UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEOMAR ALVES DO NASCIMENTO NETO

SOBRE ALGUNS TEOREMAS DO TIPO VALOR MÉDIO

CAMPINA GRANDE
2024

GEOMAR ALVES DO NASCIMENTO NETO

SOBRE ALGUNS TEOREMAS DO TIPO VALOR MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE

2024

N244s Nascimento Neto, Geomar Alves do.
Sobre alguns Teoremas do Tipo Valor Médio [manuscrito] / Geomar Alves do Nascimento Neto. - 2024.
35 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Teoremas do Tipo Valor Médio. 2. Teorema de Lagrange. 3. Análise Matemática . I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Pfeyffemberg de M. Guimarães - CRB - 15/1020 BC/UEPB

GEOMAR ALVES DO NASCIMENTO NETO

SOBRE ALGUNS TEOREMAS DO TIPO VALOR MEDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Aprovado em: 04 / 07 / 2024

BANCA EXAMINADORA

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

LucianaRFreitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a minha familia, falecido pai, mãe, noiva, irmãos e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente; a todos que acreditaram em mim e me acompanharam ao longo dessa jornada, e um agradecimento especial ao meu falecido pai que sempre foi meu exemplo, a minha mãe que, mesmo sem ter tido a oportunidade de estudar, sempre me mostrou o caminho certo a seguir e minha noiva que me apoiou e ficou ao meu lado todos os dias, por isso faltam palavras para expressar a importância deles nesse processo.

Gratidão é a palavra que define o sentimento que tenho por todos aqueles que me ajudaram nessa caminhada, pai, mãe noiva, irmãos, amigos e a todos os professores que me orientaram e me aguentaram nos momentos que mais precisei.

RESUMO

Ao longo do curso de Graduação em Matemática, ou mesmo de outros cursos de formação inicial da chamada Área de Exatas, ouvimos falar sobre alguns teoremas do tipo valor médio. Um teorema do tipo valor médio, como o próprio nome indica, é um teorema que garante algum tipo de média naquele contexto. Particularmente, na graduação tratamos, por diversas vezes, do Teorema de Lagrange que diz que "Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$". Porém, existem vários outros teoremas do tipo valor médio que raramente ou nunca são citados ou estudados nos cursos de graduação, por isso nosso objetivo neste trabalho é apresentar alguns desses teoremas que são frequentemente "ignorados"em disciplinas convencionais de Cálculo e Análise Matemática. Ademais, nosso estudo apresenta uma abordagem didática de temas tratatos no artigo intitulado "Alguns Teoremas do Tipo Valor Médio: de Lagrange a Malesevic", de Marcelo Gongarti e German Lozada-Cruz [2], em que, a partir da análise de trabalhos publicados ao longo dos anos, são apresentados teoremas simples e extremamente úteis seja na matemática, no estudo de equações funcionais e operadores integrais, por exemplo, sejam em outras áreas como matemática computacional, economia, entre outras.

Palavras-chave: teoremas do tipo valor médio; Teorema de Lagrange; Análise Matemática.

ABSTRACT

Throughout the Undergraduate Mathematics course, or even other initial training courses in the so-called Exact Area, we hear about some Mean Value Theorems. A mean value theorem, as its name indicates, is a theorem that guarantees some type of mean in that context. Particularly, in undergraduate course we dealt, several times, with Lagrange's Theorem which says that "If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is a continuous function in $[a, b]$ and differentiable in (a, b), then there exists $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$". However, there are several other Mean Value Theorems that are rarely or never cited or studied in undergraduate courses, so our objective in this work is to present some of these theorems that are often "ignored" in conventional Calculus and Analysis disciplines. Furthermore, our study presents a didactic approach to topics covered in the Article entitled Alguns Teoremas do Tipo Valor Médio: de Lagrange a Malesevic, by Marcelo Gongarti and German Lozada-Cruz [2], in which, based on the analysis of published works over the years, simple and extremely useful theorems have been presented, whether in mathematics, in the study of functional equations and integral operators, for example, or in other areas such as computational mathematics, economics, among others.

Keywords: mean value theorem; Lagrange's theorem; Math analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como sabemos, ao longo da graduação ouvimos falar algumas vezes sobre teoremas do tipo valor médio, principalmente em disciplinas como Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral, principalmente quando estudamos o conteúdo de derivadas, porém realmente é uma abordagem bem simples e estudamos basicamente um teorema específico, que é o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

O Teorema do Valor Médio de Langrange é um teorema do tipo valor médio, publicado pelo Italiano Joseph Louis Lagrange, que diz que "Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$". Porém esse teorema não é o único teorema do tipo valor médio que existe. Por exemplo, existe também o Teorema de Rolle que, inclusive, foi publicado antes do Teorema de Lagrange pelo membro da Academia Francesa Michel Rolle, no ano de 1691, teorema esse que vamos falar sobre e utilizar na prova do próprio Teorema de Lagrange.

Ao longo dos anos, diversos matemáticos dedicaram tempos de estudos voltados ao Teorema de Lagrange e foram descobrindo diversas generalizações muito importantes desse teorema e, assim, surgiram vários outros teoremas do tipo valor médio que são muito importantes, porém são basicamente "esquecidos"e pouco mencionados ao longo dos cursos de graduação em Matemática. Com isso podemos perceber que o universo dos teoremas do tipo valor médio é bem maior do que pensamos.

Nesse trabalho, falamos sobre alguns desses teoremas do tipo valor médio, fazendo uma análise de cada um, separadamente, e inclusive analisando-os geometricamente, visando assim uma melhor compreensão de tais resultados, e além disso, mostramos um pouco da importância deles, falando por exemplo, um pouco sobre o que surgiu a partir de cada um. Trabalhamos aqui principalmente três teoremas, o de Rolle, o de Lagrange e um que praticamente quase nunca ouvimos falar, que é o de Flett, que foi provado por Thomas Muirhead Flett, em 1958 e ficou conhecido como Teorema de Flett e que assim como os outros é um teorema muito importante para Análise Matemática e a partir dele surgiram diversas generalizações e teoremas, também muito importantes para diversos campos de estudo.

