



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MARIA GABRIELA FERREIRA SIQUEIRA AMARAL GOMES

TEORIAS DA EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO: UMA
ANÁLISE COMPARATIVA

CAMPINA GRANDE
2023

MARIA GABRIELA FERREIRA SIQUEIRA AMARAL GOMES

TEORIAS DA EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO: UMA
ANÁLISE COMPARATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado á Coordenação do Departamento do Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Cosmologia

Orientador: Jean Paulo Spinelly da Silva.

CAMPINA GRANDE
2023

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

G633t Gomes, Maria Gabriela Ferreira Siqueira Amaral.
Teorias da expansão acelerada do universo [manuscrito] :
uma análise comparativa / Maria Gabriela Ferreira Siqueira
Amaral Gomes. - 2023.
24 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2023.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,
Coordenação do Curso de Física - CCT. "

1. Cosmologia. 2. Modelo cosmológico padrão. 3.
Expansão do universo. 4. Formulação de Palatini. I. Título

21. ed. CDD 523.18

MARIA GABRIELA FERREIRA SIQUEIRA AMARAL GOMES

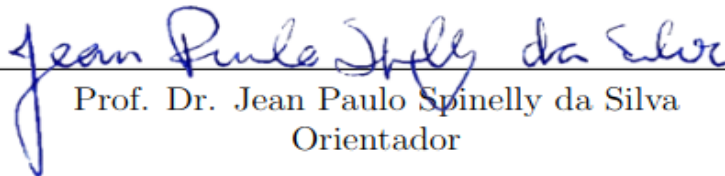
TEORIAS DA EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO: UMA ANÁLISE
COMPARATIVA

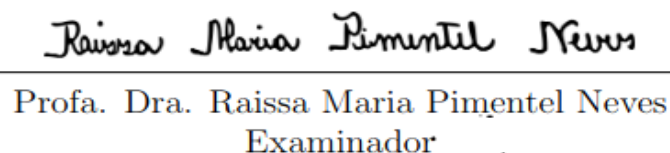
Trabalho de Conclusão de Curso
(Artigo) apresentado á Coordenação do
Departamento do
Curso de Licenciatura Plena em Física
da Universidade Estadual da Paraíba
como requisito parcial à obtenção do
título de Licenciado em Física.

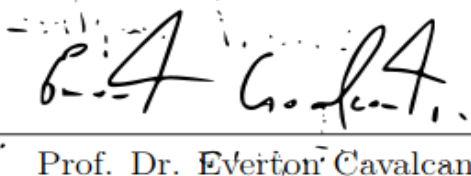
Área de concentração:
Cosmologia.

Aprovada em: 28/07/2023.

Banca Examinadora


Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador


Profa. Dra. Raissa Maria Pimentel Neves
Examinador


Prof. Dr. Everton Cavalcante

Dedico esse trabalho à Vilanilza e a Cleyton, porque, quando acreditei que não alcançaria, eles tornaram possível que eu chegasse. Dedico também a Elizabete, para que sempre faça perguntas interessantes.

”O universo não foi feito à medida do ser humano, mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente.” **Carl Sagan**

SUMÁRIO

1	Introdução	7
2	Cosmologia Padrão	8
2.1	Equações de Einstein	9
2.2	Modelo Λ CDM	10
3	Universo em Expansão: Teoria $f(R)$	14
3.1	Equações de Campo no Formalismo de Palatini	15
3.2	Cosmologia no Formalismo de Palatini	18
4	Comparação com os dados observacionais	19
4.1	Análise do Modelo Cosmológico Padrão	20
4.2	Análise de Gravidade Modificada $f(R)$ na Formulação de Palatini	21
5	Conclusão	22
	Referências	22
	Agradecimentos	24

TEORIAS DA EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA

Maria Gabriela Ferreira Siqueira Amaral Gomes¹

RESUMO

Este trabalho explora a compreensão da expansão do universo no âmbito da cosmologia moderna, considerando a mudança de concepção de um universo estático para um em expansão acelerada após a formulação da relatividade geral, bem como os modelos cosmológicos que preveem essa expansão, com o propósito de compará-los. Dentro dessa abordagem, o modelo Λ CDM, conhecido como o modelo cosmológico padrão, demonstra uma alta concordância com os dados observacionais e incorpora a energia escura como responsável por impulsionar a expansão do universo. Contudo, há o problema da constante cosmológica, que surge devido à discrepância entre a escala de energia necessária para explicar a aceleração cósmica e as previsões da física de partículas em relação à energia do vácuo, que é considerada um provável candidato a energia escura, que até então não foi explicada. Diante dessa questão, este trabalho apresenta duas classes de modelos alternativos: modelos de quintessência, que introduz um campo escalar para modificar a componente material do universo, e modelos de gravidade modificada $f(R)$, que sugere alterações nas equações fundamentais da relatividade geral. Esse trabalho foca em explorar o modelo de gravidade modificada $f(R)$ na formulação de Palatini, com a função $f(R) = R - \beta/R^n$. A análise ocorreu por meio da comparação do parâmetros de Hubble obtido para cada modelo com dados do cronômetro cósmico e assim concluiu-se que o modelo cosmológico padrão descreve adequadamente a expansão do universo e os dados cosmológicos observados. Além disso, indica que o universo é composto por aproximadamente 70 por cento de energia escura e 30 por cento de matéria, incluindo matéria bariônica e escura. Por outro lado, a análise do modelo de gravidade modificada $f(R)$ revelou que esse modelo descreve uma expansão acelerada do universo, mas não reproduz os dados do cronômetro cósmico para os valores adotados de β e n .

Palavras chave: cosmologia; expansão; $f(R)$; Palatini; modelo padrão.

ABSTRACT

This work explores the understanding of the universe's expansion in the context of modern cosmology, considering the transition from the conception of a static universe to an accelerating one after the formulation of the general theory of relativity, as well as the cosmological models that predict this expansion, with the purpose of comparing them. Within this approach, the Λ CDM model, known as the standard cosmological model, demonstrates a high concordance with observational data and incorporates dark energy as responsible for driving the universe's expansion. However, there is the problem of

¹Graduanda em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

the cosmological constant, which arises due to the discrepancy between the energy scale required to explain cosmic acceleration and the predictions of particle physics regarding vacuum energy, which is considered a probable candidate for dark energy and has not been explained yet. Given this issue, this work presents two classes of alternative models: quintessence models, which introduce a scalar field to modify the material component of the universe, and modified gravity models $f(R)$, which suggest changes in the fundamental equations of general relativity. This work focuses on exploring the $f(R)$ modified gravity model in the Palatini formulation, with the function $f(R) = R - \beta/R^n$. The analysis was conducted by comparing the Hubble parameters obtained for each model with data from the cosmic chronometer, and it is concluded that the standard cosmological model adequately describes the universe's expansion and observed cosmological data. Furthermore, it indicates that the universe is composed of approximately 70 percent dark energy and 30 percent matter, including baryonic and dark matter. On the other hand, the analysis of the $f(R)$ modified gravity model revealed that it describes an accelerated expansion of the universe but does not reproduce the data from the cosmic chronometer for the adopted values of β and n .

