UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GISELLY GUIMARÃES GONÇALVES

UM ESTUDO SOBRE A INTEGRAL GAUSSIANA

CAMPINA GRANDE
2023

GISELLY GUIMARÃES GONÇALVES

UM ESTUDO SOBRE A INTEGRAL GAUSSIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2023

G635e Goncalves, Giselly Guimaraes.
Um estudo sobre a Integral Gaussiana [manuscrito] / Giselly Guimaraes Goncalves. - 2023.
30 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação : Prof. Dr. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Estatística. 2. Integral gaussiana . 3. Método de Laplace. I. Título

21. ed. CDD 519.23

Elaborada por Estela F. P. dos Santos - CRB - 15/841 BORAA/UEPB

GISELLY GUIMARÃES GONÇALVES

UM ESTUDO SOBRE A INTEGRAL GAUSSIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Aprovado em: 05/12/2023

BANCA EXAMINADORA

[illegible]

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maxwell Aires da Silva

Prof. Me. Maxwell Aires da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Antonio de França

Prof. Dr. Antonio Marcos Duarte de França
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

A minha mãe, Gerusa, que me ensinou a contar. Ao meu pai, Ausione, que me ensinou a fazer conta de cabeça. Aos meus irmãos, Gustavo e Giulia, que podem contar comigo para tudo. A minha amiga, Izabella, que é com quem eu conto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha querida orientadora, Emanuela, que esteve comigo durante todo o processo. Agradeço não apenas pelo trabalho que realizamos, mas também pelas aulas das quais tive o prazer e a sorte de participar. Manu, você é a professora que sonho em ser.

Expresso meu agradecimento ao professor Onildo Onofre, que, mesmo sem saber, foi o professor que me deu forças para continuar no curso durante a triste pandemia que passamos. Agradeço pelas valiosas aulas de cálculo II e III.

Agradeço à minha querida amiga Jamily, com quem posso sempre contar para viver os melhores dias da minha vida.

Agradeço à minha amiga Hellen, obrigada por estar ao meu lado mesmo à distância.

Expresso minha gratidão à Ana Távata, que mais ouviu sobre este trabalho, ajudou-me e ofereceu com carinho suas palavras de apoio.

Agradeço a Gian, a quem chamo de vida. Obrigada por estar comigo nesta jornada, por todos os conselhos pré-provas, por segurar minha mão nos momentos em que não consegui pedir ajuda, pelos incentivos, pelos puxões de orelha e pelos sorrisos.

RESUMO

A Integral Gaussiana, como o nome diz, vem da função Gaussiana e é conhecida pela grande aplicabilidade, especialmente, na estatística; e pela impossibilidade de ser calculada diretamente pelos métodos convencionais. Nesse trabalho, apresentamos a integral Gaussiana, baseado no artigo intitititulado "The Gaussian Integral" de Keith Conrad (2016), e calculamos seu valor diretamente de cinco formas distintas: A primeira forma, a mais simples, é dada por coordenadas polares e, a 5ª, a mais elaborada, é uma reprodução do método original, devido a Laplace. As demais formas dependem de argumentos diversos.

Palavras-chave: integral Gaussiana. demonstração. Laplace.

ABSTRACT

The Gaussian Integral, as the name suggests, arises from the Gaussian function and is renowned for its broad applicability, particularly in statistics, and for its impracticality to be directly computed by conventional methods. In this study, we present the Gaussian integral, based on the article entitled "The Gaussian Integral" by Keith Conrad (1), and calculate its value directly in five different ways: The first form, the simplest, is given by polar coordinates and the most elaborate is a reproduction of the original method, due to Laplace. How else depends on different arguments.

Keywords: Gaussian integral. proof. Laplace.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como proposta apresentar algumas formas de resolução da integral gaussiana, dada por

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aqui, apresentamos cinco formas diferentes de resolvê-la, incluindo a prova original feita por Laplace[1] em 1774. A proposta é que, em cada prova, mostremos referências que apresentem os objetos e resultados utilizados, e ainda o passo a passo de cada argumento necessário.

