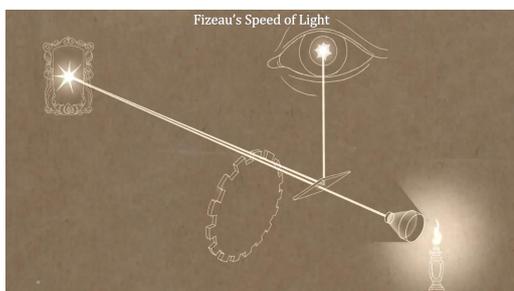
As imagens mostradas na Figura 3 explicam com bastante clareza como funcionava o experimento de Fizeau. A Figura 3(a) mostra como o feixe de luz emitido por uma fonte passava entre os dentes de uma roda dentada e era refletido de volta por um espelho posicionado a cerca de 9km de distância, sendo desviado por um espelho semi transparente para um ponto de observação, Figura 3(b). A roda dentada podia ser ajustada para girar em diferentes velocidades. No entanto, quando as engrenagens giravam a uma determinada velocidade, o feixe de luz passava entre as aberturas da roda dentada mas era bloqueado após a sua reflexão, conforme mostra a Figura 3(c). Fizeau então conseguiu encontrar

uma velocidade de rotação suficiente de tal forma que, quando o feixe de luz passava pela abertura de um dos dentes, era refletido pelo espelho e retornava, a engrenagem havia se movido o suficiente para que o feixe de luz refletido passasse exatamente na próxima abertura. Dessa forma, conhecendo-se o número de dentes da roda dentada e a velocidade de rotação do sistema, Fizeau poderia então calcular o tempo que havia transcorrido entre um dente da engrenagem e outro. Com esses dados em mãos, o físico pôde usar a relação entre a distância dos feixes pelo tempo decorrido em um dente e outro, fornecendo assim um valor bastante preciso para a velocidade da luz, algo em torno de  $3,13 \times 10^8 \text{ m/s}$ , obtendo uma margem de erro de apenas 4% em relação ao valor atualmente aceito (BUTLER, 2019). Já em 1862, o físico e astrônomo francês Jean Foucault (1819-1868), aperfeiçoou o experimento de Fizeau substituindo a roda dentada por um espelho giratório. Ele conseguiu obter um valor de  $2,977 \times 10^8 \text{ m/s}$  para a velocidade da luz no ar (AL-AZZAWI, 2018).

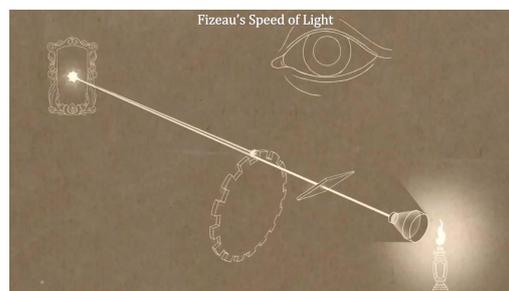
Figura 3 – Explicação do experimento de Fizeau.



(a) A Luz emitida pela fonte atinge o espelho a cerca de 9km de distância.



(b) A reflexão da luz percorre a mesma distância de volta e pode ser observada por meio de um espelho semitransparente.



(c) Dependendo da velocidade de rotação, o reflexo é interrompido ou pode passar pelo próximo entalhe da roda.

Fonte: Capturas de tela de Butler (2019).

## 2.6 A teoria de Maxwell

Mais algumas décadas depois, foi possível calcular com precisão a velocidade da luz. Porém, dessa vez, não através de experimentos, mas sim a partir da teoria eletromagnética de Maxwell, ou “As quatro equações de Maxwell”, uma revolução na física daquela época. De forma resumida, essa teoria descreve o comportamento de campos eletromagnéticos em, praticamente, qualquer situação. Essas quatro equações fornecem uma equação de onda eletromagnética que se propaga com uma velocidade conhecida, que pode ser a aplicada à luz. A velocidade de uma onda eletromagnética, propagando-se através do vácuo, foi determinada teoricamente por Maxwell como sendo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (2.1)$$

Nessa equação,  $\varepsilon_0$  representa a permissividade do vácuo e possui um valor de aproximadamente  $8,85 \times 10^{-12} \text{ (C}^2/\text{Nm}^2\text{)}$ , enquanto  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e tem um valor de cerca de  $4\pi \times 10^{-7} \text{ (Tm/A)}$ . Dessa forma, a equação (2.1) resulta em (AL-AZZAWI, 2018, p. 09):

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2) \times (4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A})}} = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

O valor experimental e teórico da velocidade da luz concordam entre si. Algumas décadas após a publicação das teorias de Maxwell, conforme aponta Al-Azzawi (2018), o físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) realizou experimentos que comprovaram a existência das ondas eletromagnéticas.

Atualmente, a velocidade da luz é amplamente utilizada como uma constante fundamental da natureza. De fato, a velocidade da luz no vácuo é tão importante que foi adotada como a referência para definir a unidade de comprimento conhecida como metro. Segundo Al-Azzawi (2018), o valor mais aceito da velocidade da luz no vácuo com os instrumentos de medições atuais, é dada como sendo:  $299.796.458 \text{ m/s}$ . Esse valor é extremamente preciso e serve como base para diversas aplicações científicas e tecnológicas. Portanto, o estudo das ondas eletromagnéticas, impulsionado pelas contribuições de Maxwell e Hertz, bem como o de tantos outros que vieram antes e depois deles, desempenham um papel fundamental em nossa compreensão da luz, da comunicação sem fio e de uma ampla gama de fenômenos físicos relacionados (AL-AZZAWI, 2018).

## 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 3.1 O papel do computador na educação

Um desafio que certamente todo professor do ensino básico à universidade deve enfrentar no decorrer de suas aulas, é o de despertar o interesse dos alunos quanto ao conteúdo que está ministrando. Isso mostra que o modo como a educação no Brasil é realizada ainda tem muito o que progredir. Em um momento histórico, definido por Ditter (2006), como sendo a “Era do Conhecimento” ou a “Sociedade do Conhecimento”, as novas tecnologias assumem cada vez mais espaços no contexto educacional, devido ao seu crescente e irrefreável desenvolvimento no mundo como um todo.

Vieira (2021) destaca que as tecnologias digitais têm desencadeado transformações sociais, culturais, políticas e econômicas significativas na sociedade contemporânea. Assim, cada vez mais essas tecnologias começam a fazer parte de nossas vidas, transformando o modo com as pessoas se comunicam. A BNCC, referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas no Brasil, afirma que essa transformação “impacta diretamente no funcionamento da sociedade e, portanto, no mundo do trabalho” (BRASIL, 2018). Segundo Ditter (2006), é necessário que voltemos nossos olhares ao ambiente educacional no sentido de metodologias que possam trazer para os alunos e professores, novas formas de se enxergar a sala de aula, mediados por essas novas tecnologias. Isso deve ocorrer de forma articulada e planejada para que essas estratégias possam trazer frutos e que a utilização do recurso não ocorra somente como cumprimento de uma exigência de currículo ou de mercado.

As relações entre educador e educando, assim como as relações entre estes e o objeto de conhecimento, também devem ser encaradas de outras formas, para que as estratégias didáticas possam acompanhar as constantes inovações e não sejam as mesmas dos séculos passados. Castellar (2016) reforça essa ideia dizendo:

As crianças de hoje estão cercadas por um ambiente tecnológico, que lhes dá acesso a informações por meio de um simples toque. No entanto, o que se observa é que as aulas, em geral, são praticamente iguais às do passado, baseadas nas mesmas estratégias didáticas, sem levar em conta as mudanças no desenvolvimento cultural dos alunos (CASTELLAR, 2016, p. 06).

Essas relações não podem mais se tratar apenas como relações de caráter narrativo e/ou dissertativo, o que é evidenciado por Freire (2021), que num primeiro momento descreve essa relação como sendo “*educação dissertadora*”, e posteriormente a define como “*concepção bancária da educação*”. Nessa concepção, o educador passa a ter uma postura de

narrador e os alunos a posição passiva, onde lhes são “depositados” o conhecimento narrado pelo educador em questão, sem que a haja espaço para o aprendizado mútuo, sem que a dialogicidade entre esses agentes possa engatilhar caminhos para o entendimento crítico não somente do mundo a nossa volta, mas também das mais variadas informações e dados que essa “Era do Conhecimento”, descrita por Ditter (2006), nos fornece a todo instante através da internet. Segundo a autora, é necessário repensar esse modelo de educação, pois novas relações sociais têm sido estabelecidas entre os diversos atores desse contexto, dentre eles: educadores, educandos, conhecimentos, tecnologias, sociedade, etc. Além disso, há uma nova compreensão sobre o conhecimento que requer posturas pedagógicas distintas. Na escola, por exemplo, as possibilidades de acesso à informação exigem questionamentos acerca das práticas pedagógicas que se baseiam em uma comunicação oralista e unidirecional, na qual, muitas das vezes, o professor e o livro didático são os únicos responsáveis pela transmissão do conhecimento para o aluno. Segundo Castellar (2016):

Em meio a muitas mudanças nos sistemas educacionais, na difusão de novos conhecimentos e nas inovações tecnológicas e científicas, assumir perspectivas que possibilitam uma maior interação ensino-aprendizagem é de fundamental importância, pois significa assumir, de fato, a necessidade de alterações nos aportes metodológicos (CASTELLAR, 2016, p. 05).

Assim, é necessário que possamos repensar essas metodologias ditas como sendo “tradicionais” e comecemos a olhar para metodologias que busquem uma maior participação do aluno em sala de aula, visto que, dado um momento em que as tecnologias nos impõem novos modos de viver, precisamos que estas inovações cheguem ao âmbito escolar, e assim, prepararmos melhor nossos alunos para esse novo modo de viver imposto por tais mudanças.