Keywords: cosmology; expansion; $f(R)$; Palatini; standard model.

1 Introdução

A compreensão da expansão do universo tem sido objeto de estudo da cosmologia, o ramo da ciência dedicado à investigação das propriedades e evolução em larga escala do cosmos. Após formular a teoria da relatividade geral, Albert Einstein elaborou o primeiro modelo cosmológico que previa um universo estático e essa concepção vigente até que em 1929 Edwin Hubble observou o afastamento das nebulosas em relação à nossa galáxia, a Via Láctea. Essa observação, posteriormente confirmada pela detecção de supernovas do tipo 1A, possibilitou o entendimento de que o universo está atualmente em expansão acelerada.

Assim, modelos cosmológicos tem surgido para explicar esse fenômeno, entre eles o Λ CDM, conhecido como o modelo cosmológico padrão, o qual é amplamente aceito e consistente com várias observações, apresentando a energia escura como uma componente de pressão negativa que impulsiona a aceleração da expansão do universo e que seria descrita nas equações da relatividade geral pela constante cosmológica e energia do vácuo. No entanto, há discrepância entre a escala de energia necessária para explicar essa aceleração cósmica e as previsões da física de partículas.

Essa discrepância, conhecida como o problema da constante cosmológica, tem motivado a busca por modelos alternativos capazes de explicar a expansão do universo. Dois desses modelos em destaque são o modelo de quintessência, que propõe uma modificação na componente material do universo através da existência de um campo escalar, e o modelo de gravidade modificada $f(R)$, que sugere uma alteração nas equações fundamentais da relatividade geral.

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo analisar o modelo de gravidade modificada $f(R)$ segundo a formulação de Palatini para a expansão do universo, levando em consideração dados do cronômetro cósmico e tomando como referência o modelo cosmológico padrão. Através dessa análise, espera-se contribuir para um maior

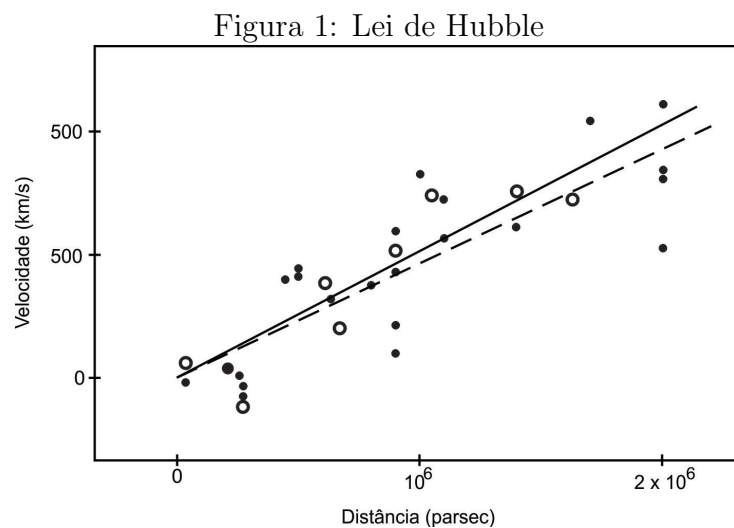
entendimento das possíveis explicações para a expansão acelerada do universo.

2 Cosmologia Padrão

A cosmologia é uma área da ciência que se dedica ao estudo do comportamento do universo em grandes escalas, ou seja, escalas superiores a 100 milhões de anos-luz. Nessas dimensões, o universo é considerado homogêneo e isotrópico, seguindo o princípio cosmológico. Isso significa que a densidade de galáxias é aproximadamente a mesma em todas as direções, e elas estão distribuídas de forma uniforme.

A descrição matemática desse fenômeno é fornecida pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que tem sido corroborada pelos dados da radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Esses dados também indicam que o universo possui uma geometria plana em grandes escalas.

Além disso, desde 1927, existem evidências que apontam para a expansão acelerada do universo. Nesse ano, George Lemaître observou o afastamento de nebulosas em relação à Via Láctea, através da análise de galáxias. Esse fenômeno foi posteriormente confirmado em 1929, por meio da análise de estrelas cefeidas realizadas por Edwin Hubble, conforme representado no gráfico da figura 1. A partir dessas observações, Hubble formulou a lei



de Hubble-Lemaître, que estabelece que a velocidade com que os objetos no universo se afastam uns dos outros é proporcional à distância entre eles. Assim, devido a esse afastamento, os objetos astronômicos são afetados pelo efeito Doppler, que descreve como o comprimento de onda (ou frequência) de uma onda eletromagnética muda de acordo com a velocidade da fonte em relação ao observador, fazendo com que os espectros dos objetos cósmicos se estendam para o vermelho segundo um observador terrestre, assim quanto maior for o desvio para o vermelho observado em um objeto cósmico, maior será a sua velocidade de afastamento em relação a terra, conseqüentemente, maior será a sua distância.

Posteriormente, observações realizadas em escalas maiores confirmaram a hipótese de que o universo está passando por uma expansão acelerada. Essa confirmação ocorreu em

1998, através dos trabalhos de Riess e Perlmutter, quando foram analisadas supernovas do tipo Ia. Ao contrário das estrelas cefeidas, que têm sua observação limitada ao Grupo Local de galáxias, ao qual a Via Láctea pertence, as supernovas eram preferíveis para essa análise devido ao fato de serem eventos astronômicos de maior luminosidade.

Do ponto de vista teórico, a chamada *Cosmologia Padrão* descreve a evolução do Universo a partir da Teoria da Relatividade Geral (TRG). Neste contexto, nesta seção, o nosso objetivo é apresentar alguns resultados previsto pela Cosmologia Padrão. Antes, porém, faremos uma breve abordagem sobre as equações de campo da TRG, as equações de Einstein.

2.1 Equações de Einstein

A Relatividade Geral, a qual é conhecida como a teoria relativística de gravitação, foi proposta por Albert Einstein (1879-1955) em 1915.

Baseada no chamado *Princípio da Equivalência*, o qual afirma que, localmente, o campo gravitacional equivale a um referencial não-inercial, essa teoria substitui a ideia de força, oriunda da gravitação newtoniana, pelo conceito de curvatura do espaço-tempo. Em outras palavras, diferentemente da teoria de Newton, a Relatividade Geral trata a gravitação como uma deformação no espaço-tempo, que muda conforme o conteúdo de matéria e energia presente.