Este trabalho, em especial, apresenta de uma abordagem didática de temas tratados no artigo intitulado "Alguns Teoremas do Tipo Valor Médio", de Marcelo Bongarti e German Lozada-Cruz [2]. Além disso, algumas das discussões aqui introduzidas foram apresentadas em formato de Pôster no VII Encontro de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB em [6].

Para o desenvolvimento do texto, organizamos o trabalho como segue: no Capítulo 2 recordamos alguns conceitos introdutórios que são necessários ao desenvolvimento do trabalho; no campítulo 3, apresentamos as discussões referentes ao Teorema de Rolle. No

Capítulo seguinte tratamos do Teorema do Valor Médio de Lagrange e, finalmente, no Capítulo 5, apresentamos resultados acerca do Teorema de Flett.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, recordamos algumas definições e resultados fundamentais que são indispensáveis para uma compreensão sólida do tema central desta monografia, com o intuito de conferir autonomia ao texto. Inicialmente, apresentamos alguns conceitos que são importantes para facilitar o entendimento dos resultados que virão mais a frente. Os conceitos aqui apresentados são baseados em [1], [5] e [3].

2.1 Funções

De modo a facilitar a leitura do texto, e considerando que todos os resultados principais discutidos aqui envolvem temas relativos às funções, recordamos agora algumas noções introdutórias desse importante objeto matemático.

Uma função $f : A \to B$ é formada por três partes: um conjunto A, chamado de domínio da função, que é o conjunto onde a função é definida, um conjunto B, chamado de contradomínio da função, que é o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, que é chamado de imagem do elemento x.

É comum que apareça apenas "função f"em vez de "a função $f : A \to B$". Nesse caso, deve-se ficar subentendido o conjunto A, domínio de f, como sendo o maior conjunto em que a regra de f faz sentido, e o conjunto B, contradomínio de f.

Outro ponto muito importante é que não devemos confundir f com $f(x)$, pois f é a função e $f(x)$ é o valor que a função assume para o valor x do seu domínio.

Alguns exemplos de funções são:

Exemplo 2.1 (**Função afim**). Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, chamamos de função afim as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = ax + b.$$

Exemplo 2.2 (**Funções quadráticas**). Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, chamamos de funções quadrádicas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemplo 2.3 (**Função logarítmica**). Seja $a \in (0, +\infty)$, definimos a função logarítmica como $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, tal que sua lei de formação pode ser descrita por

$$f(x) = \log_a x.$$

2.1.1 Gráfico de uma função

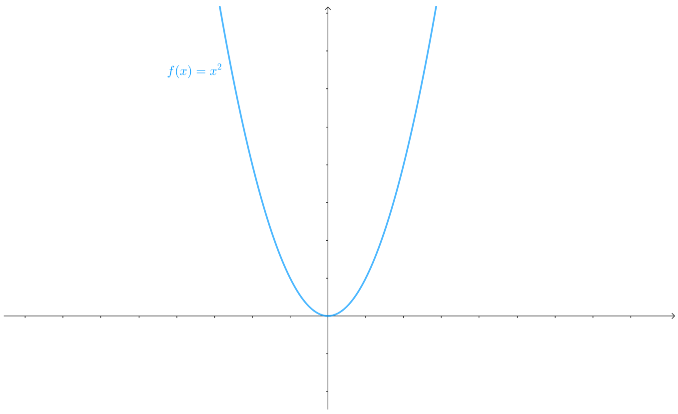
Definimos gráfico de uma função $f : A \to B$ como um subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$, que é formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in A$. Isto é,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} .$$

Um ponto muito importante sobre gráficos de funções é que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Na figura abaixo podemos ver, como exemplo, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$:

Figura 2.1 – Gráfico de uma função



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

2.1.2 Limites de funções

Ao longo desse trabalho usamos alguns conceitos de limites de funções, por isso vamos introduzí-lo aqui para que facilite nossa compreensão mais à frente. De forma geral, o limite tem como objetivo determinar o comportamento de uma função à medida que os pontos do domínio se aproximam de determinado valor. Antes, porém, precisamos de um conceito auxiliar de Topologia da Reta.

Definição 2.1. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Vamos chamar um número $a \in \mathbb{R}$ de ponto de acumulação à direita do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a, a + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.
Representamos o conjunto dos pontos de acumulação à direita do conjunto X pela notação X'_+.

Definição 2.2. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Vamos chamar um número $a \in \mathbb{R}$ de ponto de acumulação à esquerda do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a - \epsilon, a)$, $\epsilon > 0$, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.

Representamos o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda do conjunto X pela notação X'_{-}.

Definição 2.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Vamos chamar um número $a \in \mathbb{R}$ de ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.
Representamos o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto X pela notação X'.

Em outras palavras, nas condições da definição acima, qualquer conjunto aberto com centro em a que pegarmos, por menor que ele seja, deve ter nele algum $x \in X$ diferente de a.

Definição 2.4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X, ou seja, $a \in X'$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto, quando a é um ponto de acumulação do dominio de f, a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é uma abreviatura para a expressão abaixo:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemplo 2.4. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ e $f(x) = \alpha x + \beta$ uma função afim. Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha a + \beta.$$

De fato, seja $\epsilon > 0$ dado, e tome $\delta = \frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Daí, se $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|f(x) - (\alpha a + \beta)| = |\alpha x + \beta - (\alpha a + \beta)| = |\alpha||x - a| < |\alpha|\delta = |\alpha|\frac{\epsilon}{|\alpha|} = \epsilon.$$

2.1.3 Funções contínuas

Em uma linguagem bem simples, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficentemente próximo de a.

De forma mais precisa, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Quando $f : X \to \mathbb{R}$ for contínua em todos os pontos de X, diremos apenas que f é contínua.

Exemplo 2.5. Segue do Exemplo 2.4 que toda função afim é contínua.