Nas últimas décadas, porém, muitas outras metodologias foram desenvolvidas com o intuito de mudar esses paradigmas que tínhamos da educação, entre elas, as denominadas “Metodologias ativas de aprendizagem”, as quais têm ganhado destaque no âmbito da educação como uma abordagem pedagógica inovadora que busca promover uma participação mais ativa e engajada dos alunos no processo de aprendizagem. Barbosa e Moura (2013) afirma que as metodologias ativas buscam transformar o papel tradicional do aluno como receptor passivo de conhecimento em um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento. Essas abordagens pedagógicas valorizam a participação, a interação, a colaboração e a aplicação prática do conhecimento. Diferentemente do modelo tradicional de ensino, em que o professor assume o papel central na transmissão do conhecimento, as metodologias ativas colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem. O professor assume um papel de facilitador, orientando e mediando as atividades, estimulando a participação e incentivando a reflexão crítica dos alunos. Fazendo uma ligação entre metodologias ativas de ensino com o uso do computador como uma ferramenta de aprendizagem. Nesse sentido, Valente (1993) destaca que:

É necessário repensar a questão da dimensão do espaço e do tempo da escola. A sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professor e alunos podem realizar um trabalho diversificado em relação ao conhecimento. O papel do professor deixa de ser o de “entregador” de informação, para ser o de facilitador do processo de aprendizagem. O aluno deixa de ser passivo, de ser o receptáculo das informações, para ser ativo aprendiz, construtor do seu conhecimento. Portanto, a ênfase da educação deixa de ser a memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, sendo o professor, o facilitador desse processo de construção (VALENTE, 1993, p. 08).

Há várias metodologias ativas que podem ser aplicadas na educação, tais como: estudos de caso, aprendizagem baseada em projetos, sala de aula invertida, gamificação e trabalho em equipe. Cada uma dessas metodologias possui características específicas, mas todas compartilham o objetivo de tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico, envolvente e significativo para os alunos (BARBOSA; MOURA, 2013). Dentre essas várias metodologias de ensino, o uso do computador como uma ferramenta de aprendizagem, pode trazer mudanças significativas, tanto no que diz respeito a estrutura educacional, no que se refere a sala de aula, ao papel do professor e do aluno, bem como na maneira como é conduzido o processo de ensino. Segundo Valente (2002):

A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento. Embora tudo indique que a escola deverá sofrer ajustes para se adequar aos novos tempos, o quanto ela deverá mudar é polêmico (VALENTE, 2002, p. 29).

Nessa perspectiva, o uso do computador como uma ferramenta de aprendizagem, pode garantir mudanças não somente na sala de aula, mas na escola como um todo. Através do uso desse recurso, é possível dispor de um novo ambiente que possa fornecer condições propícias para que os alunos possam construir seu conhecimento, colocando-os como agentes ativos nesse processo. Valente (1993) defende ainda que as novas abordagens de utilização do computador na educação indicam uma nova perspectiva: em vez de ser considerado apenas como uma “máquina de ensinar”, o computador passa a ser reconhecido como uma nova forma de mídia educacional. Ele se torna uma ferramenta complementar e de aperfeiçoamento, com potencial para promover mudanças na qualidade do ensino.

Com o avanço tecnológico, especialmente na década de 1980, o computador pessoal se tornou mais acessível e fácil de usar, levando a uma expansão significativa do seu uso na educação. Inicialmente, o foco estava no ensino de habilidades básicas de programação, que eram consideradas importantes para a formação dos estudantes e para o desenvolvimento do

pensamento lógico. Nessa metodologia, o computador passa a ser um meio pelo qual o aluno obtém informações e através de linguagens de programação, como o Logo<sup>1</sup> por exemplo, o aluno “ensina” o computador que por sua vez o auxilia na produção de atividades. Dessa forma, o aluno começa a construir o conhecimento pretendido pelo educador, que passa a assumir uma postura de “facilitador” ou “orientador” desse processo e o computador passa a ser uma ferramenta que propicia a construção desse conhecimento, tornando-se uma ferramenta cognitiva (VALENTE, 1993).

Outro uso para o computador na educação, segundo Valente (1993), é a realização de simulações. O autor define simulação como sendo a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real, permitindo que os alunos desenvolvam hipóteses, as testem, analisem os resultados e refinem seus conceitos. Nessa mesma linha, Kalinke et al. (2015) destacam a simulação como novas formas de transmitir conhecimento que o computador proporciona. A simulação traz consigo uma linguagem inovadora, baseada na experimentação, criando um ambiente dinâmico e abrindo possibilidades para novas formas de comunicação. Ao longo dos anos, com o avanço e a queda nos preços dos computadores, aumento da capacidade de processamento, recursos de visualização aprimorados e a expansão da internet, o uso de simuladores em diversas áreas das ciências e engenharias tem sido uma alternativa bastante utilizada, principalmente por conta do baixo custo quando comparado com experimentos. Na educação, também pode desempenhar um importante papel para auxiliar o ensino e a aprendizagem.

Nesse contexto de inovações tecnológicas e constantes transformações no mundo provindas dos avanços nas tecnologias digitais, aprender a programar é de suma importância. De acordo com Valente (1993), a programação é uma habilidade que proporciona diversos benefícios, pois estimula o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de solucionar problemas de forma estruturada. Ao aprender a programar, os indivíduos adquirem habilidades essenciais para analisar e decompor problemas complexos em partes menores, identificar padrões e criar algoritmos eficientes. Além disso, a programação também fomenta a criatividade e a inovação, permitindo que as pessoas desenvolvam soluções originais e expressem sua criatividade por meio da criação de aplicativos, jogos e outros recursos digitais. Conhecer uma linguagem de programação proporciona uma compreensão mais aprofundada da tecnologia, capacitando os indivíduos a serem usuários mais informados e adaptáveis em um mundo cada vez mais dependente de recursos digitais. Portanto, aprender a programar é fundamental para enfrentar os desafios e aproveitar as oportunidades na “Sociedade do Conhecimento” em que vivemos.

A sigla STEM é um acrônimo em inglês usado para designar as quatro áreas do conhecimento: Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (em inglês Science,

---

<sup>1</sup> O Logo é uma linguagem de programação desenvolvida pelo professor Seymour Papert no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) nos Estados Unidos no final da década de 60, e que permite que nos comuniquemos com o computador através de instruções dada ao mesmo (VALENTE, 1993).

Technology, Engineering, and Mathematics). De acordo com Pugliese (2017), se trata de uma abordagem educacional que visa integrar essas áreas no sentido de promover uma educação interdisciplinar e prática no sentido de preparar os alunos para os desafios do mundo atual, onde essas áreas têm um papel fundamental no avanço da sociedade e na busca por soluções inovadoras para problemas reais. Através de projetos e desafios, os estudantes são estimulados a desenvolver habilidades como criatividade, raciocínio lógico, trabalho em equipe e adaptação às mudanças tecnológicas. A abordagem STEM e as metodologias ativas de ensino estão fortemente relacionadas, pois visam proporcionar uma educação mais engajadora, prática e contextualizada. A união desses dois conceitos pode levar a experiências de aprendizagem significativas e estimulantes para os alunos. Com a abordagem da aprendizagem baseada em resolução de problemas, por exemplo, os alunos são desafiados a buscar soluções efetivas utilizando conhecimentos de STEM. Eles podem experimentar diferentes abordagens, testar hipóteses e aprender com os erros, desenvolvendo habilidades que são essenciais no mundo real.

### 3.2 Equações do Movimento Unidimensional

A cinemática, de acordo com Serway e Jr. (2014), é uma parte essencial da mecânica que nos permite estudar o movimento sem considerar suas causas. Para descrever o movimento, utilizamos os conceitos de espaço e tempo. Nesse contexto, focamos nosso estudo no movimento unidimensional, que ocorre ao longo de uma linha reta. O movimento, segundo os autores, é caracterizado por uma mudança contínua na posição de um corpo. Por exemplo, ao dirigir de casa para um destino, nossa posição em relação à superfície da Terra está constantemente se alterando. Embora o movimento de um corpo no espaço possa envolver rotação e vibração, é comum simplificar o problema temporariamente, ignorando esses movimentos internos e focando apenas na translação, que é esse movimento em linha reta ao longo do tempo. Essa simplificação nos permite tratar o corpo como uma partícula em muitas situações.

Ao considerar um corpo como uma partícula, estamos interessados apenas em seu movimento através do espaço, desconsiderando a rotação e outros movimentos internos mais complexos. Esse modelo de partícula é uma abordagem simplificada que facilita a análise e compreensão de muitos problemas de movimento. Dessa forma, a cinemática nos proporciona uma base sólida para descrever e estudar o movimento unidimensional, permitindo-nos analisar o deslocamento, a velocidade e a aceleração de uma partícula em relação ao tempo. Esses conceitos e técnicas são fundamentais para a compreensão de fenômenos físicos e têm aplicações em diversas áreas da ciência e engenharia (SERWAY; JR., 2014).

### 3.2.1 Velocidade Média

Serway e Jr. (2014) descrevem que, para uma partícula em movimento, a velocidade escalar média é definida matematicamente como a razão entre a distância percorrida ( $d$ ) e o intervalo de tempo decorrido ( $\Delta t$ ):

$$v_{\text{média}} \equiv \frac{d}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

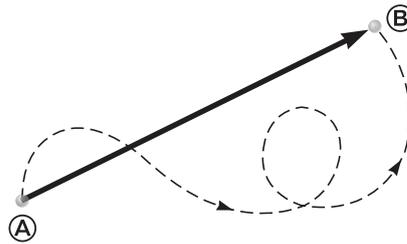
A velocidade escalar média nos fornece uma média do quão rápido uma partícula se move ao longo de uma determinada distância, considerando o intervalo de tempo necessário para percorrê-la. Entretanto, não nos diz mais nada, como por exemplo a direção ou o sentido no qual o corpo está se deslocando.

A velocidade média, por outro lado, leva em consideração também a direção e o sentido do movimento, ou seja, ela é uma grandeza vetorial (SERWAY; JR., 2014). Outros exemplos de grandezas vetoriais são aceleração e força. Todas essas grandezas tem em comum uma orientação, ou seja, “apontam” para alguma direção (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008). O deslocamento de uma partícula, definido como a sua mudança de posição ao longo do tempo, é um outro exemplo de uma grandeza vetorial (SERWAY; JR., 2014). É importante destacar que deslocamento e trajetória podem ser coisas bem diferentes (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008).