Formalmente, a geometria de um espaço-tempo é caracterizada pelas dez componentes de um tensor de segunda ordem, $g_{\mu\nu}$, denominado tensor métrico. Por outro lado, como a TRG é uma teoria relativística, a distribuição de matéria e energia deve ser representada pelas componentes do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$.

Assim, por conta da concepção estabelecida pela Relatividade Geral, essa teoria deve utilizar um conjunto de dez equações diferenciais para determinar o campo gravitacional, isto é, a curvatura do espaço-tempo. Naturalmente, uma vez que a TRG deve coincidir com a teoria newtoniana, no limite em que o campo gravitacional é fraco, nessa situação essas equações diferenciais devem concordar com a de Poisson, que é a equação de campo da teoria de Newton. Levando isso em conta, depois de algumas tentativas Einstein concluiu que as equações de campo da Relatividade Geral, conhecidas como equações de Einstein, são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (1)$$

Nessas equações, as quantidades $R_{\mu\nu}$ e R , conhecidas como o tensor e escalar de Ricci, são dadas, respectivamente, por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (3)$$

sendo

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g x^{\lambda}} \right) \quad (4)$$

os símbolos de Christoffel.

Como podemos ver, o tensor e o escalar de Ricci são formados a partir do tensor métrico e de suas derivadas. Isso significa que o lado esquerdo das equações de campo de Einstein

está associado à geometria do espaço tempo; enquanto o direito está relacionado com a distribuição de massa e energia. Dessa forma, podemos concluir que, para a relatividade geral, as propriedades geométricas do espaço não são independentes da matéria, por outro lado, são determinadas por seu estado. (Einstein,2015)

Vale salientar que as equações de Einstein podem ser obtidas à partir da ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \int \sqrt{-g}(R - 2\kappa\mathcal{L}_F) d^4x , \quad (5)$$

em que $\kappa = 8\pi G/c^4$, sendo R e \mathcal{L}_F as densidades lagrangianas do campo gravitacional e dos demais campos presentes (CARMELI, 1982).

2.2 Modelo Λ CDM

Se nos basearmos nas equações de Einstein, dadas por (1), para descrevermos a dinâmica do universo, chegaremos a conclusão que ele se expande de forma desacelerada.

Porém, conforme argumentamos inicialmente, os dados observacionais indicam que o universo se expande de forma acelerada. Entretanto, para que esta aceleração pudesse acontecer, deveria haver algum tipo de energia imperceptível, uma "energia escura", responsável por uma repulsão mais intensa que a atração gravitacional.

O primeiro modelo que se predispôs a incluir a presença da energia escura foi o Λ CDM. Nesse caso, a energia escura é representada pela constante cosmológica Λ , incluída nas equações de Einstein como segue:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (6)$$

Inicialmente, Einstein introduziu a constante cosmológica com o propósito de manter o universo em um estado estático. No entanto, no contexto do modelo Λ CDM, ela desempenha o papel de impulsionar a expansão acelerada do universo. Na fase atual do universo, a constante cosmológica Λ é considerada a componente dominante, responsável por essa expansão acelerada.

Um dos candidatos físicos para a constante cosmológica é a energia do vácuo. No entanto, a escala de energia necessária para a constante cosmológica que explicaria a aceleração cósmica observada hoje é muito menor do que aquela prevista pela física de partículas. Isso resulta em uma discrepância significativa, uma vez que a densidade de energia do vácuo, quando avaliada somando a energia do ponto zero de um campo escalar, é aproximadamente 10^{121} vezes maior do que a densidade de energia escura observada (Amendola; Tsujikawa, 2010). Esse descompasso é conhecido como o problema da constante cosmológica.

- Equações de Friedmann

Conforme argumentamos na seção 2, a Cosmologia parte do pressuposto que, em qualquer instante, o universo é homogêneo e isotrópico. Levando isso em conta, Robertson e Walker mostraram que a métrica que descreve o universo deve ter a seguinte forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] , \quad (7)$$

sendo k uma constante que pode assumir os valores $-1, 0$ e 1 , e a uma função do tempo que é chamada de fator de escala. É importante destacar que os valores de k definem o tipo de geometria do universo. De fato, quando k for igual a -1 ou 1 o espaço-tempo será curvo e a geometria será, respectivamente, hiperbólica ou esférica. Já na situação em que $k = 0$, o espaço-tempo do universo será plano. (VILENKIN e SHELLARD, 1994)(Islam,2002)

Embora conheçamos a forma da métrica que satisfaz o princípio da homogeneidade e isotropia, ainda não sabemos como o universo evolui no tempo. Para obtermos tal informação, isto é, encontrarmos as equações que descrevem a evolução de $a(t)$, devemos recorrer às equações de Einstein. Para tanto, precisamos determinar os tensor e escalar de Ricci associados à métrica (7) e utilizar um tensor energia momento que seja condizente com o princípio acima citado.

A partir do elemento de linha (7), temos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Daí, segue que as componentes não-nulas dos símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= c^{-1}a\dot{a}/(1-kr^2), & \Gamma_{22}^0 &= c^{-1}r^2a\dot{a}, & \Gamma_{33}^0 &= c^{-1}r^2\text{sen}^2\theta a\dot{a}, & \Gamma_{01}^1 &= c^{-1}\dot{a}/a, \\ \Gamma_{11}^1 &= kr/(1-kr^2), & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\text{sen}^2\theta, & \Gamma_{02}^2 &= c^{-1}\dot{a}/a, \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta\cos\theta, & \Gamma_{03}^3 &= c^{-1}\dot{a}/a, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \cotg\theta, \end{aligned}$$

onde o “ponto” indica uma derivada com relação a t . Logo, substituindo esses símbolos em (2), podemos mostrar que únicas componentes não nulas do tensor de Ricci são as seguintes:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (10)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k}{c^2(1-kr^2)}, \quad (11)$$

$$R_{22} = \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k), \quad (12)$$

$$R_{33} = \frac{r^2\text{sen}^2\theta}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k). \quad (13)$$

Consequentemente, o escalar de Ricci é

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{6}{c^2a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2k). \quad (14)$$

Por outro lado, o Universo é preenchido pelo conteúdo físico, representado pelas galáxias, que se comporta de maneira similar a um fluido perfeito. Isso significa que é incompressível, não possui viscosidade e é irrotacional. Diante dessa característica, Weyl sugeriu que o tensor energia-momento, responsável por descrever o conteúdo material no Universo, pode ser expresso como,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} , \quad (15)$$

em que p e ρ dependem apenas do tempo e u^μ é a 4-velocidade do fluido dada por:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} , \quad (16)$$

sendo s o intervalo próprio (LANDAU e LIFSHITZ, 1974). Dado que todos os observadores que se encontram no universo são co-móveis, devemos tomar $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. No referencial co-móvel, temos que $dx^i = 0$. Além disso, de acordo com a métrica (7), nesse referencial, o intervalo próprio infinitesimal é $ds = cdt$. Isso garante que a quadrivelocidade seja dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Então, fazendo isso, temos que as componentes não-nulas do tensor $T_{\mu\nu}$ são:

$$T_{00} = \sum_i \rho_i, \quad T_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \sum_i p_i, \quad T_{22} = r^2 a^2 \sum_i p_i \quad \text{e} \quad T_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \sum_i p_i, \quad (17)$$

onde o somatório indica que estamos considerando todos os constituintes do Universo.