2.1.4 Máximos e mínimos de uma função

Outra definição que será de suma importância para nosso trabalho é a de extremos globais e extremos locais, por isso definiremos cada um deles à seguir.

Máximos e mínimos globais

Definição 2.5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f tem o valor máximo global $f(a)$ no ponto $x = a$ quando $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in X$. Analogamente, dizemos que f tem o valor mínimo global $f(b)$ no ponto $x = b$ quando $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in X$.

Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores extremos globais (ou extremos absolutos).

Exemplo 2.6. A função $f(x) = x^2$ possui mínimo global em $x = 0$ e a função $g(x) = -x^2$ possui máximo global em $x = 0$.

Máximos e mínimos locais

Definição 2.6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in X$. Dizemos que f possui um máximo local em c se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap X$. Analogamente, Dizemos que f possui um mínimo local em c se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I \cap X$.

Neste caso, em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores extremos locais.

2.2 Conceitos importantes de derivadas

Definição 2.7. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ (ou seja, a é um ponto de acumulação de X e pertence a X). Dizemos que f é derivável no ponto a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Caso esse limite exista, o limite $f'(a)$ chama-se derivada de f no ponto a.

Exemplo 2.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^n$, onde n é um número inteiro positivo, então f é derivável em todo $a \in \mathbb{R}$ e

$$f'(a) = na^{n-1}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

De fato, seja $a \in \mathbb{R}$. Da igualdade

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}),$$

temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\
&= a^{n-1} + a^{n-2}a + \ldots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\
&= na^{n-1},
\end{aligned}$$

assim, $f'(a)$ existe e

$$f'(a) = na^{n-1},$$

como queríamos.

2.2.1 Derivadas laterais

Outra definição muito importante que vamos utilizar é a de derivadas laterais, ou seja, derivada à esquerda e derivada à direita.

Definição 2.8. Quando $a \in X \cap X'_+$ (isto é, quando a é um ponto de acumulação à direita de X, e a ele pertence), vamos definir a derivada à direita da função f no ponto a, como sendo o limite (caso exista):

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Analogamente se define a derivada à esquerda, $f'_-(a)$ quando a é um ponto de acumulação à esquerda, que pertence ao domínio de f.

Quando $a \in X$ é ponto de acumulação à direita e à esquerda, então $f'(a)$ existe se, e somente se, existem, e são iguais, as derivadas laterais.

2.2.2 Representação geométrica da derivada

Para entedermos a representação geométrica da derivada, utilizamos a seguinte construção: designando por P e Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente os pontos do gráfico de f que têm abcissas a e x_i, a razão

$$\frac{f(x_i)-f(a)}{x_i - a}$$

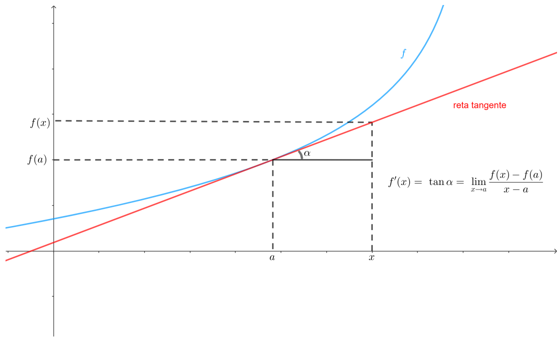
é o declive da reta PQ_i secante ao gráfico de f.

Se f é diferenciável no ponto a, chama-se tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ a reta que passa por esse ponto e tem declive igual a $f'(a)$. Assim, a reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é dada pela equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a);$$

cuja representação pode ser vista na imagem abaixo:

Figura 2.2 – Representação gráfica da derivada



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

2.3 Alguns teoremas importantes

Apresentamos agora alguns teoremas que serão importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho. Os resultados não foram provados, uma vez que não é o objetivo do texto, mas referenciamos bibliografias em que as provas podem ser encontradas. Apenas para o chamado Teorema de Fermat, que garante uma condição necessária para extremos locais e foi provado pelo muito conhecido Pierre de Fermat, matemático e cientista francês, apresentamos uma demonstração, pois tal teorema é muito importante para a demonstração do Teorema de Rolle que é um dos primeiros resultados da parte principal deste texto. Vamos então aos resultados:

Teorema 2.1 (**Teorema de Weierstrass**). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então f possui máximo e mínimo.*

Prova: A prova pode ser encontrada em [[4], Teorema 6, p.80].

Teorema 2.2 (**Teorema do Valor Intermediário**). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Prova: Os detalhes da demonstração podem ser vistos em [[5], Teorema 12, p.184].

Teorema 2.3 (**Teorema de Fermat**). *Seja f uma função definida em um intervalo (a, b) e $c \in (a, b)$. Se f possui um extremo local em c e existe $f'(c)$ então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Vamos supor que f possui um máximo local em c (se f tem um mínimo local em c, a demonstração é análoga), então existe um intervalo aberto I tal que $c \in I$ e satisfaz

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in I \cap (a, b).$$

Note então, que

$$f(x) - f(c) \leq 0, \forall x \in I \cap (a, b).$$

Por hipótese, existe $f'(c)$, logo

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Daí,

$$x \to c^+ \Rightarrow x > c \Rightarrow x - c > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \tag{2.1}$$

e

$$x \to c^- \Rightarrow x < c \Rightarrow x - c < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) segue que $f'(c) = 0$. $\square$

3 TEOREMA DE ROLLE

Segundo sua biografia publicada no MacTutor [7], Michel Rolle (21 abril, 1652 - 8 nov.,1719) foi um matemático francês nascido em Ambert, Basse-Auverne, que ao longo de sua vida, além de trabalhar como contador, estudou álgebra e as equações diofantinas.

Rolle, em 1691, demonstrou usando técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, o que vai ser o primeiro teorema do tipo valor médio que vamos estudar nesse trabalho, teorema esse que ficou conhecido como Teorema de Rolle. Esse teorema ficou mais conhecido depois que outros matemáticos usaram esse termo pela primeira vez, como Drobisch que usou pela primeira vez em 1834, seguido por Bellavitis em 1846.