A integral gaussiana, como o nome diz, deriva da função gaussiana. De acordo com Lee, em (4), o primeiro a utilizar um método que calculasse explicitamente o valor da integral foi Laplace, em 1774, no Artigo *Mémoire sur la probabilit é des causes par les évenmentsmas*, mas ela já havia aparecido anteriormente nos trabalhos de De Moivre, a partir de um estudo sobre séries. A integral Gaussiana é usada em diversas áreas, como química, física e até biologia. Mas sua importância maior se dá nas aplicações em estatística, especialmente na área de probabilidade.

A ideia de apresentar este tema surgiu após a resolução de uma Equação Diferencial Ordinária[2] que resultava em uma integral gaussiana. Ao questionar professores sobre não conseguir resolvê-la, recebi a resposta de que não seria possível com métodos convencionais (por partes, por substituição, entre outros), uma vez que a função $f(x) = e^{-x^2}$ não possui primitiva elementar. Decidi então me debruçar sobre ela.

Em (2), Morais e Filho destaca que esse tipo de questionamento é comum nos cursos de Cálculo e apresenta como consequência do Primeiro Teorema de Liouville: se p é um polinômio de grau maior que 1, então $\int e^{p(x)}dx$ não pode ser escrita como uma função elementar [3], ou seja, a partir de funções que nos são conhecidas nos cursos de Cálculo. Assim, a função e^{-x^2} é um caso particular deste.

Para as provas que apresentamos aqui, utilizamos essencialmente como base o artigo "The Gaussian Integral" de Keith Conrad, ver (1), o autor apresenta nove formas de resolver a integral. Outras formas de resolução podem ser encontradas também em (3) e (4). Algumas generalizações, podem ser encontradas em (9).

Este trabalho está dividido em sete capítulos, sendo eles: a introdução, com uma breve contextualização e objetivo do estudo; a primeira prova feita por coordenadas polares; a segunda prova denominada por *outra mudança de variáveis.*; a terceira prova feita pela derivação sob o sinal da integral, nessa demonstração foi utilizado o teorema fundamental do

[1] Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês.

[2] Equações que só apresentam derivadas ordinárias em relação a uma variável.

[3] As funções elementares são as polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, hiperbólicas, etc.

cálculo e o teorema de Leibniz; a quarta demonstração feita por estimativas assintóticas; a quinta demonstração, a demonstração original feita por Laplace; e por fim, a conclusão.

2 PRIMEIRA PROVA: COORDENADAS POLARES

A primeira prova a ser apresentada aqui é a mais simples, portanto, a mais conhecida e utiliza uma mudança de variáveis para o que chamamos de Coordenadas Polares. O termo Coordenadas Polares foi introduzido pelo Matemático Italiano Gregorio Fontana (1735-1803), mas os estudos sobre esse sistema de coordenadas passaram por Newton[1], Bernoulli[2] e Euler[3]. De acordo com (4) essa prova é devida ao Matemático e Físico Francês Simeon Denis Poisson (1781–1840).

2.1 Coordenadas Polares

Para definirmos as coordenadas polares, primeiro escolhemos um ponto no plano, que chamaremos de pólo (ou origem) e o denotaremos de O. Então desenhamos um raio inicial (ou eixo polar) começando em O. Esse raio é normalmente desenhado horizontalmente e apontando para a direita, correspondendo à parte positiva do eixo x em coordenadas cartesianas. Desta forma, cada ponto P pode ser localizado por meio de sua associação a um par de coordenadas polares, (r,θ), no qual r dá a distância orientada de O a P e θ dá o ângulo orientado do eixo polar ao eixo OP.

Assim, se $P = (x,y)$ no sistema cartesiano, e $P = (r,\theta)$ no sistema de coordenadas polares descrito acima, então P pertence à circunferência de raio r, ou seja, $x^2 + y^2 = r^2$ e, utilizando as relações do círculo trigonométrico, concluímos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Essas são as relações que usamos na primeira prova.