Para entender esses conceitos, considere que uma certa partícula se move de um ponto A para um ponto B em uma trajetória reta, conforme mostrado na Figura 4. Podemos representar esse deslocamento através de uma seta que vai de A para B. O comprimento da seta representa o módulo do deslocamento, ou seja, a distância de um ponto inicial (A) para um ponto final (B) e que é dado por um número que representa, por exemplo, a quantidade de metros que separa o ponto A do ponto B. Esse número se trata de uma grandeza escalar e a sua orientação (ou sentido), indica a direção do deslocamento, ou seja, inicia em A e vai para B. Mesmo que a partícula siga uma trajetória diferente de A para B, como mostrado pela linha tracejada, o deslocamento ainda será representado por essa seta que vai de A para B. Assim, o deslocamento vetorial ao longo de qualquer caminho indireto (linha tracejada) é considerado equivalente ao deslocamento representado pelo caminho direto (seta de A para B). O módulo do deslocamento é a menor distância entre os pontos finais. Portanto, se conhecermos as coordenadas iniciais e finais da partícula, teremos conhecimento completo do seu deslocamento (SERWAY; JR., 2014).

Segundo Halliday, Resnick e Walker (2008) o vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento e não o movimento em si. Tomando a Figura 4 novamente como exemplo, os dois caminhos percorridos pela partícula que unem os pontos representam o mesmo vetor deslocamento. Observando a mesma figura, podemos notar que a distância percorrida por uma partícula, uma grandeza escalar representada pela linha tracejada,

Figura 4 – Deslocamento e trajetória de uma partícula entre dois pontos.



Fonte: Serway e Jr. (2014, p. 14).

pode diferir bastante do seu deslocamento.

Para calcular a velocidade média de uma partícula, devemos considerar o seu deslocamento vetorial em um dado intervalo de tempo. Para uma partícula em movimento unidimensional durante um intervalo de tempo  $\Delta t = t_f - t_i$ , seu deslocamento pode ser descrito como  $\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\hat{i}$ . Segundo sugere Serway e Jr. (2014), em um movimento unidimensional pode-se dispensar a notação vetorial. Assim, a velocidade vetorial média, dada pela razão entre a variação do deslocamento ( $\Delta x$ ) e a variação do tempo ( $\Delta t$ ), pode ser dada por:

$$V_{x,\text{méd}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}. \quad (3.2)$$

A velocidade vetorial média é independente do caminho percorrido e é diretamente proporcional ao deslocamento  $\Delta x$  da partícula, determinado apenas pelas coordenadas iniciais e finais (SERWAY; JR., 2014). As unidades mais comuns para velocidade são km/h e m/s, esta última adotada pelo S.I., Sistema Internacional de Unidades.

Observe que, a velocidade vetorial média em uma dimensão pode ter um valor positivo ou negativo, dependendo do sinal do deslocamento. Se a coordenada  $x$  da partícula aumenta durante o intervalo de tempo (por exemplo,  $x_f > x_i$ ), o deslocamento  $\Delta x$  é positivo e a velocidade vetorial média  $V_{x,\text{méd}}$  é positiva, indicando uma direção positiva ao longo do eixo  $x$ . No entanto, se a coordenada diminui ao longo do tempo ( $x_f < x_i$ ), o deslocamento  $\Delta x$  é negativo, resultando em uma velocidade vetorial média  $V_{x,\text{méd}}$  negativa, indicando uma direção negativa ao longo do eixo  $x$  (SERWAY; JR., 2014).

### 3.2.2 Velocidade Instantânea

Nussenzveig (2013) define Velocidade Instantânea como sendo a velocidade de um objeto em um determinado instante de tempo. Essa velocidade pode ser calculada como o limite da velocidade média em um intervalo de tempo muito pequeno, de modo que  $\Delta t$  se aproxima cada vez mais de zero. Em outras palavras, é a taxa de variação da posição em relação ao tempo em um ponto específico. A velocidade instantânea pode variar ao longo

do tempo, refletindo as mudanças na velocidade do objeto em diferentes instantes, sendo dada por:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Esse limite é também chamado de derivada da posição em relação ao tempo  $dx/dt$ , logo a Equação (3.3) pode ser expressa como (SERWAY; JR., 2014):

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

Nesta equação,  $dx$  e  $dt$  são variações infinitesimais de  $x$  e  $t$ , respectivamente.

### 3.2.3 *Partículas sob velocidades constantes*

Segundo Serway e Jr. (2014), para uma partícula sob velocidade constante, sua velocidade instantânea em qualquer instante durante um intervalo de tempo qualquer é igual à velocidade média durante esse mesmo intervalo, ou seja,  $v_x = v_{x,\text{méd}}$ . Assim, podemos utilizar a Equação (3.2) para obter um modelo que podemos utilizar nessas situações:

$$v_x = v_{x,\text{méd}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas, pode-se chegar a:

$$x_f = x_i + v_x \Delta t. \quad (3.5)$$

Essa equação nos fornece a posição final da partícula ( $x_f$ ) a partir da sua posição inicial ( $x_i$ ) e da sua velocidade  $v_x$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

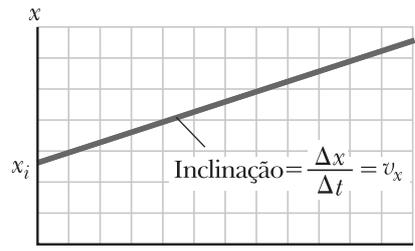
Em casos que envolvem o movimento unidimensional de corpos que podem ser tratados como partículas movendo-se a uma velocidade constante, podemos recorrer à Equação (3.5) para encontrar a solução desejada.

Uma representação gráfica do movimento de uma partícula a uma velocidade constante pode ser vista na Figura 5. Esse gráfico mostra como a posição muda no decorrer do tempo, a inclinação da linha que representa o movimento é constante e igual à velocidade da partícula.

## 3.3 Solução numérica de EDOs via método de Euler

A Equação (3.4) é, na verdade, uma equação diferencial ordinária (EDO) quando escrita da forma:

Figura 5 – Gráfico posição-tempo para uma partícula sob velocidade constante.



Fonte: Serway e Jr. (2014, p. 46).

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (3.6)$$

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma ou mais funções desconhecidas com suas derivadas e sua solução é uma função que satisfaça a equação diferencial. Geralmente, as equações diferenciais descrevem como as grandezas estão mudando em relação a outras grandezas, sendo muito usadas em diversas áreas da ciência, engenharia e matemática aplicada.

Uma alternativa bastante utilizada atualmente para a solução de equações diferenciais são os métodos numéricos, principalmente com a auxílio dos computadores. Métodos numéricos normalmente recaem na realização de cálculos simples mas repetitivos, podendo ser convertidos em algoritmos e programas computacionais.

Gilat e Subramaniam (2008) definem o método de Euler como um método numérico que pode ser usado para obter soluções aproximadas de um Problema de Valor Inicial (PVI), isto é, uma EDO acompanhada de uma determinada condição inicial. Suponha o seguinte PVI:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.7)$$

onde  $f(t, x)$  é uma função conhecida e os valores na condição inicial também são valores conhecidos.

A ideia básica do método de Euler é discretizar a equação diferencial, ou seja, aproximar a solução em pontos discretos do domínio. O método começa com a especificação de uma condição inicial, que é o valor da função desconhecida no ponto inicial do domínio. Em seguida, utilizando-se da solução dada no primeiro ponto pela condição inicial, determina-se a solução para o segundo ponto e assim sucessivamente (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). Numa pequena distância de  $t_i$  a  $t_{i+1}$ , dada por  $\Delta t$ , na vizinhança do ponto  $(t_i, x_i)$ , a função  $x(t)$  tem uma inclinação constante que coincide com a inclinação de  $(t_i, x_i)$ . Partindo desse princípio, determinamos o próximo ponto da solução numérica usando as equações:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad (3.8)$$

e,

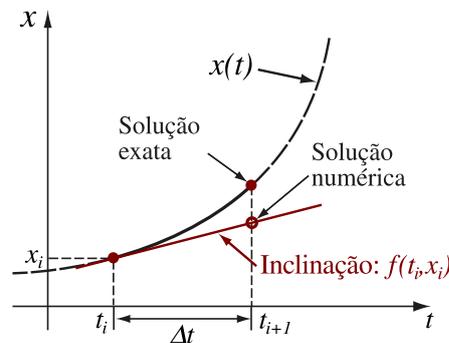
$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)\Delta t, \quad (3.9)$$

onde,  $x_{i+1}$  é a estimativa da solução no próximo ponto do domínio,  $x_i$  é o valor da solução no ponto atual do domínio,  $t_i$  é o valor do ponto atual do domínio,  $f(t_i, x_i)$  é, conforme descreve Chapra e Canale (2016), a equação diferencial calculada em  $t_i$  e  $x_i$  que fornece a taxa de variação da solução em relação a  $t$ , e por fim,  $\Delta t$  é o passo de discretização, que é o tamanho do intervalo entre os pontos do domínio ( $t_i, t_{i+1}$ ) (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). Comparando as Equações (3.5) e (3.9), observamos que são equivalentes, desde que consideremos que  $v_x$  na primeira seja a função  $f(t_i, x_i)$  presente na última, tornando-se:

$$x_{i+1} = x_i + v_x \Delta t. \quad (3.10)$$

Para melhorar a compreensão do método de Euler, Gilat e Subramaniam (2008) trazem uma ilustração esquemática do mesmo, reproduzida de modo adaptado na Figura 6. Segundo os autores, o passo de integração nessa ilustração foi exagerado e a diferença (erro) entre as soluções numérica e exata em  $x_i$  foi ignorada. É fácil perceber que o erro neste método depende do valor de  $\Delta t$ ; quanto menor este valor, menor será o erro.

Figura 6 – Método de Euler mostrado graficamente.



Fonte: Adaptada de Gilat e Subramaniam (2008, p. 332).