O Teorema de Rolle é um teorema muito importante, inclusive, assim como iremos fazer adiante, ele é muito usado na demonstração do próprio Teorema do Valor Médio de Lagrange e também foi muito importante para o surgimento de novos teoremas e generalizações do tipo valor médio. Porém, mesmo ele sendo tão importante, pouco ouvimos falar dele ao longo da nossa formação em nível de graduação, por isso, apresentamos aqui um pouco sobre ele, sua prova, uma análise geométrica e alguns exemplos de como ele pode ser usado.

3.1 O Teorema de Rolle

Teorema 3.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), com $f(a) = f(b)$.

Temos dois casos a considerar: ou f é constante ou f não é constante. Vamos analisar cada caso isoladamente.

(i) f é constante:

Nesse caso não temos problema, pois se f é constante, em qualquer ponto $c \in (a, b)$, temos $f'(c) = 0$.

(ii) f não é constante:

Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass sabemos que ela posui máximo e mínimo, e note que pelo menos um deles ocorre em (a, b), pois, caso $f(a)$ e $f(b)$ fossem máximo e mínimo teríamos que f é constante, pelo fato de $f(a) = f(b)$, mas isso não pode acontecer, pois, por hipótese, f não é constante. Com isso, sabemos que existe $c \in (a, b)$ tal que c é um extremo local.

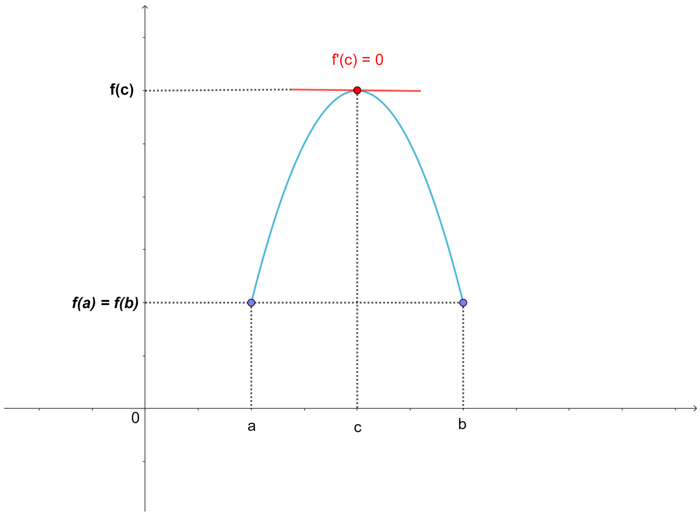
Como $c \in (a, b)$ é um extremo local e, por hipótese, f é derivável, ou seja, existe $f'(c)$, pelo Teorema de Fermat (**Teorema 2.3**) temos $f'(c) = 0$, como queríamos.

□

3.1.1 Análise geométrica do Teorema de Rolle

Em termos geométricos, o que o Teorema de Rolle está nos dizendo é que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) (ou seja, em uma linguagem mais simples, uma função que não possui “furos“ nem “bicos”), com $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde a reta tangente ao gráfico da função f é horizontal, ou seja, paralela ao eixo x, como é mostrado na imagem abaixo:

Figura 3.1 – Representação gráfica do Teorema de Rolle



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Nessa imagem o ponto c é um máximo local, caso fosse um mínimo local teríamos uma situação análoga.

3.1.2 Alguns exemplos do uso do Teorema de Rolle

Apresentamos agora alguns exemplos onde o Teorema de Rolle pode ser aplicado.

Exemplo 3.1. Verifique se a função $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5-12x+3x^2$ possui algum ponto $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solução: Como a função f é um polinomio, ela é contínua em $[1, 3]$ e derivável em $(1, 3)$. Precisamos mostrar apenas que $f(1) = f(3)$. Temos:

$f(1) = 5 - 12 + 3 = -4 = 5 - 36 + 27 = f(3)$.

Assim, $f(1) = f(3)$ e pelo Teorema de Rolle sabemos que existe $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$, como queríamos.

Exemplo 3.2. Dada a função $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5x$, verifique se é possível utilizar o Teorema de Rolle para encontrar algum ponto $c \in (1, \frac{5}{2})$ em que $f'(c) = 0$.

Solução: Novamente, como a função é um polinômio, ela é contínua em $[1, \frac{5}{2}]$ e derivável em $(1, \frac{5}{2})$, porém note que $f(1) = 0 \neq f\left(\frac{5}{2}\right)$.

Logo, nesse caso não é possível aplicar o Teorema de Rolle.

4 TEOREMA DE LAGRANGE

Segundo sua biografia publicada no MacTutor [8], Joseph Louis Lagrange (25 jan, 1736 - 10 abril, 1813) foi um matemático e astrónomo francês nascido em Turim, Itália; ao longo de sua vida ficou bastante conhecido e destacou-se em todos os campos da Análise, da Teoria dos Números e da Mecânica Analítica e Celeste.

Lagrange foi o responsável por descobrir e demonstrar um dos mais importantes teoremas do tipo valor médio, o famoso teorema que ficou conhecido como Teorema do Valor Médio de Lagrange. Publicamente, o Teorema do Valor Médio de Lagrange foi citado pela primeira vez em um trabalho do renomado físico Ampére.

Ao demonstrar seu teorema pela primeira vez, Lagrange não citou em momento nenhum o Teorema de Rolle, porém para facilitar nosso entendimento dessa demonstração, utilizamos a dedução mais conhecida, que tem como ideia principal uma aplicação do Teorema de Rolle à uma função auxiliar, que vamos conhecer mais à frente, e esta dedução foi feita por Bonnet.

Esse teorema foi um dos principais pontos na motivação desse trabalho, pois quando ouvimos falar de Teorema do Tipo Valor Médio, pensamos logo no Teorema de Lagrange, porém, existem diversos outros que surgiram a partir de estudos desse teorema e do Teorema de Rolle. Então agora vamos conhecer um pouco sobre o Teorema do Valor Médio de Lagrange, falando sobre sua prova, sua análise geométrica e alguns corolários que surgem a partir dele.