Mais detalhes sobre a utilização de coordenadas polares podem ser encontradas em (8), capítulo 10, pág. 592.

2.2 Prova

Seja I a integral a ser calculada, ou seja,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Assim,

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right).$$

Note que podemos trocar a variável x por qualquer outra variável, já que o valor da integral é um certo número e não depende de x. Substituindo uma das variáveis x por y, ficaremos com

[1]Isaac Newton(1642-1727), Físico e Matemático Inglês.
[2]Jacob Bernoulli (1654 - 1705), Matemático Suíço.
[3]Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), Matemático Suíço.

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right).$$

A integral $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ é um número. Para chegarmos a essa conclusão, considere a função e^{-y^2} no intervalo $[0, \infty)$. Podemos compará-la com a função e^{-y} para $y \geq 1$, pois, e^{-y^2} é sempre menor que e^{-y} para $y \geq 1$. Ou seja, $0 > e^{-y^2} \geq e^{-y}$. Agora, calculando a integral de e^{-y} de 0 à infinito:

$$\int_0^\infty e^{-y} dy = \lim_{a \to +\infty} \left(\int_0^a e^{-y} dy\right) = \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^a} + 1\right) = 1.$$

Se a integral de e^{-y} converge, então $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ também converge, e portanto é um número.

Podemos passá-la para dentro da primeira integral, formando uma integral dupla

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) dx.$$

E como e^{-x^2} é uma constante em relação a y, podemos passar a função para dentro da integral dy

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Chegamos então em uma integral iterada. Nosso objetivo é calcular o valor da integral mudando ela para coordenadas polares. Para calcular usando coordenadas polares, o primeiro quadrante é definido como o conjunto de pontos (r, θ) em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Perceba que em (2.1) aparece $x^2 + y^2$ que em coordenadas polares é igual a r^2, então $x^2 + y^2 = r^2$ e, por fim, $dxdy = rdrd\theta$.[4]

Reescrevendo a integral

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Como a integral $\int_0^\infty e^{-r^2} r dr$ não depende de θ, o resultado será um número. Podemos

[4]Para mais detalhes ver (8), capítulo 10, pág. 593.

então retirá-la de dentro da integral de θ,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para resolver $\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr$, utilizando a integração por partes, chamando $u = -r^2$ e derivando, temos

$$\frac{du}{dr} = -2r \Rightarrow du = -2r dr \Rightarrow \frac{du}{-2} = r dr.$$

Mudando os limites de integração, temos que $r \in (0, \infty)$ para $u \in (0, -\infty)$.

Então ficamos com

$$\int_0^{-\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-\infty} e^u du = -\frac{1}{2} \left(\lim_{u \to -\infty} e^u - e^0 \right) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

Voltando para (2.2)

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^{-2}} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Encontramos o valor de I^2 e, como $I > 0$, então

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\square$

3 SEGUNDA PROVA: OUTRA MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Para a segunda prova, utilizamos um artifício semelhante ao feito no capítulo anterior, de modo a transformar a integral numa integral dupla. Em seguida, fazemos uma mudança de variáveis conveniente e outros argumentos para calcularmos o valor da integral. Essa prova é devida a Laplace, de acordo com (1), mas não é a primeira prova apresentada por ele.

Na argumentação desta prova, utilizamos o Teorema de Fubini, enunciado a seguir, cuja prova pode ser encontrada em (7).

Teorema 3.1 (Teorema de Fubini)**.** *Seja* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *integrável.*

(1) Com a possível exceção de um conjunto de medida nula em $[a,b]$ *e de um conjunto de medida nula em* $[c,d]$*, estão respectivamente bem definidas as integrais* $\int_c^d f(x,y)dy$ *e* $\int_a^b f(x,y)dx$*.*

(2) Definamos as integrais acima, nos respectivos subconjuntos em que elas não existem, como ou a respectiva função integral inferior (em todos os pontos do respectivo subconjunto) ou a respectiva função integral superior (em todos os pontos do respectivo subconjunto). As funções assim obtidas, respectivamente definidas em $[a,b]$ *e em* $[c,d]$*, são integráveis e satisfazem*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