Finalmente, usando (10), (11), (14) e (17) em (6), vemos que as componentes 00 e 11 das equações de Einstein, na métrica de Robertson-Walker, são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \rho_i \quad (18)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} \sum_i p_i , \quad (19)$$

que são as chamadas *equações de Friedmann*. Vale salientar que, uma vez que não sabemos como o parâmetro de escala, a densidade e a pressão variam com o tempo, não conseguiremos descrever a dinâmica do Universo se nos basearmos apenas nas equações de Friedmann. De fato, para solucionarmos o problema da evolução, além das equações apresentadas acima, precisamos das equações de estado das quantidades que constituem o universo. Conforme menciona Carrol (2004), a maioria dos constituintes relevantes para a descrição do universo obedece à seguinte equação de estado:

$$p_i = \omega_i \rho_i, \quad (20)$$

sendo ω_i uma constante que assume valor igual a 1/3 para a matéria relativística ou radiação e que é nula na situação em que a matéria é não-relativística (matéria bariônica e escura).

Subtraindo (19) de (18), encontramos a seguinte equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{c^2} \sum_i \left(p_i + \frac{1}{3} \rho_i \right) . \quad (21)$$

Já que as densidade de matéria e radiação são positivas, a equação (21) nos permite concluir que, se atualmente, o “termo Λ ” for dominante, podemos afirmar que o universo está em expansão acelerada.

- Parâmetro de Hubble em termos de z

Derivando (18) e substituindo o termo \ddot{a} da equação (19) no resultado, obtemos

$$\dot{\rho}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_i + p_i) = 0 , \quad (22)$$

que é a equação relativística da conservação da energia em uma geometria de Robertson-Walker; algo semelhante à equação de continuidade, mas para o fluido cósmico. Logo, substituindo (20) em (22), encontramos:

$$\rho_i = \rho_{i0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega_i)} , \quad (23)$$

onde o índice “0” indica que a quantidade foi medida no tempo presente $t = t_0$.

É conveniente medir as diferentes contribuições de matéria e energia do Universo como uma fração da densidade crítica, $\rho_c \equiv 3c^2 H^2 / 8\pi G$, onde $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Para isto, definimos o parâmetro densidade:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} . \quad (24)$$

Como consequência, podemos escrever

$$\rho_i = \frac{3c^2 H^2 \Omega_i}{8\pi G} . \quad (25)$$

Substituindo esta equação em (18) e assumindo que o universo é plano, isto é, que $k = 0$, chegamos à:

$$H^2 \left(-1 + \sum_i \Omega_i + \Omega^\Lambda \right) = 0 , \quad (26)$$

em que

$$\Omega^\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} , \quad (27)$$

e $\sum_i \Omega_i = \Omega_m + \Omega_r$, sendo Ω_m e Ω_r os parâmetros densidade relacionados às massa e radiação, respectivamente. Mas, levando em conta que Λ é uma constante, da equação acima segue que $\Lambda = 3H_0^2 \Omega_0^\Lambda / c^2$. Com isso, podemos escrever

$$\Omega^\Lambda = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_0^\Lambda . \quad (28)$$

Por outro lado, utilizando (25) em (23), segue que

$$\Omega_i = \frac{\Omega_{i0} H_0^2 a_0^{3(1+\omega_i)}}{H^2 a^{3(1+\omega_i)}} . \quad (29)$$

Logo, substituindo (28) e (29) em (26), considerando que o universo é dominado pela matéria não relativística ($\omega_i = 0$) e pela energia escura ($\Lambda \neq 0$), e usando o fato que, no universo plano, $\Omega_{m0} + \Omega_0^\Lambda = 1$, chegamos à seguinte expressão:

$$H = H_0 \left[1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a^3} \right]^{1/2} , \quad (30)$$

Dado a lei de hubble, que relaciona a velocidade de recessão das galáxias com suas distâncias, e o desvio para o vermelho das galaxias, é conveniente reescrever o parâmetro de hubble em função do redshift para posteriormente compararmos o parâmetro com os dados observacionais, considerando o parâmetro de desvio para o vermelho como,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} , \quad (31)$$

onde λ_0 indica o comprimento de onda observado e este parâmetro pode ser relacionado com fator de escala,

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{z + 1} . \quad (32)$$

Assim, o parâmetro de hubble pode ser reescrito como,

$$H = H_0 [1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0} (1 + z)]^{1/2} , \quad (33)$$

o qual é responsável por descrever a dinâmica do universo no modelo cosmológico padrão. Assim, é possível comparar esta expressão com os dados observacionais e verificar se esse modelo prevê a expansão acelerada do universo.

3 Universo em Expansão: Teoria $f(R)$

Sabe-se que o modelo Λ CDM é amplamente consistente com diversas observações. No entanto, devido ao problema da constante cosmológica, apresentado na seção anterior, foram propostos modelos cosmológicos alternativos para explicar a expansão acelerada do universo. Esses modelos podem ser divididos em duas classes distintas.

A primeira classe corresponde aos modelos cosmológicos de quintessência. Esses modelos propõem uma modificação no conteúdo material do universo, incluindo um campo escalar canônico ϕ com um potencial $V(\phi)$. Esse campo escalar é responsável pela expansão do universo e interage gravitacionalmente com as outras componentes do universo. No entanto, detalhes específicos sobre esses modelos não serão abordados neste trabalho.

Por outro lado, a outra classe de modelos alternativo, propõem a modificação das equações da relatividade geral de Einstein. Neste trabalho, vamos nos ater ao modelo de gravidade modificada $f(R)$, no qual o escalar de curvatura de Ricci R é substituído por uma função de R . Dentro do contexto das teorias $f(R)$ de gravidade modificada, existem duas possíveis abordagens: a formulação métrica e a formulação Palatini.

A formulação métrica é obtida ao variar a ação em relação à métrica, resultando em equações de campo de quarta ordem. Estudos indicam que esse formalismo não descreve adequadamente a era do universo dominada pela matéria e a subsequente era de expansão acelerada (Amendola; Polarski; Tsujikawa, 2007)(Amendola; Gannouji; Polarski; Tsujikawa, 2007).