4.1 O Teorema do Valor Médio de Lagrange

Teorema 4.1. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Vamos considerar a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Note que g é a soma da função f com uma função polinomial de grau 1. Sabemos, por hipótese, que f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), sabemos também que uma função polinomial é contínua e derivável, logo g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

Note também que,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para aplicar o Teorema de Rolle na função g precisamos apenas verificar que $g(a) = g(b)$.

Vamos mostrar agora que isso realmente ocorre

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a \\ &= f(a) + (-a+b-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= f(a) + (-a+b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\ &= f(a) + f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\ &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b \\ &= g(b) \end{aligned}$$

Note então que temos $g(a) = g(b)$, logo pelo Teorema de Rolle (**Teorema 3.1**) sabemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

temos assim,

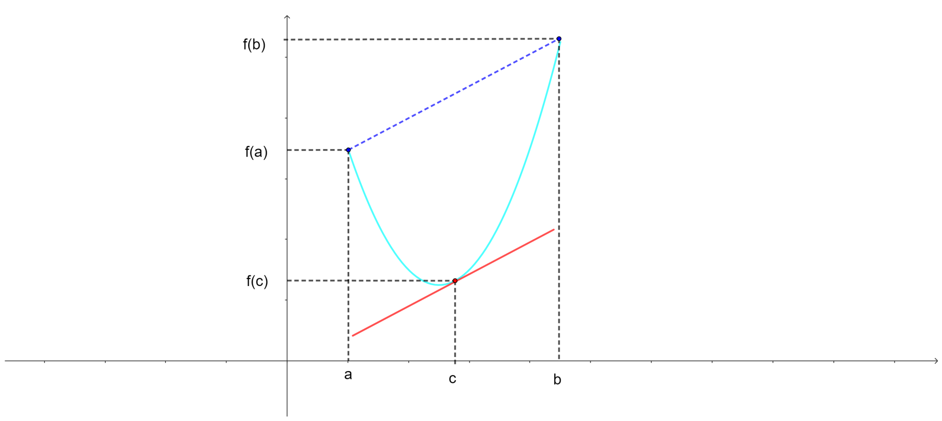
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

como queriamos. □

4.1.1 Análise geométrica do Teorema de Lagrange

Em termos geométricos o que o Teorema do Valor Médio de Lagrange nos diz é que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) (em uma linguagem mais simples f é uma função sem "furos"ou "bicos"), existe um ponto $c \in (a,b)$, tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, como podemos observar na imagem abaixo:

Figura 4.1 – Representação gráfica do Teorema de Lagrange



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Logo, note que podemos observar e analsar esse teorema geometricamente.

4.1.2 Corolários que surgem a partir do Teorema de Lagrange

Como sabemos o corolário é uma forma de inferência lógica que se baseia em teoremas ou definições previamente estabelecidas. Em outras palavras, é uma afirmação que pode ser deduzida diretamente de uma proposição ou teorema já provado. Diferentemente de um teorema, que requer uma prova própria, o corolário é uma consequência imediata e óbvia daquilo que já foi demonstrado anteriormente.

Com o Teorema do Valor Médio de Lagrange não foi diferente, à partir dele surgiram diversos corolários muito conhecidos e que são bastante usados nos cursos de Análise e Cálculo. Logo abaixo iremos citar e demonstrar alguns deles.

Corolário 4.1 (**Funções com derivadas nulas são constantes**). *Se $f'(x) = 0$ para todos os pontos em um intervalo (a,b), então f é constante neste intervalo.*

Demonstração: De fato, sejam x, $y \in (a,b)$, vamos supor, sem perder a generalidade que $x < y$. Temos que f é contínua em $[x,y]$ e derivável em (x,y). Logo, segue do Teorema de Lagrange que existe $c \in (x,y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Por hipótese, $f'(c) = 0$, assim

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$$

logo, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo (a,b) e, portanto, é constante neste intervalo. □

Corolário 4.2 (**Funções com a mesma derivada se diferem por uma constante**). *Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os pontos em um intervalo aberto (a,b), então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, para todo $x \in (a,b)$.*

Demonstração: Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em (a,b), de modo que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Definindo $h(x) = f(x) - g(x)$, temos

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0.$$

Pelo **Corolário 4.1** temos h constante em (a,b), assim temos que $h(x) = C$, com C constante, logo temos

$$f(x) - g(x) = C \Rightarrow f(x) = g(x) + C,$$

como queríamos. □

Corolário 4.3 (**Monotonicidade e o sinal da derivada**). *Suponha que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b).

i) Se $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é crescente em* $[a, b]$.

ii) Se $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f *é decrescente em* $[a, b]$.

Demonstração: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Vamos provar inicialmente o item i). Sejam $x, y \in (a, b)$ tais que $x < y$. Note que f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y), logo, pelo Teorema de Lagrange, sabemos que existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(c).(y - x).$$

Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos então que $f'(c) > 0$, note também que $y - x > 0$, assim temos

$$f(y) - f(x) = f'(c).(y - x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x).$$

Como $y > x$ e $f(y) > f(x)$, então f é crescente.

A demonstração do item ii) é análoga. □

5 TEOREMA DE FLETT

Os Teoremas do Tipo Valor Médio que trabalhamos até aqui são teoremas conhecidos e que são usados frequentemente nos cursos de Graduação, mas, como citamos anteriormente, nosso objetivo é apresentar e discutir teoremas que não são tão conhecidos e utilizados, então, a partir de agora apresentamos e estudamos tais teoremas, iniciando pelo Teorema do Valor Médio de Flett.