É importante salientar que, o método de Euler é fácil de implementar e computacionalmente eficiente, mas pode não ser tão preciso em algumas situações, especialmente quando a função  $f(t, x)$  possui derivadas de ordem superior ou quando o passo de discretização,  $\Delta t$ , é grande. Existem algumas variações do método de Euler<sup>2</sup> que são mais precisas, porém são de implementação mais complexa.

<sup>2</sup> Exemplos contendo variações do método de Euler, bem como algumas formas de deduzí-lo, podem ser encontradas em Gilat e Subramaniam (2008).

### 3.3.1 Erros

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), quando usamos métodos numéricos para calcular a solução de EDOs de primeira ordem alguns tipos de erros podem acontecer.

#### 3.3.1.1 Erros de arredondamento e erros de truncamento

Os erros de arredondamento surgem dos procedimentos utilizados pelos computadores na hora da realização dos cálculos (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). Chapra e Canale (2016) acrescentam que esse tipo erro decorre da limitação que os computadores têm em representar os algarismos significativos (aqueles responsáveis para dar exatidão a um número) no momento em que estes realizam seus cálculos matemáticos. Isso está relacionado com a forma com que os computadores representam no sistema binário<sup>3</sup> números que possuem várias casas decimais. Assim, não é possível representar com total exatidão os números reais. O meio que o computador encontra para representar esses números é pelo *arredondamento*. Visando melhor entender como o computador realiza o arredondamento, tomemos uma descrição dada por Gilat e Subramaniam (2008):

Como uma simples ilustração, considere o número  $2/3$  (por simplicidade, é usado o formato decimal). Na forma decimal com quatro algarismos significativos,  $2/3$  pode ser escrito como 0,6666 ou 0,6667. No primeiro caso, o número verdadeiro foi cortado, enquanto no último o número verdadeiro foi arredondado. De qualquer maneira, o corte ou o arredondamento de números reais leva a erros nos cálculos numéricos, especialmente quando muitas operações são realizadas. Esse tipo de erro numérico (seja ele devido ao corte ou ao arredondamento) é conhecido como erro de arredondamento (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008, p. 30).

Já os *Erros de truncamento*, de acordo com Chapra e Canale (2016), estão relacionados com o método numérico utilizado para obter os valores aproximados da solução. Esse erro, pode se tratar de um erro local, quando utilizado o método numérico em um único passo. Ou ainda pode ser um *erro de truncamento propagado* que resulta das aproximações feitas durante os passos anteriores. A junção desses dois erros constituem o erro total. Mais detalhes a respeito dos erros de truncamento advindos da aplicação do método de Euler podem ser encontrados em Chapra e Canale (2016, p. 590).

#### 3.3.1.2 Erro total

De acordo com Gilat e Subramaniam (2008), o erro numérico total é dado como sendo a diferença entre a solução verdadeira e a solução obtida numericamente, ou seja:

$$\text{Erro Total} = \text{solução exata} - \text{solução numérica.} \quad (3.11)$$

<sup>3</sup> Sistema numérico de base 2 utilizado por computadores para armazenar dados em bits, ou seja, conjuntos de zeros e uns (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

Embora não seja possível calcular o erro total na maioria dos casos, é possível avaliar a precisão da solução numérica por meio de limites conhecidos, estimativas de ordem de grandeza do erro e comparações com soluções analíticas ou dados experimentais. Essa avaliação é fundamental para garantir a confiabilidade e a precisão das soluções numéricas, destacando a importância da escolha adequada dos métodos numéricos e da consciência dos erros envolvidos para obter resultados mais confiáveis (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

Gilat e Subramaniam (2008), também descrevem que a razão entre esse erro numérico total e a solução exata em valor absoluto, define o erro relativo total, que é dado segundo os autores, por:

$$\text{Erro Relativo Total} = \left| \frac{\text{solução exata} - \text{solução numérica}}{\text{solução exata}} \right|. \quad (3.12)$$

Essa grandeza indicará o quão grande é o erro da solução numérica em relação à solução exata. Tomando esse valor resultante e multiplicando por 100, teremos um percentual relativo ao erro envolvido entre a solução exata e a solução obtida numericamente.

## 4 METODOLOGIA

Esta pesquisa se enquadra como uma pesquisa aplicada, uma vez que tem como objetivo desenvolver um simulador em 3D para investigar as limitações da velocidade da luz no espaço, podendo gerar novas tecnologias e conhecimentos resultantes do processo de pesquisa e conforme aponta Neves e Domingues (2007, p. 18), gerar conhecimentos aplicáveis e direcionados para solucionar problemas reais e específicos, levando em consideração as verdades e interesses locais. Além disso, ela é também classificada como bibliográfica, pois é fundamentada em uma pesquisa bibliográfica inicial para conhecer os estudos existentes sobre o assunto, e experimental, devido à incorporação de experimentação no processo de construção, validação e uso do simulador como um laboratório virtual, no nosso caso, a biblioteca VPython (PEREIRA et al., 2018).

### 4.1 Casos simulados

Conforme já mencionado, a implementação do simulador tomou como base um vídeo compartilhado no Youtube (O'DONOGHUE, 2019). O vídeo foi criado pelo britânico Dr. James O'Donoghue, ex-cientista da NASA que, conforme escreve na descrição do seu canal no Youtube<sup>1</sup>, faz animações sobre o espaço em 2019 “para celebrar as coisas estranhas e maravilhosas sobre os planetas, o sistema solar e além”.

O vídeo mostra como a velocidade da luz pode ser extremamente rápida sob certo ponto de vista, como no caso específico do nosso planeta, onde a luz pode circundar a superfície da Terra em uma média de sete voltas e meia em apenas um segundo, ou ainda ir da Terra à Lua em pouco mais de um segundo. E como ela se torna lenta para distância mais longas, como do Sol até Mercúrio, o primeiro planeta do nosso sistema solar. Para vencer essa distância, a luz leva em torno de 3 minutos e 11 segundos, o que é bem apresentado no vídeo, onde podemos visualizar e sentir essa “lentidão”.

A simulação de O'Donoghue (2019) vai além e mostra ainda como a velocidade da luz se torna mais lenta para distâncias ainda maiores. O vídeo nos permite observar quanto tempo o fóton (partícula de luz) leva para deixar o Sol e atingir os planetas seguintes do nosso sistema solar: Vênus, 5 minutos e 59 segundos e a nossa Terra, depois de 8 minutos e 17 segundos. Assistir a animação nos faz perceber que, apesar dessa velocidade ser muito rápida para nosso ponto de vista de humanos, inclusive sendo considerada por muito tempo como instantânea, conforme discutido no Capítulo 2, torna-se lenta quando são percorridas as distâncias do nosso sistema solar.

Isso nos leva a pensar, o quanto essa velocidade se torna insignificante se conside-

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/@Interplanetary/about>.

rarmos distâncias astronômicas ainda maiores, como por exemplo a distância do nosso Sol à estrela mais próxima, Alfa Centauro, que segundo Hawking (2015) se encontra a 4 anos-luz<sup>2</sup> de distância, ou ainda à galáxia espiral mais próxima, a M31 na constelação de Andrômeda, que de acordo com Sagan (2011), encontra-se à 2 milhões de anos-luz de distância. O que significa que o fóton que nos alcança vindo de lá levou 2 milhões de anos para percorrer essa distância (SAGAN, 2011).

No presente trabalho, visamos recriar as cenas 2, 3 e 4 da animação de O'Donoghue (2019), mostradas na Figura 7. Daqui para frente, vamos nos referir a estas cenas como sendo Caso 1, 2 e 3, respectivamente. O Caso 1, mostra uma representação de um fóton percorrendo a distância da Terra até a Lua. Já o Caso 2, envolve a distância percorrida da Terra até Marte. O Caso 3, por sua vez, representa a distância que um fóton, partindo do Sol, precisaria percorrer para alcançar os três primeiros planetas do nosso sistema solar: Mercúrio, Vênus e Terra. Vale salientar aqui que as cenas 2, 3 e 4 do vídeo de O'Donoghue (2019) foram escolhidas justamente por poderem ser modeladas como um problema de movimento linear de uma partícula. Ou seja, vamos considerar um fóton de luz como sendo uma partícula. Isso constitui uma importante simplificação do problema, uma vez que a luz pode ser considerada como uma onda que se propaga em todas as direções do espaço devido a dualidade onda/partícula<sup>3</sup> (HAWKING, 2015).

Na Figura 7(c), O'Donoghue (2019) utiliza as medidas de distâncias em Unidades Astronômicas (UA), uma escala comumente utilizada na Astronomia. Uma UA corresponde à distância da Terra ao Sol, ou seja,  $1UA = 149,6 \cdot 10^6$  km. Nesse contexto, a luz leva 8 minutos e 17 segundos para percorrer uma unidade astronômica.

## 4.2 Modelagem 3D

O primeiro passo para recriar a simulação do movimento do fóton foi realizar a modelagem dos corpos celestes entre os quais ele vai se deslocar. Para a isso, foi utilizada a biblioteca VPython.

### 4.2.1 A biblioteca VPython

Desenvolvida pela Carnegie Mellon University, VPython foi criada para ser fácil de usar e permitir que até mesmo estudantes iniciantes e sem experiência anterior em programação escrevam programas com visualizações 3D em tempo real (SCHERER; DUBOIS; SHERWOOD, 2000). Através de comandos simples e intuitivos é possível criar

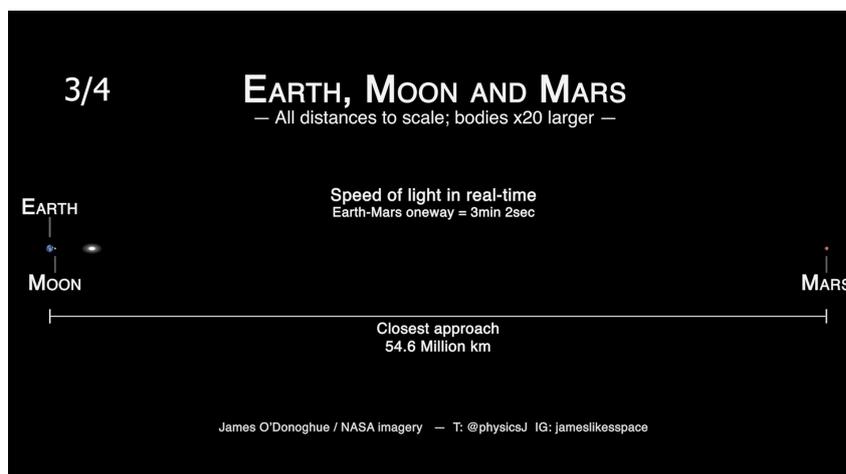
<sup>2</sup> Ano-luz é uma medida astronômica para representar grandes distâncias, utilizando a velocidade da luz como referência. Ou seja, um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano (SAGAN, 2011).