Por outro lado, a formulação de Palatini considera a métrica e as conexões como campos independentes e realiza a variação da ação em relação a ambos, resultando em equações diferenciais de segunda ordem na métrica. Essa abordagem é capaz de descrever a expansão acelerada do universo. Por esse motivo, neste trabalho, concentraremos nossa atenção no modelo de gravidade modificada formulado por Palatini.

3.1 Equações de Campo no Formalismo de Palatini

Na abordagem de Palatini, a ação de Einstein-Hilbert é substituída por

$$S = S_G - 2\kappa S_M , \quad (34)$$

em que

$$S_G = \int \sqrt{-g} f(\tilde{R}) d^4x \quad \text{e} \quad S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x \quad (35)$$

são, respectivamente, as ações que descrevem o campo gravitacional e os demais campos presentes no sistema, onde $f(\tilde{R})$ se comporta como o escalar de curvatura e \mathcal{L}_M é a densidade lagrangiana de matéria. Nessa expressão, o escalar e o tensor de Ricci se relacionam de forma análoga à TRG, ou seja, $\tilde{R} = g_{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}$, sendo

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\rho} - \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^{\sigma} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\rho} . \quad (36)$$

Porém, uma vez que, nessa abordagem, as conexões presentes não são as de Christoffel, utilizamos o “tilde” para indicar esse aspecto.

Para obtermos as equações do campo gravitacional, devemos impor que a variação da ação seja nula, isto é,

$$\delta S = 0 \Rightarrow \delta S_G - 2\kappa \delta S_M = 0 . \quad (37)$$

Fazendo a variação de S_G com respeito à métrica e às conexões, obtemos

$$\delta S_G = \int \left[f \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} f' \left(\tilde{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} \right) \right] d^4x , \quad (38)$$

onde a “linha” representa derivada com respeito a \tilde{R} .

Na formulação de Palatini as conexões não são definidas, à priori. Sendo assim, não podemos afirmar se o tensor de Ricci, dado pela equação (36), é simétrico, ou não. Porém, para desenvolvermos a última integral da expressão acima, assumiremos que esse tensor é simétrico. Fazendo isso, podemos mostrar que

$$\delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\alpha} (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}) - \tilde{\nabla}_{\nu} (\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\alpha}) . \quad (39)$$

Daí, usando a propriedade da derivada covariante do produto, segue que

$$f' g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\alpha V^\alpha + T_\alpha^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha, \quad (40)$$

em que

$$V^\alpha \equiv f' \left(g^{\mu\nu} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^\beta \right). \quad (41)$$

e

$$T_\alpha^{\mu\nu} = -\tilde{\nabla}_\alpha (f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (f' g^{\mu\sigma}) \delta_\alpha^\nu. \quad (42)$$

Levando isso em conta e usando a propriedade

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (43)$$

a equação (38) toma a seguinte forma:

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} \left(f' \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} \tilde{\nabla}_\alpha V^\alpha d^4x + \int \sqrt{-g} T_\alpha^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha d^4x. \quad (44)$$

Usando o teorema da divergência de Gauss, podemos transformar o segundo termo do lado direito em uma integral de superfície. Fazendo isso e usando o fato que, na superfície, $\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = 0$, concluiremos que esse termo é nulo. Além disso, o tensor $T_\alpha^{\mu\nu}$ não é simétrico nos índices $\mu\nu$, o que nos permite escrevê-lo como $T_\alpha^{\mu\nu} = T_\alpha^{(\mu\nu)} + T_\alpha^{[\mu\nu]}$, sendo $(\mu\nu)$ e $[\mu\nu]$ a simetrização e anti-simetrização, respectivamente. Naturalmente, uma vez que estamos considerando que as conexões são simétricas, essa característica nos leva à escrever $T_\alpha^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = T_\alpha^{(\mu\nu)} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$, onde

$$T_\alpha^{(\mu\nu)} = -\tilde{\nabla}_\alpha (f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (f' g^{\sigma(\mu}) \delta_\alpha^{\nu)}. \quad (45)$$

Consequentemente, a equação (44) torna-se

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} \left(f' \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} T_\alpha^{(\mu\nu)} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha d^4x. \quad (46)$$

Um vez que conhecemos δS_G , resta-nos, agora, calcular a variação da ação integral dos outros campos, δS_M . Fazendo isso, segue que

$$\delta S_M = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \right] d^4x. \quad (47)$$

Mas, usando o fato que $\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu})$, integrando por partes e, também, admitindo que a variação dos campos é nula na fronteira de integração, a equação acima pode ser reescrita como

$$\delta S_M = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial \partial_\alpha g^{\mu\nu}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (48)$$

ou ainda

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (49)$$

sendo

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \quad (50)$$

o tensor energia momento.

Finalmente, substituindo (46) e (49) em (37), chegamos à

$$\int \sqrt{-g} \left(f' \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} T_\alpha^{(\mu\nu)} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha d^4x = 0, \quad (51)$$

o que nos leva às seguintes equações:

$$f' \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (52)$$

e

$$T_\alpha^{(\mu\nu)} = 0 \Rightarrow -\tilde{\nabla}_\alpha (f' g^{\mu\nu}) + \tilde{\nabla}_\sigma (f' g^{\sigma\mu}) \delta_\alpha^\nu = 0. \quad (53)$$

A equação (52) expressa a generalização da equação de campo de Einstein para a gravidade $f(R)$ de Palatine. Por sua vez, (53) é a equação responsável pela dinâmica das conexões $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$. Além disso, quando $f(\tilde{R}) = \tilde{R}$, que corresponde à Lagrangeana de Einstein-Hilbert, as equações da Relatividade Geral são recuperadas.

Contraindo os índices α e ν da equação (53), encontramos que $\tilde{\nabla}_\sigma (f' g^{\sigma\mu}) = 0$. Logo, substituindo esse resultado em (53), obtemos:

$$\tilde{\nabla}_\alpha (f' g^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_\alpha (f' g_{\mu\nu}) = 0. \quad (54)$$

ou ainda

$$\partial_\alpha (f' g_{\mu\nu}) = f' (g_{\sigma\nu} \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\sigma + g_{\sigma\mu} \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\sigma). \quad (55)$$

Usando essa equação podemos mostrar que as conexões utilizadas no formalismo de Palatini, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$, não são as de Christoffel. De fato, após manipularmos (55), encontramos:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2f'} (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu f' + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu f' - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f') , \quad (56)$$

onde os símbolos $\Gamma_{\alpha\mu}^\sigma$ são dados pela equação (4).