Segundo sua biografia publicada no MacTutor [9], Thomas Muirhead Flett (28 jul, 1923 - 13 fev, 1976) foi um matemático inglês que trabalhou bastante Análise Real. Flett contribuiu bastante para a matemática ao longo de sua vida fazendo diversas publicações sobre diversos conteúdos e áreas da matemática, como por exemplo séries de Fourier e séries de potências, somabilidade, identidades e desigualdades teóricas da função, análise geométrica, análise complexa, funções harmônicas, entre outros.

Flett é responsável por ter enunciado e publicado em 1958 um importante e interessante teorema do tipo valor médio, que ficou conhecido como Teorema de Flett. Então agora vamos demonstrar, analisar geometricamente e mostrar que do Teorema de Flett surgiram diversas generalizações.

5.1 O Teorema do Valor Médio de Flett

Teorema 5.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a,b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \tag{5.1}$$

Demonstração: Sem perder a generalidade, podemos supor que $f'(a) = f'(b) = 0$, pois, caso contrário, consideramos $h(x) = f(x) - xf'(a)$, daí teremos $h'(a) = h'(b) = 0$, e se existir ξ tal que

$$h'(\xi) = \frac{h(\xi) - h(a)}{\xi - a},$$

então, teríamos

$$\begin{aligned} f'(\xi) - f'(a) &= \frac{f(\xi) - \xi f'(a) - (f(a) - af'(a))}{\xi - a} \\ &= \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} + \frac{af'(a) - \xi f'(a)}{\xi - a} \\ &= \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} - f'(a) \end{aligned}$$

e o resultado seria válido para f.

Assim, considerando f tal que $f'(a) = f'(b) = 0$, vamos definir a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \in (a,b] \\ f'(a), & x = a \end{cases}.$$

A função φ é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e para $x \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{f'(x).(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2} \\ &= \frac{f'(x).(x-a)}{(x-a)^2} - \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{\varphi(x)}{x-a}. \end{aligned}$$

Observe que, $\varphi(a) = 0$. Se $\varphi(b) = 0$, pelo Teorema de Rolle existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, ou seja,

$$\varphi'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{\xi - a} - \frac{\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}}{\xi - a} = 0.$$

Assim, temos

$$\frac{f'(\xi)}{\xi - a} = \frac{f(\xi) - f(a)}{(\xi - a)^2}$$

e, portanto

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

e o teorema está provado. Vamos supor agora que $\varphi(b) \neq 0$. Se $\varphi(b) > 0$, como $f'(b) = 0$, temos

$$\varphi'(b) = \frac{f'(b) - \varphi(b)}{b - a} = -\frac{\varphi(b)}{b - a} < 0.$$

Daí e da continuidade de φ, φ é decrescente numa vizinhança de b. Logo, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno existe $x_1 \in (b-\delta, b)$ tal que $\varphi(b) < \varphi(x_1)$. Como φ é contínua em (a, x_1) e $0 = \varphi(a) < \varphi(b) < \varphi(x_1)$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\eta \in (a, x_1)$ tal que $\varphi(\eta) = \varphi(b)$. E, então, do Teorema de Rolle aplicado no intervalo $[\eta, b]$, existe $\xi \in (\eta, b) \subset (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, isto é,

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

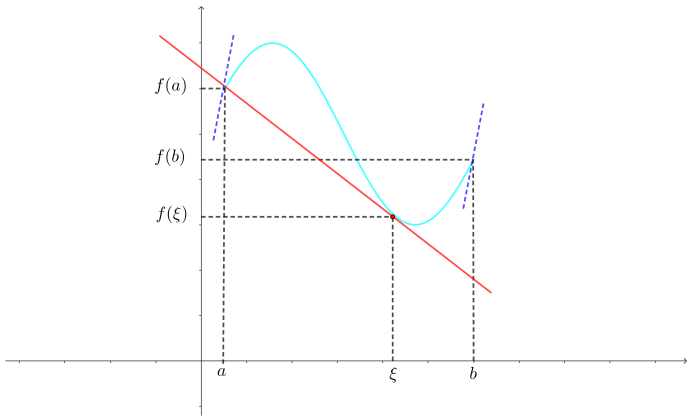
Se $\varphi(b) < 0$, o argumento é análogo. □

5.1.1 Análise geométrica do Teorema de Flett

Geometricamente, o Teorema de Flett nos diz que se uma função é suave no intervalo $[a,b]$, ou seja, ela não tem “bicos”nem “furos”(pelo fato da função ser diferenciável em $[a,b]$, o que sabemos por hipótese), e as retas tangentes nos extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

são paralelas, então, existe um ponto $\xi \in (a, b)$ de modo que a reta tangente ao gráfico de f que passa por $(\xi, f(\xi))$ também passa por $(a, f(a))$, como ilustrado na figura abaixo:

Figura 5.1 – Representação gráfica do Teorema de Flett



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Logo, novamente é um teorema que podemos observar e analisar geometricamente.

5.1.2 Algumas variações do Teorema de Flett

Ao longo do tempo vários matemáticos, como D. Trahan e J. Tong por exemplo, dedicaram diversos estudos ao Teorema do Valor Médio de Flett e com isso surgiram diversas variações dele, por isso agora iremos apresentar algumas dessas variações, demonstrando algumas e apenas citando outras.

Teorema 5.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi} \tag{5.2}$$

Demonstração: Sem perder a generalidade podemos supor que $f'(a) = f'(b) = 0$, pois caso contrário, como antes, fazemos $h(x) = f(x) - xf'(a)$ e daí teremos $h'(a) = h'(b) = 0$.