<sup>3</sup> Uma descrição mais detalhada e exemplificada desse fenômeno na física encontra-se em Hawking (2015, p. 75-85).

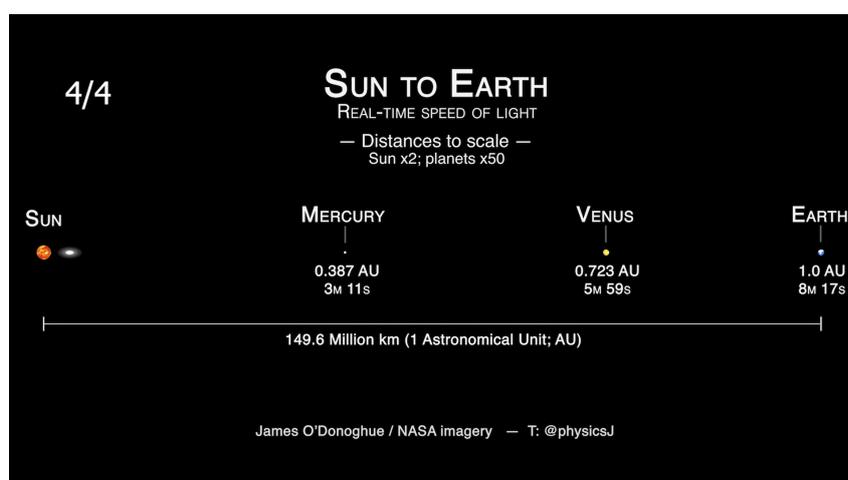
Figura 7 – Capturas de tela mostrando as três cenas simuladas.



(a) Caso 1: Terra até a Lua.



(b) Caso 2: Terra até Marte.



(c) Caso 3: Sol até a Terra, passando por Mercúrio e Vênus.

Fonte: O'Donoghue (2019).

objetos tridimensionais, como esferas, paralelepípedos, cilindros, cones, entre outros, com possibilidade de controlar sua posição, orientação e diversas outras propriedades.

Atualmente com VPython, é possível criar cenas interativas e animações que podem ser visualizadas em praticamente qualquer computador até mesmo sem a necessidade de instalar nenhum software. A plataforma Glowscript<sup>4</sup> permite a criação, edição, execução e compartilhamento de programas em VPython diretamente do navegador, o que possibilita a utilização dessa ferramenta por qualquer dispositivo com acesso a internet. Assim, para manter os arquivos disponíveis em nuvem, evitar perda de dados e facilitar o compartilhamento, decidimos usar essa plataforma. Para armazenar projetos, é necessário realizar cadastro utilizando um endereço de e-mail válido. Vale salientar que é possível utilizar a ferramenta sem a necessidade de cadastrar uma conta, porém, sem esse requisito não é possível armazenar os seus próprios projetos.

A Figura 8 mostra um exemplo de uma cena criada. Com alguns comandos básicos, podemos criar os objetos em 3D, como a esfera (*sphere*) representada pelo corpo esférico azul, e o paralelepípedo (*box*) achatado representando uma plataforma. Observe que, no código-fonte, os comandos aparecem em inglês, com exceção dos nomes das variáveis. É uma característica da biblioteca VPython, assim como da maioria das linguagens de programação, em que todos os comandos para criação de objetos e cenas devem ser escritos em inglês. Isso pode constituir uma dificuldade para uma pessoa iniciante que não possua uma noção básica do inglês, todavia, com as mais variadas ferramentas de tradução disponível na internet hoje em dia, esse problema pode ser contornado mais facilmente.

Uma característica importante do VPython é que os comandos relacionados a posições, por exemplo, precisam ser definidos na notação de vetores, uma vez que tratam-se de objetos que necessitam de três coordenadas  $(x, y, z)$  no espaço, para que assim estejam bem definidos. Nesse exemplo da Figura 8, a posição da esfera está determinada pelas coordenadas  $(0, 0, 0)$ , o que significa que este objeto estará centralizado na tela, ou seja, na “origem” do sistema de coordenadas. Assim, podemos posicionar objetos na tela definindo suas posições nos três eixos, ou seja, toda nossa orientação no espaço estará relacionada a eixos e coordenadas.

### 4.2.2 Modelagem dos corpos celestes

Inicialmente, para a modelagem das cenas, foi preciso levantar todos os dados necessários, como por exemplo as distâncias da Terra à lua, da Terra a Marte, do Sol aos três planetas mais próximos a ele, bem como os raios de todos eles. Para isso, nos baseamos nos dados apresentados na Tabela 1, além da Folha de Dados Planetários<sup>5</sup> da

<sup>4</sup> Disponível em <https://www.glowscript.org/>.

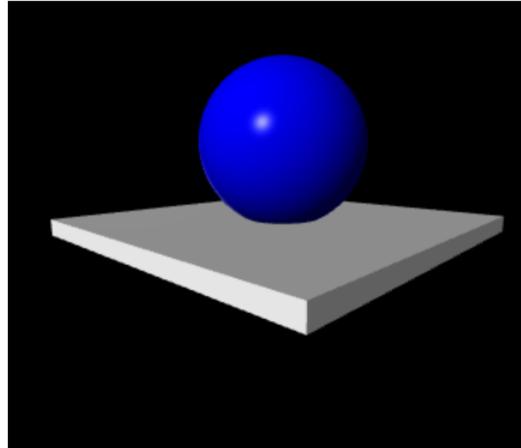
<sup>5</sup> Disponível em: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>

Figura 8 – Exemplo de uma cena com objetos e o seu respectivo código-fonte.

```

1 #Comando para criar o solo
2 solo=box(pos=vector(0,0,0), size=vector(4, 0.2, 4))
3
4 #Comando para criar uma esfera
5 esfera=sphere(pos=vector(0, 1, 0), color=color.blue)

```



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço (NASA), agência estadunidense que tem por função o desenvolvimento de tecnologias aeronáuticas e a exploração espacial.

Tabela 1 – Dados astronômicos utilizados na modelagem dos casos.

Corpo	Massa (kg)	Raio médio (m)	Período de revolução (s)	Distância média do Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> )
Mercúrio	$3,30 \times 10^{23}$	$2,44 \times 10^6$	$7,60 \times 10^6$	$5,79 \times 10^{10}$	$2,98 \times 10^{-19}$
Vênus	$4,87 \times 10^{24}$	$6,05 \times 10^6$	$1,94 \times 10^7$	$1,08 \times 10^{11}$	$2,99 \times 10^{-19}$
Terra	$5,97 \times 10^{24}$	$6,37 \times 10^6$	$3,156 \times 10^7$	$1,496 \times 10^{11}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Marte	$6,42 \times 10^{23}$	$3,39 \times 10^6$	$5,94 \times 10^7$	$2,28 \times 10^{11}$	$2,98 \times 10^{-19}$
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	$6,99 \times 10^7$	$3,74 \times 10^8$	$7,78 \times 10^{11}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Saturno	$5,68 \times 10^{26}$	$5,82 \times 10^7$	$9,29 \times 10^8$	$1,43 \times 10^{12}$	$2,95 \times 10^{-19}$
Urano	$8,68 \times 10^{25}$	$2,54 \times 10^7$	$2,65 \times 10^9$	$2,87 \times 10^{12}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Netuno	$1,02 \times 10^{26}$	$2,46 \times 10^7$	$5,18 \times 10^9$	$4,50 \times 10^{12}$	$2,94 \times 10^{-19}$
Plutão <sup>a</sup>	$1,25 \times 10^{22}$	$1,20 \times 10^6$	$7,82 \times 10^9$	$5,91 \times 10^{12}$	$2,96 \times 10^{-19}$
Lua	$7,35 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^6$	–	–	–
Sol	$1,989 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^8$	–	–	–

<sup>a</sup> Em agosto de 2006, a União Astronômica Internacional adotou uma definição de planeta que separa Plutão dos outros oito planetas. Plutão agora é definido como um “planeta-anão” (a exemplo do asteroide Ceres).

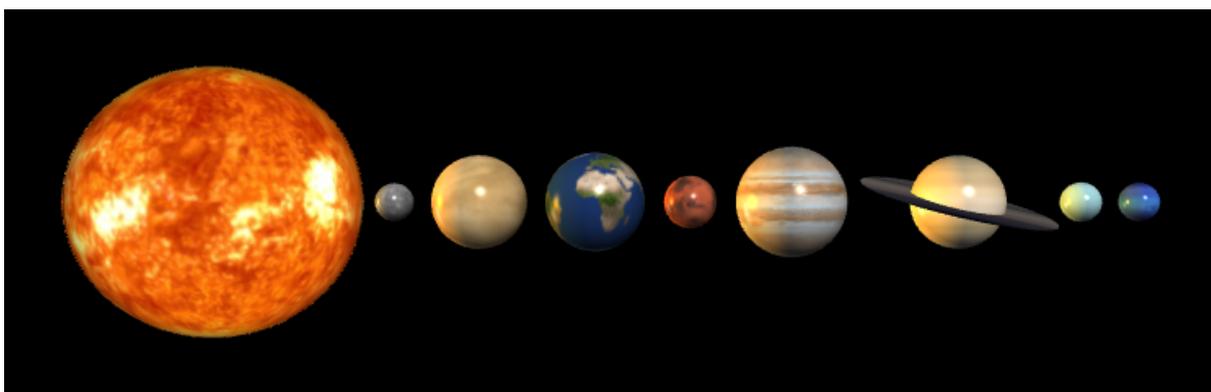
Fonte: Serway e Jr. (2014, p. 377).