Uma vez que f' contém derivadas das conexões, poderíamos pensar que a equação (56) não definiria as conexões. Acontece que, se contrairmos (52), obteremos

$$f' \tilde{R} - 2f = \kappa T. \quad (57)$$

A partir desta equação, poderemos encontrar $\tilde{R} = \tilde{R}(T)$, como queríamos aqui. Assim, os termos em (56) envolvendo f' poderão ser expressos como funções de T . E, como T contém apenas a métrica e não suas derivadas, a conexão envolverá somente as primeiras derivadas da métrica. Por conta disso, as equações de campo serão de segunda ordem na métrica $g_{\mu\nu}$.

Usando ((56)), podemos mostrar que os tensor e escalar de Ricci, generalizados, são dados por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_\mu f' \nabla_\nu f'}{2f'^2} - \frac{1}{f'} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \right) f' \quad (58)$$

e

$$\tilde{R} = R + \frac{3\nabla_\mu f' \nabla^\mu f'}{2f'^2} - \frac{3\Box f'}{f'} , \quad (59)$$

em que

$$\Box f' \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu f' = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f') , \quad (60)$$

sendo g o determinante da métrica.

Logo, substituindo (58) em (52), vemos que as equações de campo assumem a forma

$$R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_\mu f' \nabla_\nu f'}{2f'^2} - \frac{1}{f'} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box \right) f' - \frac{f}{2f'} g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f'} T_{\mu\nu} . \quad (61)$$

É importante destacar que, nessas equações, R , $R_{\mu\nu}$ e as derivadas covariantes são calculadas a partir das conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

3.2 Cosmologia no Formalismo de Palatini

Assumindo que as equações do campo gravitacional são dadas por (61), nosso objetivo agora é encontrar as equações de Friedmann e a expressão do parâmetro de Hubble em termos de z

- Equações de Friedmann generalizadas

Seguindo um procedimento análogo ao que foi aplicado na seção 2.2, para obtermos as equações de Friedmann generalizadas, admitiremos que a métrica que descreve o universo é a de Robertson-Walker e que o conteúdo de matéria e energia é representado pelo tensor do fluido perfeito. A única diferença é que, aqui, consideraremos que a geometria do universo é plana, isto é, que $k = 0$.

Conforme podemos observar em (14), na métrica de Robertson-Walker o escalar de Ricci, R , é função de t . Como consequência, segue que f' depende apenas do tempo e a operação $\Box f'$ toma a forma

$$\Box f' = 3 \frac{H \dot{f}'}{c^2} + \frac{\ddot{f}'}{c^2} . \quad (62)$$

Além disso, usando o fato que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f' = \partial_\mu \partial_\nu f' - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha f' \quad (63)$$

temos

$$\nabla_0 \nabla_0 f' = \frac{1}{c^2} \ddot{f}' \quad \text{e} \quad \nabla_1 \nabla_1 f' = \frac{1}{c^2} \ddot{f}' \nabla_0 \nabla_0 f' = -\frac{a\dot{a}}{c^2} \dot{f}' . \quad (64)$$

Assim, utilizando estes resultado, após algumas manipulações vemos que as componentes 00 e 11 das equações de campo modificadas, na métrica de Robertson-Walker, são dadas por:

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3H\dot{f}'}{2f'} + \frac{3\dot{f}'^2}{2f'^2} - \frac{3\ddot{f}'}{2f'} - \frac{1}{2} \frac{c^2 \dot{f}'}{f'} = \frac{8\pi G}{c^2 f'} \sum_i \rho_i \quad (65)$$

e

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{15}{2}\frac{H\dot{f}'}{f'} + 6H^2 + \frac{3}{2}\frac{\ddot{f}'}{f'} + \frac{3}{2}\frac{c^2\dot{f}}{f'} = \frac{24\pi G}{c^2 f'} \sum_i p_i, \quad (66)$$

as quais são as equações de Friedmann modificadas para a formulação de Palatini. Estas equações se reduzem às que são obtidas na TRG (com $\Lambda = 0$), quando tomamos $f = R$.

Somando as equações (65) e (66), obtemos

$$\left(H + \frac{\dot{f}'}{2f'}\right)^2 = \frac{4\pi G}{c^2 f'} \sum_i \left(p_i + \frac{\rho_i}{3}\right) - \frac{c^2 \dot{f}}{6f'}. \quad (67)$$

- Parâmetro de Hubble generalizado em termos de z

Afim de fazer uma análise semelhante a que realizamos na seção anterior, consideraremos que o Universo é dominado pela matéria, ou seja, suporemos que $p_i = 0$ e $\rho_i = \rho_m$, e que $\omega_i = 0$. Sendo assim, de acordo com as equações (25), (29) e (32), podemos escrever a densidade de matéria como

$$\rho_i = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 (1+z)^3 \Omega_{m0}. \quad (68)$$

Por outro, derivando a expressão (57) com relação a t e usando o resultado acima, temos:

$$\dot{\tilde{R}} = -\frac{9H}{c^2} \left[\frac{H_0^2 (1+z)^3 \Omega_{m0}}{\tilde{R}f'' - f'} \right]. \quad (69)$$

Finalmente, substituindo em $\dot{f}' = f''\dot{\tilde{R}}$ e aplicando na equação (67), encontramos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1}{6f'\xi^2} \left[3\Omega_{m0}(1+z)^3 - \frac{c^2 \dot{f}}{H_0^2} \right], \quad (70)$$

em que

$$\xi = 1 - \frac{9Hf''}{2c^2 f'} \left[\frac{H_0^2 (1+z)^3 \Omega_{m0}}{\tilde{R}f'' - f'} \right], \quad (71)$$

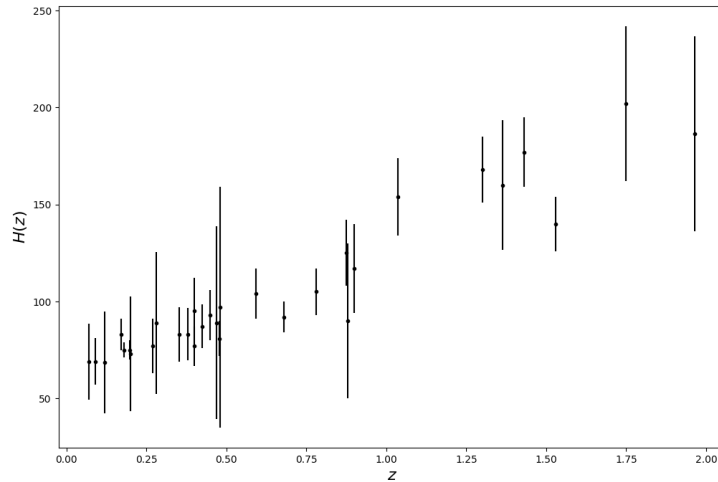
é o parâmetro de Hubble em função do red-shift e dos parâmetros cosmológicos. Ele é responsável por descrever a dinâmica do universo no modelo de gravidade modificada $f(R)$, formulado por Palatini.