Vamos definir a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, similar ao teorema anterior, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, & x \in [a, b) \\ f'(b), & x = b \end{cases}.$$

A função φ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e para $x \in (a, b)$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{-f'(x).(b-x)+(f(b)-f(x))}{(b-x)^2} \\ &= -\frac{f'(x).(b-x)}{(b-x)^2} - \frac{f(b)-f(x)}{(b-x)^2} \\ &= -\frac{f'(x)}{b-x} + \frac{\varphi(x)}{b-x}.\end{aligned}$$

Observe que, $\varphi(b) = 0$. Se $\varphi(a) = 0$, pelo Teorema de Rolle existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, ou seja,

$$\varphi'(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{b-\xi} + \frac{\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}}{b-\xi} = 0.$$

Assim, temos

$$\frac{f'(\xi)}{b-\xi} = \frac{f(b)-f(\xi)}{(b-\xi)^2},$$

então,

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}$$

e o teorema está provado. Vamos supor agora que $\varphi(a) \neq 0$. Se $\varphi(a) > 0$, como $f'(a) = 0$, temos

$$\varphi'(a) = \frac{-f'(a)+\varphi(a)}{b-a} = \frac{\varphi(a)}{b-a} > 0.$$

Logo, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno existe $x_1 \in (a, a+\delta)$ tal que $\varphi(a) < \varphi(x_1)$. Como φ é contínua em (x_1, b) e $0 = \varphi(b) < \varphi(a) < \varphi(x_1)$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\eta \in (x_1, b)$ tal que $\varphi(\eta) = \varphi(a)$. E, então, do Teorema de Rolle aplicado no intervalo $[a, \eta]$, existe $\xi \in (a, \eta) \subset (a, b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, isto é,

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}.$$

Para $\varphi(a) < 0$ é análogo. □

Teorema 5.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a,b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(\xi)}{\xi - a}$$

Demonstração: Vamos definir a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = xf(b) - (x-a)f(x).$$

Note que, como f é diferenciável, φ também é, e assim temos

$$\varphi'(x) = f(b) - f(x) - (x-a)f'(x).$$

Assim, do Teorema do Valor Médio de Lagrange segue que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$$

ou seja,

$$f(b) - f(\xi) - (\xi - a)f'(\xi) = \frac{af(b) - af(b)}{b-a} = 0.$$

Portanto existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(\xi)}{\xi - a}$$

como queríamos. □

Teorema 5.4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a,b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

Demonstração: Vamos definir a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = xf(a) + (b-x)f(x).$$

Note que, como f é diferenciável, φ também é, e assim temos

$$\varphi'(x) = f(a) - f(x) + (b-x)f'(x).$$

Assim, do Teorema do Valor Médio de Lagrange segue que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a}$$

ou seja,

$$f(a) - f(\xi) + (b-\xi)f'(\xi) = \frac{bf(a) - bf(a)}{b-a} = 0.$$

Portanto, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-\xi}$$

como queríamos. □

Teorema 5.5. *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a,b]$ e $[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)] < 0$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{\xi - a}.$$

Demonstração: Inicialmente vamos definir a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(b) - f(a) - (x-a)f'(x)$$

Logo, observe que $\varphi(a) = f(b) - f(a)$ e $\varphi(b) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(b)$. Daí e da hipótese, temos

$$[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b-a)f'(b)] = \varphi(a)\varphi(b) < 0.$$

Assim sabemos que $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ possuem sinais contrários. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi(\xi) = 0$, ou seja

$$\varphi(\xi) = f(b) - f(a) - (\xi - a)f'(\xi) = 0$$

isso implica em,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{\xi - a},$$

como queríamos.

□

Teorema 5.6. *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a,b]$ e $[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)]<0$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-\xi}$$

Demonstração: Inicialmente vamos definir a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(b) - f(a) - (b-x)f'(x)$$

Logo, $\varphi(b) = f(b) - f(a)$ e $\varphi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)$. Daí e da hipótese, temos

$$[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)] = \varphi(a)\varphi(b) < 0.$$

Assim sabemos que $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ possuem sinais contrários. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi(\xi) = 0$, ou seja

$$\varphi(\xi) = f(b) - f(a) - (b-\xi)f'(\xi) = 0$$

o que implica em,

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-\xi},$$

como queríamos.

□

5.1.3 Algumas generalizações do Teorema de Flett

Além das diversas variações já citadas aqui, o Teorema de Flett deu origem a diversas generalizações, aqui citamos e demonstramos duas delas, iniciando pela generalização que ficou conhecida como Teorema de Riedel-Sahoo, resultado esse que foi demonstrado em 1998.

Teorema 5.7 (Riedel-Sahoo)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $[a,b]$, então, existe*

$\xi \in (a, b)$ *tal que*

$$f(\xi) - f(a) = (\xi - a)f'(\xi) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2. \tag{5.3}$$

Demonstração: Vamos definir a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a)^2.$$

Note que, da diferenciabilidade de f, φ é diferenciável em (a, b) e

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a).$$

Como $\varphi'(a) = f'(a) = \varphi'(b)$, segue do Teorema de Flett que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(\xi) - \varphi(a)}{\xi - a},$$

ou seja,

$$f'(\xi) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a) = \frac{1}{\xi - a}\left(f(\xi) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2 - f(a)\right)$$

consequentemente,

$$f(\xi) - f(a) = \left(f'(\xi) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)\right)(\xi - a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2$$

Portanto, existe $\xi \in (a, b)$ tal que a equação (5.3) é satisfeita, o que prova o teorema.

□

Agora usando o **Teorema 5.2** iremos demonstrar mais uma generalização do Teorema de Flett.

Teorema 5.8. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $[a, b]$*, então existe* $\xi \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(\xi) = (b - \xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(b - \xi)^2$$

Demonstração: Vamos definir a função $\varphi(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-x)^2.$$

Calculando a derivada de φ em relaçao a x temos,

$$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-x).$$

Note que,

$$\varphi'(a) = f'(a) + \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-a) = f'(a) + f'(b) - f'(a) = f'(b) = \varphi'(b).$$

Logo, pelo **Teorema 5.2** temos que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b) - \varphi(\xi)}{b-\xi}.$$

Ou seja, existe $\xi \in (a,b)$ tal que,

$$\begin{aligned}
f'(\xi) + \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-\xi) &= \frac{f(b) - f(\xi)\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-\xi)^2}{b-\xi} \\
&= \frac{f(b) - f(\xi)}{b-\xi} + \frac{1}{2}\frac{\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-\xi)^2}{b-\xi} \\
&= \frac{f(b) - f(\xi)}{b-\xi} + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-\xi).
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$f(b) - f(\xi) = (b-\xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-\xi)^2$$

como queríamos.