3.1 Prova

Como antes, seja I a integral a ser calculada, isto é,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e, olhando para I^2,

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right).$$

Faremos o mesmo processo da Prova apresentada no Capítulo 2, logo

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dydx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dydx. \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Seja $t = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$, e daí $x = yt$. Derivando em dt, temos $dx = ydt$.
Substituindo em (3.1)

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-((yt)^2+y^2)} ydtdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2t^2+y^2)} ydtdy. \end{aligned}$$

Colocando o y^2 do expoente de e em evidência, temos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2\cdot(t^2+1)} ydtdy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2\cdot(t^2+1)} ydt \right) dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2\cdot(t^2+1)} ydy \right) dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A última igualdade é possível pelo Teorema de Fubini (Teorema 3.1).
Note que $\int_0^\infty e^{-ay^2} ydy = \frac{1}{2a}$, com $a > 0$.

De fato, por substituição, considerando $u = ay^2$, temos $du = 2aydy$ e, consequentemente, $\frac{du}{2a} = ydy$. Assim, considerando $a = t^2 + 1$ em 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ay^2} ydy &= \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{du}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \int_0^\infty e^{-u}\, du \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \lim_{a \to +\infty} \left(\int_0^a e^{-u}\, du \right) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^a} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Como $a = t^2 + 1 > 0$, $\forall t$, segue-se que $\lim_{\tau \to \infty} e^{-a\tau^2} = 0$, daí

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ay^2} ydy &= -\frac{1}{2a} \cdot e^{-ay^2} \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2a} \cdot (0 - 1) \\ &= -\frac{1}{2a} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Retornando para (3.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2\cdot(t^2+1)} y dt \right) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2(t^2+1)} dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} \arctan(\tau) - \arctan(0) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{\tau\to\infty} \arctan(\tau) \right)
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{\tau\to\infty} \arctan(\tau) = \frac{\pi}{2}$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, encontramos o valor de I^2. Então como $I > 0$, temos que

$$
I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
$$

$\square$

4 TERCEIRA PROVA: DERIVAÇÃO SOB O SINAL DA INTEGRAL

Para esta prova, utilizamos o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Leibniz enunciados a seguir. Aqui, introduzimos uma função auxiliar conveniente e a comparamos com outra de cálculo mais fácil, e integrável num intervalo limitado, de modo que os argumentos necessários sejam mais simples. Em Conrad (1), indica que há discussões que aproximam a prova apresentada neste Capítulo, da Prova via Coordenadas Polares. Em resumo, o debate parte da ideia que ambas as provas escolhem uma curva convexa parametrizada como ponto de partida e fazem uma substituição conveniente, de modo a encontrar uma integral trivial.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.

(2) F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Ver (5), 2001, p. 132. □

4.1 Teorema de Leibniz

Teorema 4.2 (Teorema de Leibniz)**.** *Seja $f : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua.*

(1) É contínua (em $[a,b]$) a função

$$F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy.$$

(2) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe e é contínua (em $[a,b] \times [0,1]$) então F é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy. \tag{4.1}$$

Demonstração. Ver (6), 2015, p. 4. □

4.2 Prova

Queremos determinar o valor de I, dada por

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Para isso, defina, para $t > 0$, a função

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Nesse caso, como A é dada por uma integral de uma função contínua, então é bem definida.

Nosso objetivo é provar que o valor de $\lim_{t\to\infty} A(t) = I^2$. Derivando A e usando Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 4.1), obtemos

$$\begin{aligned} A'(t) &= \left(\left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2\right)' \\ &= 2 \cdot \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right) \cdot e^{-t^2} \\ &= 2e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Se $y = \frac{x}{t}$ com $t \neq 0$, então $x = yt$ e derivando, temos em t, $dx = t \cdot dy$. Perceba que se $x = 0$, então $yt = 0$. Como t é uma constante positiva, temos $y = 0$. E, da mesma forma, se $x = t$, então $ty = t$ e portanto $y = 1$. Com isso temos o novo limite de integração:

$$\begin{aligned} A'(t) &= 2e^{-t^2} \int_0^1 e^{-(ty)^2} t dy \\ &= 2e^{-t^2} \int_0^1 te^{-t^2y^2} dy. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_0^1 2te^{-t^2} e^{-t^2y^2} dy \\ &= \int_0^1 2te^{-(1+y^2)t^2} dy \\ &= \int_0^1 2te^{-t^2(1+y^2)} dy. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Note que é conhecida a antiderivada em relação a t. Por substituição, fazendo

$$u(t,y) = e^{-t^2(1+y^2)},$$

temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t^2(1+y^2)} \cdot (-2t \cdot (1+y^2))$$

ou seja,

$$-\frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 2t \cdot e^{-t^2(1+y^2)}$$

e substituindo na integral (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \int_0^1 2te^{-t^2(1+y^2)}dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(-\frac{1}{(1+y^2)}\right)\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t^2(1+y^2)}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1+y^2}\right)dy \\
&= \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2}\right)dy.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Leibniz (Teorema 4.2), podemos retirar a derivada parcial para fora da integral, então

$$A'(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2}dy\right).$$

Definindo

$$B(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx,$$

e então, temos

$$A'(t) = -B'(t)$$

para todo $t > 0$, o que implica em

$$A(t) = -B(t) + C.$$

Daí, segue-se que

$$\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx + C, \tag{4.3}$$

em que C é uma constante. Para encontrar o valor de C, fazendo $t \longrightarrow 0$, em 4.3 temos

$$\lim_{t\to 0} A(t) = \lim_{t\to 0}\int_0^t e^{-x^2}dx = 0.$$

E, no lado direito, observando que a convergência é uniforme em $[0,1]$, então podemos aplicar em $t = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{e^{-0^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx + C &= -\int_0^1 \frac{e^0}{1+x^2}dx + C = -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + C \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{x^2+1^2}dx + C = -\frac{1}{1}\cdot \arctan(x)\Big|_0^1 + C \\
&= -\arctan(x)\Big|_0^1 + C = -(\arctan(1) - \arctan(0)) + C \\
&= -(\frac{\pi}{4} - 0) + C = -\frac{\pi}{4} + C.
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores encontrados,

$$
0 = -\frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.
$$

Agora como temos o valor de C, podemos voltar para a equação (4.3) com $t \longrightarrow \infty$,

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 \\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx + \frac{\pi}{4} \\
&= \int_0^1 \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right)dx + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right) &= \frac{\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t^2(1+x^2)}\right)}{\lim_{t\to+\infty(1+x^2)}} \\
&= \frac{0}{1+x^2} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

então,

$$
I^2 = \frac{\pi}{4}
$$

e, portanto,

$$
I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},
$$

uma vez que $I \geq 0$.

□

5 QUARTA PROVA: ESTIMATIVAS ASSINTÓTICAS

Aqui, a ideia é fornecer estimativas que limitem o valor da integral desejada, tanto inferiormente, quanto superiormente, por integrais mais conhecidas. Partimos da Expansão em Série de Potências da Função e^x, para identificar as possíveis limitações. De acordo com Conrad (1), a técnica é baseada no que foi feito por Watson em (10).

Recorde que uma série de potências centrada em $a \in \mathbb{R}$, é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_i(x-a)^i + \cdots,$$

com $a_n \in \mathbb{R}$, para todo n natural. Essa série converge num intervalo cujo centro é o centro da série.

Ainda, dizemos que uma função f é desenvolvível em série de potências em um intervalo $(a-r, a+r)$, quando f é infinitamente derivável em $(a-r, a+r)$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

nesse caso, prova-se (ver (8), p. 699) que os coeficientes a_n são dados por $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

A série acima é chamada de Série de Taylor de f em a. Quando $a = 0$, a série de Taylor é chamada de Série de Maclaurin.