objetivo

4 Comparação com os dados observacionais

Com o objetivo de compararmos os modelos cosmológicos e suas descrições da expansão do universo, utilizaremos dados de cronômetro cósmico representados pela figura 2, que consistem em objetos cuja evolução temporal é conhecida. As galáxias que evoluem passivamente são as escolhas mais adequadas como cronômetros. Essas galáxias já esgotaram seu reservatório de gás e têm uma taxa limitada de formação de novas estrelas, dado que é possível determinar o tempo decorrido desde que as galáxias esgotaram seu gás e interromperam a formação de estrelas. Ao comparar duas galáxias que se formaram no

Figura 2: Dados de Cronômetro Cósmitico

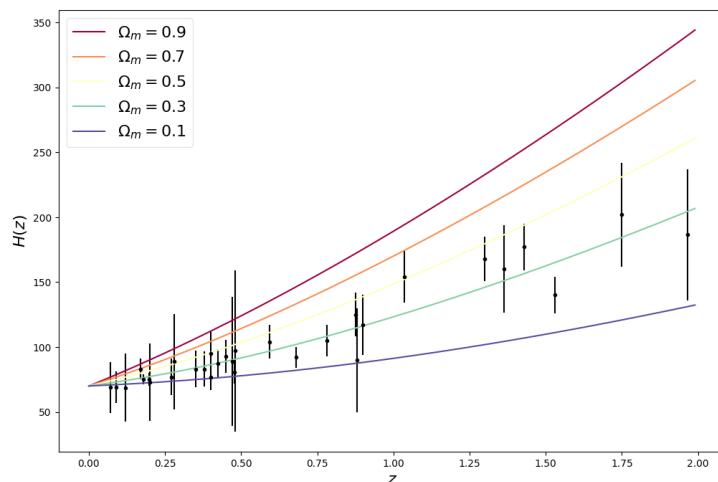


Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

mesmo redshift, a diferença em sua evolução fornece uma medida do tempo transcorrido entre esses redshifts.

A obtenção dessa diferença temporal nos permite determinar quão rapidamente o universo se expandiu entre os valores de redshift considerados. Isso proporciona a taxa de expansão $H(z)$ em cada redshift z . Portanto, utilizando dados de cronômetros cósmicos, podemos investigar e comparar os modelos cosmológicos, avaliando como eles descrevem a expansão do universo ao longo do tempo.

Figura 3: Comparação do parâmetro de Hubble do modelo Λ CDM, para diferentes valores de Ω_m , com os dados do Cronômetro Cósmitico.



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

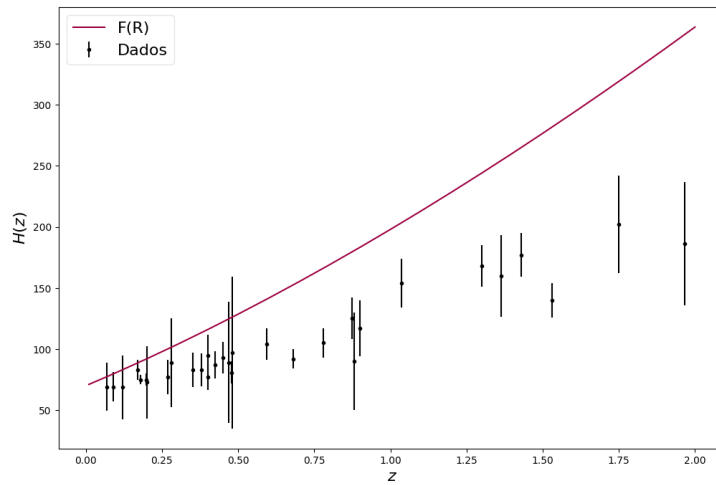
4.1 Análise do Modelo Cosmológico Padrão

Considerando o parâmetro de hubble do modelo cosmológico padrão, o qual é dado por (33), e o valor atual para o H_0 como aproximadamente 70 km/sMpc^{-1} , temos a

possibilidade de atribuir diferentes valores para o parâmetro densidade da matéria e comparar o resultado da evolução do parâmetro de hubble do modelo para diferentes valores de redshift com os dados observacionais.

Seguindo essa linha de raciocínio, vemos que $\Omega_m = 0,3$ é o valor que produz o melhor ajuste entre a previsão teórica e o dados observacionais [Ver fig. 3]. Diante disso, podemos dizer que o modelo cosmológico padrão prevê que o universo é composto por trinta por cento de matéria bariônica e escura, e setenta por cento de energia escura. Além disso, podemos concluir que esse modelo apresenta uma boa representação dos dados do cronômetro cósmico.

Figura 4: Comparação da evolução do parâmetro de Hubble do modelo de gravidade modificada na Formulação de Palatini, para $f(\tilde{R}) = \tilde{R} - \beta\tilde{R}^{-n}$ ($\beta = 3, n = -2, c = 1$ e $\Omega_{m0} = 1$), com os dados do Cronômetro Cósmico.



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

4.2 Análise de Gravidade Modificada $f(R)$ na Formulação de Palatini

Utilizando o parâmetro de Hubble dado pela equação (70) e mantendo o valor natural para H_0 como aproximadamente $70km/sMpc^{-1}$, vamos considerar a função $f(\tilde{R})$ como sendo $f(\tilde{R}) = \tilde{R} - \beta\tilde{R}^{-n}$, que, segundo alguns autores, é uma possível candidata para descrever a expansão acelerada do universo (Fay; Tavakol; Tsujikawa, 2007)(Oliveira, 2010).

Fazendo isso, vemos que as equações (57) e (70) tomam a forma:

$$\beta(2+n)\tilde{R}^{-n} - \tilde{R} = \frac{3H_0^2}{c^2}\Omega_{m0}(1+z)^3 \quad (72)$$

e

$$\frac{H}{H_0} = \left\{ \frac{1}{6(1+\beta n\tilde{R}^{-(n+1)})\xi^2} \left[3\Omega_{m0}(1+z)^3 - \frac{c^2}{H_0^2}(\tilde{R} - \beta\tilde{R}^{-n}) \right] \right\}^{1/2}, \quad (73)$$

onde

$$\xi = 1 - \frac{9}{2c^2} \frac{n(n+1)\beta\tilde{R}^{-(n+2)}}{1+n\beta\tilde{R}^{-(n+1)}} \left[\frac{H_0^2(1+z)^3\Omega_{m0}}{1+n^2+2n\beta\tilde{R}^{-(n+1)}} \right]. \quad (74)$$

Para realizamos uma análise semelhante a que fizemos na seção anterior, inicialmente, o nosso objetivo seria encontrar $\tilde{R}(z)$, a partir da equação (72), e substituir o resultado em (73). Com isso teríamos uma função explícita de H em termos de z . Porém, a equação (72) não nos permite obter uma expressão algébrica para $H(z)$. Por conta disso, partimos para uma análise numérica, onde, atribuindo os valores $\beta = 3$, $n = -2$, $c = 1$ e $\Omega_{m0} = 1$, construímos uma tabela de $\tilde{R} \times z$. Em seguida de posse dessas informações, utilizamos a equação (73) para obtermos o comportamento do parâmetro de Hubble em diferentes valores de redshift, conforme indica o gráfico da figura 4.