□

5.1.4 Um pouco sobre as aplicações do Teorema de Flett

Assim como os Teoremas do Tipo Valor Médio mais conhecidos, o Teorema de Flett tem diversas aplicações, aqui faremos um pequena introdução a algumas delas.

Algumas das grandes contribuições do Teorema de Flett tem relação com propriedades importantes sobre alguns operadores integrais, como o de Volterra. Em [2], há diversas aplicações que envolvem esse tipo de operador.

Aqui, apresentamos, a título de ilustração, uma aplicação mais simples do Teorema de Flett na Teoria de Integração, mas, outras aplicações podem ser encontradas em [2] e [3].

Teorema 5.1. *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua com $\int_a^b f(x)dx=0$. Então existe $\xi\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^{\xi} xf(x)dx = a\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Demonstração: Vamos considerar a função auxiliar $\eta:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$\eta(t) = t\int_a^t f(x)dx - \int_a^t xf(x)dx.$$

Das propriedades de integração, temos η contínua , diferenciável e

$$\eta'(t) = \int_a^t f(x)dx + tf(t) - tf(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Observe que, por hipótese, $\eta'(a) = 0 = \eta'(b)$. Assim pelo Teorema de Flett, existe $\xi\in(a,b)$ tal que

$$\eta'(\xi) = \frac{\eta(\xi)-\eta(a)}{\xi-a}.$$

Ou seja, existe $\xi\in(a,b)$ tal que

$$\frac{\xi\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{\xi} xf(x)dx}{\xi-a} = \int_a^{\xi} f(x)dx,$$

portanto,

$$\xi\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{\xi} xf(x)dx = \xi\int_a^{\xi} f(x)dx - a\int_a^{\xi} xf(x)dx.$$

Logo,

$$\int_a^{\xi} xf(x)dx = a\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

□

6 CONCLUSÃO

Diante da importância da matemática e dos diversos ramos dessa ciência, como cálculo e análise, abordamos nesse trabalho uma revisão sobre conceitos importantes em tais áreas e apresentamos e discutimos alguns dos importantes teoremas do tipo valor médio, que, mesmo sendo tão importantes e bastante utilizados, pouco ouvimos falar sobre eles ao longo dos cursos de Graduação, estudando na maioria das vezes apenas um pouco sobre o Teorema do Valor Médio de Lagrange em algumas aulas de cálculo ou análise. Ao longo do trabalho falamos de vários teoremas, teoremas esses que fazem parte da história de diversos matemáticos, que dedicaram partes de sua vida estudando tais resultados, fizemos também uma análise geométrica de alguns deles para assim facilitar ainda mais a compreensão, pois podemos perceber que quase todos são tranquilamente visualizados e analisados geometricamente, e ainda discutimos um pouco sobre a impotância desses teoremas para a matemática, com isso podemos observar que o universo dos teoremas do tipo valor médio é bem mais amplo do que estudamos ou conhecemos em nossas graduações.

Essa pesquisa aqui realizada é fundamental, pois percebe-se que muitas vezes conceitos e teoremas importantes e de fácil compreensão são muito pouco falados ou utilizados ao longo de nossa formação. O estudo dos teoremas do tipo valor médio é de extrema importância pois eles são fundamentais para se obter diversos resultados importantes para vários ramos da matemática e observa-se que teoremas como o de Flett, que praticamente não conhecemos ao longo do curso, também são fundamentais e muito utilizados, surgindo deles também diversos outros resultados fundamentais para a matemática. Percebe-se que esse trabalho tem uma grande importância para nossa formação, pois conhecer e falar um pouco sobre esses teoremas mostra que pouco conhecemos sobre o grande universo da matemática e que além de tudo que estudamos ao longo dos nossos cursos, existem diversos teoremas que são fundamentais para a matemática que ainda não conhecemos, com isso podemos observar que temos muito para estudar e conhecer pela frente.

Pode-se dizer que esse trabalho, além de ser muito importante por tudo que foi, ao seu decorrer, discutido, também é fundamental pois trabalhamos tudo em uma linguagem o mais simples possível, facilitando assim a compreensão de todos e mostrando que conteúdos e temas que, muitas vezes, não parecem ser tão simples de serem compreendidos, podem ser facilitados e podemos trabalhá-los de diversas formas.

REFERÊNCIAS

[1] R. G. Bartle e Donald R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, Four edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2011.

[2] M. Bongarti e G. Lozada-Cruz, *Alguns Teoremas do Tipo Valor Médio: de Lagrange a Malesevic*, Revista Matemática Universitária, vol. 1, 56-72, 2021.

[3] M. Bongarti e G. Lozada-Cruz. *Teorema de Flett Generalizações e aplicações*, Minicurso XXV-SEMAT IBILCE-UNESP, 2013.

[4] E. L. Lima. *Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável Real.* Coleção Matemática Universitária. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[5] E. L. Lima. *Curso de análise Volume 1.* Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[6] G. A. Nascimento Neto, e E. R. S. Coelho. *Sobre Alguns Teoremas do tipo Valor Médio.* In: VII Encontro de Matemática Pura e Aplicada, 2023, Campina Grande. Anais do Encontro de Matemática Pura e Aplicada (EMPA), 2023. v. 3.

[7] J. J. O'Connor e E. F. Robertson, *Biografia de Michel Rolle*, MacTutor, 2008. Disponivel em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rolle/`. Acesso em: 30 de maio de 2024.

[8] J. J. O'Connor e E. F. Robertson, *Biografia de Joseph-Louis Lagrange*, MacTutor, 2015. Disponivel em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Flett/`. Acesso em: 30 de maio de 2024.

[9] J. J. O'Connor e E. F. Robertson, *Biografia de Thomas Muirhead Flett*, MacTutor, 1999. Disponivel em: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange/`. Acesso em: 30 de maio de 2024.