Assim, a Série de Maclaurin de e^x em $x = 0$ é dada por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Logo, se $x \geq 0$

$$1 + x \leq e^x \quad \text{e} \quad 1 - x \leq e^{-x},$$

e consequentemente, da primeira desigualdade,

$$\frac{1}{1+x} \geq e^{-x},$$

e assim, se $x \geq 0$,

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}. \tag{5.1}$$

A prova apresentada nesse Capítulo, parte da desigualdade acima.

5.1 Prova

Partindo de (5.1), considerando x^2, no lugar de x (o que é possível pois é verdade para todo $x \geq 0$) temos

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Assim, se n é inteiro e positivo, elevando os termos de (5.2) a n e integrando de 0 a 1, obtemos

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \ \ \leq \ \ \int_0^1 \left(e^{-x^2}\right)^n dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx.$$

Como

$$\int_0^1 \left(e^{-x^2}\right)^n dx = \int_0^1 e^{-nx^2} dx = \int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx$$

então,

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \leq \int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx. \tag{5.3}$$

Agora, considere as seguintes mudanças de variáveis:

(i) Em $\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$ considere $x = \operatorname{sen}\theta$, logo $dx = \cos\theta d\theta$ e, portanto,

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta;$$

(ii) Em $\int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx$, considere $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$, logo $dx = \frac{1}{\sqrt{n}} dy$ e, portanto,

$$\int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy;$$

(iii) Em $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx$, considere $x = \tan\theta$, logo $dx = \sec^2\theta d\theta$ e,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^{2n}(\theta)} \cdot \sec^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta.$$

Assim, retornando para (5.3), obtemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta \ \ \leq \ \ \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta. \tag{5.4}$$

Agora, para cada $n \geq 0$, defina

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta) d\theta,$$

e substituindo em (5.4), temos

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy \leq \sqrt{n}I_{2n-2}. \tag{5.5}$$

A ideia é provar que $\sqrt{k}I_k^2 \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ quando $k \to \infty$. Nesse caso, para a esquerda em (5.5), considerando que

$$\begin{aligned} \sqrt{n}I_{2n+1} &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \cdot I_{2n+1} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1}I_{2n+1}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

e o limite de $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ quando $n \longrightarrow \infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{2+0}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

Então em (5.6)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

E, para a direita,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}I_{2n-2} &= \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{2n-2}}{\sqrt{2n-2}} \cdot I_{2n-2} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} \cdot \sqrt{2n-2}I_{2n-2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

considerando o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n-2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot \left(2-\frac{2}{n}\right)}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{2-0}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

Logo, de (5.7)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_{2n-2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

E, portanto, por (5.5), então

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para provar que $\sqrt{k}I_k^2 \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, note que, por integração por partes, fazendo $u = \cos^{k-1}(\theta)$ e $v = -\sin(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned}I_k &= = \int_0^{\pi/2}\cos^{k-1}(\theta)\cos(\theta)d\theta\\ &= \cos^{k-1}(\theta)\sin(\theta)\Big|_0^{\pi/2} - (k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(\theta)\cos^{k-1}(\theta)d\theta\\ &= -(k-1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(\theta))\cos^{k-1}(\theta)d\theta\\ &= (k-1)(I_{k-2}-I_k),\end{aligned}$$

para todo $k \geq 2$, logo

$$I_k = \frac{k-1}{k}I_{k-2}, \tag{5.8}$$

para todo $k > 1$.

Ainda, por indução, mostramos que

$$I_{2k}I_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\frac{\pi}{2}.$$

De fato, para $k = 1$, por (5.8), temos

$$I_2I_3 = \frac{1}{2}I_0\frac{2}{3}I_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta = \frac{1}{2\cdot 1+1}\frac{\pi}{2}.$$