Com os dados em mãos foi possível modelar o Sol, os planetas e a Lua em suas posições. Para dar mais realismo aos modelos, utilizamos um recurso do VPython que permite a aplicação de texturas, que são basicamente imagens que irão “vestir” a superfície do corpo que está sendo modelado, para tal, utilizamos das imagens disponíveis no site

*Solar System Scope*<sup>6</sup>. O Solar System Scope (SSS) é um site interativo que oferece uma representação visual em 3D do sistema solar, permitindo explorar e interagir com os planetas, luas, asteroides e demais corpos celestes. Além disso, o site fornece informações detalhadas sobre cada corpo celeste, como tamanho, massa e composição atmosférica, e possui ferramentas interativas, como simulações de órbitas planetárias e cometas. O SSS oferece uma experiência educativa e imersiva, adequada para estudantes, entusiastas da astronomia e qualquer pessoa interessada em explorar nossa vizinhança cósmica. É uma ferramenta valiosa para ampliar o conhecimento sobre o nosso sistema solar e despertar o interesse pela astronomia.

Os corpos celestes modelados em 3D são mostrados na Figura 9. Como o objetivo desta imagem foi só mostrar os modelos com as texturas utilizadas, as distâncias entre o Sol e os planetas não estão em escala real. É importante destacar aqui também que, como os demais corpos celestes do nosso Sistema Solar possuem tamanhos insignificantes quando comparados às dimensões do Sol, foram usadas escalas de ampliação para que os planetas pudessem ser melhor observados. Considerando que o sol está no seu tamanho normal, os planetas rochosos, Mercúrio, Vênus, Terra e Marte, foram aumentados em 40 vezes. Já os planetas gasosos, ou seja, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, aparecem aumentados em 4 vezes. Se considerássemos as escalas reais, apenas o sol, devido ao seu enorme tamanho, poderia ser visto na imagem, enquanto alguns planetas, praticamente desapareceriam. Foi utilizado também o comando *local\_light()* configurado para estar na mesma posição do sol, emitindo uma luz laranja, o que pode ser comprovado observando-se o lado esquerdo dos planetas, que aparecem refletindo a luz emitida.

Figura 9 – Modelagem do Sistema Solar.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

### 4.2.3 Comentários acerca da modelagem

Para descrever com mais detalhes a modelagem das cenas, vamos começar com o Caso 1. Conforme mostra a Figura 10, nas linhas 12 a 15 definimos os dados referentes aos

<sup>6</sup> Disponível em: <https://www.solarsystemscope.com/textures/>

objetos que iremos modelar, nesse caso, os raios da Terra e Lua, respectivamente, assim como a distância relativa entre eles representada pela variável  $d$  e também a velocidade com que o fóton irá se movimentar, definida pela velocidade da luz e representada pela variável  $C$ . Nas linhas 17 e 19 do código-fonte, é onde são criados os objetos da cena. Observe que a sua posição é definida por meio de um vetor posição. A Terra está localizada no vetor posição ( $pos = vector(0, 0, 0)$ ), ou seja, na origem do sistema de coordenadas e a Lua no vetor posição ( $pos = vector(d, 0, 0)$ ), onde  $d$  é a distância da Terra à Lua que o fóton precisa percorrer.

Figura 10 – Trecho do código que cria os elementos principais da cena do Caso 1.

```

12 raio_terra=6.37e6
13 raio_lua=1.74e6
14 d=3.844e8
15 C=299796458
16
17 terra=sphere(radius=raio_terra, pos=vector(0,0,0),
18             texture="https://i.imgur.com/g6hl2xI.jpeg")
19 lua=sphere(radius=raio_lua, pos=vector(d,0,0),
20           texture="https://i.imgur.com/WdD5ST9.jpeg")
21 foton=ellipsoid(pos=vector(raio_terra,0,0),
22               length=raio_lua*2., height=raio_lua*1.,
23               width=raio_lua*1., color=color.white)
24 fotonbrilho=ellipsoid(pos=foton.pos, opacity = 0.3, length=raio_lua*3,
25                      height=raio_lua*1.5, width=raio_lua*1.5,
26                      color=color.yellow)

```

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Já para modelar o fóton na linha 21, utilizamos o objeto 3D do tipo *ellipsoid*, para dar uma aparência ovalada ao mesmo e passar uma ideia mais dinâmica. Seu vetor posição é inicialmente  $pos = vector(raio\_terra, 0, 0)$ , pois o movimento do fóton é de superfície a superfície. Assim, faz sentido que a posição inicial do fóton seja na coordenada referente ao raio da Terra. Na linha 24 usamos um recurso para dar mais realismo ao fóton que está sendo modelado, que seria basicamente uma “áura” dada ao fóton, também com um objeto 3D do tipo *ellipsoid* para representa-lo melhor graficamente e ficarmos mais próximos da simulação feita por O’Donoghue (2019). Para dar a ideia de transparência, este objeto em especial é criado com a propriedade de opacidade com valor de 30%.

Após a conclusão da modelagem dos principais corpos celestes do Sistema Solar, partimos para a modelagem do fóton e do seu movimento. Usamos as equações do movimento unidimensional descritas na Seção 3.2, discretizadas pelo método de Euler, descrito na Seção 3.3. Observe que, no código-fonte exibido na Figura 11, as linhas 55 e 54 representam exatamente as equações (3.8) e (3.10), respectivamente. Estas duas linhas de código estão localizadas dentro de um laço de repetição que refaz o cálculo iterativo tanto da posição do fóton ( $foton.pos$ ) quanto do tempo durante toda a simulação. Nota-se que esse laço de repetição é infinito mas, em algumas versões do código, foi utilizado um critério de parada para que a simulação seja interrompida no momento em que o fóton atinge a superfície da Lua.

A Figura 11 ainda ilustra como é definida a velocidade do fóton na linha 50, por meio de um vetor cuja única componente não nula é justamente aquela do eixo  $x$ . Conforme já foi mostrado, a variável  $C$  representa a magnitude da velocidade da luz.

Figura 11 – Trecho do código referente ao movimento do fóton.

```
49 dt=0.001
50 foton.velocidade=vector(C,0,0)
51 t=0
52 while True:
53     rate(1000)
54     foton.pos=foton.pos+foton.velocidade*dt
55     t=t+dt
```

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Agora, vamos descrever detalhes do código-fonte referente ao Caso 2. A Figura 12 mostra os elementos principais modelados, ou seja, a Terra, que será o ponto inicial de partida do fóton, em seguida a Lua e por fim, o ponto de chegada do fóton, Marte. Conforme será discutido com mais detalhes posteriormente, nesse caso foi necessário usar fatores de ampliação para os corpos modelados, para que estes pudessem ser visualizados sendo mantida escala real de distância entre eles. O fator de ampliação de  $50x$  é definido na variável “*fplanetas*”, na linha 21, tendo sido usado também para a lua.

Figura 12 – Trecho do código que cria os elementos principais da cena do Caso 2.

```
15 raio_terra=6.37e6
16 raio_lua=1.74e6
17 raio_marte=3.39e6
18 dlua=3.844e8
19 dmarte=54.6e9
20 C=299793458
21 fplanetas = 50
22
23 terra = sphere(radius=raio_terra*fplanetas, pos=vector(0,0,0),
24               texture="https://i.imgur.com/g6hl2xI.jpeg")
25 lua = sphere(radius=raio_lua*fplanetas, pos=vector(dlua,0,0),
26             texture="https://i.imgur.com/WdD5ST9.jpeg")
27 marte = sphere(radius=raio_marte*fplanetas, pos=vector(dmarte,0,0),
28              texture="https://i.imgur.com/HagVJGr.jpeg")
```

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Analisando o código, percebe-se que o fator de ampliação é usado nas linhas 23, 25 e 27, onde são criados os corpos celestes da cena: Terra, Lua e Marte, respectivamente. O fator é usado mais precisamente na definição do raio da esfera que representa cada corpo celeste. Como pode ser observado, as demais informações seguem a mesma lógica do código mostrado na Figura 10, onde são definidas, para cada corpo, as posições e as texturas usadas. A modelagem do Caso 3 é feita de forma análoga, mudando apenas os dados relativos a cada corpo celeste. Para os casos 2 e 3, o código-fonte responsável pela modelagem do movimento do fóton é o mesmo daquele mostrado na Figura 11.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo descreveremos os resultados obtidos com o simulador para os três casos mencionados no Capítulo 4. Conforme já mencionado, os casos foram baseados nas cenas apresentadas na Figura 7, retiradas do vídeo de O’Donoghue (2019). Para fins de comparação, apresentaremos as cenas construídas no presente trabalho por meio da biblioteca do VPython.

Conforme já foi mencionado, nos três casos modelados, o movimento do fóton é tratado como sendo um caso de uma partícula se locomovendo sob velocidade constante na direção  $x$ , conforme discutido na Subseção 3.2.3. Levamos em consideração que no vácuo não existem forças de resistência.

### 5.1 Caso 1 - Terra até a Lua

A Figura 13 mostra a cena modelada para o Caso 1 em dois momentos. No primeiro momento, o fóton aparece aproximadamente na metade do percurso, percorrendo essa distância em cerca de 0,619 segundos. No segundo momento mostrado, consideramos o percurso completo do fóton, o qual percorre a distância de  $384.400km$ , conforme a Folha de Dados Planetários da Nasa. O tempo decorrido foi de  $t = 1,255s$  para o fóton percorrer a distância total, o que coincide com os dados apresentados por O’Donoghue (2019).

Na modelagem desta cena, como pode ser observado nas imagens, implementamos um código para criar uma representação visual de estrelas ao fundo, de forma que a cena ficasse a mais próxima possível daquela mostrada em O’Donoghue (2019). A ideia foi simples: criar uma quantidade de pequenas esferas, com raios e posições determinados de modo aleatório, dando a aparência de estrelas distantes. Essa foi a solução utilizada visto que, no ambiente do VPython, não encontramos um comando para fixar imagens ao plano de fundo, semelhante como fizemos com as texturas dos planetas, mencionadas no Capítulo 4.