Analisando essa figura, podemos concluir que, apesar do modelo adotado apresentar uma expansão acelerada do universo para a função escolhida, com os valores de β e n utilizados, ele não se mostrou adequado para representar os dados do cronômetro cósmico.

5 Conclusão

Neste trabalho, abordamos aspectos da cosmologia moderna e exploramos a compreensão da expansão do universo analisando os modelos cosmológicos que preveem essa expansão, destacamos o modelo Λ CDM, descrevendo o formalismo da relatividade geral e as concepções do modelo sobre a composição do universo. Além disso, destacamos que, apesar do modelo ser amplamente consistente com os dados, há o problema da constante cosmológica, que até esse momento não foi solucionado.

Diante dessa questão, nosso estudo se aprofundou na abordagem de modelos alternativos, apresentando duas classes: o modelo de quintessência, que introduz um campo escalar para modificar a componente material do universo, e o modelo de gravidade modificada $f(R)$, que propõe alterações nas equações fundamentais da relatividade geral. Nosso foco esteve na exploração detalhada do modelo de gravidade modificada na formulação de Palatini, utilizando a função $f(\tilde{R}) = \tilde{R} - \beta\tilde{R}^{-n}$.

Ao compararmos os parâmetros de Hubble obtidos para cada modelo com os dados do cronômetro cósmico, chegamos à conclusão de que o modelo cosmológico padrão, Λ CDM, descreve de maneira adequada a expansão do universo e está em concordância com os dados cosmológicos observados. Além disso, o modelo padrão indica que o universo é composto por cerca de setenta por cento de energia escura e 30 por cento de matéria, incluindo matéria bariônica e escura.

Por outro lado, nossa análise revelou que o modelo de gravidade modificada descreve uma expansão acelerada do universo, mas não reproduz os dados do cronômetro cósmico, para os valores de β e n adotados, o que possibilita que outros valores sejam atribuídos para essas constantes com o objetivo de obter um resultado mais consistente com os dados.

Assim, se ressaltamos a relevância da busca por uma compreensão mais abrangente da expansão cósmica e o estudo de modelos alternativos, tendo em vista que a energia escura e a aceleração do universo continuam como problemas em aberto na cosmologia. Através de pesquisas futuras, esperamos obter melhores ajustes com os dados para modelos de gravidade modificada.

REFERÊNCIAS

AMENDOLA, Luca et al. **Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark**

energy models. Physical Review D, v. 75, n. 8, p. 083504, 2007.

AMENDOLA, Luca; POLARSKI, David; TSUJIKAWA, Shinji. **Are $f(R)$ dark energy models cosmologically viable?**. Physical review letters, v. 98, n. 13, p. 131302, 2007.

AMENDOLA, Luca; TSUJIKAWA, Shinji. **Dark energy: theory and observations.** Cambridge University Press, 2010.

DUGAS, R. **A history of mechanics**, Dover publications, 2012.

EINSTEIN, A.; LIFSHITZ, E. **A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade especial e geral**, LePM, 2015.

FRANÇA, Urbano. **Fenomenologia de modelos cosmológicos com campos escalares exponenciais.** Dissertação de mestrado, Instituto de Física Teórica (IFT) da Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2004.

FRANÇA, Urbano; ROSENFELD, Rogerio. **Fine tuning in quintessence models with exponential potentials.** Journal of High Energy Physics, v. 2002, n. 10, p. 015, 2002.

HUBBLE, Edwin. **A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae.** Proceedings of the national academy of sciences, v. 15, n. 3, p. 168-173, 1929.

ISLAM, Jamal Nazrul. **An introduction to mathematical cosmology.** Cambridge University Press, 2002.

LANDAU, L. **The classical theory of fields**, Butterworth-Heinemann, 2013.

NOVELLO, M. **Cosmologia**, Livraria da física, 2010.

OLIVEIRA, Thiago Bruno Rafael de Freiras. **Teorias $f(R)$ de Gravidade na Formulação de Palatini.** 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

PERLMUTTER, Saul et al. **Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae.** The Astrophysical Journal, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.

REIS, Ribamar RR; SIFFERT, Beatriz B. **Supernovas do tipo Ia e a expansão do Universo.** Cadernos de Astronomia, v. 3, n. 1, p. 21-21, 2022.

RIESS, Adam G. et al. **Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.** The astronomical journal, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

SOARES, D. **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas**, Universidade Federal De Minas Gerais, 2013.

VILENKIN, Alexander; SHELLARD, E. Paul S. **Cosmic strings and other topological defects**. Cambridge University Press, 1994.

AGRADECIMENTOS

Aos meus queridos pais, Vilanilza e Carlos, agradeço por todo o apoio, incentivo e dedicação aos meus estudos desde o início. Vocês leram histórias para mim todas as noites, corrigiram minhas atividades escolares e estiveram presentes em meus pensamentos todos os dias durante a graduação.

À minha amada irmã Rayanny, agradeço por me ensinar a ler, escrever, contar histórias, assistir filmes clichês e por sempre ter tempo para conversar comigo.

Ao meu companheiro Cleyton, por me acompanhar em resoluções de equações, por discutir sobre física diariamente, por me dar forças para continuar estudando, especialmente nos dias em que pensei em desistir e por me fazer sorrir durante todo o processo.

À Zequinha, meu amigo de quatro patas, por sempre cuidar de mim e me fazer companhia.

À minha melhor amiga Bela, obrigada por estar presente em mais uma etapa da minha vida, por compartilhar comigo pensamentos, conversas, angústias e sorrisos.

Agradeço à Vitoria, pela companhia constante durante os dias na universidade, a graduação se tornou mais divertida depois que a conheci.

À Jean, meu orientador, seu fascínio pela física, e dedicação me inspiraram profundamente. Serei eternamente grata por tudo que aprendi sob sua orientação.

À Raissa, agradeço pela disposição em me ensinar, pelos conselhos e por ter transmitido um pouco de sua paixão pela física na sala de aula.

Ao Professor Everton, agradeço por ter aceitado compôr a banca deste trabalho e por ter me apoiado nessa fase de conclusão da graduação.

Por fim agradeço a Universidade Estadual da Paraíba e à todos os docentes com quem tive a honra de aprender.