Supondo verdade para k, segue de (5.8) que

$$I_{2k+2}I_{2k+3} = \frac{2k+1}{2k+2}\frac{2k+2}{2k+3}I_{2k}I_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+3}I_{2k}I_{2k+1}$$

e, da hipótese de indução, obtemos

$$I_{2k+2}I_{2k+3} = \frac{2k+1}{2k+3}\frac{1}{2k+1}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2k+3}\frac{\pi}{2},$$

portanto, o resultado é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, como $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$, em $[0, \pi/2]$, temos $I_k \leq I_{k-1} \leq I_{k-2} = \frac{k}{k-1} I_k$, com $k > 1$, portanto, para k suficientemente grande, temos $I_k \sim I_{k-1}$, donde

$$I_{2k}^2 \sim I_{2k-1} I_{2k} = \frac{1}{2k} \frac{\pi}{2},$$

para k suficientemente grande, consequentemente,

$$2k I_{2k}^2 \longrightarrow \frac{\pi}{2},$$

quando $k \to \infty$ e, portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{2k} I_{2k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Analogamente, mostramos que

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{2k+1} I_{2k+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{k} I_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

como queríamos.

□

6 QUINTA PROVA: A DEMONSTRAÇÃO ORIGINAL

Em 1774, o matemático francês, Pierre Simon Laplace, desenvolveu um método para determinar as causas mais prováveis de eventos e fenômenos que ele chamou de "Memorial sobre a Probabilidade das Causas dos Eventos" (Memoir on the Probability of the Causes of Events). E foi nesse artigo que Laplace calculou de forma explicita o valor da Integral Gaussiana. Segundo Lee (4), a Integral Gaussiana já tinha aparecido nos estudos de diversos matemáticos, destacando os trabalhos de A de Moivre [1] e Stirling [2], mas o primeiro a conseguir exibir de fato o valor da Integral foi Laplace.

Para sua prova, Laplace partiu da Fórmula de Euler[3], dada por

$$\int_0^1 \frac{x^r}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx \int_0^1 \frac{x^{s+r}}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx = \frac{1}{s(r+1)}\frac{\pi}{2}.$$

para s, r inteiros positivos e calculou o valor de uma integral auxiliar para, então, encontrar o valor da Integral Gaussiana.

6.1 Prova

Defina, como antes,

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

e faça

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx.$$

O primeiro passo é associar as integrais apresentadas acima. Fazendo

$$y = \sqrt{-\ln x} \Rightarrow y^2 = -\ln x \Rightarrow x = e^{-y^2},$$

como utilizaremos o método de substituição, temos que a derivada de y com respeito a x é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{-\ln x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2y} \cdot (-e^{y^2}).$$

e, por fim, a derivada de x com respeito a y é dada por

$$\frac{dx}{dy} = -2ye^{-y^2}.$$

[1]Abraham de Moivre (1667 - 1754), Matemático Francês.
[2]James Stirling (1692 - 1770), Matemático Escocês.
[3]Mais detalhes sobre a Fórmula podem ser encontrados em (4) e suas referências.

Ainda, analisando os limites de integração, temos

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{-\ln x} = \sqrt{-\ln 1} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{-\ln x} = \infty.$$

Assim, substituindo em J, ficamos com

$$\begin{aligned} J &= \int_\infty^0 \frac{1}{y}\cdot(-2ye^{-y^2})dy \\ &= \int_\infty^0 \frac{-2ye^{-y^2}}{y}dy \\ &= \int_\infty^0 -2e^{-y^2}\cdot\frac{y}{y}dy \\ &= \int_\infty^0 -2e^{-y^2}dy. \end{aligned}$$

Note que a integral está com os limites de integração invertidos, então,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty 2e^{-y^2}dy \\ &= 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy \\ &= 2I \end{aligned}$$

Assim, ao encontrarmos o valor de J, encontramos os valor de I e como $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ esperamos, que $J = \sqrt{\pi}$.

O ponto de partida de Laplace para avaliar J foi a fórmula de Euler, que nos diz que

$$\int_0^1 \frac{x^r}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx \int_0^1 \frac{x^{s+r}}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx = \frac{1}{s(r+1)}\frac{\pi}{2} \tag{6.1}$$

para s, r inteiros positivos.