### 5.2 Caso 2 - Terra até Marte

Para ilustrar os resultados da simulação referente ao Caso 2, escolhemos também dois momentos do trajeto do fóton, mostrados na Figura 14. Nesse caso em específico, o primeiro momento mostra a sua posição após um tempo de 46s transcorrido a partir da sua partida da Terra. Já o segundo momento, mostrado na Figura 14(b), mostra a chegada do fóton em Marte, após ter percorrido todo o trajeto, o que ocorre após três minutos e dois segundos, o que está em conformidade com a simulação de O’Donoghue (2019).

Figura 13 – Imagens com a posição do fóton no Caso 1 em dois momentos.



(a) Após 0,619 segundos.



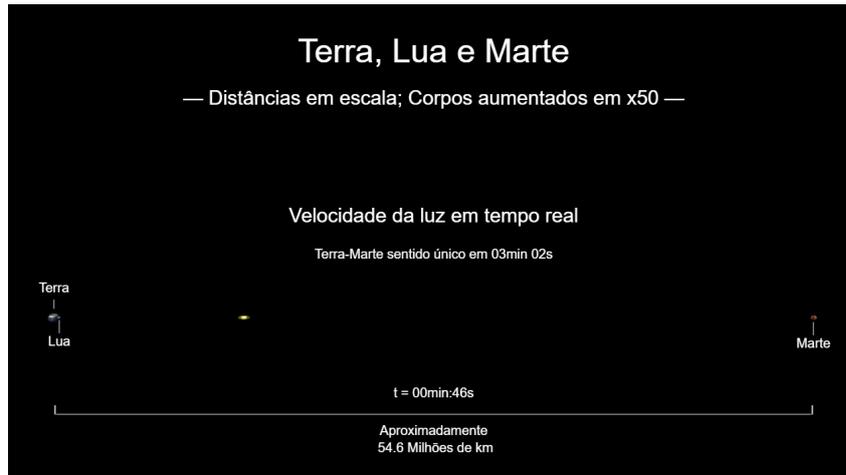
(b) Ao atingir a superfície da Lua em 1,255 segundos.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

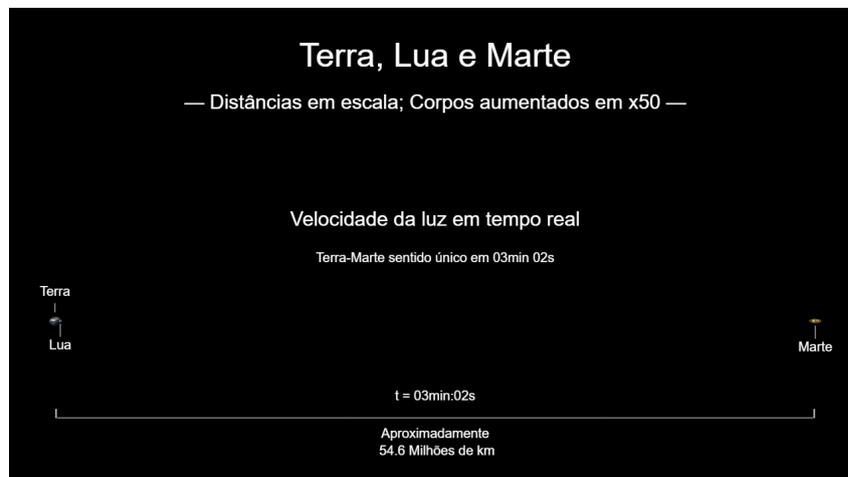
Neste caso, assim como no Caso 1, é importante manter a escala real de distância entre os corpos celestes. Como a Terra está muito mais distante de Marte do que da Lua, cerca de  $54,6 \times 10^6 km$ , de acordo com o Tabela 1, foi necessário utilizar uma escala de ampliação no tamanho dos corpos celestes para facilitar a sua visualização. Neste caso, usamos um fator de ampliação de  $50x$ , o que difere um pouco da escala usada por O'Donoghue (2019). Na simulação feita por ele, os corpos presentes na cena sofreram um aumento de  $20x$  vezes. Usando este fator de ampliação, a Lua parecia aparecer tão próxima à Terra que nos daria a impressão de estar fixada na sua superfície.

Observando a simulação deste caso, já podemos visualizar e sentir o quanto a velocidade da luz começa a se tornar “lenta” quando visualizamos o tempo que o fóton precisa para percorrer a distância entre a Terra e a superfície do planeta vermelho.

Figura 14 – Imagens com a posição do fóton no Caso 2 em dois momentos.



(a) Após um tempo de 46s.



(b) Ao atingir a superfície de Marte em 3min02s.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

### 5.3 Caso 3 - Sol até a Terra, passando por Mercúrio e Vênus

O Caso 3 mostra a viagem de um fóton da superfície do sol até atingir os três primeiros planetas do nosso sistema solar. Assim como no Caso 2, aqui também foi necessário utilizar escalas de ampliação para o tamanho dos corpos celestes devido às grandes distâncias envolvidas, para que estas aparecessem em escala real. Além disso, este caso teve uma particularidade: foi necessário utilizar escalas diferentes de ampliação. Sem este recurso, os planetas não apareceriam na cena, devido ao tamanho, digamos, “monstruoso” que tem o nosso Sol. Assim, enquanto o sol está em escala real, os planetas mostrados nas imagens da Figura 15 estão com um fator de aumento de  $50x$ . Isto quer dizer que, enquanto o sol está em seu “tamanho normal”, os respectivos planetas precisam estar aumentados em 50 vezes, para então, poderem ser vistos nas cenas. O que demonstra a grandiosidade de nossa estrela-mãe. Estas escalas estão de acordo com a simulação de

O'Donoghue (2019), com a diferença que O'Donoghue (2019) apresentou o Sol duas vezes maior que o seu tamanho original.

Figura 15 – Imagens com a posição do fóton no Caso 3 em três momentos.



(a) Ao atingir a superfície de Mercúrio em 03min11s.



(b) Ao atingir a superfície de Vênus em 05min59s.



(c) Ao atingir a superfície da Terra em 08min17s.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

A Figura 15 mostra três momentos do fóton da simulação do Caso 3: ao atingir Mercúrio, após 3 minutos e 11 segundos; Vênus com 5 minutos e 59 segundos de simulação;

e o planeta Terra, após uma viagem de 8 minutos e 17 segundos. Estes tempos também estão de acordo com a simulação apresentada por O’Donoghue (2019). Conforme já foi mencionado, a distância entre o Sol e a Terra representa uma Unidade Astronômica, sendo muitas vezes aproximada para 150 milhões de quilômetros ou aproximadamente 8 minutos-luz, que vem justamente do tempo necessário para a luz viajar por esta distância.

Após a análise dos resultados obtidos com a simulação dos três casos estudados, podemos observar que as nossas simulações acabam sendo validadas, o que responde a nossa questão norteadora: *Seria possível criar uma simulação semelhante a de O’Donoghue (2019) usando a linguagem de programação Python?* A resposta é que foi possível sim, e o processo de construção das simulações bem como levantamento bibliográfico se mostrou enriquecedor, o que nos faz refletir sobre as questões levantadas por Valente (1993), relacionadas ao uso do computador como uma ferramenta de aprendizagem. Foi possível utilizar o computador, associado ao recurso de modelagem 3D, como uma ferramenta para aprendizagem e experimentação dos diversos conteúdos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa interdisciplinar, envolvendo Matemática, Física, Astronomia e Computação.

## 5.4 Soluções Analíticas e Erros Relativos

Como pode ser observado, em relação à simulação de O’Donoghue (2019), os resultados obtidos e discutidos até aqui coincidiram nos três casos modelados. Todavia, podemos calcular os tempos analiticamente, ou seja, obter uma solução exata, por meio da seguinte equação:

$$t_{\text{exato}} = \frac{d}{C}, \quad (5.1)$$

onde  $d$  é a distância entre os corpos celestes e  $C$  é a velocidade da luz.

A Tabela 2 mostra as distâncias entre os corpos celestes envolvidos em cada um dos casos estudados, assim como todos os tempos exatos e aqueles calculados numericamente para o fóton percorrer tais distâncias. A tabela ainda apresenta os erros relativos totais percentuais, calculados a partir da Equação (3.12).

Tabela 2 – Tempos e erros relativos.

Sistema	Distância (m)	Tempo exato (s)	Tempo numérico (s)	Erro relativo (%)
Terra/Lua	$3,84 \times 10^{08}$	1,28	1,255	2,02
Terra/Marte	$5,46 \times 10^{10}$	182,12	182	0,07
Sol/Mercúrio	$5,79 \times 10^{10}$	193,13	191	1,10
Sol/Vênus	$1,08 \times 10^{11}$	360,24	359	0,35
Sol/Terra	$1,50 \times 10^{11}$	499,01	497	0,40

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Conforme podemos observar na tabela, os maiores erros relativos foram para o sistema Terra/Lua, com um valor na ordem de 2,02% e para o sistema Sol/Mercúrio, com um erro relativo de 1,10%. Nos demais casos, os erros relativos não chegaram a 1%. Estes erros, conforme já discutido na Seção 3.3.1, podem ser oriundos do uso de métodos numéricos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi desenvolvido um simulador para o movimento unidimensional de uma partícula representando um fóton viajando no espaço. O objetivo foi demonstrar por meio de animações em 3D como a velocidade da luz se torna “lenta” se considerarmos as distâncias astronômicas. A ideia do presente trabalho surgiu a partir da animação em computação gráfica de O’Donoghue (2019). O problema foi modelado por equações do movimento unidimensional. Para a solução numérica, utilizou-se o método de Euler.

A modelagem da cena, dos objetos e da animação foi toda criada a partir da biblioteca VPython, uma ferramenta gratuita, que é ao mesmo tempo simples e poderosa para criar animações em três dimensões. Através do uso do Glowscript, foi possível compartilhar o simulador com pessoas do mundo todo via web, sem a necessidade da instalação de software local.