Agora, na expressão acima, avaliamos as integrais quando $r \to 0$, nesse caso, como as convergências envolvidas são uniformes, obtemos

$$\int_0^1 \frac{x^0}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx \int_0^1 \frac{x^{s+0}}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx = \frac{1}{s(0+1)}\frac{\pi}{2}$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx \int_0^1 \frac{x^s}{\sqrt{1-x^{2s}}}dx = \frac{1}{s}\frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Avaliando a expressão encontrada quando $s \to 0$, temos $x^s \to 1$ e note que $1 - x^{2s} \sim -2s\ln x$ pela regra de l'Hôpital, uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{1-x^{2s}}{-2s\ln x} &= \lim_{s\to 0}\frac{1-e^{2s\ln x}}{-2s\ln x}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{d}{ds}\left(1-e^{2s\ln x}\right)}{\frac{d}{ds}\left(-2s\ln x\right)}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{-2\ln x\cdot e^{2s\ln x}}{-2\ln x}\\
&= \lim_{s\to 0} e^{2s\ln x} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

E, assim, podemos reescrever $1-x^{2s} \sim -2s\ln x$ e $x^s \sim 1$, para s próximo de zero, em (6.2), logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\frac{\pi}{2} &= \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s\ln x}}dx\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s\ln x}}dx\right)\\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s\ln x}}dx\right)^2\\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2s}\sqrt{-\ln x}}dx\right)^2\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx\right)^2
\end{aligned}$$

portanto, para s pequeno,

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx\right)^2 = \pi.$$

Ou seja, chegamos a

$$J^2 = \pi$$

e, consequentemente,

$$J = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

7 CONCLUSÃO

A Integral Gaussiana é uma integral que aparece em diversas aplicações da Matemática, da ciência, da engenharia, e está diretamente ligada a distribuição normal. O entendimento dessa integral não se limita a matemática pura, se estende a diversas disciplinas. Entretanto seu cálculo não é possível pelas técnicas simples de integração e, portanto, resolvê-la além de trazer um conhecimento maior dessa importante integral, ainda nos permite aumentar o repertório de conhecimentos matemáticos aplicáveis. Estudar, analisar e determinar se integrais, como a Integral Gaussiana, possuem primitivas ou não, é um trabalho difícil mas necessário na análise matemática. O processo de estudá-las desenvolve habilidades analíticas avançadas. Isso inclui aplicação de técnicas mais sofisticadas, compreensão de conceitos aprofundados de integração e capacidade de pensar de forma abstrata sobre problemas matemáticos. Portanto, estudar a Integral Gaussiana além de enriquecer o estudo acadêmico, contribui para o desenvolvimento de habilidades práticas, interdisciplinares e analíticas essenciais para o avanço do conhecimento e a resolução de problemas do mundo.

REFERÊNCIAS

[1] CONRAD, K. **The gaussian integral**. University of Connecticut: Storrs, CT, USA, p. 1, 2016.

[2] de MORAIS FILHO, D. C. **“Professor, qual a primitiva de $\frac{e^x}{x}$?!” (O problema de integração de termos finitos)**. Revista Matemática Universitária, nº31. Dezembro de 2001. pp 143-161.

[3] IWASAWA, H. **Gaussian integral puzzle**. Math. Intelligencer, v. 31, p. 38–41, 2009.

[4] LEE, P. M. **THE PROBABILITY INTEGRAL**. University of York, Department of Mathematics, 2011.

[5] LIMA, E. L. **Análise real, vol. 1**. Publicações IMPA, 2004.

[6] OLIVEIRA, O. R. B. **Derivação sob o sinal de integração - integrais oscilatórias e transformadas**, 2015.

[7] OLIVEIRA, O. R. B. **Integral dupla: Teorema de fubini e teorema de mudança de variáveis**, 2019.

[8] STEWART, J. **Cálculo: volume 2**. São Paulo: Cencage Learning, 2016.

[9] STRAUB, W. O. **A brief look at gaussian integrals**. Article: Pasadena California, 2009.

[10] WATSON, G. N. **Complex Integration and Cauchy’s Theorem.** Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1914