Os resultados obtidos foram comparados com O’Donoghue (2019), que serviu de inspiração para o trabalho, apresentando boa concordância. Pudemos então comprovar que, de fato, a técnica numérica, é uma alternativa para a obtenção de soluções para as equações diferenciais que modelam o problema físico em questão. Como o uso do método de Euler - assim como em diversos métodos numéricos - implica na repetição de muitos cálculos, principalmente para passos de tempo pequenos, ficou evidente o papel do computador como ferramenta indispensável para este tipo de aplicação científica. Outra grande vantagem do uso da computação gráfica é que o problema físico estudado não poderia ser testado experimentalmente, uma vez que trata-se do movimento das partículas de luz no espaço, sendo possível a sua visualização através de simulações computacionais sem envolver custos financeiros.

Podemos observar, durante a elaboração do código-fonte para a criação das cenas, que as potencialidades da biblioteca VPython são muitas. É possível criar simulações de diversos fenômenos físicos e de várias áreas do conhecimento, cada qual com desafios próprios. No nosso caso, especulamos aqui os usos potenciais no ambiente educacional, como uma ferramenta que possa não somente servir de apoio para visualização 3D de determinados conteúdos trabalhados pelos professores em sala de aula, como também uma ferramenta de investigação e aprendizagem. Ao passo que os alunos utilizam a ferramenta como um recurso para investigar certos fenômenos trabalhados teoricamente em sala de aula e utilizam de uma linguagem de programação para testar soluções algorítmicas, estarão no caminho correto para a construção de um conhecimento significativo (VALENTE, 2002).

Através das simulações foi possível visualizar como, nas longas distâncias do cosmos, a luz no vácuo, ambiente onde sua velocidade é máxima, acaba se mostrando de certa

maneira vagarosa. É curioso perceber isso tão facilmente por meio das simulações, pois durante muito tempo acreditou-se que a luz se propagava instantaneamente, justamente devido à nossa perspectiva de observação.

Cabe ressaltar aqui, que a velocidade da luz é algo muito relacionado à Física Moderna, principalmente a conceitos ligados à relatividade. O modelo utilizado aqui trata-se de algo bem mais simples de se modelar no VPython, uma vez que tratamos o fóton como uma partícula que se desloca em linha reta sob velocidade constante. Isso, de certa forma, não se distancia muito do mundo real, uma vez que de acordo com a relatividade de Einstein, a velocidade da luz é tratada como uma constante universal, possuindo a mesma velocidade em qualquer direção do espaço, independente da velocidade com que o observador se mova (HAWKING, 2015).

Com relação à futuras pesquisas, pode-se sugerir a investigação de modelos matemáticos mais complexos resolvidos por métodos numéricos capazes de obter soluções de melhor precisão e menos dependentes do passo de tempo para as soluções de EDOs de primeira ordem, que podem ser encontrados em Gilat e Subramaniam (2008) e Chapra e Canale (2016). Uma outra sugestão está relacionada a uma hipótese bastante popular, que dada a distância da Terra à Lua, caberiam todos os planetas do sistema solar alinhados. Esta seria uma investigação e uma situação igualmente interessante de se modelar no VPython. Também poderia se sugerir para pesquisas futuras, tratar o movimento do fóton como uma onda que se propaga em todas as direções no espaço, assim como acontece com as ondas de rádio que são emitidas no meio interestelar todos os dias. O desafio de buscar um modelo matemático na literatura para modelar o problema junto ao desafio de considerar também os respectivos movimentos de órbita dos planetas ao redor do sol seriam uma possibilidade interessante de se investigar.

## REFERÊNCIAS

- AL-AZZAWI, A. **Light and Optics: Principles and Practices**. CRC Press, 2018. ISBN 9780849383144. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Iw7NBQAAQBAJ>>. Citado nas páginas 22, 23 e 24.
- AZEVEDO, J. S.; JÚNIOR, F. N. M. Tratamento histórico presente em livros didáticos de física concernente à velocidade da luz. **História da Ciência e Ensino: construindo interfaces**, v. 21, p. 48–64, 2020. Citado nas páginas 15, 17 e 19.
- BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. de. Metodologias ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica. **Boletim Técnico do Senac**, v. 39, n. 2, p. 48–67, 2013. Citado nas páginas 26 e 27.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. 2018. MEC, Brasília. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: maio de 2023. Citado nas páginas 13 e 25.
- BUTLER, D. **Classroom Aid - Fizeau's Speed of Light**. 2019. YouTube, 22 jul. 2022. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=g8NYHa\\_3xxg](https://www.youtube.com/watch?v=g8NYHa_3xxg)>. Acesso em: maio de 2023. Citado na página 23.
- CASTELLAR, S. M. V. (Ed.). **Metodologias ativas: sequências didáticas**. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: FTD, 2016. Citado nas páginas 25 e 26.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia-7<sup>a</sup> Edição**. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016. Citado nas páginas 34, 35 e 52.
- CUSSON, J. **JOURNAL DES SÇAVANS: Du Lundy 6. Janvier M. DC. LXXVI**. Chez Jean Cusson, ruë S. Iacques à l'Image de S. Jean-Baptiste, 1676. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=u0n5PXXlQT8C>>. Citado na página 20.
- D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. [S.l.]: Papyrus Editora, 2007. Citado na página 15.
- DITTER, A. S. **A educação em tempos de Cibercultura: aprendizagem significativa de literatura Trovadoresca mediada por um Hipertexto**. 289 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2006. Citado nas páginas 25 e 26.
- FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 78<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Paz e Terra, 2021. Citado na página 25.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. São Paulo: Bookman, 2008. Citado nas páginas 33, 34, 35, 36 e 52.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física, volume 1: mecânica**. 8<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. Citado na página 30.

HAWKING, S. W. **Uma breve história do tempo**. 1<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015. Citado nas páginas 38 e 52.

HOM, E. J.; DOBRIJEVIC, D. **What is STEM education?** LiveScience, 2022. Disponível em: <<https://www.livescience.com/43296-what-is-stem-education.html>>. Acesso em: maio de 2023. Citado na página 13.

KALINKE, M. A. et al. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. **Educação Matemática: pesquisas e possibilidades**. Curitiba: UTFPR, p. 159–186, 2015. Citado na página 28.

LAPORTE, R. S. **Ole Roemer e a velocidade da luz: explorando aspectos da natureza da ciência em uma proposta de ensino**. 115 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado nas páginas 15, 17, 18, 19 e 21.

MAGIE, W. **A Source Book in Physics**. Harvard University Press, 1963. (Source books in the history of the sciences). ISBN 9780783741185. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=LzCHyuzRK\\\_cC](https://books.google.com.br/books?id=LzCHyuzRK\_cC)>. Citado na página 21.

MARTINS, M. H.; COTTINGHAM, J. **Dicionário Descartes**. [S.l.]: Zahar, 1995. Citado na página 18.

MARTINS, R. d. A.; SILVA, C. C. As pesquisas de newton sobre a luz: Uma visão histórica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 37, p. 4202–1, 2015. Citado na página 18.

NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. Manual de metodologia da pesquisa científica. **Rio de Janeiro: EB/CEP**, p. 204, 2007. Citado na página 37.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 394. Citado na página 31.

O'DONOGHUE, J. **Light Speed – fast, but slow**. 2019. YouTube, 1 out. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=nQUwHdSAhmw>>. Acesso em: maio de 2023. Citado nas páginas 12, 37, 38, 39, 43, 45, 46, 48, 49 e 51.

PEREIRA, A. S. et al. Metodologia da pesquisa científica. Brasil, 2018. Citado na página 37.

PUGLIESE, G. O. **Os modelos pedagógicos de ensino de ciências em dois programas educacionais baseados em STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics)**. 135 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2017. Citado na página 29.

RIBEIRO, G. M.; CHAGAS, R. de L.; PINTO, S. L. O renascimento cultural a partir da imprensa: o livro e sua nova dimensão no contexto social do século xv. **Akrópolis-Revista de Ciências Humanas da UNIPAR**, v. 15, n. 1, 2007. Citado na página 17.

ROSA, C. A. de P. **História da ciência : a ciência moderna**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Brasília: FUNAG, 2012. v. 2. Citado nas páginas 17 e 18.

SABRA, A. **Theories of Light: From Descartes to Newton**. Cambridge University Press, 1981. ISBN 9780521284363. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nB84AAAAIAAJ>>. Citado na página 18.

- SAGAN, C. **Pálido Ponto Azul: Uma visão do futuro da humanidade no espaço**. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Gradiva, 2011. Citado na página 38.
- SCHERER, D.; DUBOIS, P.; SHERWOOD, B. VPython: 3D interactive scientific graphics for students. **Computing in Science & Engineering**, IEEE, v. 2, n. 5, p. 56–62, 2000. Citado na página 38.
- SERWAY, R. A.; JR., J. W. J. **Princípios da Física: Mecânica Clássica e Relatividade**. 5<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Citado nas páginas 29, 30, 31, 32, 33 e 41.
- SILVA, R. M. M. d. **Experiências históricas para a determinação da velocidade da luz**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, 2002. Citado nas páginas 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21.
- VALENTE, J. **O computador na sociedade do conhecimento**. Universidade Estadual de Campinas, Núcleo de Informática Aplicada à Educação, 2002. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dYjSPQAACAAJ>>. Citado nas páginas 27 e 51.
- VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. In: **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas, Núcleo de Informática Aplicada à Educação, 1993. Citado nas páginas 26, 27, 28 e 49.
- VIEIRA, M. d. F. Pedagogia de paulo freire e tecnologias digitais na educação: uma construção possível. **Tecnologias, sociedade e conhecimento**, NIED, UniCamp, p. 25–47, 2021. Citado na página 25.
- WALKER, B. **Optical Engineering Fundamentals**. SPIE Optical Engineering Press, 1998. (Optical and electro-optical engineering series). ISBN 9780819427649. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Ccx9OM7iph8C>>. Citado na página 22.
- WOORTMANN, K. **Religião e ciência no Renascimento**. [S.l.]: Departamento de Antropologia, Universidade de Brasília, 1996. Citado na página 17.